Coupe Animath de Printemps

2 octobre 2024

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{(2039-2024)^2}{9}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 Le numérateur vaut $(2039-2024)^2 = 15^2 = (3\times 5)^2$. On peut dès lors simplifier le numérateur et le dénominateur :

$$\frac{(2039-2024)^2}{9} = \frac{3^2 \times 5^2}{9} = 5^2 = 25.$$

Solution alternative n°1 On peut aussi calculer la fraction de la façon suivante :

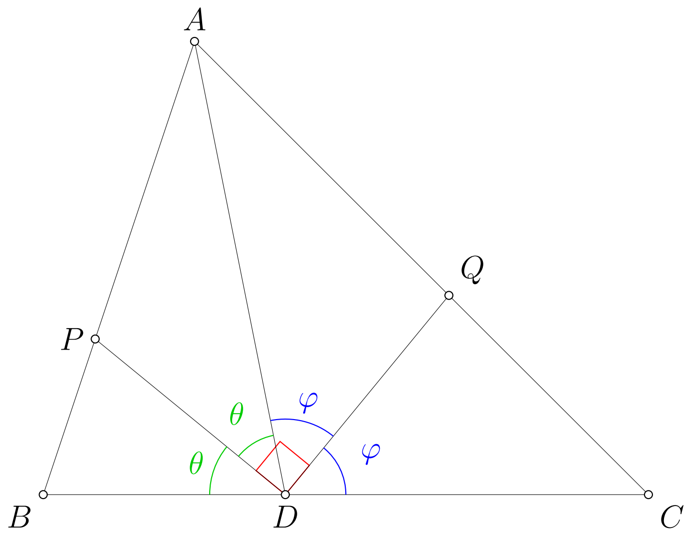
$$\frac{(2039-2024)^2}{9} = \frac{(2039-2024)^2}{3^2} = \left(\frac{15}{3}\right)^2 = 5^2 = 25.$$

Commentaire des correcteurs De manière générale, le problème a été très bien réussi par la plupart des élèves.

Exercice 2. Soit ABC un triangle et soit D un point sur le segment $[BC]$ (autre que B et C). Soit P le point sur le segment $[AB]$ tel que (DP) est la bissectrice de $\widehat{ADB}$, et soit Q le point sur le segment $[AC]$ tel que (DQ) est la bissectrice de $\widehat{CDA}$.

Que vaut l'angle $\widehat{QDP}$?

Solution de l'exercice 2



Puisque (DQ) est la bissectrice de $\widehat{CDA}$, on a

$$\widehat{CDQ} = \widehat{QDA} = \varphi.$$

Puisque (DP) est la bissectrice de $\widehat{ADB}$, on a

$$\widehat{ADP} = \widehat{PDB} = \theta.$$

Remarquons également que :

$$\widehat{QDP} = \widehat{QDA} + \widehat{ADP} = \varphi + \theta.$$

Or, un angle plat vaut $180°$, et donc :

$$180° = \widehat{CDB} = \widehat{CDQ} + \widehat{QDA} + \widehat{ADP} + \widehat{PDB} = \varphi + \varphi + \theta + \theta = 2(\varphi + \theta).$$

On en déduit que $\varphi + \theta = \dfrac{180°}{2} = 90°$. Or on a montré que $\widehat{QDP} = \varphi + \theta$.
On en conclut que $\widehat{QDP} = 90°$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été globalement très bien réussi. La plupart des erreurs vient d'élèves ne connaissant pas la définition d'une bissectrice, la confondant avec la hauteur, et d'élèves traitant seulement une configuration particulière (supposer que ABC est isocèle rectangle ou équilatéral, ou encore que D est le pied de la hauteur issue de A dans ABC).

Exercice 3. Soient a, b et n trois entiers strictement positifs tels que a et b divisent n et $n = a+b+ab$. Montrer que $a = b$.

Solution de l'exercice 3 Puisque a divise n, on déduit que a divise le nombre $n-a-ab = b$. On dispose donc d'un entier k tel que $b = ka$. Comme a et b sont strictement positifs, $k > 0$. De la même façon, on montre que b divise a. On dispose donc d'un entier ℓ tel que $a = \ell b$. En mettant bout à bout les égalités, on trouve

$$b = ka = k \times \ell b.$$

On déduit que $k \times \ell = 1$. k et ℓ sont donc des diviseurs de 1, donc ils valent 1 ou -1. Comme $k > 0$, on a $k = 1$. Donc $b = ka = a$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été beaucoup abordé mais dans l'ensemble peu réussi pour sa position. Un bon nombre a eu les bonnes idées et a pensé à effectuer des combinaisons linéaires, ou à exprimer $\frac{b}{a}$ et $\frac{a}{b}$ en fonction d'entiers.

Parmi les erreurs récurrentes, on retrouve les suivantes.

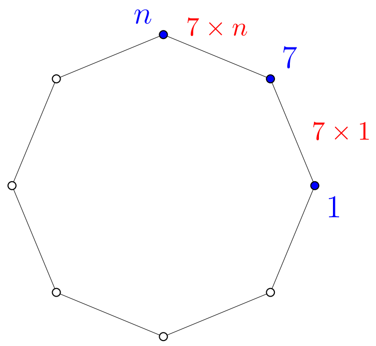
- ▷ Traiter des exemples. Vérifier l'énoncé pour des valeurs particulières de n, a, b ne suffit pas à le traiter dans le cas général.
- ▷ Supposer que $a = b$ pour en déduire que $a = b$: on ne peut pas supposer ce que l'on veut montrer, cela revient à faire un raisonnement circulaire, on tourne en rond.
- ▷ Affirmer que si a et b divisent n alors $a \times b$ divise n. Ceci n'est vrai que lorsque a et b sont premiers entre eux. Par exemple 2 et 4 divisent 12 mais $8 = 2 \times 4$ ne le divise pas.
- ▷ Appliquer le lemme de Gauss sans vérifier que les entiers sont premiers entre eux.

D'autres élèves ont perdu des points en ne justifiant pas. On ne pouvait par exemple pas se contenter d'affirmer que si a divise $a + b + ab$ alors a divise b sans aucune justification : c'était le cœur de l'exercice.

Exercice 4. Sur chaque sommet d'un octogone, Anna écrit en bleu un entier strictement positif (les 8 entiers ainsi écrits ne sont pas forcément distincts). Puis, sur chaque arête de l'octogone, Anna écrit en rouge le produit des deux entiers bleus écrits aux extrémité de cette arête. Anna peut-elle choisir les entiers bleus de sorte que les entiers rouges soient exactement $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$ et 8 (pas forcément dans cet ordre) ?

Solution de l'exercice 4 On va montrer que ce n'est pas possible. Comme il y a 8 entiers à obtenir et on peut effectuer 8 produits, il faut donc que chaque produit soit différent des autres.

En particulier il faut qu'on puisse obtenir le nombre 7. C'est un nombre premier et la seule façon de l'écrire comme produit de deux entiers est $7 = 7 \times 1$, il faut qu'on ait deux sommets voisins 7 et 1 sur l'octogone.



Notons n le voisin, autre que 1, de 7. On obtient alors les produits $7 \times 1 = 7$ et $7 \times n = 7n$, qui sont deux nombres divisibles par 7. Or il n'y a qu'un seul nombre divisible par 7 parmi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (qui est 7), et par la remarque faite au début, il faut que les produits soient deux à deux distincts. C'est donc impossible.

On ne peut donc pas placer des entiers comme demandé par l'énoncé.

Remarque 1 : la preuve fonctionne de la même manière si au lieu d'utiliser 7 on utilise 5.

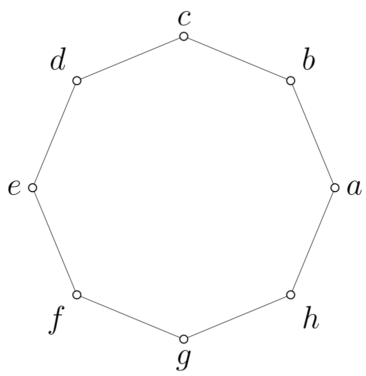
Remarque 2 : La preuve précédente s'adapte pour démontrer l'énoncé suivant, qui correspond à l'exercice dans un cadre plus général (en remplaçant 8 par un entier n quelconque). Sur chaque sommet d'un polygone régulier à n côtés, Anna écrit en bleu un entier strictement positif. Puis, sur chaque arête du polygone, Anna écrit en rouge le produit des deux entiers bleus écrits aux extrémités de cette arête. Alors il est impossible pour Anna de choisir les entiers bleus de sorte que les entiers rouges soient $1, 2, \ldots, n$ dans un certain ordre.

La solution de cet énoncé génral nécessite un résultat dont la preuve dépasse le programme du lycée, appelé *le postulat de Bertrand* qui s'énoncé comme suit :

Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. il existe un nombre premier p tel que $n < p < 2n$.

Supposons maintenant par l'absurde qu'Anna puisse choisir les entiers bleus de sorte que les entiers rouges soient $1, \ldots, n$. Soit p le plus grand nombre premier inférieur ou égal à n. Si on avait $2p \leqslant n$, on aurait d'après le postulat de Bertrand un nombre premier q tel que $p < q < 2p \leqslant n$, ce qui contredirait la maximalité de p. Ainsi, $p \leqslant n < 2p$. Comme p est parmi les nombres $1, \ldots, n$, il existe deux entiers bleus adjacents dont le produit vaut p. Comme p est premier, la seule manière d'obtenir p comme produit de deux entiers est que p soit l'un des deux nombres bleus adjacents. Mais p divise deux nombres rouges. Or les nombres rouges sont deux à deux distincts et parmi les nombres $1, \ldots, n$, il n'y a qu'un seul multiple de p. Ceci conclut.

Solution alternative n°1 Supposons que c'est possible, on note a, b, c, d, e, f, g, h les entiers dans cet ordre sur les sommets de l'octogone.



Les huit produits $a \times b, b \times c, c \times d, d \times e, e \times f, f \times g, g \times h$ et $h \times a$ donnent les entiers $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$ (pas forcément dans cet ordre).
Alors le produit

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$$

est égal au produit

$$(a \times b) \times (b \times c) \times (c \times d) \times (d \times e) \times (e \times f) \times (f \times g) \times (g \times h) \times (h \times a).$$

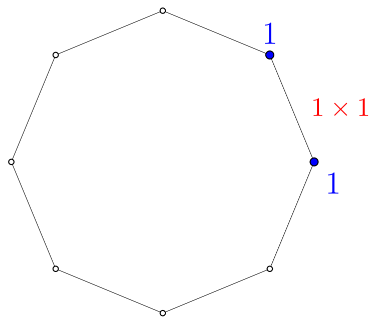
En notant $N = a \times b \times c \times d \times e \times f \times g \times h$, on a alors :

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = N^2.$$

C'est impossible, car $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8$ n'est pas le carré d'un entier. On peut le justifier en remarquant qu'il est divisible par 7 mais pas par 49, ou bien par 5 mais pas par 25, ou encore écrire $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 = (8 \times 3)^2 \times 70$, et 70 n'est pas le carré d'un entier.

Solution alternative n°2 On va montrer que ce n'est pas possible.

