STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2024

Animath
Association pour l'animation mathématique

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

cnrs

Jane Street

Avant-propos

Le stage olympique de Valbonne 2024 a été organisé par l'association Animath.

Son objet a été de rassembler 90 collégiennes, collégiens,
lycéennes et lycéens de la quatrième à la terminale,
de 11 à 17 ans, passionnés de mathématiques
sélectionnés parmi les près de 2000 candidats à la Coupe Animath,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Olympiades Balkaniques de Mathématiques (BMO),
Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM).

Un peu plus qu'un tiers des stagiaires a pu découvrir la beauté des mathématiques olympiques,
tandis que les autres, ayant déjà une petite expérience dans ce domaine,
a pu approfondir ses connaissances.

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les animatheurs


Emile Avérous


Paul Avérous


Serge Bidallier


Aline Cahuzac


Gaspard Causse


Lucile Cloup


Gaëtan Dautzenberg


Antoine Derimay


Raphaël Ducatez


Aimeric Duchemin


Emilhan Dürrüoglu


Mano Etile


Benoît Fanton


Aurélien Fourré


Quentin Hurez


Eva Jacob


Paul Laurent-Levinson


Théo Lenoir


Rémi Lesbats


Corentin Lescœur


Anna Luchnikova


Hadriel Milot


Gabriel Pesquet


Clémentine Pialoux


Maena Quemener


Martin Rakovsky


Thomas Schneider

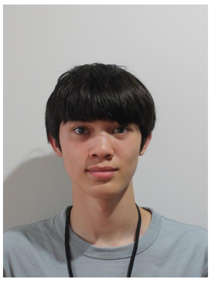

Baptiste Seraille


Melvil Treilleux


Amélie Triqueneaux


Discriminant Lechat

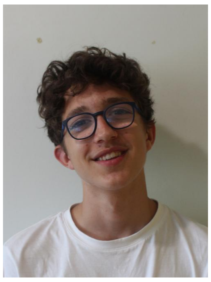
Les élèves


Paul Adant


Victor Allouche

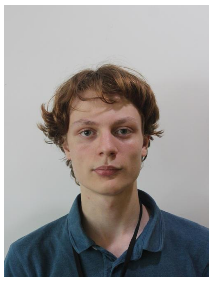

Arthur Anghel


Horia Antohi


Mattéo Argentin


Mathurin Bach


Aminaa Batsaikhan


Hélie Bernard

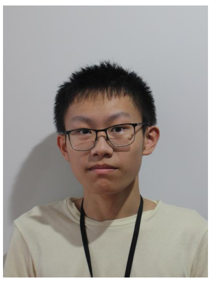

Ulysse Bersillon


Arthur Blanc-Petavy

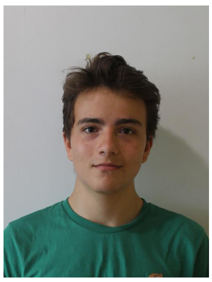

Apollinaire Bourin-Lecaille


Antoine Carriou


Lilian Charton

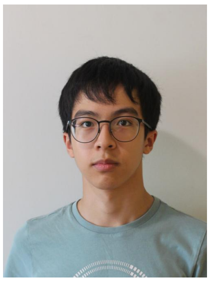

Vico Che–He


Maxime Chevalier


Lancelot Choné


Iris Ciarletta


Vlad
Contantinescu

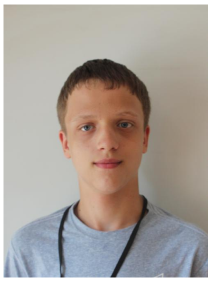

An Pha Dang


Tiphaine
De Battista


Louise Deloye


Claire Deloye


Nils Desurmont


Matthieu Diot


Leon Dugelay


Pierre Akın
Dürrüoglu


Romain Elisseche


Octave Espinoza


Samuel Faucheu

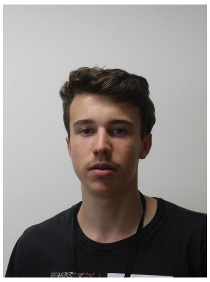

Hadrien Faucheu


Amaël Giboulot


Ernest Grulier

Assem Hamwi

Malone Heim



Itza Herve-Arrouays

Henri Hovasse

Octave Hovasse

Olivia Kahn

Ruben Kaplan

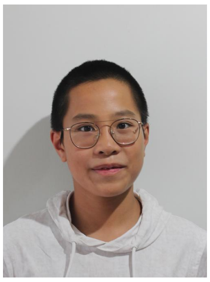
Jesse Kévorikan-Mielly

Rey Kwon

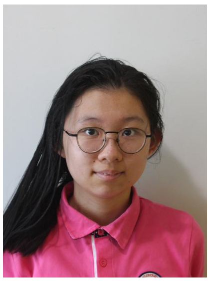
Thibaud Le Brun

David Lei

Cilia Lemaire



Noé Li



Ruirong Li

Quentin Mallay

Marc Mares


Tom Martinal


Arthur Massé


Pierre Misguich

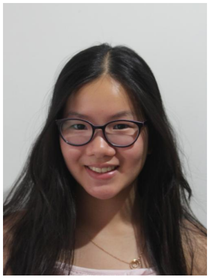

Elias Muti


Tristan Nguyen


Samuel Nuyts


Manon Pasbeau

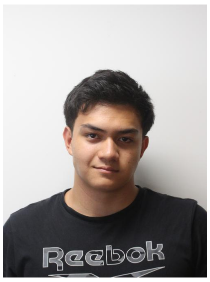

Camille Pawlowski


Clémence Pham

Anthony Pham

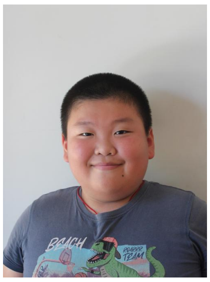

Dinh-Khanh Phan


Solal Pivron-Djeddi



Kevin Priol


Bastien Puyou


Lionel Qu


Sahaj Rajvanshi


Marin Renaudineau


Andrei Rosu


Antoine Saez Dumas


Iyed Saidana


Daniel Schachter


Paul Scheid


Swan Schleret


Arthur Seban


Yanis Selvi


William Sithisak


Alicia Stamulescu


Noah Studnia


Colin Sur-Cortier


Margot Sur-Cortier


Théo Tan


Vianney Teisseire

Arthur Teze

Thomas Thevenon

Lilas Treilleux

Martin Vidal Oger

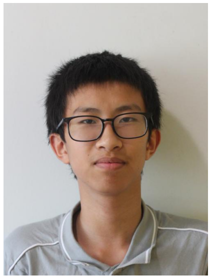
Andreï Vorontsov

Julien Wellens

Thaïs Willems

Yanlin Yang

Michel Yang



Benjamin Zheng

Table des matières

I. Déroulement du stage

Du mardi 13 août au vendredi 24 août, 90 stagiaires et 30 animatheurs se sont réunis au Centre International de Valbonne (CIV) pour un stage de mathématiques organisé par la Préparation Olympique Française de Mathématique (POFM) de l'association Animath. La sélection des participants s'est faite via la Coupe Animath dont plus de 1500 candidats ont participé au premier tour en ligne et un peu plus de 500 au deuxième tour. In fine ont été sélectionnés environs 15 quatrièmes, 20 troisièmes, 25 secondes et 30 premières avec un système de bonus favorisant les filles et les élèves n'ayant pas encore participé à un stage. Les élèves ont été répartis en 5 groupes de niveau en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques. Le stage était divisé en deux périodes de cinq jours, quatre de cours et séances d'exercices suivi d'un un entraînement de type olympique le matin du cinquième jour. Les cours portaient sur les quatre thèmes donnés lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie. Des conférences étaient également organisées certains soirs du stage. On remercie Pierre Bernhard, Thierry Viéville et Nicolas Nisse, chercheurs à l'INRIA ainsi que Raphael D. qui sont venus donner un exposé. Des activités plus ludiques étaient organisées les après-midi des entraînements et en dehors des cours les élèves ont pu profiter de la piscine, de séance de foot, de volley, d'un jeu de type chasse au trésor, de soirées astronomie et tout le long du stage d'un grand nombre de jeux de société. Il est possible de retrouver les comptes rendus du stage au jour le jour sur le site de la POFM : https://maths-olympiques.fr/?cat=5.

