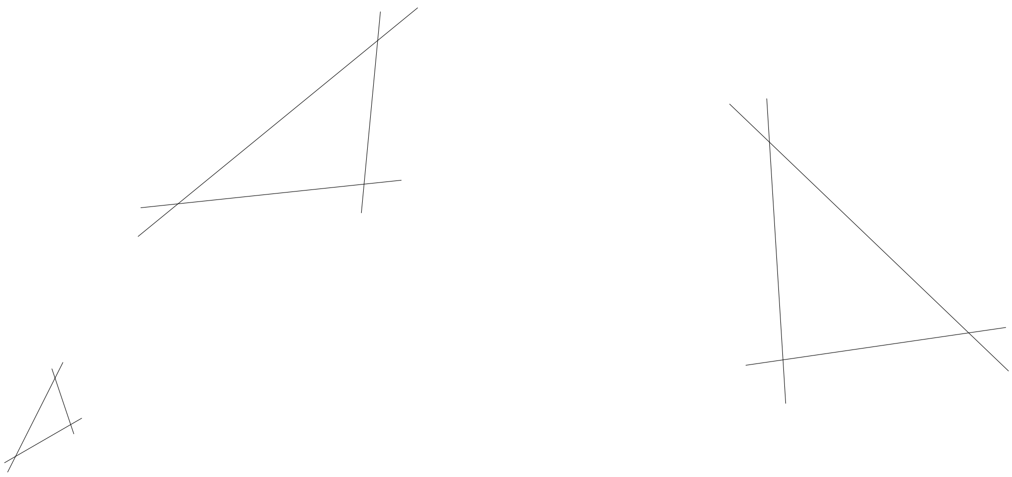
TRIANGLES SEMBLABLES

Cours

Les triangles semblables sont très utiles en géométrie, car ils permettent de passer de relations d'angles à des égalités de rapports de longueurs et vice-versa.

- Intuitivement, deux triangles sont **semblables** si en les translattants/retournant/aggrandissant, ils sont superposables :



- On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \text{ et } \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

  Et on le note : $ABC \sim A'B'C'$
  Attention : l'ordre des points est important !
- La propriété intéressante est que :

$$ABC \sim A'B'C' \iff \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

  Ce qui nous permet donc de passer d'égalités d'angles à des égalités de rapports, ainsi que dans l'autre sens.

  Pour retrouver quels rapports on a, c'est assez facile : deux points sont l'un au dessus de l'autre si ils ont la même position dans leur triangle.
- On peut également se contenter de montrer une égalité de rapports, et l'égalité de l'angle entre les deux côté. On a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

Pour résumer, pour montrer que deux triangles sont semblables, on a besoin au choix :

— des 3 égalités d'angle (2 suffisent donc car à partir de deux angles dans un triangle, on peut trouver le troisième)

— des trois égalités de rapports de longeur

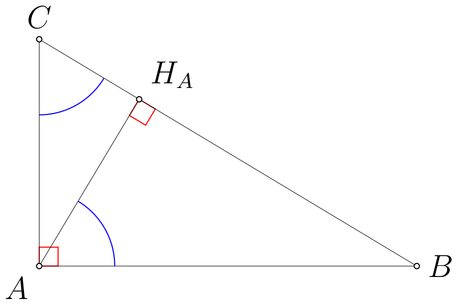
— d'une égalité entre deux rapports et de l'angle au milieu de ce rapport (c'est important d"avoir cet angle et pas un autre

Exemple

On va montrer le théorème de Pythagore : si ABC est rectangle en A, alors on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Soit H_A le pied de la hauteur issue de A.
Une courte chasse aux angle nous montre que : $ABC \sim H_ABA \sim H_AAC$.
On en déduit que $\dfrac{AB}{H_AB} = \dfrac{BC}{BA}$, donc que $AB^2 = BC \cdot BH_A$.
De même $\dfrac{AC}{H_AC} = \dfrac{BC}{AC}$, donc $AC^2 = BC \cdot H_AC$.
Ainsi, on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC(BH_A + H_AC) = BC^2$$



On peut également démontrer le théorème de Thalès avec les triangles semblables.