Puisque l'on veut que 1 soit produit de deux entiers voisins, la seule façon de procéder est d'écrire $1 = 1 \times 1$. Il existe donc deux sommets consécutifs avec un 1.



Remarquons à présent que si p est un nombre premier, la seule façon de faire est d'écrire $p = p \times 1$. Or il y a quatre nombres premiers parmi $1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8$, à savoir $2, 3, 5, 7$. Il faut donc placer au moins un troisième 1 sur le cercle (sinon on n'aura pas assez de 1 pour obtenir les quatre nombres premiers), et il faut également les nombres $2, 3, 5, 7$. On sait donc que parmi les sommets de l'octogone, il y a $1, 1, 1, 2, 3, 5, 7$ (ce qui donne 7 nombres sur 8). Essayons de déterminer le huitième nombre.

Comme il faut pouvoir écrire $4 = 4 \times 1 = 2 \times 2$, il faut soit avoir un deuxième 2 parmi les sommets, soit avoir un 4. Si on ajoute un deuxième 2, on aura les sommets $1, 1, 1, 2, 2, 3, 5, 7$ (dans un certain ordre), et il n'y a alors aucun moyen d'obtenir 8. Il faut donc ajouter un 4. Finalement, nos 8 sommets sont $1, 1, 1, 2, 3, 4, 5, 7$, dans un certain ordre.

On finit par aboutir à une contradiction, en remarquant le fait suivant : le nombre 2 doit être voisin de 1 (car la seule manière d'écrire 2 est 2×1), il doit être voisin de 3 (car la seule manière d'écrire 6

avec les nombres ci-dessus est 2×3), et il doit être voisin de 4 (car la seule manière d'écrire 8 avec les nombres ci-dessus est 2×4). Il doit donc avoir au moins 3 voisins, or il n'en a que 2, c'est donc impossible.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été très bien abordé pour sa difficulté, et de nombreux élèves ont obtenu un nombre significatif de points. Cependant, il était ici assez facile de s'embrouiller dans ses arguments et d'affirmer des résultats erronés, comme le fait qu'il faut écrire au moins 5 fois le nombre 1 pour obtenir tous les nombres premiers (on rappelle d'ailleurs que 1 n'est pas un nombre premier). Il était essentiel de faire plusieurs exemples pour se convaincre de ses affirmations et avoir une meilleure intuition du problème. On déplore également un grand nombre de copies correctes, qui ne justifiaient pas leurs affiremations et ont ainsi subi des pertes de points facilement évitables. Un dessin était le bienvenu pour expliquer ses arguments, et valait souvent mieux que de longues phrases. De plus, on rappelle l'importance de relire l'énoncé, car certains élèves ont confondu somme et produit, ou cru que les nombres pouvaient ne pas être entiers.

Exercice 5. On considère une grille 2024×2024. Quentin dispose de k couleurs et colorie chacune des 2024^2 cases de la grille avec l'une de ces k couleurs, de sorte que chaque couleur est utilisée au moins une fois. Déterminer le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante :

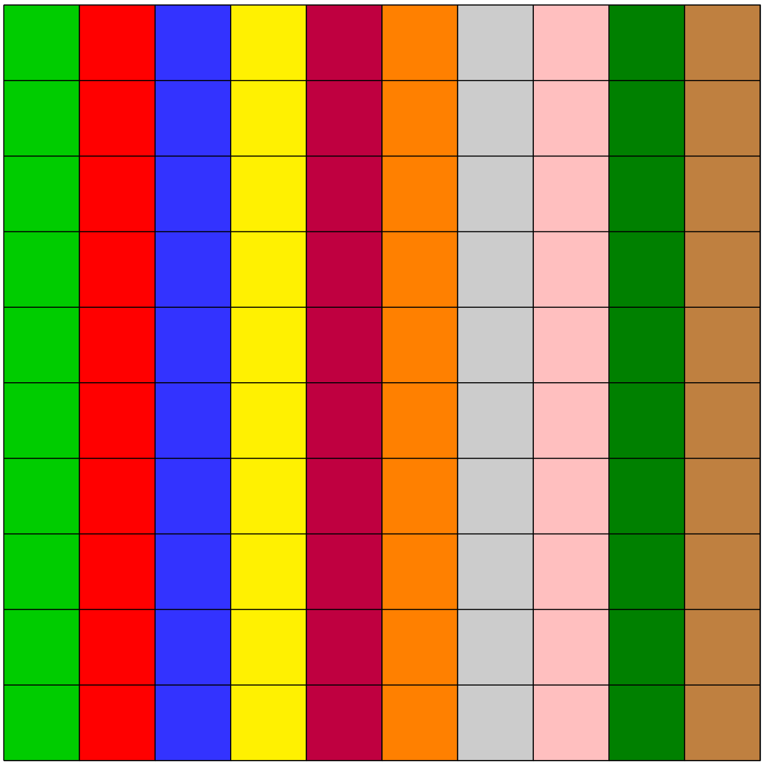
Quel que soit le coloriage de Quentin, on peut toujours trouver trois cases C_1, C_2 et C_3 de couleurs deux à deux distinctes telles que C_1 et C_2 sont sur la même ligne et C_2 et C_3 sont sur la même colonne.

Solution de l'exercice 5 **Réponse :** 2025

Le problème demande de déterminer le plus petit entier k vérifiant une certaine propriété. Il contient nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si $k \leqslant 2024$, alors k ne vérifie pas la propriété (cette étape s'appelle *l'analyse*). Dans une second temps, on montre que $k = 2025$ vérifie la propriété (cette étape s'appelle la *synthèse*).

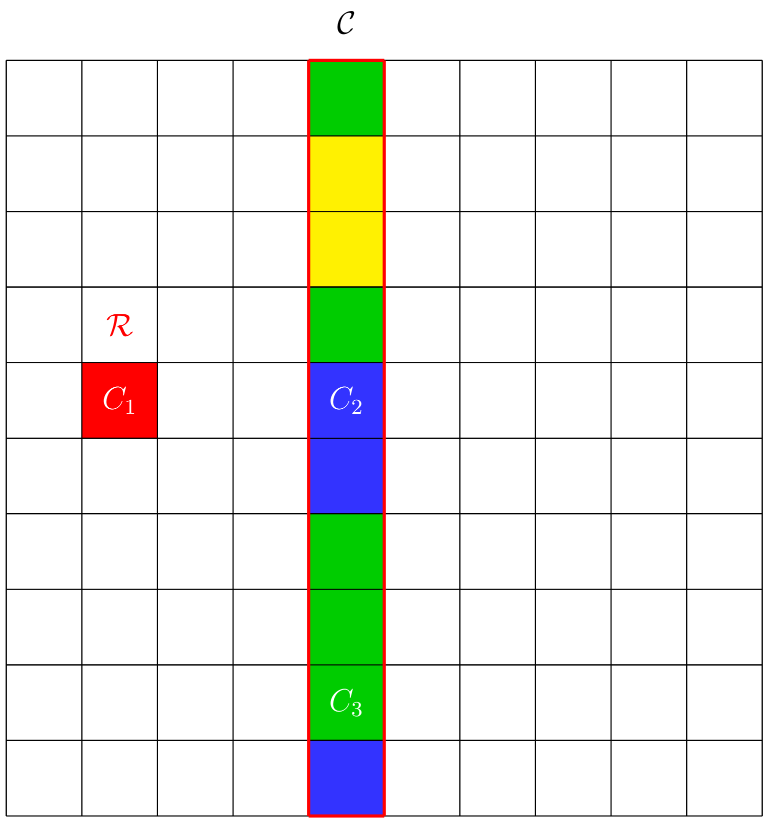
Analyse :

Supposons que Quentin dispose de $k \leqslant 2024$ couleurs. Considérons le coloriage dans lequel toutes les cases de la $i-$ème colonne en partant de la gauche est coloriée avec la $i-$ème couleur, et où toutes les cases des $2024 - k$ colonnes les plus à droites sont coloriées avec la première couleur. Dans un tel coloriage, chaque couleur a été utilisée au moins une fois. Or, deux cases d'une même colonne étant toujours de la même couleur, on ne peut trouver trois cases satisfaisant l'énoncé. Ainsi, si $k \leqslant 2024$, k ne vérifie pas l'énoncé.



Synthèse :

Montrons que Quentin peut toujours satisfaire l'énoncé avec 2025 couleurs. Considérons un coloriage quelconque de la grille dans lequel chaque couleur a été utilisée au moins une fois. Tout d'abord, si toutes les cases d'une même colonne étaient toujours de la même couleur, comme il y a 2024 colonnes, il y aurait au plus 2024 couleurs utilisées. Ainsi, il existe au moins une colonne $\mathcal{C}$ contenant des cases de couleur différente. Comme il y a 2025 couleurs, il existe une couleur $\mathcal{R}$ telle qu'aucune case de la colonne $\mathcal{C}$ n'est de la couleur $\mathcal{R}$. Puisque toutes les couleurs sont utilisées, la grille contient une case, notée C_1, de la couleur $\mathcal{R}$ et n'appartenant pas à la colonne $\mathcal{C}$. Notons C_2 la case de la colonne $\mathcal{C}$ appartenant à la même ligne que C_1. On a établi que la colonne $\mathcal{C}$ contient une autre case, notée C_3, qui n'est pas de la même couleur que C_2, et qui n'est pas, par hypothèsé, de la couleur $\mathcal{R}$. Les cases C_1, C_2 et C_3 satisfont alors l'énoncé.



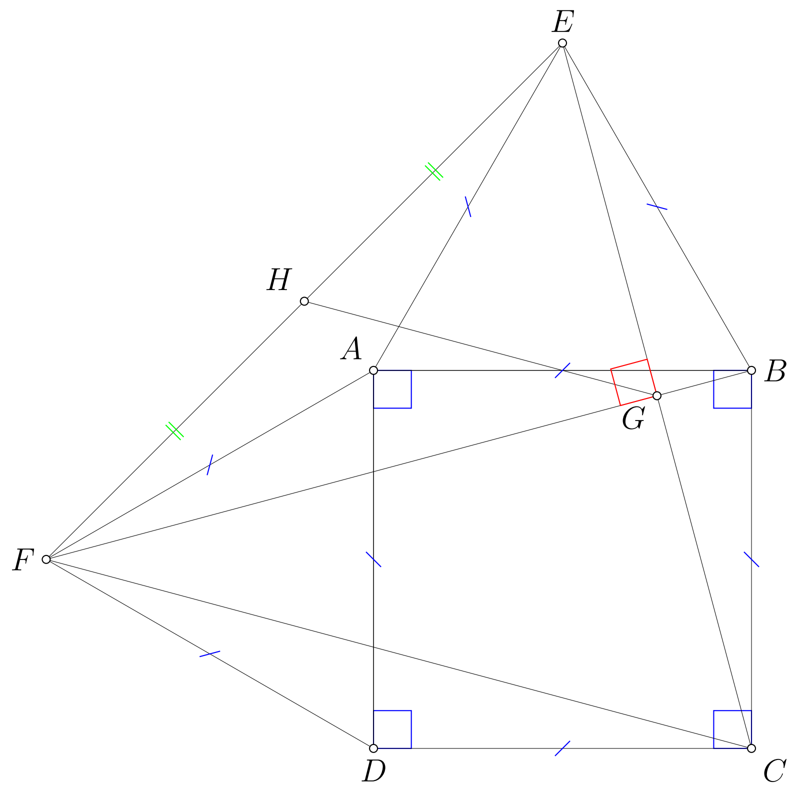
Commentaire des correcteurs Le problème a été assez inégalement réussi. Voici les principales erreurs commises par les différents élèves :

