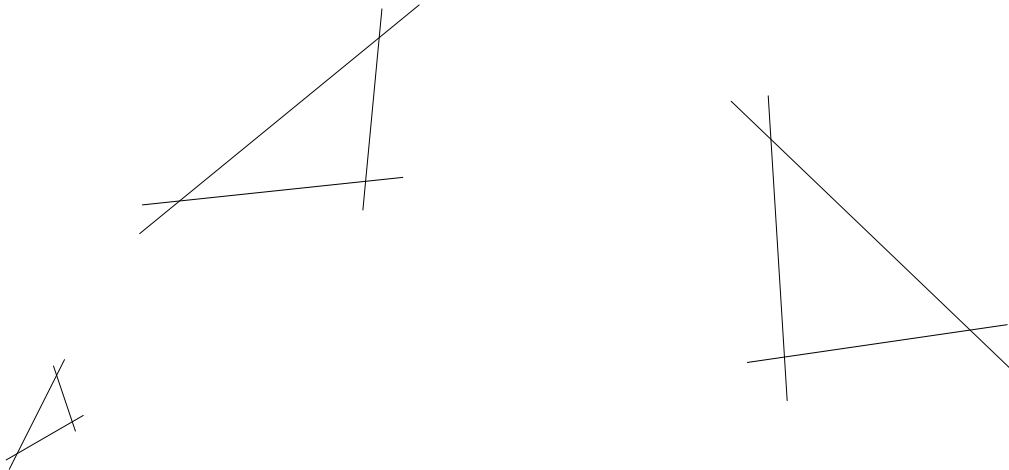


TRIANGLES SEMBLABLES

Cours

Les triangles semblables sont très utiles en géométrie, car ils permettent de passer de relations d'angles à des égalités de rapports de longueurs et vice-versa.

- Intuitivement, deux triangles sont **semblables** si en les translatants/retournant/aggrandissant, ils sont superposables :



- On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si :

$$\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}, \widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'} \text{ et } \widehat{CAB} = \widehat{C'A'B'}$$

Et on le note : $ABC \sim A'B'C'$

Attention : l'ordre des points est important !

- La propriété intéressante est que :

$$ABC \sim A'B'C' \iff \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{CA}{C'A'}$$

Ce qui nous permet donc de passer d'égalités d'angles à des égalités de rapports, ainsi que dans l'autre sens.

Pour retrouver quels rapports on a, c'est assez facile : deux points sont l'un au dessus de l'autre si ils ont la même position dans leur triangle.

- On peut également se contenter de montrer une égalité de rapports, et l'égalité de l'angle entre les deux côté. On a :

$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} \text{ et } \widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'} \Rightarrow ABC \sim A'B'C'$$

Pour résumer, pour montrer que deux triangles sont semblables, on a besoin au choix :

- des 3 égalités d'angle (2 suffisent donc car à partir de deux angles dans un triangle, on peut trouver le troisième)
- des trois égalités de rapports de longueur
- d'une égalité entre deux rapports et de l'angle au milieu de ce rapport (c'est important d'avoir cet angle et pas un autre)

Exemple

On va montrer le théorème de Pythagore : si ABC est rectangle en A , alors on a $AB^2 + AC^2 = BC^2$.

Soit H_A le pied de la hauteur issue de A .

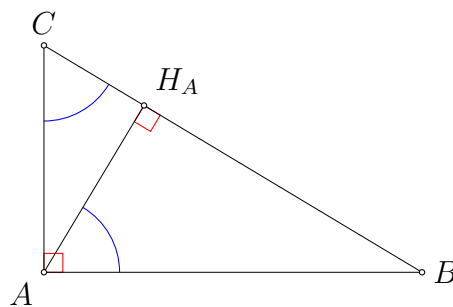
Une courte chasse aux angles nous montre que : $ABC \sim H_A B A \sim H_A A C$.

On en déduit que $\frac{AB}{H_A B} = \frac{BC}{BA}$, donc que $AB^2 = BC \cdot BH_A$.

De même $\frac{AC}{H_A C} = \frac{BC}{AC}$, donc $AC^2 = BC \cdot H_A C$.

Ainsi, on a :

$$AB^2 + AC^2 = BC(BH_A + H_A C) = BC^2$$



On peut également démontrer le théorème de Thalès avec les triangles semblables.

Exercices

Exercice 1

Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 2 (droite des milieux)

Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de AB et AC Montrer que $(ED) \parallel (BC)$

Exercice 3 (puissance d'un point)

Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites AB et CD (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P .

Montrer que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Exercice 4 (puissance d'un point intérieur)

Soit ω un cercle et X un point dans ω . Soit (d) et (d') deux droites passant pas X . On note A et B les intersections de (d) et ω ; et A' et B' celles de (d') et ω .

Montrer que $XA \cdot XB = XA' \cdot XB'$.

Exercice 5

Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de $[AC]$. On nomme E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[CD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$

Exercice 6

Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2 , s'intersectant en deux points X et Y . Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y . On note B l'intersection de (AY) en Ω_2 . Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Exercice 7

Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit M et N les milieux respectifs de $[BC]$ et $[DC]$. La droite (DB) coupe les droites (AM) et (AN) respectivement en P et Q . Montrer que $BP = PQ = QD$.

Exercice 8

Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. L le point d'intersection de (FC) et (BD) , K celui de (EC) et (BD) , Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC) . Montrer que $CP = CQ$.

Exercice 9

Soit ABC un triangle isocèle rectangle en C . Soit D et E des points sur $[CA]$ et $[CB]$ tels que $CD = CE$. Soient U et V les points d'intersection des perpendiculaires à (AE) passant par D et C .

Montrer que $UV = VB$.

Exercice 10 (Ptolémée)

Soit A, B, C, D quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$.

Exercice 11

Soit ABC un triangle, D, E, F les milieux respectifs de $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit X un point dans ABC . On note A', B', C' les symétriques de X par rapport à D, E, F .

Montrer que (AA') , (BB') et (CC') sont concourantes.