Algèbre groupe C : Polynômes

9 Décembre 2024

Exercice 1

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$, montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$, on a $a - b \mid P(a) - P(b)$.
2. Généralisation : Soit $\mathbb{A}$ un anneau commutatif et $P \in \mathbb{A}[X]$. Montrer que pour tout $(a, b) \in \mathbb{A}^2$, on a $a - b \mid P(a) - P(b)$.

   (Comme dans $\mathbb{Z}$ cela signifie qu'il existe $k \in \mathbb{A}$ tel que $k(a - b) = P(a) - P(b)$.)
3. Démontrer le théorème suivant : $\alpha \in \mathbb{A}$ est racine de $P \in \mathbb{A}[X]$ si et seulement si le polynôme $X - \alpha$ divise P.

Exercice 2
Factoriser de tête 8051.

Exercice 3
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. Existe-t-il trois entiers distincts a, b et c tels que

$$\begin{cases} P(a) = b \\ P(b) = c \\ P(c) = a \end{cases}$$

Exercice 4

1. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$. On suppose qu'il existe trois entiers deux à deux distincts a, b et c tels que $P(a) = P(b) = P(c) = 2$. Peut-on avoir un entier k tel que $P(k) = 3$?
2. Soit P un polynôme à coefficients entiers tel que $P(a) = P(b) = P(c) = P(d) = 5$ pour a, b, c, d des nombres entiers distincts. Peut-on avoir un entier k tel que $P(k) = 8$?

Exercice 5

1. Faire la division euclidienne de $X^3 + 2X^2 + X + 1$ par $2X + 3$.
2. Factoriser dans $\mathbb{R}[X]$ $X^3 - X^2 - X + 1$, puis $X^4 + 4$.
3. Quelle est la multiplicité de 1 dans le polynôme $X^4 - 4X^3 + 7X^2 - 6X + 2$?

Exericice 6
Trouver dans chaque cas les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que :

1. $P(2X) = 2P(X)$.

2. $P(X^3) = P(X)^3$ et $P(2) = 2$. Et si on remplace $P(2) = 2$ par $P(2) = 4$?
3. $P(X^2) = P(X)P(X-1)$.

Exercice 7
Soit P un polynôme à coefficients réels de degré impair. Montrer que le nombre de racines réelles de P (comptées avec multiplicité) est de même parité que le degré de P.

Exercice 8
1. Soit $P \in \mathbb{R}_n[X]$ (= de degré inférieur ou égal à n). Montrer que $P(\mathbb{Z}) \subseteq \mathbb{Z}$ si et seulement si $P(0), P(1), ..., P(n) \in \mathbb{Z}$ sont entiers.
2. Soit $l \in \mathbb{N}^*$, trouver une condition nécessaire et suffisante pour que $Q \in \mathbb{R}[X1, X2, ..., X_l]$ vérifie $Q(\mathbb{Z}^l) \subseteq \mathbb{Z}$.

Exercice 9
Soit P un polynôme de degré 2024 tel que $P(0) = 1$, et $P(k) = k$ pour tout $k \in [\![1, 2024]\!]$.
Combien vaut $P(-1)$?

Exercice 10

1. Trouver tous les $P \in \mathbb{C}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) \subseteq \mathbb{Q}$.
2. Trouver ceux tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$ (question bonus)

Exercice 11: critère d'Eisenstein
Soit $P(X) = c_n X^n + c_{n-1} X^{n-1} + \ldots + c_1 X + c_0$ un polynôme à coefficients entiers. S'il existe un nombre premier p tel que

- p divise $c_0, c_1, \ldots, c_{n-1}$;
- p ne divise pas c_n;
- p^2 ne divise pas c_0

alors P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 12
Soit $n \geq 2$ un entier naturel non premier. Montrer qu'il existe un polynôme P de $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})[X]$ de degré 2 et ayant strictement plus de deux racines.

Exercice 13
Trouver tous les couples $((b_n)_{n\in\mathbb{N}}, (c_n)_{n\in\mathbb{N}})$ de suites réelles telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $b_n \leq c_n$ et b_{n+1}, c_{n+1} sont les deux solutions de l'équation $x^2 + b_n x + c_n = 0$.

Exercice 14
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$ (où $\mathbb{K}$ est un corps commutatif).

1. Montrer que $P(X) - X$ divise $P(P(X)) - P(X)$.
2. Si on note $P^{|n|}$ la composée de P n fois avec lui même, montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P(X) - X$ divise $P^{|n|}(X) - X$.

Exercice 15
Soit P, Q, R des polynômes à coefficients réels, tels que $P^2 + Q^2 = R^2$. On suppose que deux de ces polynômes sont de degré 3 et le dernier est de degré 2. Montrer que P et Q ont toutes leurs racines réelles.