II. Coupe Animath de printemps 2024

Exercices collégiens

Exercice 1
La somme de trois nombres vaut 96. Le premier d'entre eux vaut 6 fois le troisième, et le troisième vaut 40 de moins que le deuxième. Quelle est la valeur du premier nombre ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1
Notons n_1, n_2, n_3 les trois nombres de l'énoncé. Comme la somme des trois nombres vaut 96 on peut écrire que

$$n_1 + n_2 + n_3 = 96. \tag{II.1}$$

L'énoncé assure aussi que

$$n_1 = 6n_3 \quad \textit{et} \quad n_2 = n_3 + 40.$$

En substituant les deux dernières équations dans l'équation (II.1), on obtient que

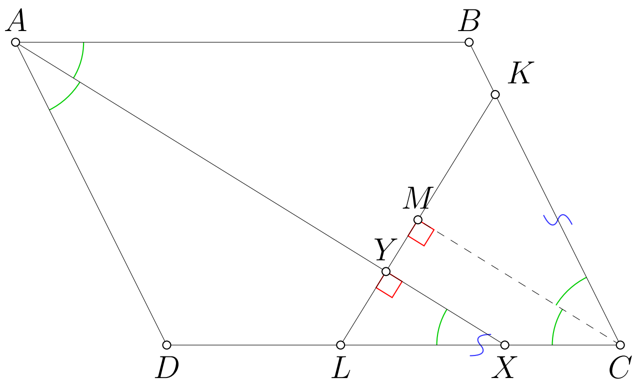
$$6n_3 + (n_3 + 40) + n_3 = 96,$$

ce qui assure que $8n_3 = 56$ et donc que $n_3 = 7$. Par suite $n_1 = 6n_3 = 42$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est dans l'ensemble très bien réussi. Attention cependant à bien lire l'énoncé : certains élèves ont un raisonnement correct mais utilisent de mauvaises relations entre les nombres de l'énoncé, ou bien ne donnent pas le bon nombre comme réponse, ce qui est dommage. De plus, certains se trompent dans leurs calculs, malgré un raisonnement juste. Il est important de bien se relire pour éviter ce genre d'étourderie. Enfin, certains élèves qui n'avaient pas le bon résultat n'ont pas présenté de raisonnement, et n'ont donc pas pu obtenir de point.

Exercice 2
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit K un point du segment $[BC]$ et soit L un point du segment $[CD]$ tels que $CK = CL$. Montrer que la bissectrice de $\widehat{DAB}$ et la droite (KL) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 2



Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ avec la droite (CD) et soit Y le point d'intersection des droites (AX) et (LK).

Montrons que $\widehat{YLX} + \widehat{YXL} = 90°$, ce qui permet de conclure que l'angle $\widehat{XYL}$ est droit.

Puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on a

$$\widehat{AXD} = \widehat{XAB} = \frac{1}{2}\widehat{DAB}.$$

D'autre part, comme le triangle KCL est isocèle en C, on a

$$180° = \widehat{KCL} + \widehat{LKC} + \widehat{KCL} = 2\widehat{KLC} + \widehat{KCL}.$$

En combinant avec l'égalité $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$, on déduit que

$$\widehat{KLC} = \frac{180° - \widehat{KCL}}{2} = 90° - \frac{\widehat{BCD}}{2} = 90° - \frac{\widehat{BAD}}{2}.$$

Ainsi,

$$\widehat{YLX} + \widehat{YXL} = \widehat{KLC} + \widehat{AXD} = 90°.$$

Solution alternative :

De même que précédemment, on établit que $\widehat{AXD} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$. D'autre part, dans le triangle KCL isocèle en C, la bissectrice de l'angle $\widehat{KCL}$ est également la médiatrice du segment $[KL]$. Ainsi, en notant M le milieu de $[KL]$, on a

$$\widehat{MCL} = \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}.$$

Les angles $\widehat{AXD}$ et $\widehat{MCL}$ sont donc égaux et les droites (MC) et (AX) sont parallèles. Puisque (MC) et (KL) sont perpendiculaires, il en est de même des droites (KL) et (AX).

Commentaire des correcteurs : Exercice globalement bien réussi. De nombreux élèves ont su restituer correctement les propriétés des parallélogrammes. Certains élèves ne savent pas exactement ce qu'est un parallélogramme, et le confondent avec le rectangle ou le carré. Il est à noter que dans un parallélogramme, la bissectrice d'un angle ne recoupe pas toujours le sommet opposé, ainsi (AC) n'était pas la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Il faut également rappeler que traiter un cas particulier (en fixant la mesure d'un angle ou la longueur d'un segment) n'a pas valeur de preuve, et ne suffit pas à résoudre complétement un exercice de géométrie. Enfin, faire une figure est toujours fortement conseillé, et permettait de faire de bonnes conjectures ici.

Exercice 3
Déterminer le plus petit entier n tel que le produit de n entiers positifs consécutifs est toujours divisible par 45.

Solution de l'exercice 3
Soit n le plus petit entier tel que le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par 45.

Donnons nous 6 entiers $n_1, \ldots, n_6$ consécutifs. Nous notons $P = n_1n_2n_3n_4n_5n_6$ le produit de ces entiers.

— L'un des entiers n_1, n_2, n_3 est divisible par 3, car parmi 3 entiers consécutifs il y a toujours un multiple de 3. Il existe donc un entier a tel que $n_1n_2n_3 = 3a$

— L'un des entiers n_4, n_5, n_6 est divisible par 3, car parmi 3 entiers consécutifs il y a toujours un multiple de 3. Il existe donc un entier b tel que $n_4n_5n_6 = 3b$.

Il s'ensuit que $P = 9ab$ et donc que 9 divise P.

De plus, 5 divise $P = 9ab$ car il existe toujours un multiple de 5 parmi 5 entiers consécutifs (et donc à fortiori parmi 6 entiers consécutifs). Puisque les nombres 5 et 9 sont premiers entre eux, le lemme de Gauss assure que 5 divise ab, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $ab = 5k$. Il s'ensuit que $P = 9 \times 5k = 45k$, donc 45 divise P.

On a donc démontré que $n \leqslant 6$.

Par ailleurs, on constate que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ n'est pas divisible par 9 donc n'est pas divisible par 45. Ceci montre que $n > 5$. **Il s'ensuit que** $n = 6$.

Commentaire des correcteurs :
L'exercice n'est pas très bien résolu par les élèves. Voici quelques remarques sur les points importants :

— Lorsqu'un exercice demande le plus petit entier satisfaisant une propriété, la solution doit obligatoirement comporter deux étapes :

1. La preuve qu'un certain entier vérifie la propriété
2. La preuve que tous les entiers plus petits ne vérifient pas la propriété

On regrette que la seconde partie soit souvent manquante dans les raisonnements.

— L'écrasante majorité des élèves rédigent leur solution à l'envers : ils pensent montrer que $n \geq 6$ en donnant les arguments qui justifient que $n = 6$ marche.

— Leurs argument ne marchent pas pour montrer que $n \geq 6$ car ils sont de la forme "pour avoir deux multiples de 3, on est obligés de prendre 6 nombres" (en argumentant par exemple que si on a "pas de chance", ils vaudront modulo 3 : $1, 2, 0, 1, 2, 0$). En effet, avec 5 nombres, on peut n'avoir que 1 mutliple de 3, mais le produit de cae nombres peut tout de même être un multiple de 45 : $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$ est un produit de 5 nombres consécutifs avec 1 seul mutliple de 3 et mais qui est un multiple de 45.

— La méthode la plus facile pour montrer que $n = 5$ ne marchait pas était celle du contre exemple : exhiber un contre exemple suffit amplement (par exemple $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$).

On regrette que très peu d'élèves y aient pensé. De plus, on attendait un minimum de justifications pour le contre exemple : le calculer pour pouvoir affirmer qu'il n'est pas divisible par 45, ou dire qu'il n'était pas divisible par 9 ; comme dit précédement, simplement dire qu'il ne contient qu'un seul fcateur divisible par 3 ne suffit pas.

