Cours en ligne 2024
paul.averous@polytechnique.edu

Puissance d'un point et Axes Radicaux

Paul Averous

09 novembre 2024

Exercice 1 :

Deux cercles Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en A et B. Une tangente commune à ces deux cercles les coupent en C et D respectivement. Montrer que (AB) coupe $[CD]$ en son milieu

Exercice 2 :

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints exterieurs l'un à l'autre. On trace les 4 tangentes communes à ces cercles et pour chaque tangente, on place le milieu du segment formé par les deux points de contact aux deux cercles. Montrer que les milieux sont alignés.

Exercice 3 :

Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. Soit X un point de (PQ). Une droite d_1 passant par X coupe Γ_1 en A et B et une droite d_2 passant par X coupe Γ_2 en C et D. Montrer que $ABCD$ est cyclique.

Exercice 4 :

Montrer en utilisant les outils de ce cours que les hauteurs d'un triangle sont concourantes.

Exercice 5 :

Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H. Soit E et F les pieds des hauteurs issues de B et C. On note J le milieu de $[HB]$ et K le milieu de $[HC]$. Montrer que $JKEF$ est cyclique.

Exercice 6 :

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune exterieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune exterieure à ces deux cercles les coupe en D et C respectivement. La droite (BD) recoupe ω_1 en P et ω_2 en Q. Montrer que $BQ = DP$.

Exercice 7 :

Soit ABC un triangle acutangle tel que $AC < AB$ et soit ω son cercle circonscrit. La tangente au cercle ω en A intersecte (BC) en P. Soit M le milieu du segment $[PA]$ et R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle ω. La droite (PR) recoupe ω en S. Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Exercice 8 :

Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en $U \neq V$, A, X des points de C_1 et B, Y des points de C_2. On suppose que les angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$ sont droits. Montrer que (AX), (BY) et (UV) sont concourantes.

Exercice 9 :

Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note M et N les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On note P l'orthocentre du triangle formé par les droites (AB), (CD) et (AD) et Q l'orthocentre du triangle formé par les droites (AB), (CD) et (BC). Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 10 : *IMO 1995, P1*

Soient A, B, C et D quatre points distincts alignés dans cet ordre. Soient Γ_1 et Γ_2 les cercles de diamètres respectifs $[AC]$ et $[BD]$, qui s'intersectent en X et Y. On considère O un point arbitraire sur (XY) qui ne soit pas sur la droite originelle. (CO) recoupe Γ_1 en M, (BO) recoupe Γ_2 en N. Montrer que (AM), (DN) et (XY) sont concourantes.