- L'exercice comprenait deux parties : la partie le plus facile qui consistait à montrer que si $m \leq 2024$ il y a un coloriage pour lequel on ne peut pas trouver les 3 cases demandées et la partie difficile consistant à montrer que pour 2025 on peut trouver forcément les 3 cases demandées par l'énoncé. Même si des élèves oublient régulièrement l'une ou l'autre étape une partie des élèves a bien assimilé les corrigés des coupes Animath passées et ont explicitement fait une phase d'analyse et une phase de synthèse. Même si celles-ci n'étaient pas forcément juste les correcteurs ont noté un bel effort de rédaction.
- Un schéma ne peut pas remplacer une preuve. Ceci dit un schéma aide très souvent à comprendre la preuve et à se rendre compte de potentielles cas particuliers parfois oubliés. Donc il ne faut pas hésiter à faire des schémas pour illustrer son propos.
- Certains n'ont pas compris le problème et répondu des réponses peu cohérentes : $2, 3, 4$ ou des réponses de l'ordre de 2024^2. Il fallait trouver le plus petit k tel que quelque soit le coloriage Quentin peut trouver 3 cases vérifiant l'énoncé. Exhiber un coloriage avec 3 couleurs ne montre pas que 3 fonctionne. Il est donc important de bien relire les énoncés les plus complexes du sujet car en s'attaquant au mauvais problème on obtient généralement 0 point.
- Beaucoup d'élèves ont cru que les 3 cases devaient être voisines. Comme ce n'est pas mentionné ça n'a pas de raison d'être vrai.
- Certains élèves ont cherché un exemple pour $k = 2024$ par exemple en colorant chaque colonne d'une couleur distincte. Et ceux-ci ont décrété que comme si on rajoute une couleur à ce coloriage on a un contre-exemple il n'existe aucun coloriage avec 2025 couleurs vérifiant l'énoncé. Cela n'est pas rigoureux : ce qui vous semble être le pire cas pour 2024 n'est pas forcément le pire cas pour 2025 et ne permet pas de traiter le cas général et tous les coloriages possibles.

- De nombreux élèves ont prouvé qu'il y avait une colonne avec au moins deux couleurs et une ligne avec au moins deux couleurs et en ont déduit que les 3 cases demandées par l'énoncé existaient. C'est en fait faux : si la ligne et la colonne sont colories avec les deux mêmes couleurs ça ne fonctionne pas.
- Beaucoup d'affirmations sont fausses : tout fait affirmé doit être prouvé et il faut envisager tous les coloriages possibles case par case.
- plusieurs élèves ont affirmé que si deux cases de couleur différente (disons rouge et bleu) sont sur la même ligne alors les colonnes correspondantes sont monochromes. Ce n'est pas vrai : celles-ci peuvent etre composées de cases rouge et bleu.
- Dans une grille le plus simple pour désigner une case est d'utiliser la notation (a, b) où a désigne le numéro de la ligne et b celui de la colonne. Cela évite d'avoir des indices parfois peu clairs.

Exercice 6. Soit $ABCD$ un carré, et soient E et F les points à l'extérieur de $ABCD$ tels que ABE et DAF sont équilatéraux. On note H le milieu de $[EF]$ et G le point d'intersection des droites (BF) et (CE). Montrer que $GH = GC$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>



Remarquons en premier lieu que EBC est isocèle en B, et que

$$\widehat{EBC} = \widehat{EBA} + \widehat{ABC} = 60^\circ + 90^\circ = 150^\circ.$$

La somme des angles d'un triangle étant de 180°, on en déduit

$$\widehat{CEB} = \widehat{BCE} = \frac{180^\circ - 150^\circ}{2} = 15^\circ.$$

De la même manière, $\widehat{DFC} = \widehat{FCD} = 15^\circ$, et $\widehat{BFA} = \widehat{ABF} = 15^\circ$.

On remarque alors que $\widehat{EGF} = 90^\circ$. En effet, on a d'une part

$$\widehat{GBC} = \widehat{ABC} - \widehat{ABG} = 90^\circ - 15^\circ = 75^\circ.$$

On a d'autre part $\widehat{BCG} = 15^\circ$. On en déduit que

$$\widehat{EGF} = \widehat{CGB} = 180^\circ - \widehat{BCG} - \widehat{GBC} = 180^\circ - 75^\circ - 15^\circ = 90^\circ.$$

Le triangle EGF est alors rectangle en G, et H est le milieu de l'hypothénuse $[EF]$, c'est donc le centre du cercle circonscrit. Ainsi $GH = HE = HF$ donc $\boxed{GH = \frac{EF}{2}}$.

On souhaite à présent calculer GC.
Rappelons que $\widehat{BCE} = \widehat{FCD} = 15^\circ$, il en vient que

$$\widehat{ECF} = \widehat{BCD} - \widehat{BCE} - \widehat{FCD} = 90^\circ - 15^\circ - 15^\circ = 60^\circ.$$

De plus, $CE = CF$ car les triangles CDF et CBE sont égaux (on peut également argumenter par symétrie de la figure par rapport à (CA)).
Le triangle est alors isocèle avec un angle de $60°$, il est donc équilatéral. En effet

$$\widehat{CFE} = \widehat{FEC} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$$

donc en fait tous les angles valent $60°$.
En particulier $\boxed{EF = EC}$. De plus, $[FG]$ est la hauteur issue de F dans EFC équilatéral, c'est donc aussi la médiatrice. Ainsi G est le milieu de $[EC]$: $\boxed{GC = \frac{EC}{2}}$.

Finalement, on a montré que $GH = \frac{EF}{2} = \frac{EC}{2} = GC$, comme voulu.

Solution alternative n°1 On présente ici une façon alternative de conclure une fois qu'on a montré que $\widehat{EGF} = 90°$.

Comme $\widehat{BAE} = \widehat{FAD} = 60°$, et $\widehat{DAB} = 90°$, on en déduit que :

$$\widehat{EAF} = 360° - \widehat{BAE} - \widehat{DAB} - \widehat{FAD} = 360° - 60° - 60° - 60° = 150°.$$

Remarquons alors que $AF = BC = AE = BE$ et $\widehat{EAF} = 150° = \widehat{EBC}$. Les triangles EAF et EBC ont un angle en commun, et les côtés adjacents à cet angle égaux. On en déduit qu'ils sont égaux, et donc $EF = EC$.

De même que dans la solution principale, on remarque que $HG = HE = \frac{EF}{2}$. De plus, $BE = BC$ et (BG) est perpendiculaire à $[EC]$, donc G est le milieu de $[EC]$. On en déduit que $GC = \frac{EC}{2}$, et finalement $GC = GH$.

Solution alternative n°2 On présente ici une façon alternative de conclure une fois qu'on a montré que $\widehat{EGF} = 90°$.

Comme $\widehat{BAE} = \widehat{FAD} = 60°$, et $\widehat{DAB} = 90°$, on en déduit que :

$$\widehat{EAF} = 360° - \widehat{BAE} - \widehat{DAB} - \widehat{FAD} = 360° - 60° - 90° - 60° = 150°.$$

Comme $AE = AF$, le triangle EAF est isocèle en A, et donc

$$\widehat{FEA} = \widehat{AFE} = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

Ainsi

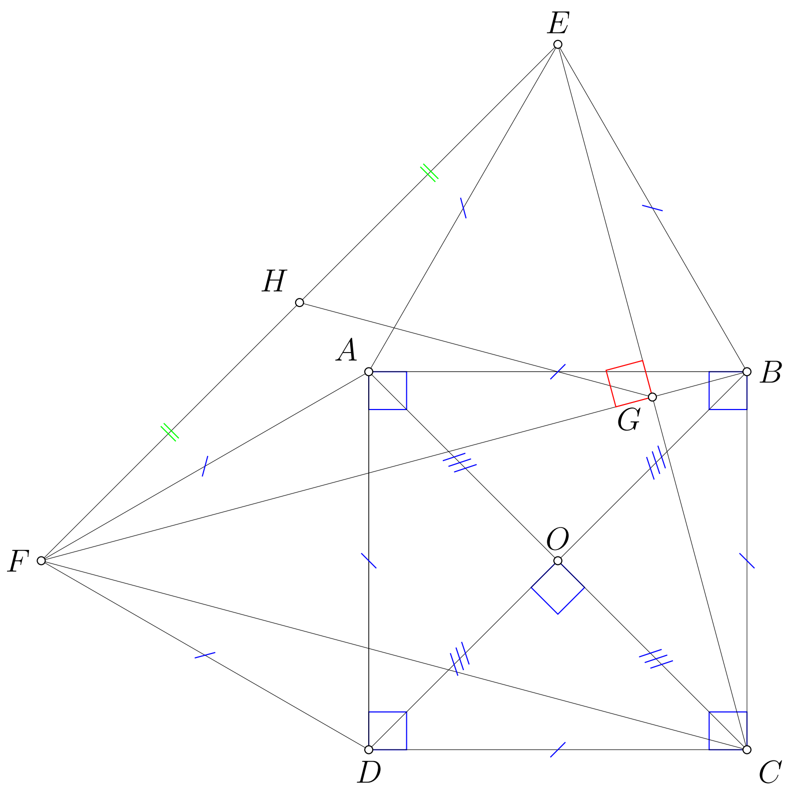
$$\widehat{HEG} = \widehat{HEA} + \widehat{AEB} - \widehat{GEB} = 15° + 60° - 15° = 60°.$$

De même que dans la solution principale, $HE = HG$. On en déduit que le triangle HEG est isocèle avec un angle de $60°$, il est donc équilatéral.

En effet, $\widehat{EGH} = \widehat{HEG} = 60°$ et donc $\widehat{GHE} = 180° - 60° - 60° = 60°$. On en déduit que $GE = GH$.

De plus, $BE = BC$ et (BG) est perpendiculaire à $[EC]$, donc G est le milieu de $[EC]$. On en déduit que $GC = GE$, et finalement $GC = GH$.

Solution alternative n°3 Soit O le centre du carré $ABCD$.



On considère la rotation de centre O et d'angle $90°$. Elle envoie A sur D, D sur C, C sur B et B sur A. En particulier elle envoie ABE sur DAF (car elle préserve les distances donc les triangles équilatéraux), et donc elle envoie E sur F.
Ainsi la rotation de centre O et d'angle $90°$ envoie $[CE]$ sur $[BF]$, donc l'angle $\widehat{FGC}$ est droit.

Comme $BE = BC$ et $\widehat{CGB} = 90°$: (BG) est la médiatrice de $[EC]$. En particulier G en est le milieu, donc $GC = \dfrac{EC}{2}$, et $FE = FC$.
Par ailleurs, pour des raisons de symétrie, $CF = CE$. Finalement $CF = CE = EF$: EFC est équilatéral.