— Certains élèves traitent le cas de 0 à part, cependant ce n'était pas nécessaire, 0 est un multiple de 45, de 3 et de 5 comme un autre.

— On demandait la plus petite valeur de n telle que tout produit de n entiers consécutifs est divisible par 45. Certains élèves ont simplement trouvé que $45 \mid 9 \cdot 10$ et en ont conclu que $n = 2$, or si on prend $1 \cdot 2$, ce produit de deux nombres consécutifs n'est clairement pas divisible par 45.

Exercice 4
Baptiste écrit n réels strictement positifs au tableau (pas forcément distincts). Il remarque ensuite que chaque réel écrit au tableau est strictement inférieur à la somme des $n-1$ autres réels. Baptiste voudrait alors colorier chaque réel en bleu, en vert ou en rouge, de sorte que, la somme des réels d'une même couleur est strictement inférieure à la somme des autres réels. Baptiste peut-il réaliser son souhait :
1) si $n = 4$?
2) si $n = 5$?

Solution de l'exercice 4

— Si $n = 4$, alors ce n'est pas toujours possible. En effet, supposons que Baptiste écrive au tableau le quadruplet $(1, 1, 1, 1)$. Cet ensemble vérifie la condition de l'énoncé puisque tous les réels sont strictement positifs et que chacun est plus petit que la somme des trois autres.
Si on colorie ces nombres avec trois couleurs, il existe une couleur contenant au moins deux nombres 1 (sinon il y aurait au plus trois nombres écrits au tableau). La somme de ces 1 n'est alors pas strictement inférieure à la somme des nombres restant.

En réalité, le cas où les quatre nombres écrits sont égaux est le seul cas dans lequel Baptiste ne peut pas réaliser son souhait. En effet, notons $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ les quatre nombres écrits par Baptiste. Si Baptiste colorie a, b en rouge, c en bleu et d en vert, alors le coloriage vérifie :

  — $d < a + b + c$ par hypothèse ;
  — $c < a + b + d$ par hypothèse ;
  — Comme $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$, $a + b \leqslant b + d$. De plus, on a égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$. Comme $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ cela implique $a = b = c = d$. Ainsi si $a = b = c = d$ n'est pas vérifié, on a $a + b < c + d$.

En particulier, si $a = b = c = d$ n'est pas vérifié, alors Baptiste peut réaliser son souhait.

— Si $n = 5$, alors c'est possible, ce que l'on démontre en construisant explicitement une telle répartition.
Notons $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$ les nombres de l'ensemble, considèrons la répartition

$$(a_5), (a_1, a_3), (a_2, a_4).$$

et vérifions que la somme des éléments de chaque ensemble est strictement inférieure à la somme des autres réels.

1er ensemble : Par hypothèse, on a $a_5 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

2eme ensemble : On a $a_1 \leqslant a_2$ et $a_3 \leqslant a_4$ ce qui assure que $a_1 + a_3 \leqslant a_2 + a_4$. Comme $a_5 > 0$, il s'ensuit que $a_1 + a_3 < a_2 + a_4 + a_5$.

3eme ensemble : On a $a_2 \leqslant a_3$ et $a_4 \leqslant a_5$ ce qui assure que $a_2 + a_4 \leqslant a_3 + a_5$. Comme $a_1 > 0$, il s'ensuit que $a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_5$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est plutôt mal réussi vis à vis de sa position dans le sujet. En effet,

— Beaucoup d'élèves ont cru que Baptiste choisissait les réels qu'il écrit. Vu l'énoncé et la formulation, il était assez clair que ce n'était pas vrai : les réels sont écrits avant. Les copies qui avaient compris cet énoncé n'ont pas eu de points, car ils ne répondaient pas aux questions voulues.

— Pour la première partie, beaucoup d'élèves ont trouvé le contre-exemple. Mais pour une bonne partie d'entre eux, seule une répartition avec deux éléments d'une couleur, et un élément de chaque autre couleur était possible. Nulle part il est dit que chaque couleur est utilisée, donc ça n'était à priori pas vrai. Pour avoir tous les points du contre-exemple, il fallait traiter tous les coloriages possibles : par exemple en disant qu'il y avait une couleur utilisée au moins deux fois.

— Pour la première partie, plusieurs élèves ont supposés que les réels étaient distincts. Ce qui n'était malheureusement pas correct.

— Pour la seconde partie, il fallait montrer que Baptiste pouvait toujours réaliser son choix. Une idée naturelle était d'ordonner les nombres : attention à ne pas oublier que certains peuvent être égaux.

— Un certain nombre d'élèves ont écrit les inégalités qui voulaient, fait des manipulations, puis trouvé une inégalité vraie, et ont conclu que c'était vrai. Malheureusement, il était toujours impossible de prouver à partir de cette inégalité les inégalités de départ.

— Certains ont bien compris comment grouper les nombres et n'ont pas prouvé les inégalités correspondantes $a_1 + a_3 < a_2 + a_4 + a_5$ et $a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_5$. Ce n'est pas du tout trivial, et méritait évidemment d'être prouvé.

— Certains élèves ont prouvé que Baptiste ne pouvait pas colorier les nombres car "s'il colorie le premier et le deuxième en rouge, le troisième en bleu et le quatrième et le cinquième en vert, alors si le premier et le deuxième valent 10 et les autres 1 ça ne marche pas". A priori Baptiste est intelligent, et peut adapter son coloriage à la valeur des nombres : par exemple, colorié $1, 1$ en vert, $1, 10$ en rouge, et 10 en bleu.

— Attention, le contraire de $A < B$ n'est pas $A > B$. L'oubli du cas $A = B$ a fait perdre à certains de nombreux points, car il était très dur à gérer.

— Attention : le contraire de $a = b = c = d$ n'est pas $a < b < c < d$. On peut aussi avoir $a = b < c = d$ par exemple.

— Attention à bien lire l'énoncé. Celui-ci demandait à chaque fois que les sommes soient strictement inférieures, pas inférieures ou égales.

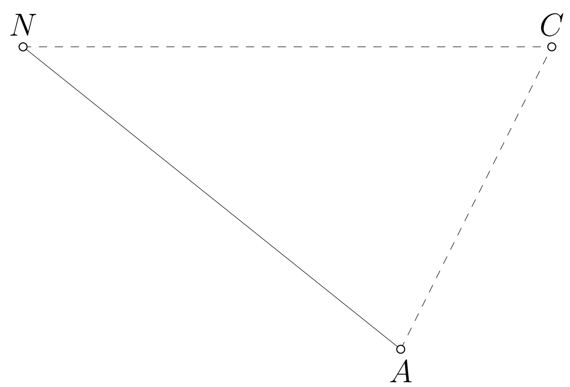
Exercice 5
Au pays d'Animath se trouvent au moins quatre villes. Deux villes quelconques sont reliées soit par une route en béton, soit par un sentier de terre (mais pas par les deux en même temps). Alice ne souhaite emprunter que des routes en béton. Elle remarque que pour aller à la capitale depuis sa ville natale, quel que soit le chemin, elle devra toujours passer par au moins deux villes intermédiaires.

Montrer qu'entre deux villes quelconques, il est toujours possible d'aller de l'une à l'autre en n'empruntant que des sentiers et en passant par au plus deux villes intermédiaires.

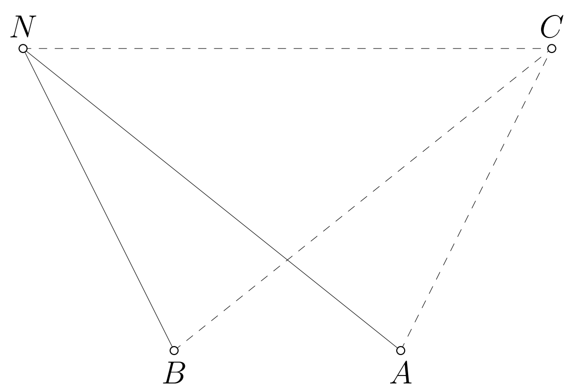
Solution de l'exercice 5
Notons N la ville natale d'Alice et C la capitale. Prenons deux villes quelconques A et B différentes de N et C.

