Coupe Animath d'Automne

2 octobre 2024

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.

  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.

  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.

  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.

  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.

  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{(2039-2024)^2}{9}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Soit ABC un triangle et soit D un point sur le segment $[BC]$ (autre que B et C). Soit P le point sur le segment $[AB]$ tel que (DP) est la bissectrice de $\widehat{ADB}$, et soit Q le point sur le segment $[AC]$ tel que (DQ) est la bissectrice de $\widehat{CDA}$.

Que vaut l'angle $\widehat{QDP}$?

Exercice 3. Soient a, b et n trois entiers strictement positifs tels que a et b divisent n et $n = a+b+ab$. Montrer que $a = b$.

Exercice 4. Sur chaque sommet d'un octogone, Anna écrit en bleu un entier strictement positif (les 8 entiers ainsi écrits ne sont pas forcément distincts). Puis, sur chaque arête de l'octogone, Anna écrit en rouge le produit des deux entiers bleus écrits aux extrémité de cette arête. Anna peut-elle choisir les entiers bleus de sorte que les entiers rouges soient exactement $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et 8 (pas forcément dans cet ordre) ?

Exercice 5. On considère une grille 2024×2024. Quentin dispose de k couleurs et colorie chacune des 2024^2 cases de la grille avec l'une de ces k couleurs, de sorte que chaque couleur est utilisée au moins une fois. Déterminer le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante :

Quel que soit le coloriage de Quentin, on peut toujours trouver trois cases C_1, C_2 et C_3 de couleurs deux à deux distinctes telles que C_1 et C_2 sont sur la même ligne et C_2 et C_3 sont sur la même colonne.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un carré, et soient E et F les points à l'extérieur de $ABCD$ tels que ABE et DAF sont équilatéraux. On note H le milieu de $[EF]$ et G le point d'intersection des droites (BF) et (CE). Montrer que $GH = GC$.

Exercice 7. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que

$$a+b \geqslant ab\ , \quad b+c \geqslant bc \text{ et } c+a \geqslant ca.$$

Montrer que $a+b+c \geqslant \dfrac{3}{4}abc$.

Exercices lycéens

Exercice 8. Soient x et y des réels non nuls tels que $x + y = 2024xy$. Calculer

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soient $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ deux entiers. On suppose que

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a}{b} = 1.$$

Montrer que $\frac{a}{b}$ et $\frac{a-1}{b-1}$ sont des entiers.

Exercice 10. Déterminer s'il existe cinq points du plan A, B, C, D et P tous distincts et vérifiant les conditions suivantes :

- le quadrilatère $ABCD$ est non croisé ;
- le point P se trouve strictement à l'intérieur de ce quadrilatère ;
- les segments $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$ et $[DP]$ sont tous contenus à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$;
- on a les égalités de longueurs $AP = AB, BP = BC, CP = CD$ et $DP = DA$.

Exercice 11. On considère une grille 2024×2024. Quentin dispose de k couleurs et colorie chacune des 2024^2 cases de la grille avec l'une de ces k couleurs, de sorte que chaque couleur est utilisée au moins une fois. Déterminer le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante :

Quel que soit le coloriage de Quentin, on peut toujours trouver trois cases C_1, C_2 et C_3 de couleurs deux à deux distinctes telles que C_1 et C_2 sont sur la même ligne et C_2 et C_3 sont sur la même colonne.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un carré, et soient P et Q les points à l'extérieur de $ABCD$ tels que ABP et DAQ sont équilatéraux. On note M le milieu de $[PQ]$ et N le point d'intersection des droites (BQ) et (DP). Calculer $\frac{NM}{NC}$.

Exercice 13. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers. On suppose, pour tous les entiers $k \geqslant 1$ et tout $\ell \geqslant 1$, que $k + \ell$ divise $a_k + a_\ell$. Montrer, pour tous les entiers $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ avec $k \neq \ell$, que $k - \ell$ divise $a_k - a_\ell$.

Exercice 14. Cent nombres réels sont placés autour d'un cercle, de sorte que chaque nombre est strictement plus grand que la somme des deux nombres qui le suivent (dans le sens des aiguilles d'une montre). Déterminer le nombre maximal de réels strictement positifs sur ce cercle.

Exercice 15. Déterminer le plus petit réel α ayant la propriété suivante :

Quels que soient les réels $x_1, \ldots, x_{2024}$, il existe toujours un indice i compris entre 1 et 2024 (au sens large) tel que

$$\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \{x_i - x_3\} + \ldots + \{x_i - x_{2023}\} + \{x_i - x_{2024}\} \leqslant \alpha.$$

On rappelle que $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire *du réel x, c'est-à-dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, autrement dit le plus grand entier inférieur ou égal à x.*
Par exemple $\{1,2\} = 0,2$, $\{3\} = 0$ et $\{-2,4\} = 0,6$.