Enfin, comme H est le milieu de $[EF]$ dans EFG rectangle en G, c'est le centre du cercle circonscrit, et $GH = HE = \dfrac{EF}{2}$. Comme $EF = EC$, on a bien $GH = GC$.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice a été abordé par un bon nombre d'élèves vu sa position. Un certain nombre d'entre eux l'ont très bien réussi, par des méthodes diverses et variées.

On souligne l'importance de faire une figure sur un problème de géométrie. Cela permet d'être un support à la lecture de la solution, et c'est d'autant plus important lorsque des nouveaux points sont introduits par l'élève. À propos de figures, il est important de bien lire l'énoncé, un certain nombre d'élèves ont tracé la mauvaise figure, avec les triangles équilatéraux à l'intérieur du carré.

On note que bon nombre d'élèves ont utilisé dans leurs solutions des résultats sans les prouver, ainsi certains élèves ont admis que H, A, C sont alignés, que $\widehat{FGC} = 90°$, que $EH = EG$, etc. D'autres se sont contentés de rendre une figure avec des annotations : une figure seule ne rapporte aucun point, et il faut justifier comment sont obtenues les différentes égalités d'angles, de longueur.

Exercice 7. Soient a, b et c des réels strictement positifs tels que

$$a+b \geqslant ab\,, \quad b+c \geqslant bc \text{ et } c+a \geqslant ca.$$

Montrer que $a+b+c \geqslant \frac{3}{4}abc$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u> En sommant les inégalités, on trouve que

$$(a+b)+(b+c)+(c+a) \geqslant ab+bc+ca.$$

On trouve alors

$$a+b+c \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca).$$

Il faut alors comparer le membre de droite avec $\frac{3}{4}abc$. En multipliant la première inégalité par c (ce qui est possible car $c \geqslant 0$), on trouve $c(a+b) \geqslant abc$, soit

$$ca+cb \geqslant abc.$$

De même, en multipliant les deux côtés de la deuxième inégalité de l'hypothèse par a et les deux côtés de la troisième inégalité de l'hypothèse par b, on trouve

$$ab+ac \geqslant abc;$$
$$bc+ba \geqslant abc.$$

En sommant ces trois inégalités, on trouve

$$(ac+bc)+(ab+ac)+(bc+ca) \geqslant 3abc.$$

c'est-à-dire

$$ab+bc+ca \geqslant \frac{3}{2}abc.$$

En combinant, on trouve bien

$$a+b+c \geqslant \frac{1}{2}(ab+bc+ca) \geqslant \frac{1}{2} \times \frac{3}{2}abc = \frac{3}{4}abc.$$

<u>*Solution alternative n°1*</u> La condition $a+b \geqslant ab$ se réécrit, en divisant par ab, $\frac{1}{a}+\frac{1}{b} \geqslant 1$. En posant $x=\frac{1}{a}, y=\frac{1}{b}, z=\frac{1}{c}$, on a alors $x+y \geqslant 1$, et de même $y+z \geqslant 1, z+x \geqslant 1$.

On veut montrer que $a+b+c \geqslant \frac{3}{4}abc$, c'est-à-dire en divisant par abc, $\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}+\frac{1}{ab} \geqslant \frac{3}{4}$, ce qui se réécrit avec le changement de variables :

$$xy+yz+zx \geqslant \frac{3}{4}.$$

De là, on peut conclure de deux façons différentes.

Méthode 1 :

Comme $y+z \geqslant 1$, en multipliant par x, $xy+xz \geqslant x$. De même, $yz+yx \geqslant y$ et $zx+zy \geqslant z$. En sommant ces trois inégalités :

$$2(xy+yz+zx) \geqslant x+y+z$$

soit

$$xy+yz+zx \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z).$$

De plus, on sait que $x+y \geqslant 1, y+z \geqslant 1$ et $z+x \geqslant 1$. En sommant ces trois inégalités, $2(x+y+z) \geqslant 3$ soit $x+y+z \geqslant \frac{3}{2}$. Finalement :

$$xy+yz+zx \geqslant \frac{1}{2}(x+y+z) \geqslant \frac{1}{2} \times \frac{3}{2} = \frac{3}{4}.$$

On a donc bien montré l'inégalité voulue.

Méthode 2 :

Les variables x, y, z jouent le même rôle, on peut donc supposer, sans perte de généralité, que x est la plus petite de ces valeurs : $x \leqslant y, z$.

Si $x \geqslant \frac{1}{2}$, alors $y, z \geqslant \frac{1}{2}$, et donc

$$xy+yz+zx \geqslant \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \times \frac{1}{2} = \frac{3}{4}.$$

L'inégalité est donc vérifiée. Sinon, si $x < \frac{1}{2}$, remarquons que par hypothèse $y \geqslant 1-x, z \geqslant 1-x$. Dès lors :

$$\begin{aligned}
xy+yz+zx &\geqslant x(1-x)+(1-x)(1-x)+x(1-x) \\
&= 2x(1-x)+(1-x)(1-x) \\
&= (1-x+2x)(1-x) \\
&= (1+x)(1-x) \\
&= 1-x^2 \\
&\geqslant 1-\left(\frac{1}{2}\right)^2 \\
&= 1-\frac{1}{4} \\
&= \frac{3}{4}.
\end{aligned}$$

Là encore l'inégalité est vérifiée.

Finalement, on a bien montré la propriété voulue.

Commentaire des correcteurs L'exercice était assez difficile, et assez peu d'élèves l'ont réussi en entier. De nombreux élèves ont tout de même pensé à additionner les inégalités de l'énoncé, ce qui permettait d'avancer significativement dans l'exercice.

On fait remarquer l'importance de bien lire l'énoncé, car de nombreuses copies ont considéré que les nombres a, b, c étaient des entiers, ce qui simplifiait considérablement l'exercice. Il faut aussi être vigilant à bien justifier les différentes étapes du raisonnement, car beaucoup d'élèves affirment des résultats tels que “Pour que $a + b \geq ab$, il faut que $a \leqslant 2$ et $b \leqslant 2$, car sinon le produit des deux nombres croît plus vite que la somme” ou “La valeur minimale de $\dfrac{a+b+c}{abc}$ est atteinte pour $a = b = c = 2$”, qui n'ont à priori aucune raison d'être vrais (ou sont même parfois faux).

Exercice 8. Soient x et y des réels non nuls tels que $x+y=2024xy$. Calculer

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 8 On remarque que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{y}{xy}+\frac{x}{xy}=\frac{y+x}{xy}=2024.$$

Solution alternative n°1 En réécrivant l'équation

$$y(2024x-1)=x$$

on a d'une part $2024x-1\neq 0$ (dans le cas contraire on aurait $x=0$), et on peut donc réécrire $y=\dfrac{x}{2024x-1}$.
On peut alors calculer

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{1}{x}+\frac{1}{\frac{x}{2024x-1}}=\frac{1}{x}+\frac{2024x-1}{x}.$$

Il découle que

$$\frac{1}{x}+\frac{1}{y}=\frac{2024x}{x}=2024.$$

Commentaire des correcteurs Ce premier exercice pour les lycéens a été très bien réussi pour la majorité des élèves.

Exercice 9. Soient $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$ deux entiers. On suppose que

$$\frac{a-1}{b-1} - \frac{a}{b} = 1.$$

Montrer que $\frac{a}{b}$ et $\frac{a-1}{b-1}$ sont des entiers.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u> On multiplie l'équation par $b(b-1)$, de sorte à se ramener à une égalité entre entiers, on obtient

$$(a-1)b - a(b-1) = b(b-1).$$

En développant, on le réécrit

$$ab - b - ab + a = b^2 - b$$

c'est-à-dire

$$a = b^2.$$

Dès lors, $\frac{a}{b} = \frac{b^2}{b}$ est entier, ainsi que $\frac{a-1}{b-1} = \frac{b^2-1}{b-1} = \frac{(b-1)(b+1)}{b-1} = b+1$.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On réécrit l'équation

$$\frac{a-1}{b-1} = \frac{a}{b} + 1 = \frac{a+b}{b}.$$

On multiplie par $b(b-1)$ de sorte à se ramener à une équation entre entiers, à savoir

$$(a-1)b = (a+b)(b-1).$$

On a cependant $\operatorname{pgcd}(b, b-1) = \operatorname{pgcd}(b, b-(b-1)) = \operatorname{pgcd}(b, 1) = 1$. Donc b et $b-1$ sont premiers entre eux.
Or $b-1$ divise $(a-1)b$, donc d'après le lemme de Gauss on en déduit que $b-1$ divise $a-1$.
Dès lors $\frac{a-1}{b-1}$ est entier, ainsi que $\frac{a}{b} = \frac{a-1}{b-1} - 1$.

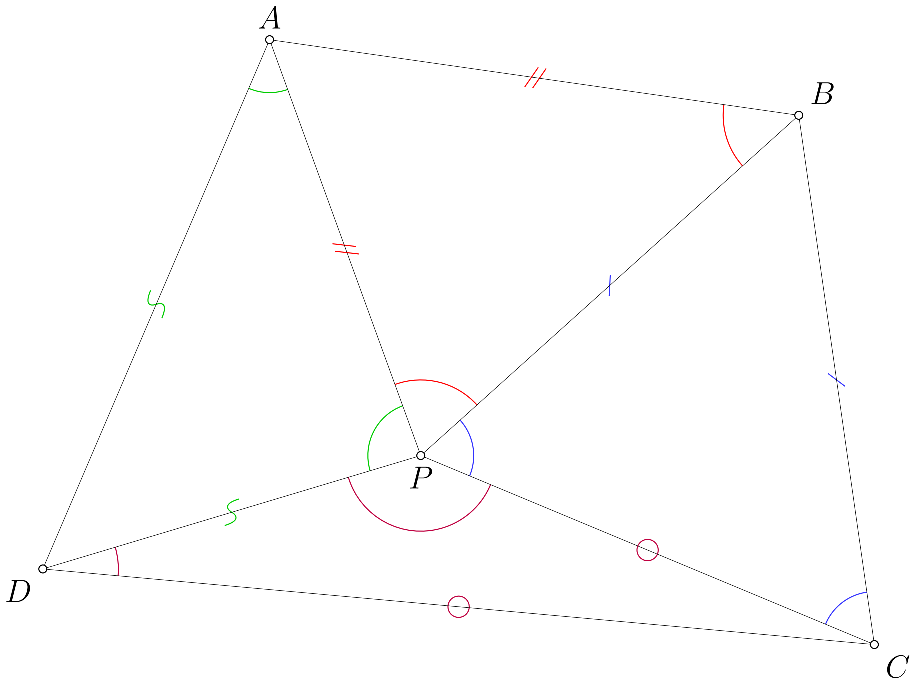
<u>*Commentaire des correcteurs*</u> Cet exercice a été très bien réussi par la plupart des élèves.

On rappelle l'importance d'essayer de faire des manipulations algébriques avec des égalités telles que celle de l'énoncé (et sans faire d'erreur de calcul !), car ici l'énoncé pouvait se simplifier en $a = b^2$. À part quelques exceptions, tous les élèves ayant obtenu cette relation ont su conclure.

