Cours en ligne (algèbre)

7 décembre 2024

Propriétés:
$k(a+b) = ka + kb$
$(a+b)(c+d) = ac + ad + bc + bd$
.
Identités remarquables:
$(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$
$(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$
$(a+b)(a-b) = a^2 - ab + ba - b^2 = a^2 - b^2$
.
On peut tenter de regarder pour n plus grand:
$a^3 - b^3 = (a-b)(a^2 + ab + b^2)$
Soit n un entier positif.
$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + ... + ab^{n-2} + b^{n-1})$
Si n est un entier positif impair,
a$^n + b^n = a^n - (-b)^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - .... - ab^{n-2} + b^{n-1})$
. Par exemple pour $n = 7$ $a^7 + b^7 = (a+b)(a^6 - a^5b + a^4b^2 - a^3b^3 + a^2b^4 - ab^5 + b^6)$

Exercice 1:

Si n est un entier tel que $n \geq 2$, monter que $4n^2 - 1$ n'est pas un nombre premier.

Correction:

$4n^2 - 1 = (2n)^2 - 1^2 = (2n+1)(2n-1)$. Ainsi l'entier $2n - 1 divise 4n^2 - 1$. Donc $4n^2 - 1$ ne peut pas être premier.

.

Exercice 3:

Factoriser $a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2+b^2)(a^2-b^2) = (a^2+b^2)(a+b)(a-b)$
.
$a^4 + a^2 + 1 = a^4 + a^2 + 1 + a^2 - a^2 = (a^2)^2 + 2a^2 + 1 - a^2 = (a^2+1)^2 - a^2 = (a^2 + 1 - a)(a^2 + 1 + a)$
.
$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2)^2 + (2b^2)^2 + 2 \times a^2 \times 2b^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2$
=(a$^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ (identité de Sophie Germain)
.

Exercice 2:

x, y des réels non nuls tels que $x + y = 2024xy$.

On divise par xy dans l'égalité ci dessus: $2024 = \frac{x+y}{xy} = \frac{x}{xy} + \frac{y}{xy} = \frac{1}{x} + \frac{1}{y}$.

.

Exercice 4:

On suppose que a, b sont des solutions.

On ajoute 1 de chaque côté de l'équation:

$ab - a - b + 1 = 13$

$(a-1)(b-1) = 13$

Or 13 est un nombre premier, donc il est uniquement divisible par 1 et 13.

On a donc ou bien $a - 1 = 1etb - 1 = 13$ ou bien $a - 1 = 13etb - 1 = 1$.

On en déduit que (a, b) vaut $(2, 14)$ ou $(14, 2)$.

Réciproquement on vérifie que ces deux couples fonctionnent.

.

Exercice 5:

$x + \frac{1}{x} = \sqrt{2024}$.

$(x + \frac{1}{x})^2 = 2024$ $x^2 + (\frac{1}{x})^2 + 2 \times x \times \frac{1}{x} = 2024$

$x^2 + \frac{1}{x^2} + 2 = 2024$

$x^2 + \frac{1}{x^2} = 2024 - 2 = 2022$

.

Exercice 6:

$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-yz-xz-xy) = x^3+y^3+z^3-xyz-yxz-zxy = x^3+y^3+z^3-3xyz$

.

Exercice 7:

On multiplie par $(1+a)(1+b)$ dans la première expression, ce qui donne $a(1+a)+b(1+b) = (1+a)(1+b)$ donc $a+b+a^2+b^2 = 1+a+b+ab$ c'est à dire que $a^2+b^2 = 1+ab$.

On peut alors tenter d'exprimer a^3+b^3 en fonction des valeurs qu'on connaît:

$a^3+b^3 = (a+b)(a^2-ab+b^2) = (a+b) \times 1 = a+b$.

.

Exercice 8:

On développe de chaque côté:

$(a+b)(b+c)(c+a) = ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+2abc$

et

$(a+b+c)(ab+bc+ca)+k\times abc = ab^2+ac^2+ba^2+bc^2+ca^2+cb^2+3abc+k\times abc$.

En simplifiant on a $(k+3)abc = 2abc$ donc en particulier pour $(a,b,c) = (1,1,1)$ on a $k = -1$ et réciproquement si $k = -1$ on vérifie que l'égalité est bien vérifiée pour tout triplet de réels (a,b,c).

.

Exercice 9:

Soit (m,n) un couple d'entiers solution. On factorise l'expression:

$2^m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$ donc $n-1$ et $n+1$ sont des puissances de 2, donc $n = 3$ (en effet on a $n+1 \geq 2(n-1)$ c'est-à-dire $n \leq 3$ et on peut vérifier que $n = 1$ et $n = 2$ ne conviennent pas).

Réciproquement, si $n = 3$ on a nécessairement $m = 3$ et la seule solution est donc $(3, 3)$.

.

Exercice 10:

$a + b = c + d$ et $ab = cd$.

On regarde pour tout x l'expression

$(x - a)(x - b) = x^2 - (a + b)x + ab$

$(x - c)(x - d) = x^2 - (c + d)x + cd$

On remarque que les coefficients sont les mêmes donc on a $(x - a)(x - b) = (x - c)(x - d)$ pour tout x réel.

En particulier, si on pose $x = a$.

$(a-a)(a-b) = 0 = (a-c)(a-d)$. On en déduit que $a-c = 0$ ou $a-d = 0$.

Ainsi $a = c$ ou $a = d$. Avec en plus l'égalité $a + b = c + d$, on en déduit que dans le premier cas, $b = d$ et dans le deuxième cas, $b = c$.

On a donc bien $(a, b) = (c, d)$ ou $(a, b) = (d, c)$.

.

Exercice 11:

On remarque que $x + \frac{1}{x} = 2 = 1 + 1$ et que $x \times \frac{1}{x} = 1 = 1 \times 1$.

Si on regarde les couples $(x, \frac{1}{x})$ et $(1, 1)$, ils ont la même somme et le même produit. On en déduit que $(x, \frac{1}{x}) = (1, 1)$ donc $x = 1$. On vérifie que ça marche.