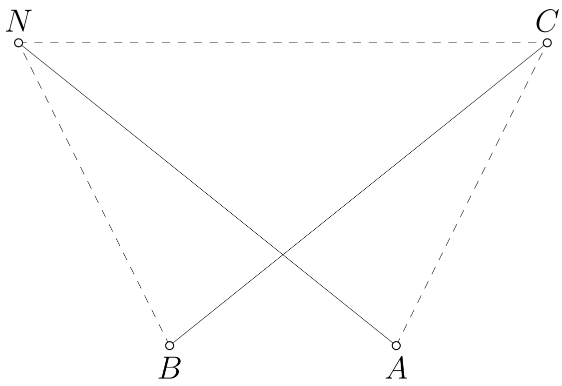
Tout d'abord, notons que N et C ne sont pas reliées par une route en béton par hypothèse, donc elles sont reliées par un sentier de terre, donc on peut aller de N à C directement en passant par des sentiers de terre.

Ensuite, supposons que l'on souhaite aller d'une des villes N et C vers une autre ville A. Comme on ne peut pas aller de N à C en passant par des routes de béton et en passant seulement par A, l'un des chemins AN et AC est un sentier de terre. Disons que AC est un sentier de terre. Alors on peut aller de A à N et C en passant uniquement par des sentiers de terre et en passant par au plus une ville intermédiaire.



Enfin, montrons qu'on peut aller de A à B en passant par au plus une ville et uniquement des sentiers de terre. Une fois encore, l'un des chmeins AN et AC est un sentier de terre. De même, l'un des chemins BN et BC est un sentier de terre. On distingue alors deux cas :





— Si A et B sont reliées à la même ville par un sentier de terre, disons par exemple C (figure de gauche), alors le chemin ACB permet d'aller de A à B par des sentiers de terre et en passant par au plus une ville. On traite de même le cas où A et B sont reliées à N par un sentier de terre.

— Supposons que A et B ne sont pas reliées à la même ville par un sentier de terre, disons par exemple que A est relié à N et B est relié à C par un sentier de terre. Notons que N et C ne sont pas reliées par une route de béton, donc elles sont reliées par un sentier de terre. Ainsi, le chemin $ANCB$ permet de passer de A à B en marchant uniquement sur des sentiers de terre et en passant par au plus deux villes intermédiaires.

Dans tous les cas, l'énoncé est vérifié.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était assez difficile et une petite cinquantaine d'élèves ont réussi à en venir à bout. On note 3 principales erreurs, qui se sont retrouvées dans de trop nombreuses tentatives de solutions :

- Certains élèves se contentent de fournir un ou plusieurs exemples. Bien que les exemples soient d'excellents moyens de se forger une intuition sur le problème, ils ne fournissent en aucun cas la preuve du problème général.
- Quelques élèves essayent de faire une récurrence sur les villes. Cela ne fonctionnait malheureusement pas ici.
- Presque toutes les copies ayant résolu le problème se sont vues attribuées la note de $6/7$. En effet, elles oubliaient de traiter le cas où l'une des deux villes que l'on cherche à relier par des sentiers de terre s'avérait être la ville natale ou bien la capitale. Cette erreur est d'autant plus regrettable que ces copies avaient réussi à démontrer des éléments bien plus complexes.

Exercice 6
Soient x, y, z trois réels non nuls tels que

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Trouver toutes les valeurs que peut prendre le nombre

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Solution de l'exercice 6
Pour démontrer cet exercice on effectue un raisonnement par analyse-synthèse.
Analyse :

En ajoutant 1 à chaque terme de l'hypothèse, on trouve

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{y+z+x}{x} = \frac{z+x+y}{y}.$$

On en déduit deux cas :
Cas 1 : $x+y+z \neq 0$. Dans ce cas, de l'égalité ci-dessus on déduit que $x = y = z$. Mais alors

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{2x \times 2x \times 2x}{x^3} = 8.$$

Cas 2 : $x + y + z = 0$. Dans ce cas,

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{(-z) \times (-x) \times (-y)}{xyz} = -1.$$

Synthèse :

Réciproquement, chacun des valeurs 8 et -1 peut être effectivement réalisée par un triplet (x, y, z) de réels non nuls.
Si on pose $x = y = z = 2$, on observe que

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = 8.$$

Si on pose $x = 1, z = 2, y = -3$. Alors on a bien

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = -1. \tag{II.2}$$

et donc

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = -1$$

On a donc démontré que les seules solutions possibles sont -1 et 8.

Solution alternative :

Pour démontrer cet exercice on effectue un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse :
En multipliant la première expression par xyz on trouve que

$$xy(x+y) = yz(y+z) = xz(z+x)$$

c'est-à-dire que

$$x^2y + xy^2 = y^2z + yz^2 = z^2x + zx^2$$

Comme $x, y, z \neq 0$, il s'ensuit que

$$x^2 + xy = yz + z^2 \quad \text{(II.3)}$$
$$y^2 + yz = zx + x^2 \quad \text{(II.4)}$$
$$xy + y^2 = z^2 + zx \quad \text{(II.5)}$$

Maintenant on distingue deux cas :
Cas 1 : Si $x = y = z$, alors

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = 2$$

ce qui assure que

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = 8$$

Cas 2 : Si au moins deux des réels sont différents, disons $x \neq y$, alors l'équation (II.4) montre que

$$\begin{aligned} x^2 + xz = yz + y^2 &\iff x^2 - y^2 = zy - xz \\ &\iff (x-y)(x+y) = z(y-x) \\ &\iff x + y = -z. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\frac{x+y}{z} = \frac{-z}{z} = -1$ et donc que

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = -1.$$

En conclusion, les seules valeurs possibles seraient -1 et 8.
Synthèse :
Si on pose $x = y = z = 2$, on observe que

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = 8.$$

Si on pose $x = 1, z = 2, y = -3$. Alors on a bien

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = -1. \quad \text{(II.6)}$$

et donc
$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = -1$$
On a donc démontré que les seules solutions possibles sont -1 et 8.

Solution alternative n°2 :
On propose une troisième méthode pour l'analyse. Posons $a = \frac{x+y}{z}$.
On a

$$\begin{aligned} a^3 &= \frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz} \\ &= \frac{2xyz + x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + x^2z}{xyz} \\ &= 2 + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \\ &= 2 + 3a \end{aligned}.$$

On a donc

$$0 = a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a^2+2a+1) = (a-2)(a+1)^2.$$

(Pour trouver cette factorisation, on pouvait notamment remarquer que $x = -1$ et$x = -2$ vérifient $x^3 - 3x - 2 = 0$.) On déduit que $a = -1$ ou $a = 2$. En particulier $\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz} = a^3$ vaut 8 ou -1.
De même que précédemment, on trouve deux exemples qui fonctionnent pour 8 et -1.

Commentaire des correcteurs :
L'exercice était assez difficile et peu d'élèves ont réussi à obtenir plus de 1 point dans l'exercice, encore moins à obtenir tous les points. La majorité des élèves ayant rendu une copie a trouvé la solution 8 en prenant $x = y = z$, mais la plupart d'entre eux ont conjecturé que c'était la seule. Beaucoup d'élèves ont eu de bonnes idées, mais sont tombés dans un des nombreux pièges de l'exercice :

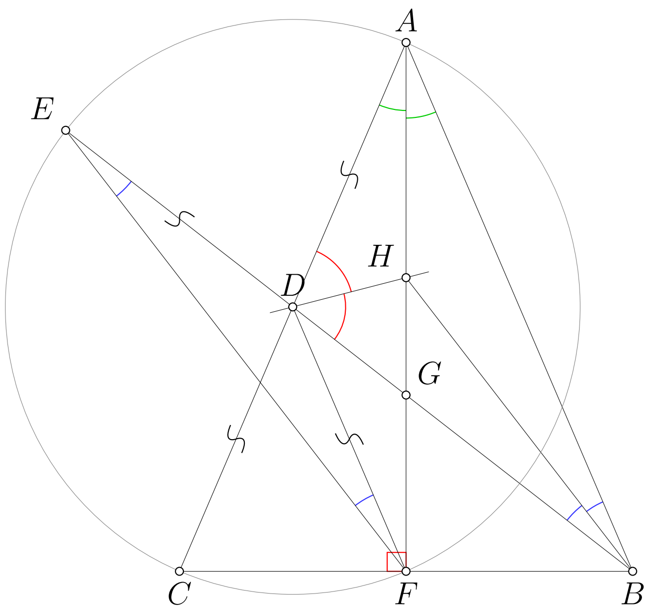
- Certains ont considéré que x, y, z étaient positifs (ou même entiers parfois), ce qui simplifiait beaucoup le problème puisqu'il pouvait se résoudre par des inégalités élémentaires.
- D'autres ont commencé avec la bonne approche mais ont divisé par des termes comme $x-y$ ou $x+y+z$ qui pouvaient à priori être nuls (et qui l'étaient pour une des solutions).
- Enfin, parmi les quelques élèves qui sont parvenus à la fin de la démonstration, très peu ont vérifié que -1 était effectivement une solution du problème en exhibant un triplet solution ou en vérifiant que les triplets vérifiant $x + y + z = 0$ étaient bien solution de l'énoncé.