Exercice 10. Déterminer s'il existe cinq points du plan A, B, C, D et P tous distincts et vérifiant les conditions suivantes :

- le quadrilatère $ABCD$ est non croisé ;
- le point P se trouve strictement à l'intérieur de ce quadrilatère ;
- les segments $[AP]$, $[BP]$, $[CP]$ et $[DP]$ sont tous contenus à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$;
- on a les égalités de longueurs $AP = AB$, $BP = BC$, $CP = CD$ et $DP = DA$.

Solution de l'exercice 10



Supposons par l'absurde qu'une telle figure existe. Puisque $AP = AB$, le triangle ABP est isocèle en A, de sorte que $\widehat{ABP} = \widehat{APB}$. De même, on établit les égalités

$$\widehat{BCP} = \widehat{BPC} \quad , \quad \widehat{CDP} = \widehat{CPD} \quad , \quad \widehat{DAP} = \widehat{DPA}.$$

Or, d'une part, puisque la somme des angles du quadrilatère $ABCD$ vaut $360°$, on a

$$360° = \widehat{DAP} + \widehat{PAB} + \widehat{ABP} + \widehat{PBC} + \widehat{BCP} + \widehat{PCD} + \widehat{CDP} + \widehat{PDA} > \widehat{DAP} + \widehat{ABP} + \widehat{BCP} + \widehat{CDP}.$$

L'inégalité précédent est stricte parce que, le point P étant stritement à l'intérieur $ABCD$, les quatre angles $\widehat{PAB}, \widehat{PBC}, \widehat{PCD}$ et $\widehat{PDA}$ sont strictement positifs.

D'autre part, on a

$$360° = \widehat{APB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPD} + \widehat{DPA}.$$

En combinant, on trouve

$$360° = \widehat{APB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPD} + \widehat{DPA} = \widehat{DAP} + \widehat{ABP} + \widehat{BCP} + \widehat{CDP} < 360°,$$

ce qui est absurde. Il n'y a donc pas de tel quadrilatère $ABCD$.

Solution alternative n°1 Puisque le triangle ABP est isocèle en A, ses angles à la base sont égaux, de sorte que

$$180^\circ = \widehat{PAB} + \widehat{APB} + \widehat{ABP} = \widehat{PAB} + 2\widehat{APB}.$$

Puisque le triangle PAB est non plat, on a alors $180^\circ > 2\widehat{APB}$. On déduit que $\widehat{APB} < 90^\circ$. De la même façon, on trouve $\widehat{BPC} < 90^\circ$, $\widehat{CPD}$ et $\widehat{DPA} < 90^\circ$. En sommant ces quatre inégalités, on trouve

$$360^\circ = \widehat{APB} + \widehat{BPC} + \widehat{CPD} + \widehat{DPA} < 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ + 90^\circ = 360^\circ,$$

ce qui est à nouveau une contradiction.

Commentaire des correcteurs L'exercice était surprenant par son originalité, mais un grand nombre d'élèves en sont néanmoins arrivés à bout.

Nous rappelons cependant que bien que traiter des cas particulier peut aider à se faire une intuition de la solution, cela ne suffit pas pour conclure en général.

Par ailleurs, il est toujours important en géométrie de rendre avec sa solution une grande et belle figure, sur laquelle peuvent être codés les hypothèses et les résultats, ainsi que les notations utilisées.

Exercice 11. On considère une grille 2024×2024. Quentin dispose de k couleurs et colorie chacune des 2024^2 cases de la grille avec l'une de ces k couleurs, de sorte que chaque couleur est utilisée au moins une fois. Déterminer le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante :

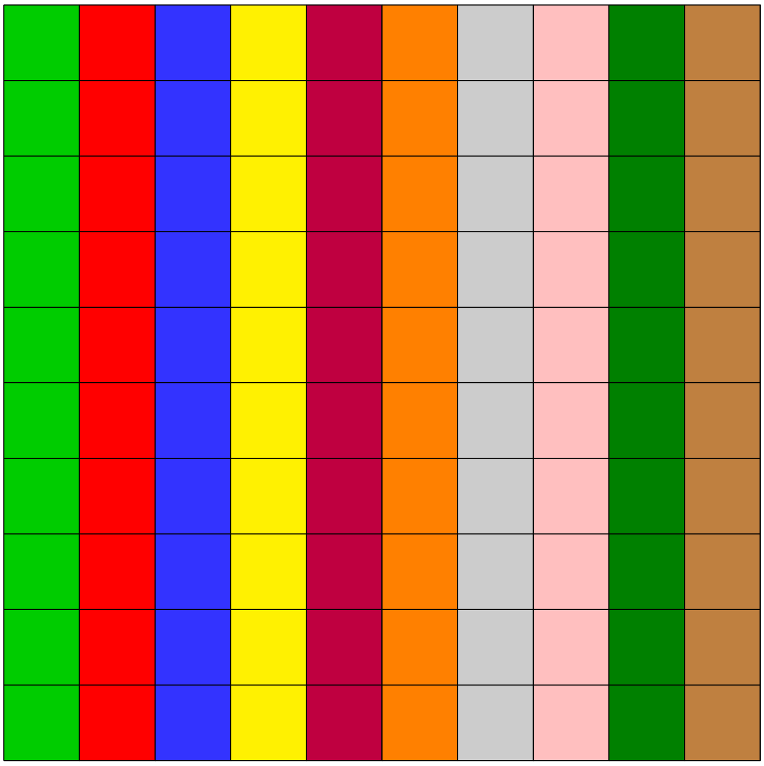
Quel que soit le coloriage de Quentin, on peut toujours trouver trois cases C_1, C_2 et C_3 de couleurs deux à deux distinctes telles que C_1 et C_2 sont sur la même ligne et C_2 et C_3 sont sur la même colonne.

Solution de l'exercice 11 **Réponse :** 2025

Le problème demande de déterminer le plus petit entier k vérifiant une certaine propriété. Il contient nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si $k \leqslant 2024$, alors k ne vérifie pas la propriété (cette étape s'appelle *l'analyse*). Dans un second temps, on montre que $k = 2025$ vérifie la propriété (cette étape s'appelle la *synthèse*).

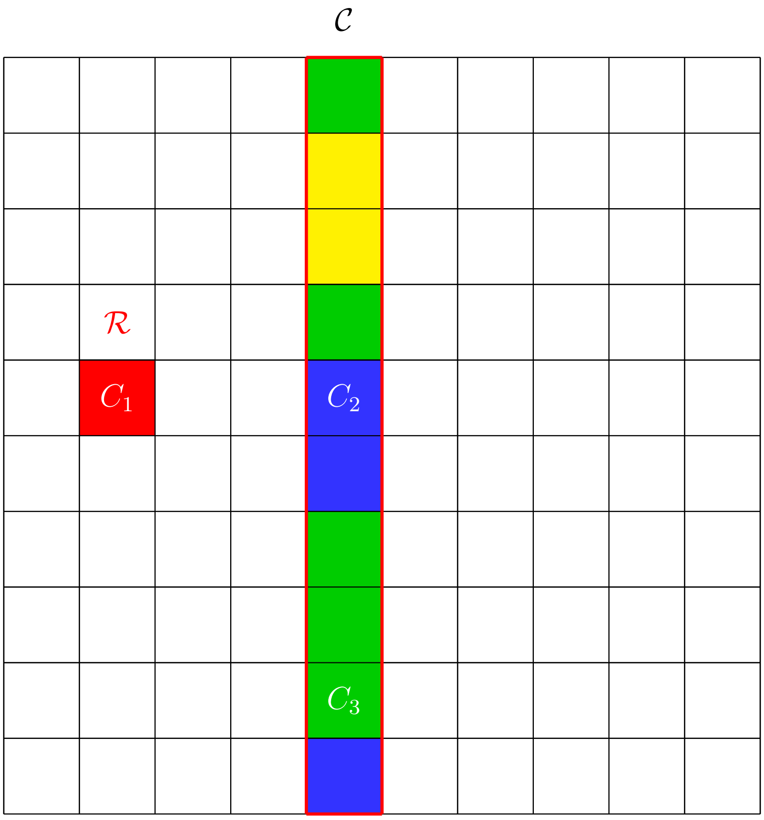
Analyse :

Supposons que Quentin dispose de $k \leqslant 2024$ couleurs. Considérons le coloriage dans lequel toutes les cases de la $i-$ème colonne en partant de la gauche est coloriée avec la $i-$ème couleur, et où toutes les cases des $2024 - k$ colonnes les plus à droites sont coloriées avec la première couleur. Dans un tel coloriage, chaque couleur a été utilisée au moins une fois. Or, deux cases d'une même colonne étant toujours de la même couleur, on ne peut trouver trois cases satisfaisant l'énoncé. Ainsi, si $k \leqslant 2024$, k ne vérifie pas l'énoncé.



Synthèse :

Montrons que Quentin peut toujours satisfaire l'énoncé avec 2025 couleurs. Considérons un coloriage quelconque de la grille dans lequel chaque couleur a été utilisée au moins une fois. Tout d'abord, si toutes les cases d'une même colonne étaient toujours de la même couleur, comme il y a 2024 colonnes, il y aurait au plus 2024 couleurs utilisées. Ainsi, il existe au moins une colonne $\mathcal{C}$ contenant des cases de couleur différente. Comme il y a 2025 couleurs, il existe une couleur $\mathcal{R}$ telle qu'aucune case de la colonne $\mathcal{C}$ n'est de la couleur $\mathcal{R}$. Puisque toutes les couleurs sont utilisées, la grille contient une case, notée C_1, de la couleur $\mathcal{R}$ et n'appartenant pas à la colonne $\mathcal{C}$. Notons C_2 la case de la colonne $\mathcal{C}$ appartenant à la même ligne que C_1. On a établi que la colonne $\mathcal{C}$ contient une autre case, notée C_3, qui n'est pas de la même couleur que C_2, et qui n'est pas, par hypothèsé, de la couleur $\mathcal{R}$. Les cases C_1, C_2 et C_3 satisfont alors l'énoncé.



