Le lemme des droites perpendiculaires

Martin Rakovsky

Le lemme que l'on présente ici n'est pas très courant dans les préparations mais a pourtant pas mal d'applications. Le voici :

Lemme 1. Soit A, B, C et D quatre points du plan. Alors les droites (AB) et (CD) sont perpendiculaires ssi

$$AC^2 + BD^2 = AD^2 + BC^2$$

Démonstration. Si la droites sont perpendiculaires, on a l'égalité grâce au théorème de Pythagore.
Réciproquement si on a égalité, alors

$$\begin{aligned} 0 &= AC^2 - AD^2 + BD^2 - BC^2 \\ &= \vec{AC}^2 - \vec{AD}^2 + \vec{BD}^2 - \vec{BC}^2 \\ &= (\vec{AC} - \vec{AD})(\vec{AC} + \vec{AD}) + (\vec{BD} - \vec{BC})(\vec{BD} + \vec{BC}) \\ &= \vec{CD}(\vec{AC} - \vec{BC} + \vec{AD} - \vec{BD}) \\ &= \vec{CD} \cdot 2\vec{AB} \end{aligned}$$

de sorte que (AB) et (CD) sont perpendiculaires.

□

Une remarque importante est la suivante :
L'égalité se réécrit parfois :

$$AC^2 - AD^2 = BC^2 - BD^2$$

Bien souvent, obetnir une telle égalité revient à montrer que deux points ont la même puissance par rapport à un même cercle, en l'occurence que A et B ont même puissance par rapport au cercle de centre C de rayon D. Ceci permet de guider les calculs.

Exercice 1. Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les angles en B et D sont droits, et tel que $AB = AD$. Soient F et E deux points de $[BC]$ et $[CD]$ respectivement tels que $(DF) \perp (AE)$. Prouver que $(AF) \perp (BE)$.

Exercice 2. Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et I le centre de son cercle inscrit. Soient $P \in [BA)$ et $Q \in [CA)$ tels que $BP = CQ = BC$. Montrer que $(PQ) \perp (OI)$.

Exercice 3. (EGMO 2012) Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Les points D, E et F sont respectivement situés à l'intérieur des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ tels que (DE) soit perpendiculaire à (CO) et (DF) soit perpendiculaire à (BO). Soit K le centre du cercle circonscrit du triangle AFE. Prouver que les droites (DK) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 4. (JBMO 2015 P3) Soit ABC un triangle. Soient ℓ_1 et ℓ_2 les droites perpendiculaires à (AB) respectivement en A et B. Soit M le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe ℓ_1 en E et la perpendiculaire à (BC) passant par M coupe ℓ_2 en F. Soit D le point d'intersection des droites (EF) et (CM). Montrer que $\widehat{ADB} = \widehat{EMF}$.

Exercice 5. Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites issues d'un point O et k un réel. On considère $A \in [Ox)$ et $B \in [Oy)$ variables tels que $OA + OB = k$. Soit P l'intersection des perpendiculaires à (Ox) passant par A et à (Oy) passant par B. Soit (d) la perpendiculaire à (AB) passant par P. Montrer que (d) passe par un point fixe quand A et B varient.

Exercice 6. Soient A et C sur un cercle Γ et O sur la médiatrice de $[AC]$. Les médiatrices de $[OA]$ et $[OC]$ recoupent Γ en B et D tels que A, B, C et D soient dans cet ordre sur Γ. (AB) et (CD) se recoupent en P, et on note M et N les milieux de $[AB]$ et $[CD]$. Montrer que $(MN) \perp (OP)$.

Exercice 7. (France TST 2015) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et D le point diamétrialement opposé à A sur le cercle passant par A, B et C. Soient E et F respectivement sur $[BA)$ et $[CA)$ satisfaisant :

$$BE = CF = \frac{AB + BC + CA}{2}$$

Montrer que (DI) et (FE) sont perpendiculaires.

Exercice 8. (China TST 2009 P1) Soit ABC un triangle et D un point du segment $[BC]$ tel que $\widehat{CAD} = \widehat{ABC}$. Un cercle dont on note le centre O et passant par B et D coupe les segments $[AB]$ et $[AD]$ respectivement en E et F. Soit G le point d'intersection des droites (BF) et (DE). Soit M le milieu de $[AG]$. Montrer que les droites (CM) et (AO) sont perpendiculaires.

Exercice 9. (USA TSTST 2022 P7) Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit E un point du segment $[CD]$ tel que

$$2\angle AEB = \angle ADB + \angle ACB,$$

et soit F un point du segment $[BC]$ tel que

$$2\angle DFA = \angle DCA + \angle DBA.$$

Soit K le centre du circonscrit au triangle ABD. Montrer que $KE = KF$.

Exercice 10. (EGMO 2022 P6) Les points A, B, C et D sont sur un cercle de centre O. Soit

- X le point d'intersection des bissectrices issues de A et B,
- Y le point d'intersection des bissectrices issues de B et C,
- Z le point d'intersection des bissectrices issues de C et D
- W le point d'intersection des bissectrices issues de D et A.

De plus, soit P le point d'intersection des droites (AC) et (BD).
On suppose que les points O, P, W, X, Y et Z sont tous distincts.

Montrer que les points O, W, X, Y et Z sont sur un même cercle si et seulement si les points P, W, X, Y et Z sont sur un même cercle.