PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 13 JANVIER 2025

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient a, b, c des réels strictement positifs tels que $abc = 1$. Montrer que

$$(ab + c)(ac + 4b) \geqslant 8$$

Quand a-t-on égalité ?

Exercice 2. Montrer que

$$\sqrt{x-1} + \sqrt{2x+9} + \sqrt{19-3x} \leqslant 9$$

pour tout $x \in [1, \frac{19}{3}]$.

Exercice 3. Soient $x_1, \ldots, x_4 \geqslant 0$ tels que $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 + x_4^2 \geqslant 25$. Montrer qu'on peut choisir deux d'entre eux de sorte que leur somme soit supérieure ou égale à 5.

Exercice 4. Trouver tous les triplets de réels (a, b, c) tels que

$$\begin{aligned} a^4 - b^4 &= c \\ b^4 - c^4 &= a \\ c^4 - a^4 &= b \end{aligned}$$

Exercice 5. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_{100}$ des nombres réels non nuls. On suppose que, pour tout $i = 1, \ldots, 100$, on a $a_{i-1} + a_i > 0$. On suppose aussi que $a_0 + a_1 + \cdots + a_{100} < 0$. Quel signe peut avoir le produit $a_0 \cdot a_1 \ldots a_{100}$?

Exercice 6. Soient $a, b, c > 1$. Montrer que

$$\frac{ab}{c-1} + \frac{bc}{a-1} + \frac{ca}{b-1} \geqslant 12$$

Quand y a-t-il égalité ?

Exercice 7. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c tels que $abc = 1$, on a :

$$\frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} > 2$$

Exercice 8. Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{a^2b(b-c)}{a+b} + \frac{b^2c(c-a)}{b+c} + \frac{c^2a(a-b)}{c+a} \geqslant 0$$

Exercice 9. Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et soient $a_1, \ldots, a_{n+1}$ des entiers strictement positifs. Posons $b_i = a_i^n$ pour $i = 1, \ldots, n+1$. Montrer que

$$\sqrt[b_1]{n^{b_2}} + \sqrt[b_2]{n^{b_3}} + \cdots + \sqrt[b_{n+1}]{n^{b_1}} \geqslant \sqrt[a_2]{n^{a_1}} + \sqrt[a_3]{n^{a_2}} + \cdots + \sqrt[a_1]{n^{a_{n+1}}}$$

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient a, b, c des réels strictement positifs. Montrer que

$$3\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right) \geqslant 4\left(\frac{1}{a+b}+\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}\right)^2$$

Exercice 11. Soient $a_0, a_1, \ldots, a_N$ des réels, avec $a_0 = a_N = 0$, tels que

$$a_{i+1} - 2a_i + a_{i-1} = a_i^2$$

pour tout $1 \leqslant i \leqslant N-1$. Montrer que $a_i \leqslant 0$ pour tout $0 \leqslant i \leqslant N$.

Exercice 12. Soit $n \geqslant 2$ et soient $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{N}^*$ tels que $z_j \leqslant j$ pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$ et $z_1 + \cdots + z_n$ est pair. Montrer que

$$z_1 \pm z_2 \pm \cdots \pm z_n$$

est égal à 0 pour un certain choix de signes (où chaque signe est choisi indépendemment des autres).

Exercice 13. Trouver toutes les suites strictement croissantes d'entiers $a_1, \ldots, a_n, \ldots$ telles que $a_1 = 1$ et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$:

$$3(a_1 + \cdots + a_n) = a_{n+1} + \cdots + a_{2n}$$

Exercice 14. Montrer que pour tous réels strictement positifs a, b, c tels que $abc = 1$, on a :

$$\frac{1}{a\sqrt{c^2+1}} + \frac{1}{b\sqrt{a^2+1}} + \frac{1}{c\sqrt{b^2+1}} > 2$$

Exercice 15. Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers, et soit k son degré. Montrer qu'il existe $d \leqslant k+1$ et des entiers $a_1, \ldots, a_{2d}$ deux à deux distincts tels que

$$P(a_1) + \cdots + P(a_d) = P(a_{d+1}) + \ldots P(a_{2d})$$

Exercice 16. Les réels $a, b \geqslant 0$ sont tels que le polynôme $P = X^3 + aX^2 + 2bX - 1$ a trois racines réelles, tandis que $Q(X) = 2X^2 + 2bX + a$ n'a pas de racine réelle.
Montrer que $a - b > 1$.

Exercice 17. Soit $n \in \mathbb{N}$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a^{-n}+b}{1-a} + \frac{b^{-n}+c}{1-b} + \frac{c^{-n}+a}{1-c}$$

quand a, b, c sont des réels strictement positifs verifiant $a + b + c = 1$.

Exercice 18. Soit $P(X)$ un polynôme à coefficients réels positifs, et $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ tels que pour tous $x, y \in \mathbb{R}_+^*$ on a :

$$f(x + P(x)f(y)) = (y+1)f(x)$$

a) Montrer que $\deg P \leqslant 1$.
b) Trouver tous les couples (P, f) qui vérifient cette équation.