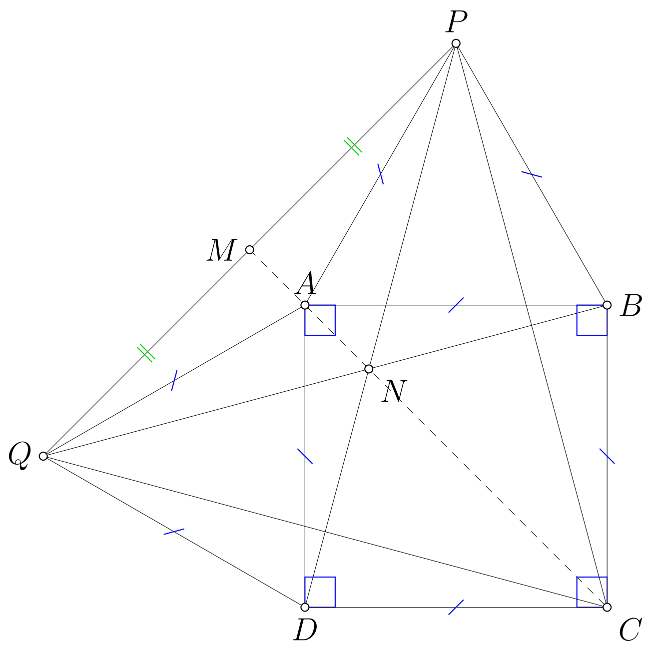
Commentaire des correcteurs Le problème a été assez inégalement réussi. Voici les principales erreurs commises par les différents élèves :

- L'exercice comprenait deux parties : la partie le plus facile qui consistait à montrer que si $m \leq 2024$ il y a un coloriage pour lequel on ne peut pas trouver les 3 cases demandées et la partie difficile consistant à montrer que pour 2025 on peut trouver forcément les 3 cases demandées par l'énoncé. Même si des élèves oublient régulièrement l'une ou l'autre étape une partie des élèves a bien assimilé les corrigés des coupes Animath passées et ont explicitement fait une phase d'analyse et une phase de synthèse. Même si celles-ci n'étaient pas forcément juste les correcteurs ont noté un bel effort de rédaction.
- Un schéma ne peut pas remplacer une preuve. Ceci dit un schéma aide très souvent à comprendre la preuve et à se rendre compte de potentielles cas particuliers parfois oubliés. Donc il ne faut pas hésiter à faire des schémas pour illustrer son propos.
- Certains n'ont pas compris le problème et répondu des réponses peu cohérentes : $2, 3, 4$ ou des réponses de l'ordre de 2024^2. Il fallait trouver le plus petit k tel que quelque soit le coloriage Quentin peut trouver 3 cases vérifiant l'énoncé. Exhiber un coloriage avec 3 couleurs ne montre pas que 3 fonctionne. Il est donc important de bien relire les énoncés les plus complexes du sujet car en s'attaquant au mauvais problème on obtient généralement 0 point.
- Beaucoup d'élèves ont cru que les 3 cases devaient être voisines. Comme ce n'est pas mentionné ça n'a pas de raison d'être vrai.
- Certains élèves ont cherché un exemple pour $k = 2024$ par exemple en colorant chaque colonne d'une couleur distincte. Et ceux-ci ont décrété que comme si on rajoute une couleur à ce coloriage on a un contre-exemple il n'existe aucun coloriage avec 2025 couleurs vérifiant l'énoncé. Cela n'est pas rigoureux : ce qui vous semble être le pire cas pour 2024 n'est pas forcément le pire cas pour 2025 et ne permet pas de traiter le cas général et tous les coloriages possibles.

- De nombreux élèves ont prouvé qu'il y avait une colonne avec au moins deux couleurs et une ligne avec au moins deux couleurs et en ont déduit que les 3 cases demandées par l'énoncé existaient. C'est en fait faux : si la ligne et la colonne sont colories avec les deux mêmes couleurs ça ne fonctionne pas.
- Beaucoup d'affirmations sont fausses : tout fait affirmé doit être prouvé et il faut envisager tous les coloriages possibles case par case.
- plusieurs élèves ont affirmé que si deux cases de couleur différente (disons rouge et bleu) sont sur la même ligne alors les colonnes correspondantes sont monochromes. Ce n'est pas vrai : celles-ci peuvent etre composées de cases rouge et bleu.
- Dans une grille le plus simple pour désigner une case est d'utiliser la notation (a, b) où a désigne le numéro de la ligne et b celui de la colonne. Cela évite d'avoir des indices parfois peu clairs.

Exercice 12. Soit $ABCD$ un carré, et soient P et Q les points à l'extérieur de $ABCD$ tels que ABP et DAQ sont équilatéraux. On note M le milieu de $[PQ]$ et N le point d'intersection des droites (BQ) et (DP). Calculer $\frac{NM}{NC}$.

Solution de l'exercice 12



D'abord, $\widehat{PBC} = \widehat{PBA} + \widehat{ABC} = 60° + 90° = 150°$ et PBC est isocèle en B (car $BP = BC$). La somme des angles d'un triangle étant de $180°$, on en déduit que

$$\widehat{BCP} = \widehat{CPB} = \frac{180° - 150°}{2} = 15°.$$

De même, $\widehat{QCD} = \widehat{DQC} = 15°$. Il suit que

$$\widehat{PCQ} = \widehat{BCD} - \widehat{BCP} - \widehat{QCD} = 90° - 15° - 15° = 60°$$

.
De plus, $CP = CQ$ car les triangles CDQ et CBP sont égaux (on peut également argumenter par symétrie de la figure par rapport à (CA)).
Le triangle est alors isocèle avec un angle de $60°$, il est donc équilatéral. En effet

$$\widehat{CQP} = \widehat{QPC} = \frac{180° - 60°}{2} = 60°$$

donc en fait tous les angles valent $60°$.

Ainsi, $PC = PQ$ et $DC = DQ$ donc $[PD]$ est la médiatrice de $[CQ]$. De même $[QB]$ est la médiatrice de $[PC]$. Ainsi N est le centre du cercle circonscrit de CPQ, mais comme le triangle est équilatéral, c'est également le centre de gravité. Ainsi C, N, M sont alignés, et comme le centre de gravité est aux deux-tiers de la médiane, $\frac{CN}{CM} = \frac{2}{3}$, ou encore $\frac{CM}{CN} = \frac{3}{2}$.
Ainsi

$$\frac{NM}{NC} = \frac{CM - CN}{CN} = \frac{CM}{CN} - 1 = \frac{3}{2} - 1 = \frac{1}{2}.$$

Donc $\frac{NM}{NC} = \frac{1}{2}$.

Commentaire des correcteurs Le problème a été beaucoup abordé par les élèves, dans l'ensemble bien résolu, et de bien des façons. Les erreurs les plus fréquentes et les plus coûteuses ont été :

- Partir du principe que N appartenait à (AC). La justification de ce fait via la symétrie de la figure a régulièrement été bâclée par les élèves qui se doutent que la symétrie de la figure joue un rôle sans pouvoir mettre le doigt sur l'argument rigoureux.
- Penser qu'un rapport d'angle induit linéairement un rapport de longueur : une portion surprenante des élèves a affirmé que, puisque $\widehat{MPN} = 2\widehat{NPA}$, alors $MN = 2AN$, ce qui n'est pas vrai.
- Des confusions encore nombreuses sur les propriétés et définitions des bissectrices, médiatrices, hauteurs et médianes. Une bonne compréhension de ces droites remarquables et de leurs relations dans le cas d'un triangle isocèle ou équilatéral était pourtant cruciale ici. Ces propriétés sont rappelées dans la liste des prérequis pour la coupe Animath, que l'on conseille de lire consciencieusement avant les épreuves.
- Une part significative des élèves a mal lu l'énoncé et a trace les triangles ABP et ADQ à l'intérieur du carré et non à l'extérieur. Si similaires que soient les deux figures et les deux raisonnements, un élève qui traite le mauvais énoncé ne saurait recevoir tous les points de l'exercice.

Exercice 13. Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite infinie d'entiers. On suppose, pour tous les entiers $k \geqslant 1$ et tout $\ell \geqslant 1$, que $k+\ell$ divise $a_k + a_\ell$. Montrer, pour tous les entiers $k \geqslant 1$ et $\ell \geqslant 1$ avec $k \neq \ell$, que $k-\ell$ divise $a_k - a_\ell$.

Solution de l'exercice 13 Commençons par noter que si k et ℓ sont deux entiers et d est un diviseur de $k+\ell$, alors d divise $k+\ell$ et donc divise $a_k + a_\ell$.

Fixons désormais deux entiers strictement positifs k et ℓ. Quitte à les échanger, on peut supposer que $k > \ell$. On va chercher un entier r tel que $k-\ell$ divise $a_k + a_r$ et $k-\ell$ divise $a_\ell + a_r$, de sorte que par soustraction, $k-\ell$ divise $(a_k + a_r) - (a_\ell + a_r) = a_k - a_\ell$.

Il suffit pour cela de trouver un entier r tel que $k-\ell$ divise $k+r$ et $\ell+r$. Si c'est le cas, on aura bien $k-\ell$ divise $k+r$ et donc $a_k + a_r$, et $k-\ell$ divise $\ell+r$ et donc $a_\ell + a_r$.
Prenons s un entier vérifiant $s > \frac{k}{k-\ell}$ (cet entier est strictement positif car $k-\ell > 0$) et posons $r = s(k-\ell) - k$. On a alors $k+r = s(k-\ell)$ de sorte que $k-\ell$ divise $k+r$. On vérifie alors que $k-\ell$ divise $k+r-(k-\ell) = r+\ell$. Ceci permet de conclure.

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile et bien qu'il ait été abordé par près de la moitié des élèves, peu en sont arrivés à bout. Parmi les erreurs les plus fréquentes, on retrouve :

- Des erreurs de manipulation de la divisibilité : la relation "est divisible par" ne se comporte pas comme l'égalité, on ne peut donc pas écrire d'affirmations du type "$a+b \mid c$ donc $a \mid c-b$"
- Des inattentions sur la dépendence des variables : beaucoup écrivaient que $a_k + a_\ell = \lambda(k+\ell)$ puis oubliaient que λ dépendait à priori de k et de ℓ. Plus grossièrement, ce n'est pas parce que pour tout k, a_k est divisible par k que $a_k = \lambda \cdot k$ avec λ indépendant de k.
- Beaucoup se lançaient dans des calculs sans essayer d'argument de nature arithmétique, ce qui est dommage dans un problème traitant de divisibilité

Exercice 14. Cent nombres réels sont placés autour d'un cercle, de sorte que chaque nombre est strictement plus grand que la somme des deux nombres qui le suivent (dans le sens des aiguilles d'une montre). Déterminer le nombre maximal de réels strictement positifs sur ce cercle.

Solution de l'exercice 14 **Réponse : 49**

Pour montrer que le plus grand nombre de réels possible, il y a nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que toute configuration vérifiant l'hypothèse de l'énoncé contient au plus 49 réels strictement positifs (cette étape s'appelle *l'analyse*). Dans un second temps, on donne une configuration valide contenant exactement 49 réels strictement positifs (cette étape s'appelle *la construction*).

Analyse :

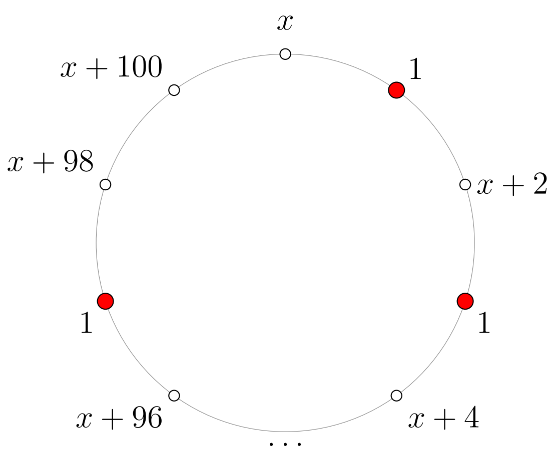
Considérons une configuration vérifiant l'énoncé et notons $a_1, \ldots, a_{100}$ les 100 nombres inscrits autour du cercle dans cet ordre. Dans la suite, on adoptera également les conventions $a_0 = a_{100}$, et $a_{101} = a_1$. Notons tout d'abord que les a_i ne peuvent pas tous être strictement positifs. En effet, supposons que ce soit le cas et considérons a_j le plus grand de ces réels. Alors, par hypothèse, $a_{j-1} > a_j + a_{j+1}$, mais $a_{j-1} \leqslant a_j$ et $a_j + a_{j+1} > a_j$. En combinant les inégalités, on aboutit donc à $a_j > a_j$, qui est absurde.