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 2 (droite des milieux)
Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de AB et AC Montrer que $(ED)//(BC)$

Exercice 3 (puissance d'un point)
Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites AB et CD (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P.
Montrer que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Exercice 4 (puissance d'un point intérieur)
Soit ω un cercle et X un point dans ω. Soit (d) et (d') deux droites passant pas X. On note A et B les intersections de (d) et ω ; et A' et B' celles de (d') et ω.
Montrer que $XA \cdot XB = XA' \cdot XB'$.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de $[AC]$. On nomme E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[CD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$

Exercice 6
Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2, s'intersectant en deux points X et Y. Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y. On note B l'intersection de (AY) en Ω_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 7
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M et N les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$. La droite (DB) coupe les droites (AM) et (AN) respectivement en P et Q.
Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. L le point d'intersection de (FC) et (BD), K celui de (EC) et (BD), Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC). Montrer que $CP = CQ$

Exercice 9
Soit ABC un triangle isocèle rectangle en C. Soit D et E des points sur $[CA]$ et $[CB]$ tels que $CD = CE$. Soient U et V les points d'intersection des perpendiculaires à (AE) passant par D et C.
Montrer que $UV = VB$.

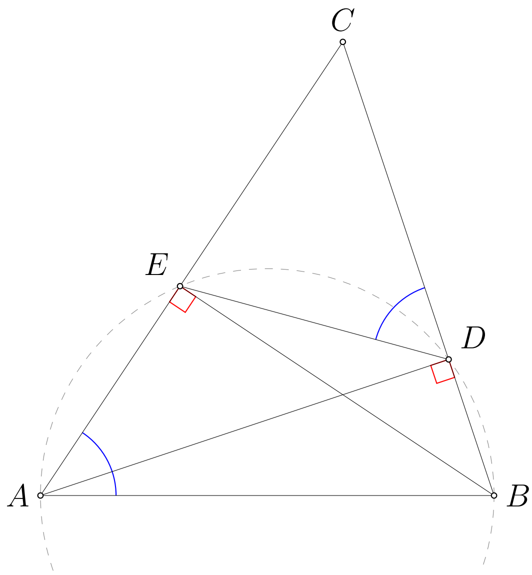
Exercice 10 (Ptolémée)
Soit A, B, C, D quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Exercice 11
Soit ABC un triangle, D, E, F les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit X un point dans ABC. On note A', B', C' les symétriques de X par rapport à D, E, F.
Montrer que $(AA'), (BB')$ et (CC') sont concourantes.

Solutions

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

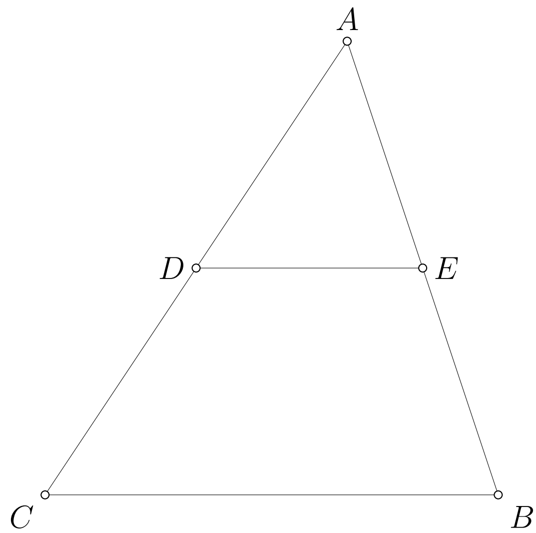
$ABDE$ sont cocycliques donc $\widehat{CDE} = 180 - \widehat{BDE} = \widehat{CAB}$. De plus, $\widehat{ECD} = \widehat{BCA}$, donc on a deux angles égaux, aisni, on a $CDE \sim CAB$.



<u>*Solution de l'exercice 2*</u>

On a $\frac{1}{2} = \frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$. On a donc $AED \sim ABC$.