Un certain nombre d'élèves ont des problèmes majeurs avec les manipulations algébriques : certains ont trouvé que la quantité valait 6 pour $x = y = z$, affirment que $(x+y)^2 = x^2 + xy + y^2$, affirment que $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{1}$...

Exercice 7
Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du segment $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. La droite (BD) coupe le cercle de diamètre $[AC]$ au point E, de sorte que E et B sont de part et d'autre de $[AC]$. La médiatrice du segment $[EC]$ recoupe la droite (AG) au point H.

Montrer que la droite (BH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GBA}$.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



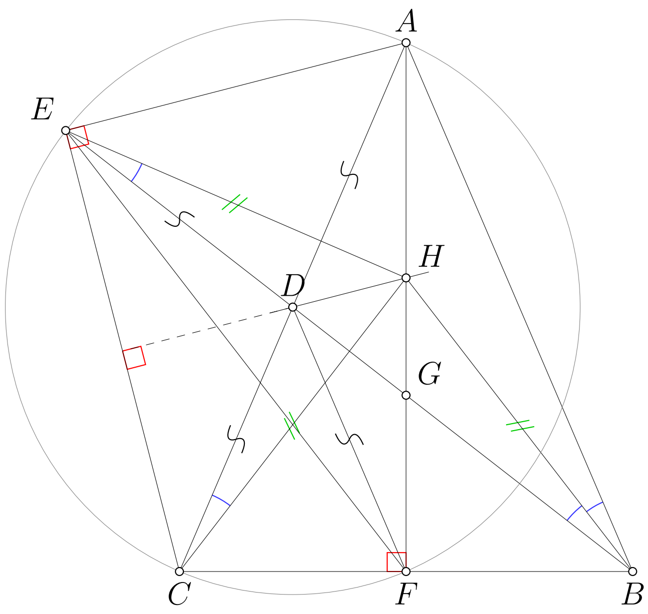
1) Nous allons montrer que H est le centre du cercle inscrit du triangle ADB. Pour cela, nous montrons que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ADB}$ et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$. Si c'est le cas, comme les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes, il viendra que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}$, et donc de l'angle $\widehat{ABG}$.

D'une part, comme le triangle ABC est isocèle en A, la médiane issue du sommet A est également la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Ainsi, H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'autre part, puisque D est le milieu du segment $[AC]$, il est le centre du cercle circonscrit au triangle AEC. Ainsi, D et H sont tous les deux sur la médiatrice du segment $[EC]$. Comme le triangle ECD est isocèle en D, cette médiatrice est également la bissectrice de l'angle $\widehat{EDC}$, et donc celle de l'angle $\widehat{ADB}$ qui lui est opposé par le sommet.

Ainsi H est bien sur le centre du cercle inscrit au triangle ABD comme annoncé.

<u>*Solution alternative $n°1$:*</u>



Puisque H est sur la médiane issue du sommet A, qui est aussi l'axe de symétrie su segment $[BC]$, on a $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ ainsi que $HB = HC$. De même que dans la solution précécdente, D est le centre du cercle passant par A, C et E. Puisque D et H sont tous les deux sur l'axe de symétrie sur segment $[EC]$, on a aussi $\widehat{HCD} = \widehat{HED}$ ainsi que $HC = HE$. Il vient que $HE = HB$. Puisque le triangle EHB est isocèle en H, $\widehat{BEH} = \widehat{HBE}$. Finalement :

$$\widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{DCH} = \widehat{DEH} = \widehat{EBH} = \widehat{GBH},$$

ce qui est le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs :

Problème plutot bien réussi pour un dernier exercice. Un grand nombre d'elève ne prend pas la peine de justifier que D est bien sur la médiatrice de $[EC]$, alors que c'est l'un des points clés de l'exercice. Parmi les tentatives infructueuses, on trouve beaucoup de confusions sur les droites remarquables d'un triangle, qui sont pourtant rappelées dans le formulaire des prérequis. Enfin, quelques élèves se sont directement placés dans le cas d'un triangle équilatéral, ce qui ne permet pas d'avancer sur le cas général.

Exercices lycéens

Exercice 8
Calculer

$$\frac{3^3+3^5}{54}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 8
On peut factoriser le numérateur, ce qui permet d'obtenir que

$$\frac{3^3+3^5}{54}=\frac{3^3\times(1+3^2)}{2\times3\times3\times3}.$$

En simplifiant par 3^3 au numérateur et au dénominateur on obtient que

$$\frac{3^3\times(1+3^2)}{2\times3\times3\times3}=\frac{1+3^2}{2}=\frac{1+9}{2}=5$$

La réponse attendue est donc 5.

Solution alternative :
On peut simplifier directement la fraction en faisant à la main tous les calculs :

$$\frac{3^3+3^5}{54}=\frac{27+243}{54}=\frac{270}{54}=5.$$

La réponse attendue est donc 5.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi. La plupart des erreurs sont dûes à des inattentions lors des simplifications de fraction, ou lors du calcul des puissances de 3. On rappelle que détailler ses calculs sur la copie permet potentiellement d'obtenir des points partiels même en cas d'erreur de calcul.

Exercice 9
Soient a, b et c trois réels vérifiant les deux équations $4a + 3b = c$ et $3a - 4b = 7c$. Montrer que $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Solution de l'exercice 9
En élevant au carré et en sommant les deux équations, on a

$$c^2 + 49c^2 = (4a + 3b)^2 + (3a - 4b)^2 = 16a^2 + 9b^2 + 24ab + 9a^2 + 16b^2 - 24ab = 25a^2 + 25b^2.$$

En simplifiant par 25, on trouve bien $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Solution alternative :
On résoud le système de deux équations à deux inconnues

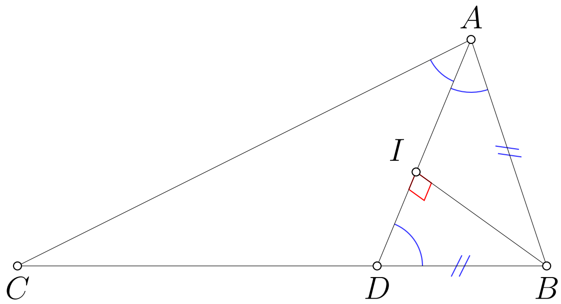
$$\begin{cases} 4a + 3b = c \\ 3a - 4b = 7c \end{cases}$$

En multipliant par 4 la première équation et par 3 la deuxième équation et en sommant on trouve $25a = 25c$, soit $a = c$. En multipliant par 3 la première équation et par 4 la deuxième équation et en faisant la différence, on trouve $25b = -25c$, soit $b = -c$. Ainsi, $a^2 + b^2 = 2c^2$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. La majorité des élèves ont choisi de résoudre le système en fonction de a et b. Les quelques tentatives qui n'aboutissent pas à une solution complètes sont dûes à des erreurs de calcul dans l'une ou l'autre des approches du corrigé, ou à une erreur dans l'emploi des identités remarquables.