Ainsi, l'un au moins des a_i est négatif ou nul. Montrons désormais que pour tout indice i, au plus l'un des deux nombres a_i et a_{i+1} est strictement positif. Supposons que ce n'est pas le cas et considérons un indice j tel que la suite $a_j, a_{j+1}, \ldots, a_{j+r}$ ne contient que des réels strictement positifs et est de taille maximale. Comme les réels du cercle ne sont pas tous strictement positifs, cette suite n'est pas de taille 100 et $a_{j-1} \leqslant 0$. Mais on a alors $0 \geqslant a_{j-1} > a_j + a_{j+1} > 0$, ce qui est encore une fois absurde.

Puisqu'il ne peut y avoir deux réels strictement positifs consécutifs, il y a au plus 50 réels strictement positifs. Supposons désormais par l'absurde qu'il y a exactement 50 réels strictement positifs sur le cercle. D'après ce qu'on a montré, cela signifie qu'exactement un réel sur deux est strictement positif lorsqu'on parcourt le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre. Considérons à présent a_j le plus grand réel négatif ou nul sur le cercle. On a alors $a_{j-1} > 0$ car a_{j-1} et a_j ne peuvent être tous les deux strictement positifs. De même, $a_{j-2} \leqslant 0$. Mais alors $0 \geqslant a_{j-2} > a_{j-1} + a_j > a_j$, ce qui contredit la maximalité de a_j. Ainsi, il ne peut y avoir 50 réels strictement positifs, il y en a donc au plus 49.

Construction :

On fournit une configuration valide contenant exactement 49 réels strictement positifs. Une stratégie est de fixer tous les réels strictement positifs à 1, et de chercher un x tel que la configuration suivante soit valide :



Pour cela, il faut que $x + i \leqslant 0$ pour $i = 0, 2, \ldots, 98$ afin de satisfaire l'inégalité $1 > 1 + x + i$. D'autre part, l'inégalité $x + i + 2 > 1 + x + i$ est toujours satisfaite. Il suffit donc que x vérifie $1 > x + x + 100$

et $x > x+100+x+98$. En prenant par exemple $x=-200$, on vérifie que ces inégalités sont vérifiées, ce qui donne une construction valide.

Commentaire des correcteurs De nombreux élèves ont eu des idées pertinentes sur cet exercice, même si peu d'entre eux en sont venus à bout. Il est cependant important d'être précautionneux sur ce que l'on affirme et rigoureux quand on démontre ces affirmations. Par exemple, quand on souhaite démontrer que les réels ne peuvent pas tous être positifs, il faut éviter d'utiliser abusivement des $\ldots$ dont le correcteur ne saura comment les interpréter, et il faut conclure que **les réels ne peuvent pas tous être positifs**, et non pas que **les réels sont tous négatfs**.

Par ailleurs, formuler à l'emporte-pièce des affirmations incorrectes telles que « les nombres doivent alterner en signes, et alors ça marche » (contre-exemples : tout le monde vaut -1, ou bien les nombres valent $-7, 1, -9, -5, -5, -5, \ldots$), ou bien « il faut 50 nombres positifs » (ou 49, ou 25, ou aucun) sans tenter de les étayer n'est évidemment pas une bonne idée. De manière générale, comme dit moult fois dans les recommandations indiquées sur le site de la POFM, il faut **justifier** toute affirmation que l'on formule : le correcteur n'est jamais heureux de donner la note de $0/7$ à un élève ayant trouvé le résultat hautement non-intuitif de 49, mais sans éléments pour étayer cette affirmation, comment aurait-il pu accorder des points ?

Exercice 15. Déterminer le plus petit réel α ayant la propriété suivante :
Quels que soient les réels $x_1, \ldots, x_{2024}$, il existe toujours un indice i compris entre 1 et 2024 (au sens large) tel que

$$\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \{x_i - x_3\} + \ldots + \{x_i - x_{2023}\} + \{x_i - x_{2024}\} \leqslant \alpha.$$

On rappelle que $\{x\}$ désigne la partie fractionnaire *du réel x, c'est-à-dire $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$ où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x, autrement dit le plus grand entier inférieur ou égal à x.*
Par exemple $\{1,2\} = 0,2$, $\{3\} = 0$ et $\{-2,4\} = 0,6$.

Solution de l'exercice 15 **Réponse :** On va montrer que $\alpha = \dfrac{2023}{2}$.

Analyse : on montre d'abord que $\alpha \leqslant \dfrac{2023}{2}$.

Supposons que α ne vérifie pas la propriété, c'est-à-dire qu'il existe $x_1, \ldots, x_{2024}$ tel que pour tout indice i, on a

$$\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\} > \alpha.$$

Nous sommes en présence de 2024 inégalités que nous pouvons sommer, et on a donc

$$\begin{aligned} &(\{x_1 - x_1\} + \{x_1 - x_2\} + \ldots + \{x_1 - x_{2024}\}) \\ +&(\{x_2 - x_1\} + \{x_2 - x_2\} + \ldots + \{x_2 - x_{2024}\}) \\ +&\ldots \\ +&(\{x_{2024} - x_1\} + \{x_{2024} - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2024}\}) \\ >&2024\alpha. \end{aligned}$$

Notons que dans la somme, les termes correspondant à $i = j$ sont nuls, puisque $\{0\} = 0$. On regroupe alors les termes $\{x_i - x_j\}$ et $\{x_j - x_i\}$. En effet on a le résultat suivant.

Lemme : pour tout réel a, on a $\{a\} + \{-a\} = \begin{cases} 0 \text{ si } a \text{ est entier} \\ 1 \text{ sinon} \end{cases}$

En effet, si a est entier le résultat est clair. Sinon on écrit $a = \lfloor a \rfloor + \{a\}$ avec $0 < \{a\} < 1$, et alors $-a = -\lfloor a \rfloor - \{a\} = (-\lfloor a \rfloor - 1) + (1 - \{a\})$ avec $-\lfloor a \rfloor - 1$ entier, et $0 < 1 - \{a\} < 1$, donc $\{-a\} = 1 - \{a\}$, comme voulu.

Revenons à présent au calcul. On a alors

$$\begin{aligned} &(\{x_1 - x_2\} + \{x_2 - x_1\}) + (\{x_1 - x_3\} + \{x_3 - x_1\}) + \ldots + (\{x_1 - x_{2024}\} + \{x_{2024} - x_1\}) \\ +&(\{x_2 - x_3\} + \{x_3 - x_2\}) + \ldots + (\{x_2 - x_{2024}\} + \{x_{2024} - x_2\}) \\ +&\ldots \\ +&(\{x_{2023} - x_{2024}\} + \{x_{2024} - x_{2023}\}) \\ &> 2024\alpha \end{aligned}$$

et chaque $\{x_i - x_j\} + \{x_j - x_i\}$ est plus petit que 1 d'après le lemme précédant. Or, il y a $\dfrac{2024 \times 2023}{2}$ termes de cette forme. En effet il y a 2024 choix pour i, puis 2023 pour j (il faut $j \neq i$), mais il faut diviser par deux car on a compté à la fois $i < j$ et $j < i$.
Dès lors :

$$2024\alpha < \frac{2024 \times 2023}{2}.$$

On a montré que si α ne convient pas, alors $\alpha < \dfrac{2023}{2}$. On en déduit en particulier que $\alpha = \dfrac{2023}{2}$ fonctionne pour tous les choix de réels $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$.

En particulier, le plus petit α recherché vérifie $\alpha \leqslant \dfrac{2023}{2}$.

Construction : on montre à présent que $\alpha = \dfrac{2023}{2}$ en exhibant une suite pour laquelle il n'y a pas de constante plus petite qui fonctionne.

Soit pour $1 \leqslant k \leqslant 2024$, $x_k = \dfrac{k}{2024}$, de sorte que $x_1 = \dfrac{1}{2024}, x_2 = \dfrac{2}{2024}, \ldots, x_{2024} = \dfrac{2024}{2024}$. On pose cette suite car on souhaite que les $\{x_i - x_j\}$ jouent des rôles symétriques, et donc que $x_i - x_j$ soit proportionnel à $i - j$.

Fixons un indice $1 \leqslant i \leqslant 2024$. On remarque alors que pour $1 \leqslant j \leqslant i$, $\left\{\dfrac{i-j}{2024}\right\} = \dfrac{i-j}{2024}$, ce qui donne les nombres $\dfrac{i-1}{2024}, \dfrac{i-2}{2024}, \ldots, \dfrac{1}{2024}, 0$.

De plus, pour $i+1 \leqslant j \leqslant 2024$, on a $\left\{\dfrac{i-j}{2024}\right\} = 1 + \dfrac{i-j}{2024} = \dfrac{2024+i-j}{2024}$, ce qui donne les nombres $\dfrac{2023}{2024}, \dfrac{2022}{2024}, \ldots, \dfrac{i}{2024}$.

Au final, à i fixé, les nombres $\{x_i - x_j\}$ prennent une et une seule fois chaque valeur $\dfrac{k}{2024}$ pour $0 \leqslant k \leqslant 2023$ lorsque j varie. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\} &= \frac{i-1}{2024} + \ldots + \frac{1}{2024} + 0 + \frac{2023}{2024} + \ldots + \frac{i}{2024} \\
&= 0 + \frac{1}{2024} + \frac{2}{2024} + \ldots + \frac{2023}{2024} \\
&= \frac{1}{2024}(1 + 2 + \ldots + 2023) \\
&= \frac{1}{2024} \times \frac{2023 \times 2024}{2} \\
&= \frac{2023}{2}.
\end{aligned}$$

Donc avec ce choix des réels, toutes les sommes valent $\dfrac{2023}{2}$, donc la valeur trouvée est bien optimale.

On en déduit que le plus petit réel vérifiant la propriété est $\boxed{\alpha = \dfrac{2023}{2}}$.

Solution alternative n°1 On présente ici une solution alternative pour l'étape d'analyse. L'étape de construction est la même que dans la solution principale.

Supposons que α ne vérifie pas la propriété, c'est-à-dire qu'il existe $x_1, \ldots, x_{2024}$ tel que pour tout indice i, on a

$$\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\} > \alpha.$$

Premièrement, pour i, j compris entre 1 et 2024, on sait que

$$\{x_i - x_j\} = \{\lfloor x_i \rfloor + \{x_i\} - \lfloor x_j \rfloor - \{x_j\}\} = \{\{x_i\} - \{x_j\}\}.$$

Donc, quitte à remplacer les x_i par leurs parties fractionnaires $\{x_i\}$, on peut supposer sans perte de généralité $0 \leqslant x_i < 1$. De plus, par symétrie, on peut supposer que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{2023} \leqslant x_{2024}$.

