PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 8 DÉCEMBRE

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2010 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit un triangle ABC isocèle en A. Soit E le pied de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{ABC}$ et F le pied de la bissectrice issue de l'angle $\widehat{ACB}$. Montrer que B, C, E, F sont cocycliques.

Exercice 2. Soit deux cercles Γ_1 et Γ_2 tangents extérieurement (c'est-à-dire, ils sont tous les deux tangents à une même droite (d) et sont de part et d'autre de cette droite) en un point B. Soit A sur Γ_1 et C sur Γ_2 tels que la tangente en A à Γ_1 et la tangente en C à Γ_2 soient parallèles et que B soit positionné entre les deux tangentes. Montrer que A, B, C sont alignés

Exercice 3. Soit un triangle ABC. Soit D le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A. On note E le pied de la hauteur du triangle ABD issues de D. On note F le pied de la hauteur du triangle ACD issue de D. Démontrer que les points B, C, E, F sont cocycliques.

Exercice 4. Soit ABC un triangle et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit D (resp. E, F) le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ (resp. $\widehat{ABC}$, $\widehat{BCA}$) avec $\mathcal{C}$. Démontrer que les droites (AD) et (EF) sont perpendiculaires.

Exercice 5. Soit $ABCD$ un parallelogramme dans lequel $AB > AD$. Soit X le point de la demi-droite $[BD)$ tel que $CX = CB$ et Y le point de la demi-droite $[BD)$ $AY = AB$. Montrer que $DX = DY$.

Exercice 6. Soit ABC un triangle, P sur (AB) et Q sur (AC) tels que (PQ) est parallèle à (BC). Les cercles de diamètres $[BQ]$ et $[CP]$ s'intersectent en deux points X et Y. Montrer que (XY) est la perpendiculaire à (BC) passant par A.

Exercice 7. Soit deux cercles T et T' concentriques, de centre O avec T' de rayon plus grand que T. Soit A, B sur T. Soit C, D sur T' tel que (CA) et (DB) sont tangents à T et C et D sont de part et d'autre de la droite (AB). Soit E l'intersection de (AB) et (CD). Montrer que C, A, O, E et D, B, O, E sont cocycliques.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, et P un point du côté $[BC]$. Soit I_1 et I_2 les centres des cercles inscrits dans les triangles APB et APC respectivement. Soit Γ_1 et Γ_2 des cercles passant par P et ayant pour centres I_1 et I_2 respectivement. Soit Q le second point d'intersection de Γ_1 avec Γ_2. Soit X_1 et Y_1 les points d'intersection de Γ_1 avec (AB) et (BC) respectivement et qui sont proches de B et soit X_2 et Y_2 les points d'intersection de Γ_2 avec (AC) et (BC). respectivement et qui sont proches de C. Montrer que les droites (X_1Y_1), (X_2Y_2) et (PQ) sont concourantes.

Exercice 9. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et du segment $[AC]$. La droite parallèle au segment $[BC]$ passant par le point D coupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point P, de sorte que le point P appartienne au petit arc AC. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{APD} = \widehat{BPM}$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle isocèle en C et $\mathcal{C}$ son cercle circonscrit. Soit D un point de $\mathcal{C}$ différent de B et C et situé sur le petit arc de cercle $\widehat{BC}$. Soit E l'intersection de (CD) et (AB). Démontrer que la droite (BC) est tangente au cercle circonscrit du triangle BDE.

Exercice 11. Soit deux cercles Γ_1 et Γ_2 tangents extérieurement (c'est-à-dire, ils sont tous les deux tangents à une même droite (d) et sont de part et d'autre de cette droite) en un point B. Soit A sur Γ_1 et C sur Γ_2 tels que la tangente en A à Γ_1 et la tangente en C à Γ_2 soient parallèles et que B soit positionné entre les deux tangentes. Montrer que A, B, C sont alignés

Exercice 12. Soit un triangle ABC. Soit D le pied de la hauteur du triangle ABC issue de A. On note E le pied de la hauteur du triangle ABD issues de D. On note F le pied de la hauteur du triangle ACD issue de D. Démontrer que les points B, C, E, F sont cocycliques.

Exercice 13. Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle Γ tel que $[AB]$ est un diamètre du cercle Γ. Les droites (AC) et (BD) s'intersectent en E, les droites (AD) et (BC) s'intersectent en F. Le segment $[EF]$ coupe Γ en G et la droite (EF) coupe (AB) en H. On suppose que G est le milieu de $[FH]$.
Montrer que E est le milieu de $[GH]$.

Exercice 14. Considérons un quadrilatère $PQRS$ tel que $|PQ| = |QR| = |RS|$, $\widehat{PQR} = 110^o$ et $\widehat{QRS} = 130^o$. Calculer la valeur de $\widehat{SPQ}$ and $\widehat{RSP}$.

Exercice 15. Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $AB < AC$. Soit D le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et du segment $[AC]$. La droite parallèle au segment $[BC]$ passant par le point D coupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point P, de sorte que le point P appartienne au petit arc AC. Soit M le milieu du segment $[AB]$. Montrer que $\widehat{APD} = \widehat{BPM}$.

Exercice 16. Dans un triangle ABC, on pose O le centre du cercle circonscrit et t une droite tangente au cercle circonscrit du triangle BCO. On note D et E les intersections de t avec (AB) et (AC), ainsi que A' le symétrique de A par rapport a t.
Montrer que les cercle circonscrit aux triangle DEA' et ABC sont tangents.

Exercice 17. Soit ABC un triangle. P un point du plan. On nomme respectivement A', $\overline{A}$ les projections respectives de P sur (BC) et sur la hauteur issue de A. On construit de même B', $\overline{B}$ et C', $\overline{C}$.
Montrer que $A'\overline{A}$, $B'\overline{B}$ et $C'\overline{C}$ sont concourantes.

Exercice 18. On fixe un cercle Γ du plan, l une ligne tangente à Γ et Ω un cercle n'intersectant pas l tel que Γ et Ω soit situé de part et d'autre de l. On fait varier un point X sur Ω. On nomme Y et Z les deux points de l tel que (XY) et (XZ) soit tangents à Γ. Montrer que lorsque X varie sur Ω, le cercle circonscrit à XYZ est tangent à deux cercles fixes.