Exercice 10
Soit ABC un triangle non plat. Soit I le centre de son cercle inscrit et soit D le pied de la bissectrice issue du sommet A. Montrer que $\widehat{BID} \neq 90°$.

Solution de l'exercice 10



Supposons par l'absurde que $\widehat{BID} = 90°$. Alors $\widehat{BIA} = 90°$ également. Ainsi, en utilisant que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$ et que $\widehat{ABI} = \widehat{IBD}$, on a

$$\widehat{IAB} = 90° - \widehat{ABI} = 90° - \widehat{IBD} = \widehat{BDA}.$$

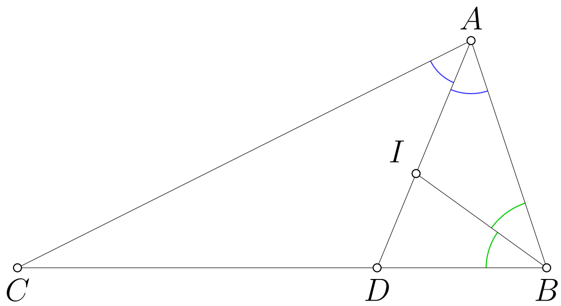
Or, le point I est sur la bissectrice de l'angle en A, de sorte que

$$\widehat{ADB} = \widehat{BAD} = \widehat{DAC}.$$

Par égalité des angles alternes internes, on déduit que les droites (BC) et (CA) sont parallèles, donc confondues, ce qui contredit le fait que le triangle est non plat.

Ainsi, $\widehat{BID} \neq 90°$.

Solution alternative :



On propose un raisonnement direct. La somme des angles dans le triangle $\widehat{BIA}$ vaut $180°$, de sorte que :

$$\widehat{BID} = 180° - \widehat{BIA} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}.$$

En utilisant que le point I appartient à la bissectrice de chacun des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$, on trouve

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Puisque le triangle ABC est non plat, l'angle $\widehat{ACB}$ est strictement positif et

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) < \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \frac{1}{2}180° = 90°.$$

On trouve donc bien que $\widehat{BID} \neq 90°$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup abordé et dans l'ensemble a été très bien réussi par les élèves, qui ont pour la plupart rendu un raisonnement clair et complet. Néanmoins, un bon nombre sont passés à côté de l'exercice, notamment à cause de confusions entre bissectrices et médiatrices ou entre point d'intersection de la bissectrice et point de tangence du cercle inscrit. Les correcteurs tiennent à insister sur le fait que ce sont des notions fondamentales qu'il est important de maîtriser. Enfin, certains élèves se sont contentés d'argumenter qu'ils ne pouvaient pas dessiner un angle de $90°$ et donc que c'était impossible. Nous rappelons qu'un dessin n'est pas une preuve, et le fait de ne pas réussir à dessiner une figure avec un angle de $90°$ ne saurait suffire à résoudre l'exercice.

Exercice 11
Baptiste écrit n réels strictement positifs au tableau (pas forcément distincts). Il remarque ensuite que chaque réel écrit au tableau est strictement inférieur à la somme des $n-1$ autres réels. Baptiste voudrait alors colorier chaque réel en bleu, en vert ou en rouge, de sorte que, la somme des réels d'une même couleur est strictement inférieure à la somme des autres réels. Baptiste peut-il réaliser son souhait :

1) si $n=4$?
2) si $n=5$?

Solution de l'exercice 11

— Si $n=4$, alors ce n'est pas toujours possible. En effet, supposons que Baptiste écrive au tableau le quadruplet $(1,1,1,1)$. Cet ensemble vérifie la condition de l'énoncé puisque tous les réels sont strictement positifs et que chacun est plus petit que la somme des trois autres.
Si on colorie ces nombres avec trois couleurs, il existe une couleur contenant au moins deux nombres 1 (sinon il y aurait au plus trois nombres écrits au tableau). La somme de ces 1 n'est alors pas strictement inférieure à la somme des nombres restant.
En réalité, le cas où les quatre nombres écrits sont égaux est le seul cas dans lequel Baptiste ne peut pas réaliser son souhait. En effet, notons $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ les quatre nombres écrits par Baptiste. Si Baptiste colorie a, b en rouge, c en bleu et d en vert, alors le coloriage vérifie :
  — $d < a+b+c$ par hypothèse;
  — $c < a+b+d$ par hypothèse;
  — Comme $a \leqslant c$ et $b \leqslant d$, $a+b \leqslant b+d$. De plus, on a égalité si et seulement si $a=c$ et $b=d$. Comme $a \leqslant b \leqslant c \leqslant d$ cela implique $a=b=c=d$. Ainsi si $a=b=c=d$ n'est pas vérifié, on a $a+b<c+d$.

En particulier, si $a=b=c=d$ n'est pas vérifié, alors Baptiste peut réaliser son souhait.

— Si $n=5$, alors c'est possible, ce que l'on démontre en construisant explicitement une telle répartition.
Notons $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant a_4 \leqslant a_5$ les nombres de l'ensemble, considèrons la répartition

$$(a_5),(a_1,a_3),(a_2,a_4).$$

et vérifions que la somme des éléments de chaque ensemble est strictement inférieure à la somme des autres réels.

1er ensemble : Par hypothèse, on a $a_5 < a_1+a_2+a_3+a_4$.

2eme ensemble : On a $a_1 \leqslant a_2$ et $a_3 \leqslant a_4$ ce qui assure que $a_1+a_3 \leqslant a_2+a_4$. Comme $a_5>0$, il s'ensuit que $a_1+a_3<a_2+a_4+a_5$.

3eme ensemble : On a $a_2 \leqslant a_3$ et $a_4 \leqslant a_5$ ce qui assure que $a_2+a_4 \leqslant a_3+a_5$. Comme $a_1>0$, il s'ensuit que $a_2+a_4<a_1+a_3+a_5$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est plutôt mal réussi vis à vis de sa position dans le sujet. En effet,

— Beaucoup d'élèves ont cru que Baptiste choisissait les réels qu'il écrit. Vu l'énoncé et la formulation, il était assez clair que ce n'était pas vrai : les réels sont écrits avant. Les copies qui avaient compris cet énoncé n'ont pas eu de points, car ils ne répondaient pas aux questions voulues.

— Pour la première partie, beaucoup d'élèves ont trouvé le contre-exemple. Mais pour une bonne partie d'entre eux, seule une répartition avec deux éléments d'une couleur, et un élément de chaque autre couleur était possible. Nulle part il est dit que chaque couleur est utilisée, donc ça n'était à priori pas vrai. Pour avoir tous les points du contre-exemple, il fallait traiter tous les coloriages possibles : par exemple en disant qu'il y avait une couleur utilisée au moins deux fois.

— Pour la première partie, plusieurs élèves ont supposés que les réels étaient distincts. Ce qui n'était malheureusement pas correct.

— Pour la seconde partie, il fallait montrer que Baptiste pouvait toujours réaliser son choix. Une idée naturelle était d'ordonner les nombres : attention à ne pas oublier que certains peuvent être égaux.

— Un certain nombre d'élèves ont écrit les inégalités qui voulaient, fait des manipulations, puis trouvé une inégalité vraie, et ont conclu que c'était vrai. Malheureusement, il était toujours impossible de prouver à partir de cette inégalité les inégalités de départ.

— Certains ont bien compris comment grouper les nombres et n'ont pas prouvé les inégalités correspondantes $a_1 + a_3 < a_2 + a_4 + a_5$ et $a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_5$. Ce n'est pas du tout trivial, et méritait évidemment d'être prouvé.

— Certains élèves ont prouvé que Baptiste ne pouvait pas colorier les nombres car "s'il colorie le premier et le deuxième en rouge, le troisième en bleu et le quatrième et le cinquième en vert, alors si le premier et le deuxième valent 10 et les autres 1 ça ne marche pas". A priori Baptiste est intelligent, et peut adapter son coloriage à la valeur des nombres : par exemple, colorié $1, 1$ en vert, $1, 10$ en rouge, et 10 en bleu.

— Attention, le contraire de $A < B$ n'est pas $A > B$. L'oubli du cas $A = B$ a fait perdre à certains de nombreux points, car il était très dur à gérer.

