Chasse aux Angles

Groupe A

9 novembre 2024

Exercice 1
Soit ABC un triangle, on note H son orthocentre, et H_A, H_B, H_C les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. Montrer que B, C, H_B, H_C sont cocycliques, et que A, H_B, H_C, H sont cocycliques.

Exercice 2
Soit un cercle Γ et P un point à l'extérieur de Γ. Soient A et B les points sur Γ tels que les droites (PA) et (PB) sont les deux tangentes à Γ passant par P. Montrer que PAB est isocèle en P.

Exercice 3
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en X et Y. Soit (d_1) une droite passant par X et (d_2) une droite passant par Y. On note A et A' les points d'intersection de (d_1) avec Γ_1 et Γ_2 respectivement, et de même B et B' les points d'intersection de (d_2) avec Γ_1 et Γ_2 respectivement. Montrer que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Exercice 5 (Théorème du pôle Sud)
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe la médiatrice de $[BC]$ S. Montrer que S appartient à Γ.

Exercice 6 (Théorème de Miquel)
Soit ABC un triangle, D, E et F des points sur les côtés $[BC]$, $[AC]$ et $[AB]$ respectivement. Les cercles circonscrits à AEF et BDF s'intersectent une deuxième fois en M. Montrer que les points C, D, E, M sont cocycliques.

Exercice 7
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ et d'orthocentre H.
Montrer que le symétrique de H par rapport à un côté de ABC appartient à Γ.
Montrer que le symétrique de H par rapport au milieu d'un des côtés de ABC appartient à Γ.

Exercice 8 (Droite de Simson)
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Soit P un point de Γ et D, E, F les projetés orthogonaux de P sur $(AB), (BC), (CA)$ respectivement. Montrer que D, E, F sont alignés.

Exercice 9
Soit ABC un triangle dont O est le centre du cercle circonscrit. On note (d) une droite perpendiculaire à (AO). La droite (d) intersecte les côtés (AB) et (AC) en les points D et E respectivement. Montrer que les points C, D, E, M sont cocycliques.

Exercice 10
Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} > 90°$, Γ son cercle circonscrit et O le centre du cercle circonscrit. Le cercle circonscrit à AOB recoupe $[BC]$ en un point D. Montrer que (OD) est perpendiculaire à (AC).

Exercice 11
Soit A un point sur un cercle Γ de centre O. Sur la tangente en A on pose deux points B, C tels que C soit entre A et B. (BD) et (CE) sont les tangentes à Γ passant par B et C, avec D et E les points de tangence.
Montrer que $\widehat{DAE} = \widehat{BOC}$

Exercice 12
Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$, et O, I, H le centre du cercle circonscrit, le centre du cercle inscrit et

l'orthocentre de ABC respectivement.
Montrer que B, C, O, I, H sont cocycliques, puis montrer que OIH est isocèle.

Exercice 13 (Une preuve du théorème de l'angle tangent)
Cet exercice est à faire sans le théorème de l'angle tangent
Soit ω un cercle de diamètre $[BC]$. Soit A un point sur la tangente en ω en B. Le cercle de centre B et de rayon BA recoupe ω en un point D, de sorte que A et D sont du même côté de (BC). La droite (AD) recoupe ω en un point E. Montrer que $\widehat{ABD} = \widehat{AEB}$