Exercice 1
Soient x_1 et x_2 les racines de $X^2 - 6X + 1$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbf{N}$, $x_1^n + x_2^n \in \mathbf{Z}$ et $x_1^n + x_2^n \not\equiv 0 \pmod 5$.

Exercice 2
Soit $P \in \mathbf{C}[X]$ tel que pour tout $z \in \mathbf{C}$ tel que $|z| = 1$, $P(z)$ soit réel. Montrer que P est constant.

Exercice 3

1. Soient $a_0, \ldots, a_n$ des entiers qui sont tous égaux modulo $n!$. Montrer que le polynôme de degré $\leqslant n$ vérifiant $P(i) = a_i$ a des coefficients entiers.
2. Soient $x_0, \ldots, x_n$ des entiers distincts. Montrer qu'il existe N tel que si $a_0, \ldots, a_n$ sont des entiers qui prennent la même valeur modulo N, alors le polynôme de degré $\leqslant n$ vérifiant $P(x_i) = a_i$ a des coefficients entiers.

Exercice 4
Existe-t-il un polynôme de degré n à coefficients entiers tel que $P(0), \ldots, P(n)$ sont des puissances de 2 distinctes ?

Exercice 5
Existe-t-il un polynôme de degré n à coefficients entiers tel que $P(0), \ldots, P(n)$ sont des nombres premiers distincts ?

Exercice 6
Existe-t-il un polynôme de degré n à coefficients entiers tel que $P(k)$ soit un nombre premier pour tout $k \in \mathbf{N}$?

Exercice 7
Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que pour tous $a, b, c \in \mathbf{R}$ vérifiant $ab + bc + ca = 0$, on ait $P(a - b) + P(b - c) + P(c - a) = 2P(a + b + c)$

Exercice 8
Trouver tous les polynômes P, à coefficients entiers, tels que si $P(s)$ et $P(t)$ sont tous deux entiers, alors $P(st)$ est également entier.