— Attention : le contraire de $a = b = c = d$ n'est pas $a < b < c < d$. On peut aussi avoir $a = b < c = d$ par exemple.

— Attention à bien lire l'énoncé. Celui-ci demandait à chaque fois que les sommes soient strictement inférieures, pas inférieures ou égales.

Exercice 12
Déterminer tous les nombres premiers p vérifiant la propriété suivante : si on écrit les entiers de 1 à p au tableau, on peut les séparer en plusieurs groupes de nombres consécutifs de même somme.

Solution de l'exercice 12
On constate que $p = 2$ ne convient pas, car les groupes ={1} et {2} ne sont pas de même somme. On peut donc sans perte de généralité supposer que l'on cherche à déterminer les nombres premiers $p \geqslant 3$ vérifiant la propriété de l'énoncé.

On montre par un raisonnement d'*analyse-synthèse* que 3 est le seul nombre premier qui vérifie la propriété de l'énoncé.

Analyse : Soit $p \geqslant 3$ un tel nombre premier et donnons nous une division des nombres $\{1, \ldots, p\}$ en $g > 1$ groupes de nombres consécutifs ayant ayant chacun pour somme S. Tout d'abord, la répartition des entiers en p groupes $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{p\}$ ne vérifie pas la condition car $1 \neq p$. Ainsi, il y a strictement moins de p groupes, c'est-à-dire que $g < p$. On note k le nombre d'éléments dans le premier groupe. On a

$$gS = 1 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}.$$

ce qui assure que $p \mid gS$. Puisque $g < p$ et que p est premier, il s'ensuit que p est premier avec g et donc que $p|S$ par le lemme de Gauss.

Or, le premier groupe assure que $S = 1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, ce qui assure que $p \mid k+1$. Il s'ensuit que $p \leqslant k+1$. On a donc $k < p \leqslant k+1$ ce qui démontre que $p = k+1$ et donc que le premier groupe est constitué des nombres $\{1, \ldots, p-1\}$.
On a donc deux groupes :

$$\{1, \ldots, p-1\}, \{p\}.$$

Par hypothèse, $p = 1 + \ldots + (p-1) = \frac{(p-1)p}{2}$ donc $\frac{p-1}{2} = 1$ donc $p-1 = 2$ ce qui assure que $p = 3$.

Synthèse : Le nombre $p = 3$, convient puisqu'on peut faire la répartition $\{1, 2\}, \{3\}$.

Commentaire des correcteurs : La plupart des élèves trouvent bien le cas $p = 3$ et conjecturent qu'il s'agit de l'unique solution. Certains écrivent des calculs un peu compliqués lorsque des considérations arithmétiques suffisent. Nous avons été surpris de voir un certain nombre de copies appliquer le lemme d'Euclide dans le mauvais sens, concluant que S divisait p ou $\dfrac{p+1}{2}$. Un petit nombre d'élèves conjecturent (ou affirment) qu'il n'y a aucune solution alors que trouver $p = 3$ était abordable : il faut toujour tester les petits cas lorsque cela est possible. Enfin, il est dommage que certaines copies obtiennent la note de 6/7 pour avoir oublié de montrer explicitement que $p = 3$ fonctionnait bien ou pour avoir oublié d'exclure $p = 2$.

Exercice 13
On considère une grille 100×100 dont toutes les cases sont soit blanches soit noires. Une opération consiste à choisir une ligne ou une colonne de la grille, et modifier la couleur de 99 des cases de cette ligne ou de cette colonne. Quel est le plus petit nombre d'opérations qu'il faut effectuer pour passer de la configuration d'une grille dont toutes les cases sont blanches à une grille où les cases sont coloriées selon le coloriage d'un échiquier.

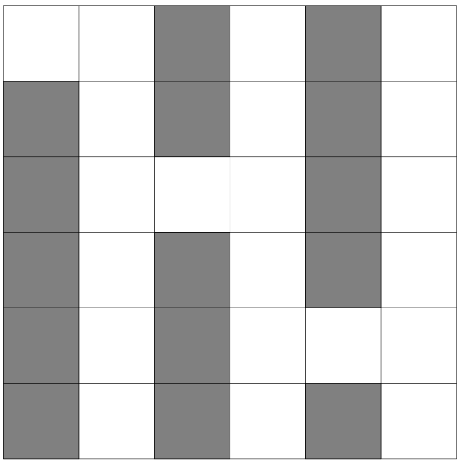
Un coloriage en échiquier est un coloriage dans lequel il y a autant de cases blanches que de cases noires et où deux cases blanches n'ont jamais de côté en commun.

Solution de l'exercice 13
Réponse : 100 opérations sont nécessaires et suffisantes.

Dans cet exercice, on demande de trouver le plus petit nombre d'opérations pour aboutir à une configuration. Il faut donc nécessairement distinguer deux parties : d'une part montrer que si l'on parvient à la configuration voulue en n opérations, on a nécessairement $n \geqslant 100$ (cette étape est appelée l'*analyse*) et d'autre part qu'il est bien possible d'obtenir la configuration voulue en 100 opérations (c'est ce qu'on appelle la *synthèse*).

Analyse : Supposons que l'on a effectué n opérations, après lesquelles la grille dispose du coloriage de l'échiquier. Comme l'échiquier est de longueur paire, l'une des grandes diagonales de la grille contient alors 100 cases noires. Comme deux quelconques de ces cases ne sont jamais sur la même colonne ou la même ligne, elles n'ont pas pu changer d'état au cours de la même opération. Il y a donc eu au moins 100 opérations.

Synthèse : Numérotons les colonnes de gauche à droite de 1 à 100 et les lignes de haut en bas de 1 à 100. Notons A la grande diagonale de l'échiquier partant du coin supérieur gauche et allant au coin inférieur bas. On commence, sur chaque colonne de numéro impaire, par colorier toutes les cases en noir sauf les cases de la diagonale A. Après opération, on obtient le schéma suivant :



Pour l'instant, toutes les cases de la forme $(i, 2j+1)$ pour $i \neq 2j+1$ sont de couleur noire, et les autres cases sont blanches.

Après ça, on effectue une opération sur chaque ligne de numéro impair en modifiant la couleur des 99 cases qui ne sont pas sur A. Les cases de la forme $(2i+1, 2j+1)$ deviennent blanches, les cases de la forme $(2i+1, 2j)$ pour $j \neq i$ deviennent noires, les cases de la forme

$(2i, 2j)$ restent blanches et les cases de la forme $(2i, 2j+1)$ deviennent noires. On obtient bien un échiquier.

Solution alternative n°1 :

On propose une autre façon de réaliser l'analyse :

On s'intéresse aux cases qui sont noires dans l'échiquier final. On les appellera dans la suite les cases « gentilles ». On remarque que chaque ligne et chaque colonne contient exactement 50 cases gentilles. On en déduit déjà que l'échiquier contient $50 \cdot 100 = 5000$ cases gentilles.

De plus, la couleur de chaque case gentille doit être modifiée au moins une fois (car les cases gentilles sont initialement blanches, mais sont noires sur l'échiquier final). Or, en une opération, on peut modifier la couleur d'au plus 50 cases gentilles (car on opère sur une ligne ou une colonne seulement, et on a vu que chaque ligne et chaque colonne contient exactement 50 cases gentilles). Ainsi, pour modifier la couleur des 5000 cases gentilles, il faut au moins $\frac{5000}{50} = 100$ opérations, ce qui montre qu'il faut au moins 100 opérations pour obtenir un échiquier.

Solution alternative n°2 :

On propose une troisième façon de réaliser l'analyse.

Supposons par l'absurde qu'au plus 99 opérations ont été effectuées. Alors il existe une ligne et une colonne qui n'ont subi aucune opération. La case à leur intersection est donc une case blanche. Les cases noires présentes sur l'union de la ligne et de la colonne ont donc vu leur état modifié au cours d'opérations différentes, et il y en a 100, ce qui donne la contradiction.

Solution alternative n°3 :

On propose une quatrième façon de réaliser l'analyse.