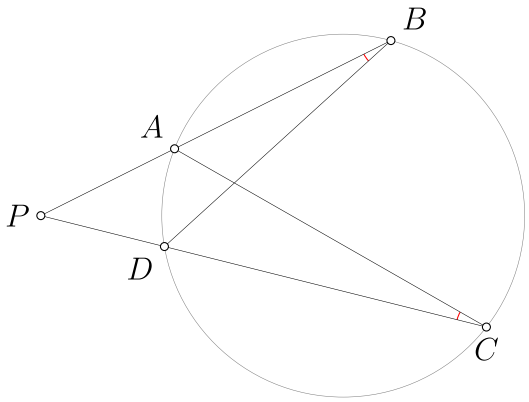
On en déduit que : $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ et donc par angles alternes-internes, $(ED)//(BC)$



Solution de l'exercice 3

Une chasse aux angles nous montre que : $PCA \sim PBD$. Cela implique que : $\dfrac{PC}{PA} = \dfrac{PB}{PD}$. D'où :

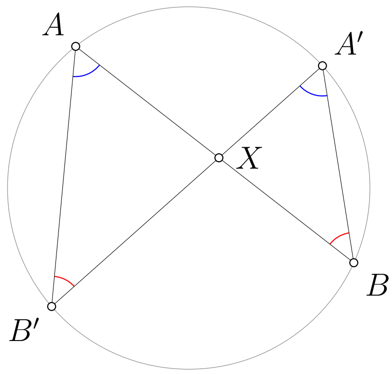
$$PC \cdot PD = PA \cdot PB$$



Solution de l'exercice 4

Une chasse aux angles nous montre que : $AXB' \sim A'XB$. Il vient donc $\dfrac{XA}{XB'} = \dfrac{XA'}{XB}$. C'est-à-dire :

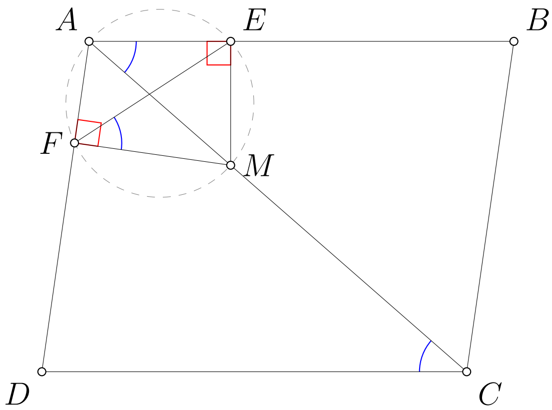
$$XA \cdot XB = XA' \cdot XB'$$



Solution de l'exercice 5

$AEMF$ sont cocycliques car $\widehat{AFM} = 180 - \widehat{AEM}$. Donc $\widehat{EMF} = 180 - \widehat{FAE} = 180 - \widehat{BAD}$.
Et comme $(AB) \parallel (CD)$, $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAD} = \widehat{EMF}$.
On a de plus $\widehat{EFM} = \widehat{EAM} = \widehat{CAB} = \widehat{ACD}$ par angles alternes-internes.
Ainsi, les triangles MFE et BAC semblables. D'où :

