Géométrie B : Chasse aux angles

9 Novembre 2024

Exercice 1
Soient C et D deux points distincts d'un demi-cercle de diamètre $[AB]$. Les droites (AC) et (BD) se coupent en E, les droites (AD) et (BC) se coupent en F.
Montrer que les milieux de $[AB]$, $[CD]$ et $[EF]$ sont alignés.

Exercice 2
Soient k_1 et k_2 deux cercles de même diamètre. On suppose que k_1 et k_2 se coupent en deux points distincts A et B. Le cercle de centre A passant par B recoupe le cercle k_1 en un point C différent de B. Montrer que la droite (BC) est tangente au cercle k_2.

$\star$ **Exercice 3** (Concourance des droites remarquables)
Montrer que les médiatrices de ABC sont concourantes. Faire de même pour les bissectrices intérieures et les hauteurs de ABC.

Exercice 4
Soit I le centre du cercle inscrit dans le triangle ABC. On suppose que $CA + AI = BC$ (relation entre les longueurs). Déterminer la valeur du rapport d'angles : $\dfrac{\widehat{BAC}}{\widehat{CBA}}$.

$\star$ **Exercice 5** (Théorème de l'angle au centre)
Soit ABC un triangle (non plat) et O le centre du cercle circonscrit à ABC.
Montrer que $\widehat{BOA} = 2\widehat{BCA}$

Exercice 6 (Théorème des trois cercles/Théorème de Miquel)
Soit ABC un triangle, puis $A' \in (BC), B' \in (CA)$ et $C' \in (AB)$ trois points quelconques.
Montrer que les cercles circonscrits à $AB'C', A'BC'$ et $A'B'C$ sont concourants.

$\star$ **Exercice 7** (pôle sud)
Soit ABC un triangle. Montrer que l'intersection de la bissectrice issue de $\widehat{B}$ et de la médiatrice de $[AC]$ appartient au cercle circonscrit de ABC.

Exercice 8
Soit ABC un triangle aux angles aigus d'orthocentre H. Montrer que les symétriques de H par rapport aux côtés du triangle appartiennent à son cercle circonscrit.

$\star$ **Exercice 9** (Loi des sinus)
Soit ABC un triangle, on note R le rayon de son cercle circonscrit, $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$.
Montrer que

$$\frac{a}{\sin \widehat{A}} = \frac{b}{\sin \widehat{B}} = \frac{c}{\sin \widehat{C}} = 2R.$$

⋆ **Exercice 10** (Droite de Simson)
Soit ABC un triangle et P un point de son cercle circonscrit. On note D, E, F le projeté orthogonal de P sur (respectivement) (BC), (AC), (AB). Montrer que D, E et F sont alignés.

⋆ **Exercice 11** (théorème de la bissectrice)
Soit ABC un triangle, montrer que

1. L'intersection A' de la bissectrice intérieure de A avec (BC) est telle que
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A'B}{A'C}.$$
2. Si $AB \neq AC$, alors l'intersection A'' de la bissectrice extérieure de A avec (BC) est telle que
$$\frac{AB}{AC} = \frac{A''B}{A''C}.$$

Exercice 12
Soient A_0, B, C trois points non alignés du plan. On note A_1 le centre du cercle inscrit de A_0BC, A_2 celui de A_1BC et ainsi de suite pour construire les points $A_2, A_3, ...$
Pour un entier n, calculer le rayon du cercle inscrit de A_nBC.

Exercice 13
Soit $ABCD$ un trapèze isocèle, c'est-à-dire que (AB) et (CD) sont parallèles et $\widehat{BAD} = \widehat{CBA}$. Montrer que les points A, B, C et D sont cocycliques. Réciproquement, montrer qu'un trapèze dont les sommets sont cocycliques est isocèle.
On note O le centre de ce cercle, et E l'intersection des diagonales du trapèze. Montrer que O est sur le cercle circonscrit à AED.

Exercice 14
Soit ABC un triangle et soit T le point d'intersection des tangentes à son cercle circonscrit aux points B et C. Soient X, Y, P les projetés orthogonaux de T sur les droites $(AB), (AC)$ et (BC) respectivement. Montrer que le point P est l'orthocentre du triangle AXY.

Exercice 15
Soit Ω un cercle et γ_1, γ_2 deux cercles tangents intérieurement à Ω en P et Q respectivement. On suppose de plus que γ_1 et γ_2 sont tangents extérieurement en T. Montrer que la perpendiculaire à la droite (PT) passant par P intersecte la droite (QT) sur Ω.

Exercice 16
Soit ABC un triangle, et D un point du côté BC. Soient ω_1 et ω_2 les cercles passant par A et de centres B et C respectivement. On note E et F les secondes intersections respectives de ω_1 et ω_2 avec AD. Soit M le milieu de $[AF]$. On suppose que $E \neq M$ et on considère Γ le cercle circonscrit au triangle BEM. On appelle P la deuxième intersection de Γ avec ω_1.
Montrer que le cercle circonscrit au triangle PDF rencontre Γ sur BC.