Finalement, on suppose sans perte de généralité que

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{2023} \leqslant x_{2024} < 1.$$

Nous sommes en présence de 2024 inégalités que nous pouvons sommer, et on a donc

$$\begin{aligned}
&\left(\{x_1 - x_1\} + \{x_1 - x_2\} + \ldots + \{x_1 - x_{2024}\}\right)\\
&+ \left(\{x_2 - x_1\} + \{x_2 - x_2\} + \ldots + \{x_2 - x_{2024}\}\right)\\
&+ \ldots\\
&+ \left(\{x_{2024} - x_1\} + \{x_{2024} - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2024}\}\right)\\
&>2024\alpha.
\end{aligned}$$

Notons que dans la somme, les termes correspondant à $i = j$ sont nuls, puisque $\{0\} = 0$.

On adopte la convention que $x_{2025} = x_1, x_{2026} = x_2$, etc. Ainsi, pour $i < j$, on écrira $\{x_i - x_j\} = \{x_{2024+i} - x_j\}$ avec $2024 + i > j$.

De plus, pour $i > j$, on peut écrire

$$\{x_i - x_j\} = \{x_{j+1} - x_j\} + \{x_{j+2} - x_j\} + \ldots + \{x_i - x_{i-1}\}.$$

En effet, on a supposé que les x_i sont rangés par ordre croissant, donc pour $i > j$ la formule est vérifiée (puisque $\{x_{k+1} - x_k\} = x_{k+1} - x_k$ et $\{x_i - x_j\} = x_i - x_j$).

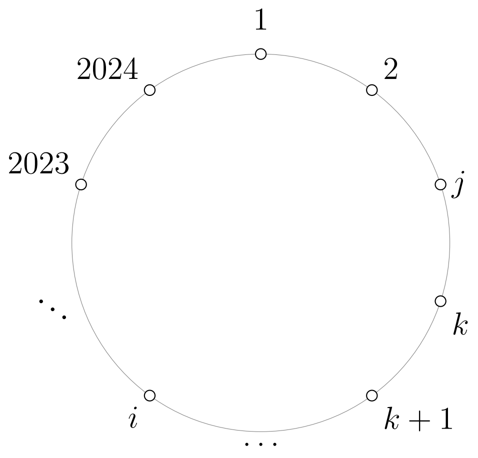
Reste à justifier que cette formule est valable si $i < j$la somme comporte le terme $\{x_1 - x_{2024}\}$. Elle est effectivement encore vraie, puisque soit $x_1 = x_{2024}$ et dans ce cas tous les termes sont nuls, soit $x_1 < x_{2024}$, et dans ce cas $\{x_1 - x_{2024}\} = 1 + x_1 - x_{2024}$, et $\{x_i - x_j\} = 1 + x_i - x_j$ (puisque $-1 < x_1 - x_{2024} < 0$ et $-1 < x_i - x_j < 0$).

Ainsi, la somme

$$\begin{aligned}
&\left(\{x_1 - x_1\} + \{x_1 - x_2\} + \ldots + \{x_1 - x_{2024}\}\right)\\
&+ \left(\{x_2 - x_1\} + \{x_2 - x_2\} + \ldots + \{x_2 - x_{2024}\}\right)\\
&+ \ldots\\
&+ \left(\{x_{2024} - x_1\} + \{x_{2024} - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2024}\}\right)
\end{aligned}$$

se réécrit comme une somme de termes de la forme $\{x_{k+1} - x_k\}$ pour $1 \leqslant k \leqslant 2024$ (avec $x_{2025} = x_1$).

Comptons combien de fois le terme $\{x_{k+1} - x_k\}$ apparaît dans la somme. Il apparaît si et seulement s'il provient du découpage d'un certain $\{x_i - x_j\}$ ($i \neq j$), de sorte que $j \leqslant k < i'$, avec $i' = i$ si $i > j$, et $i' = 2024 + i$ si $i < j$. On peut en effet visualiser les indices autour d'un cercle.



Il y a alors $\dfrac{2024 \times 2023}{2}$ choix possibles (on choisit i et j distincts, mais il faut retirer tous les choix où k n'est pas "entre" i et j, et il y en a autant que de choix avec k "entre" i et j par symétrie).

Finalement, on a montré que

$$2024\alpha < \frac{2024 \times 2023}{2}\left(\{x_2 - x_1\} + \{x_3 - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2023}\} + \{x_1 - x_{2024}\}\right).$$

On remarque alors que si $x_1 = x_{2024}$, alors

$$\{x_2 - x_1\} + \{x_3 - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2023}\} + \{x_1 - x_{2024}\} = 0$$

et si $x_1 < x_{2024}$, alors $\{x_{k+1} - x_k\} = x_{k+1} - x_k$ si $1 \leqslant k \leqslant 2023$, et $\{x_1 - x_{2024}\} = 1 + x_1 - x_{2024}$. On en déduit que

$$\{x_2 - x_1\} + \{x_3 - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2023}\} + \{x_1 - x_{2024}\} = 0 \text{ ou } 1$$

donc

$$\{x_2 - x_1\} + \{x_3 - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2023}\} + \{x_1 - x_{2024}\} \leqslant 1.$$

Ainsi

$$\alpha < \frac{2023}{2}\left(\{x_2 - x_1\} + \{x_3 - x_2\} + \ldots + \{x_{2024} - x_{2023}\} + \{x_1 - x_{2024}\}\right) \leqslant \frac{2023}{2}.$$

On a montré que si α ne convient pas, alors $\alpha < \dfrac{2023}{2}$. On en déduit en particulier que $\alpha = \dfrac{2023}{2}$ fonctionne pour tous les choix de réels $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$.

En particulier, le plus petit α recherché vérifie $\alpha \leqslant \dfrac{2023}{2}$.

Solution alternative n°2 On présente ici une solution alternative pour l'étape d'analyse. L'étape de construction est la même que dans la solution principale.

Supposons que α ne vérifie pas la propriété, c'est-à-dire qu'il existe $x_1, \ldots, x_{2024}$ tel que pour tout indice i, on a

$$\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\} > \alpha.$$

Premièrement, pour i, j compris entre 1 et 2024, on sait que

$$\{x_i - x_j\} = \{\lfloor x_i \rfloor + \{x_i\} - \lfloor x_j \rfloor - \{x_j\}\} = \{\{x_i\} - \{x_j\}\}.$$

Donc, quitte à remplacer les x_i par leurs parties fractionnaires $\{x_i\}$, on peut supposer sans perte de généralité $0 \leqslant x_i < 1$. De plus, par symétrie, on peut supposer que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{2023} \leqslant x_{2024}$.

Finalement, on suppose sans perte de généralité que

$$0 \leqslant x_1 \leqslant x_2 \leqslant x_3 \leqslant \ldots \leqslant x_{2023} \leqslant x_{2024} < 1.$$

Pour i entre 1 et 2024, on réécrit

$$\{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\} = \left(\{x_i - x_1\} + \ldots + \{x_i - x_i\}\right) + \left(\{x_i - x_{i+1}\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\}\right)$$

On sait que pour $1 \leqslant j \leqslant i$, on a $0 \leqslant x_j \leqslant x_i < 1$ donc $0 \leqslant x_i - x_j < 1$, en particulier $\{x_i - x_j\} = x_i - x_j$.

Pour $i + 1 \leqslant j \leqslant 2024$, on sait que $0 \leqslant x_i \leqslant x_j < 1$. Ainsi, $-1 < x_i - x_j \leqslant 0$.
Si $x_i - x_j < 0$, alors $\{x_i - x_j\} = 1 + x_i - x_j$ (car $0 < 1 + x_i - x_j < 1$). Si $x_i - x_j = 0$, alors $\{x_i - x_j\} = 0 \leqslant 1 = 1 + x_i - x_j$.

On peut donc dans tous les cas écrire :

$$\begin{aligned}
\alpha &< \{x_i - x_1\} + \{x_i - x_2\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\} \\
&= (\{x_i - x_1\} + \ldots + \{x_i - x_i\}) + (\{x_i - x_{i+1}\} + \ldots + \{x_i - x_{2024}\}) \\
&\leqslant (x_i - x_1 + x_i - x_2 + \ldots + x_i - x_{i-1} + x_i - x_i) + (1 + x_i - x_{i+1} + \ldots + 1 + x_i - x_{2024}) \\
&= 2024 \times x_i + (2024 - i) \times 1 - (x_1 + x_2 + \ldots + x_{2024}) \\
&= (2024 \times x_i - i) + 2024 - (x_1 + \ldots + x_{2024}).
\end{aligned}$$

Posons $S = x_1 + \ldots + x_{2024}$ la somme des réels. On a donc montré que pour tout i compris entre 1 et 2024 (inclus), on a

$$\alpha < (2024 \times x_i - i) + 2024 - S.$$

Posons i_0 l'indice tel que $2024 \times x_{i_0} - i_0$ est minimal, c'est-à-dire que pour tout $1 \leqslant i \leqslant 2024$:

$$2024x_{i_0} - i_0 \leqslant 2024x_i - i.$$

Notons $m = 2024x_{i_0} - i_0$. Comme $2024x_i - i \geqslant m$, on réécrit $x_i \geqslant \dfrac{i}{2024} + \dfrac{m}{2024}$. Alors on a

$$\begin{aligned}
S &= x_1 + x_2 + \ldots + x_{2024} \\
&\geqslant \left(\frac{1}{2024} + \frac{m}{2024}\right) + \left(\frac{2}{2024} + \frac{m}{2024}\right) + \ldots + \left(\frac{2024}{2024} + \frac{m}{2024}\right) \\
&= 2024 \times \frac{m}{2024} + \frac{1}{2024} \times (1 + 2 + \ldots + 2024) \\
&= m + \frac{1}{2024} \times \frac{2024 \times 2025}{2}.
\end{aligned}$$

Ainsi, $S \geqslant m + \dfrac{2025}{2}$. On en déduit que

$$\begin{aligned}
\alpha &< (2024 \times x_{i_0} - i_0) + 2024 - S \\
&= m + 2024 - S \\
&\leqslant m + 2024 - \left(m + \frac{2025}{2}\right) \\
&= m - m + \frac{2 \times 2024}{2} - \frac{2025}{2} \\
&= \frac{2023}{2}.
\end{aligned}$$

On a montré que si α ne convient pas, alors $\alpha < \dfrac{2023}{2}$. On en déduit en particulier que $\alpha = \dfrac{2023}{2}$ fonctionne pour tous les choix de réels $x_1, x_2, \ldots, x_{2024}$.

En particulier, le plus petit α recherché vérifie $\alpha \leqslant \dfrac{2023}{2}$.

Commentaire des correcteurs Cet exercice très difficile a été réussi par plusieurs élèves, ce qui est satisfaisant. De nombreux élèves sont tombés dans un des deux écueils suivants :

- Proposer une borne supérieure (souvent, 2024, 2023 ou 1012) ou inférieure (souvent, 0 ou 1) sur α et croire que le problème est résolu ;
- Croire qu'il fallait minimiser le minimum des 2024 sommes de l'énoncé, alors qu'il fallait maximiser ce minimum.