$$\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$$



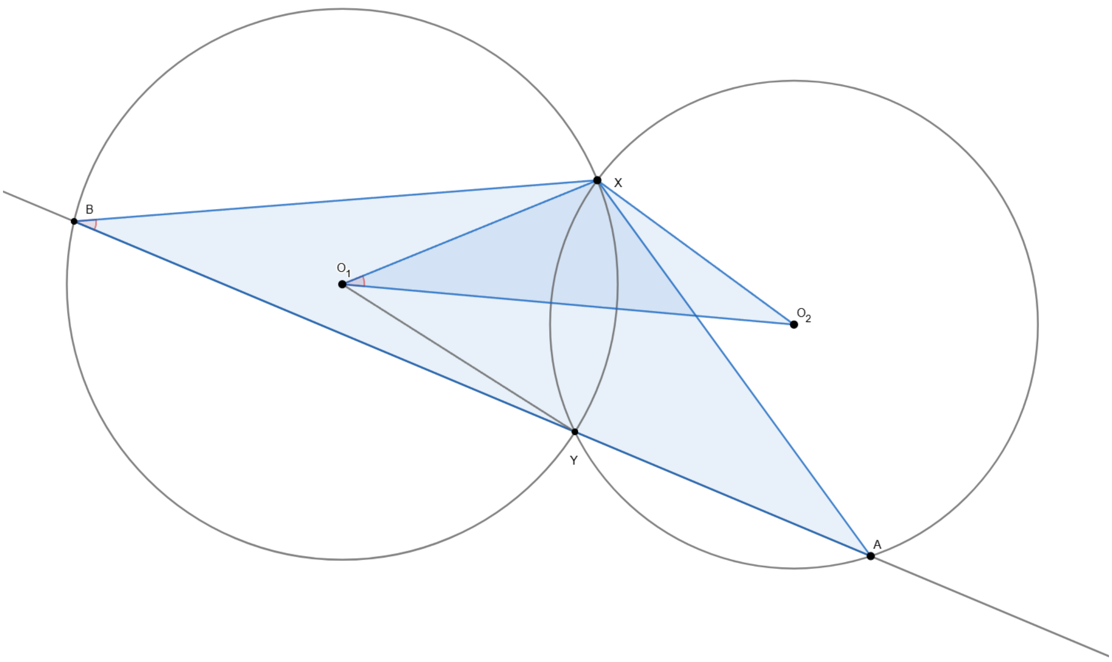
Solution de l'exercice 6

Par théorème de l'angle au centre, on a : $\widehat{ABX} = \widehat{YBX} = \frac{1}{2} \cdot \widehat{YO_1X}$.

Par symétrie, on a : $\widehat{XO_1O_2} = \widehat{YO_1O_2}$, donc $\frac{1}{2} \cdot \widehat{YO_1X} = \widehat{XO_1O_2}$. (Si cela ne vous convainc pas, on peut regarder la médiatrice de $[XY]$, elle passe par O_1 et O_2, et comme XO_1Y est isocèle en O_1, la médiatrice de $[XY]$ est aussi la bissectrice de $\widehat{XO_1Y}$, donc on a l'égalité d'angle désirée)

Ainsi, on a $\widehat{ABX} = \widehat{O_2O_2X}$. De même, on a : $\widehat{BAX} = \widehat{O_1O_2X}$.

Il en résulte que $AXB \sim O_1XO_2$.

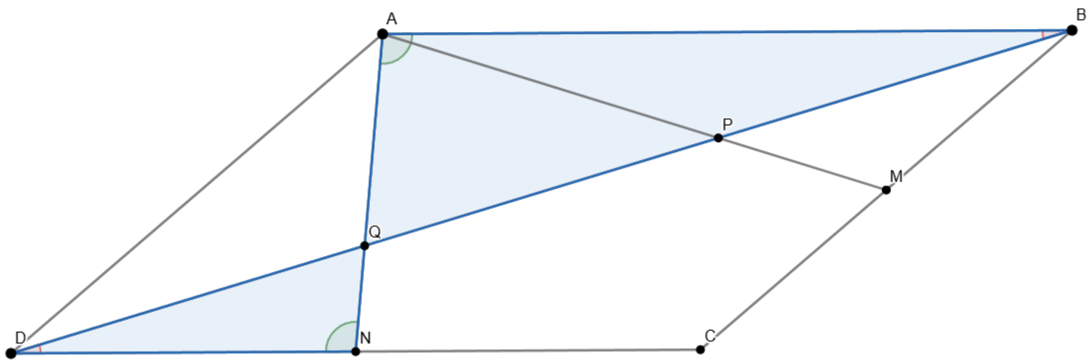


Solution de l'exercice 7
Par angles alternes-internes, on a $\widehat{QDN} = \widehat{QBA}$ et $\widehat{QND} = \widehat{QAB}$, donc $QDN \sim QBA$.

Ainsi, on a $\frac{DQ}{QB} = \frac{DN}{AB} = \frac{1}{2}$ car $AB = DC$ et N est le milieu de $[DC]$. (On peut remarquer que c'est en fait le théorème de Thalès dans $DNQAB$)

Dond $DQ = \frac{QB}{2}$, ce qui implique $DQ = \frac{DB}{3}$. On montre de même que $BP = \frac{DB}{3}$, et il vient alors que $QP = BP - DQ - PB = \frac{BD}{3}$.

On a bien alors $DQ = QB = PB$.



Solution de l'exercice 8
Voir le poly de valbonne de 2023, page 125, exercice 8.

Solution de l'exercice 9
Voir le poly de valbonne de 2021, page 96, exercice 8.

Solution de l'exercice 10
Voir le poly de valbonne de 2023, page 125, exercice 7.

Solution de l'exercice 11
Voir le poly de valbonne de 2021, page 96, exercice 7.

Remarque : tous les exos viennent de ces deux polys, vous pouvez faire ceux qui ne sont pas ici pour continuer à vous entrainer :)