Corrigé partiel du TD sur le lemme des droites perpendiculaires

Exercices

Exercice 1
Soit $ABCD$ un quadrilatère dont les angles en B et D sont droits, et tel que $AB = AD$. Soient F et E deux points de $[BC]$ et $[CD]$ respectivement tels que $(DF) \perp (AE)$. Prouver que $(AF) \perp (BE)$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et I le centre de son cercle inscrit. Soient $P \in [BA)$ et $Q \in [CA)$ tels que $BP = CQ = BC$. Montrer que $(PQ) \perp (OI)$.

Exercice 3
Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Les points D, E et F sont respectivement situés l'intérieur des segments $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$ tels que (DE) soit perpendiculaire à (CO) et (DF) soit perpendiculaire à (BO). Soit K le centre du cercle circonscrit du triangle AFE. Prouver que les droites (DK) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 4
Soit ABC un triangle. Soient l_1 et l_2 les droites perpendiculaires à (AB) respectivement en A et B. Soit M le milieu de $[AB]$. La perpendiculaire à (AC) passant par M coupe l_1 en E et la perpendiculaire à (BC) passant par M coupe l_2 en F. Soit D le point d'intersection des droites (EF) et (CM). Montrer que $\widehat{ADB} = \widehat{EMF}$.

Exercice 5
Soient $[Ox)$ et $[Oy)$ deux demi-droites issues d'un point O et k un réel. On considère $A \in [Ox)$ et $B \in [Oy)$ variables tels que $OA + OB = k$. Soit P l'intersection des perpendiculaires à (Ox) passant par A et à (Oy) passant par B. Soit (d) la perpendiculaire à (AB) passant par P. Montrer que (d) passe par un point fixe quand A et B varient.

Solutions

Je trace pas les figures, vous êtes grands et ça prend du temps.

Solution de l'exercice 1

On cherche à appliquer le lemme : on veut donc montrer que $AB^2 + EF^2 = AE^2 + BF^2$. Or, toujours par le lemme puis par Pythagore,

$$AB^2 + EF^2 = AD^2 + EF^2 = AF^2 + ED^2 = AB^2 + BF^2 + AE^2 - AD^2 = BF^2 + AE^2.$$

Solution de l'exercice 2

On utilise l'expression de la puissance d'un point par rapport à un cercle comme la distance au centre au carré moins le rayon au carré. On traite le cas où P, Q sont à l'intérieur des côtés, les autres cas produisent les mêmes formules. En nommant a, b, c les longueurs du triangles ABC, et R et r les rayons des cercles circonscrits et inscrits respectivement, on a

$$OP^2 - R^2 = -PA \cdot PB = a(a - c)$$

et

$$IP^2 = r^2 + DP^2 = r^2 + \left(a - \frac{a + c - b}{2}\right)^2 = r^2 + \frac{(a + b - c)^2}{4}.$$

De même, $OQ^2 = R^2 + a(a - b)$ et $IQ^2 = r^2 + \frac{(a+c-b)^2}{4}$. Mais alors,

$$OP^2 + IQ^2 = R^2 + r^2 + a(a - c) + \frac{(a + b - c)^2}{4} = R^2 + r^2 + \frac{5a^2 + b^2 + c^2}{4} - \frac{ab + bc + ca}{2}.$$

Cette quantité est symétrique en b et c, donc on obtient bien le même résultat pour $OQ^2 + IP^2$, et on a fini.

Solution de l'exercice 3

Bon on se demande très fort si il va falloir montrer que $BK^2 + CD^2 = CK^2 + BD^2$.

CK^2 étant absolument atroce à calculer, on va bien sûr faire la même chose qu'à l'exercice précédent : $CK^2 = KE^2 + CE \cdot CA$, et le KE^2 aura le bon goût de s'annuler avec le terme idoine de BK^2. Et à ce moment, on se rend compte que CE est pas beaucoup mieux que CK^2 en fait. C'est pas parce qu'on cherche à appliquer un lemme qu'on ne doit pas quand même faire de la géométrie de temps en temps. Une chasse aux angles rapide nous donne

$$\widehat{CED} = 90 - \widehat{ACO} = 90 - \left(90 - \frac{\widehat{AOC}}{2}\right) = \widehat{CBA},$$

De sorte que $ABDE$ sont cocycliques, et $CE \cdot CA = CD \cdot CB$. Ainsi, si on note $t = CD$, on trouve $CK^2 + BD^2 = (a - t)^2 + at = a^2 - at + t^2 + KE^2$, et par le même raisonnement, on trouve $BK^2 + CD^2 = a(a - t) + t^2 + KF^2 = a^2 - at + t^2 + KE^2$, et on a fini.

Solution de l'exercice 4

On commence par remarquer qu'on a un angle droit dans la figure : $(EF) \perp (CM)$. On remarque aussi que si on arrive à montrer ça, on aura fini : on aurait alors $BFDM$ et $MDEA$ cocycliques, d'où $\widehat{ADM} = \widehat{AEM} = 90 - \widehat{AME}$. En sommant, on obtient $\widehat{ADB} = 180 - \widehat{AME} - \widehat{BMF} = \widehat{EMF}$.

Reste plus qu'à montrer la perpendicularité, et ça va : $BF^2 + CM^2 = BM^2 + CF^2$ par hypothèse, d'où $CF^2 - BF^2 = CM^2 - BM^2 = CM^2 - AM^2 = CE^2 - AE^2$. Ensuite par Pythagore, on obtient également $CF^2 - MF^2 = CE^2 - ME^2$, puis $CF^2 + ME^2 = CE^2 + MF^2$, et on a fini.

Solution de l'exercice 5
Plein de droites doivent passer par un même point, mais quel point ? Une idée est de regarder ce qui se passe pour des points A et B particuliers, par exemple lorsque A ou B est confondu avec O. Dans ce cas, l'autre point est à distance maximale k de O, et notons ces points maximaux A' et B' respectivement. Dans le cas $A = O$ (et donc $B = B'$) par exemple, P est sur la perpendiculaire à $[Oy)$ passant par B', donc (d) est simplement la perpendiculaire à $(Oy) = (AB)$ passant par B'. Ainsi, si l'énoncé est vrai (ce qu'on espère très fort), ce point doit être l'intersection des perpendiculaires à $[Ox)$ passant par A' et à $[Oy)$ passant par B'. Posons P' ce point. On veut donc montrer qu'on a toujours $(AB) \perp (PP')$. On a $AP'^2 = AA'^2 + A'P'^2$, et $PB^2 = OP^2 - OB^2$. Seulement, $AA'^2 = OB^2$, et $A'P'^2 = B'P'^2$ par symétrie de la figure avec les prime, donc

$$AP'^2 + BP^2 = A'P'^2 + OP^2 = B'P'^2 + OP^2 = BP'^2 + AP^2,$$

comme espéré.