1 Nouveaux exos

Exercice 1
Trois cercles $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ centrés en 0_i sont tangents deux à deux extérieurement et tous intérieurement à Ω. Un cercle est tangent à Γ_{i+1} et Γ_{i+2} extérieurement et intérieurement en P_i à Ω. Montrer que les droites (O_iP_i) sont concourantes.

Exercice 2
A l'intérieur du cercle Ω se trouvent 6 cercles, $(\Gamma_i)_{i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ et $(\mathcal{C}_i)_{i\in\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}}$ tels que $\Omega, \Gamma_i, \mathcal{C}_i$ sont tangents en P_i avec Ω qui contient Γ_i qui contient $\mathcal{C}_i$. On suppose aussi que si $i \neq j$, Γ_i et $\mathcal{C}_j$ sont tangents extérieurement. Les cercles Γ_{i+1} et Γ_{i+2} se coupent en Q_i et R_i, avec R_i à l'intérieur de Γ_i et Q_i à l'extérieur. Montrer que les droites P_iQ_i sont concourantes.

Exercice 3
Soit D le point de tangence du cercle inscrit avec $[BC]$ et E le point de tangence du A-cercle exinscrit avec $[BC]$. Soit P le projeté orthogonal de C sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. Montrer que $\widehat{DPE}$ est droit.

2 TD de Vabonne

Exercice 1
Considérons deux cercles se coupant en A et B, et les tangentes en A aux cercles les recoupent en C et D. Montrer que (ACD) passe par le symétrique de A par rapport à B.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs, A' le symétrique de H par rapport à (BC), D le point d'intersection de (H_BH_C) avec (AH), P et Q les intersections de (H_AH_B) avec (AHC) et X et Y les intersections de $(A'H_C)$ avec (BAD). Montrer que P, Q, X, Y sont cocycliques.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, P un point. On nomme A' le centre de (BCP). On suppose que P, B, B' et P, C, C' sont alignés, montrer que P, A, A' aussi.

Exercice 4
Dans ABC, un cercle est tangent aux droites (AB) et (AC), et au cercle (ABC) en P. Le cercle inscrit est tangent à $[BC]$ en Q. Montrer que $\widehat{BAP} = \widehat{CAQ}$.

Exercice 5
Deux cercles Γ_1 et Γ_2 se coupent en A, B. Deux cercles sont tangents extérieurement à Γ_1 et Γ_2 extérieurement, de par et d'autre de A, B. Montrer que les tangentes extérieures communes de ces deux derniers cercles se coupent sur (AB).

Exercice 6
Un trapèze $ABCD$ à ses côtés non parallèles (AB) et (CD) se coupent en X. Le cercle (BCD) a centre P et (DAB) a centre Q. Montrer que $\widehat{AXP} = \widehat{CXQ}$.

Exercice 7
Deux cercles se coupent en X et Y et sont tangents intérieurement en A et B à un troisième cercle. Montrer que les bissectrices de $\widehat{XAY}$ et $\widehat{XBY}$ se coupent sur (XY).

Exercice 8
Dans le triangle ABC, un cercle est tangent en A à (ABC), recoupe $[AB]$ en P, $[AC]$ en Q, et $[BC]$ en X et Y. Montrer que s'il existe un cercle tangent à (ABC), passant par X et Y et dont le centre est sur (APQ), alors il est aussi tangent à (PQ).

Exercice 9
Soit ABC un triangle, D le pied de la bissectrice de A et M le milieu de $[BD]$. Le cercle passant par A et tangent à (BC) en D coupe (AM) en Q et (AC) en Q. Montrer que B, P, Q alignés.

Exercice 10
Soit ABC un triangle rectangle en A. La tangente en A à (ABC) coupe (BC) en P, M est le milieu du petit arc AB, (PM) recoupe (ABC) en Q et la tangente en Q à (ABC) coupe (AC) en K. Montrer que $\widehat{PKC}$ est droit

Exercice 11
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle de diamètre $[AC]$, $E = AB \cap CD$ et $F = AD \cap BC$. Nommons Γ le cercle (AFB), G l'intersection de la parallèle à (CD) passant par B avec Γ, et P l'intersection de (EG) avec Γ. Montrer que (AP) coupe $[EC]$ en son milieu.

Exercice 12
Soit $X_1, ...X_6$ des points sur un cercle Γ et soient $\Gamma_1, ...\Gamma_6$ des cercles tangents intérieurement à Γ en X_i et tel que Γ_i et Γ_{i+1} ((les indices sont pris modulos 6) soient tangents extérieurement. Montrer que les trois droites $(X_i X_{i+3})$ sont concourantes.

Exercice 13
Soit A, B, C, D quatre points situés dans cet ordre sur un cercle. Soit P et Q deux points situés sur la droite (AB), de sorte que les points Q, A, B, P soient alignés dans cet ordre, que le cercle circonscrit à ADQ soit tangent à la droite (AC), et que le cercle circonscrit à BCP soit tangent à la droite (BD). Soit M et N les milieux respectifs des segments $[BC]$ et $[AD]$. Démontrer que la tangente en A au cercle circonscrit à ANQ, la tangente en B au cercle circonscrit à BMP et la droite (CD) sont concourantes.

Exercice 14
Deux cercles Γ_1 et Γ_2 sont tangents extérieurement en O en intérieurement à Γ en A et B, avec A, O, B alignés. Une droite passant par O coupe Γ en P et Q et recoupe Γ_1 et Γ_2 en X et Y. Montrer que $PX = QY$.

Exercice 15
Soit A, B, C trois points alignés et $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ les cercles de diamètre $[AC], [AB], [BC]$. Soit (d) la perpendiculaire à (AC) passant par B. Montrer que les deux cercles tangents extérieurement à Γ_1 et intérieurement à Γ et tangents à (d) ont le même rayon que les deux cercles tangents extérieurement à Γ_2 et intérieurement à Γ et tangents à (d).

Exercice 16
Soit ABC un triangle, P un point. On nomme A_1 le symétrique de P par rapport à (BC) et A_2 le point d'intersection autre que A de (AP) et (ABC). Montrer que les cercles (PA_1A_2), (PB_1B_2) et (PC_1C_2) sont concourants.