Supposons à nouveau par l'absurde qu'il y a au plus 99 opérations d'effectuées. Alors (par symétrie), au plus 49 lignes ont été utilisées et une colonne au moins n'a pas été utilisée. Cette colonne possède 50 cases noires, qui ont vu leur état changer au cours d'opérations différentes, contredisant qu'il y avait au plus 49 lignes utilisées.

Commentaire des correcteurs : Cet exercice était difficile, la plupart des copies rendues n'ont pas réussi à obtenir beaucoup de points et peu d'élèves ont résolu complètement l'exercice. La preuve se décomposait en deux parties, il fallait dans un premier temps (la synthèse) démontrer que 100 opérations étaient suffisantes en exhibant une suite d'opération qui produit un échiquer et dans un deuxième temps (l'analyse) il fallait démontrer que l'on ne pouvait pas faire mieux que 100 opérations. Dans cette dernière partie plusieurs approches différentes étaient possibles, elle a également été considérée plus difficile.

Un certain nombre d'élèves ont pu obtenir des points résolvant la synthèse.

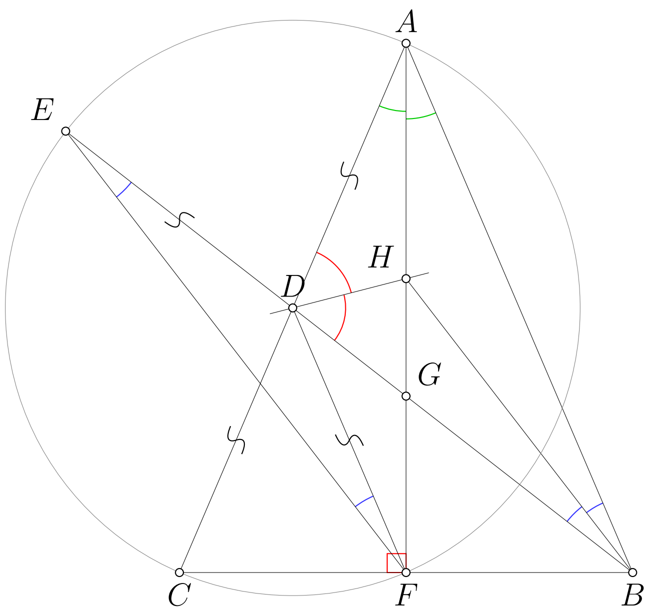
La plupart des tentatives pour démontrer l'analyse ont échoué, la majorité des élèves ayant essayé de sommer des résultats d'optimalité pour plusieurs lignes. Ce genre de raisonnement avait peu de chance d'aboutir, en effet il ne prenait pas en compte le fait qu'une opération sur une colonne peut avoir un impact sur deux lignes différentes rendant caduque toute preuve qui considérait les lignes de manières indépendantes. Une des preuves de l'analyse utilisait la grande diagonale noire, la plupart des élèves ayant utilisé cette méthode ont oublié de démontrer que cette diagonale existait bien, en effet si la taille de l'échiquier n'était pas paire cette diagonale n'avait aucune raison d'exister. Nous n'avons pas pris cela en compte dans notre notation et avons accordé tous les points.

Exercice 14
Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du segment $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. La droite (BD) coupe le cercle de diamètre $[AC]$ au point E, de sorte que E et B sont de part et d'autre de $[AC]$. La médiatrice du segment $[EC]$ recoupe la droite (AG) au point H.

1) Montrer que la droite (BH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GBA}$.

2) Soit F le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABC. Montrer que les droites (EF) et (BH) sont parallèles.

Solution de l'exercice 14



1) Nous allons montrer que H est le centre du cercle inscrit du triangle ADB. Pour cela, nous montrons que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ADB}$ et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$. Si c'est le cas, comme les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes, il viendra que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}$, et donc de l'angle $\widehat{ABG}$.

D'une part, comme le triangle ABC est isocèle en A, la médiane issue du sommet A est également la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Ainsi, H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'autre part, puisque D est le milieu du segment $[AC]$, il est le centre du cercle circonscrit au triangle AEC. Ainsi, D et H sont tous les deux sur la médiatrice du segment $[EC]$. Comme le triangle ECD est isocèle en D, cette médiatrice est également la bissectrice de l'angle $\widehat{EDC}$, et donc celle de l'angle $\widehat{ADB}$ qui lui est opposé par le sommet.

Ainsi H est bien sur le centre du cercle inscrit au triangle ABD comme annoncé.

2) On va montrer que $\widehat{FED} = \widehat{HBD}$. Pour cela, on remarque que puisque $\widehat{CFA} = 90°$, le point F est sur le cercle de diamètre $[AC]$. Ainsi, le triangle DEF est isocèle en D. On obtient alors que

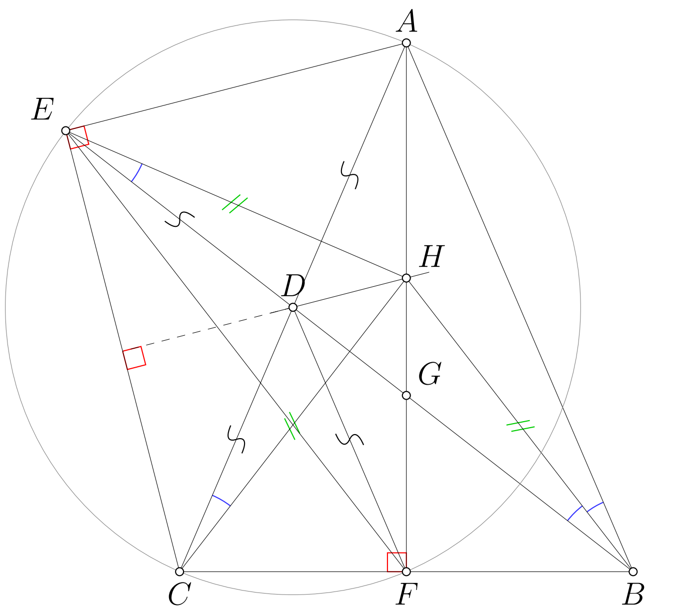
$$\widehat{FED} = \frac{1}{2}(\widehat{FED} + \widehat{EFD}) = \frac{1}{2}(180° - \widehat{EDF}) = \frac{1}{2}\widehat{FDB}.$$

Puisque les points D et F sont milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[BC]$, les droites (DF) et (AB) sont parallèles. Il vient que $\widehat{FDB} = \widehat{DBA}$. En utilisant la question 1), on déduit que

$$\widehat{FED} = \frac{1}{2}\widehat{FDB} = \frac{1}{2}\widehat{DBA} = \widehat{HBD}.$$

Les angles $\widehat{FED}$ et $\widehat{HBD}$ sont donc alternes-internes et les droites (EF) et (BH) sont parallèles.

<u>*Solution alternative n°1 :*</u>
On propose une solution alternative pour la question 1 et pour la question 2.



1) Puisque H est sur la médiane issue du sommet A, qui est aussi l'axe de symétrie su segment $[BC]$, on a $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ ainsi que $HB = HC$. De même que dans la solution précécdente, D est le centre du cercle passant par A, C et E. Puisque D et H sont tous les deux sur l'axe de symétrie sur segment $[EC]$, on a aussi $\widehat{HCD} = \widehat{HED}$ ainsi que $HC = HE$. Il vient que $HE = HB$. Puisque le triangle EHB est isocèle en H, $\widehat{BEH} = \widehat{HBE}$. Finalement :

$$\widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{DCH} = \widehat{DEH} = \widehat{EBH} = \widehat{GBH},$$

ce qui est le résultat voulu.

2) Nous allons montrer que $\dfrac{GE}{GB} = \dfrac{GF}{GH}$, ce qui permet de conclure d'après la réciproque du théorème de Thalès. Pour cela, on rappelle que le point G est situé aux deux tiers de chaque médiane du triangle BAC, de sorte que $GA = 2GF$ et $GB = 2GD$.

De plus, puisque le point E est sur le cercle de diamètre $[AC]$, on a $\widehat{CEA} = 90°$. Les droites (DH) et (AE) sont alors toutes les deux perpendiculaires à la droite (EC), elles sont donc parallèles. On déduit d'après le théorème de Thalès que

$$\frac{GE}{GD} = \frac{GA}{GH}.$$

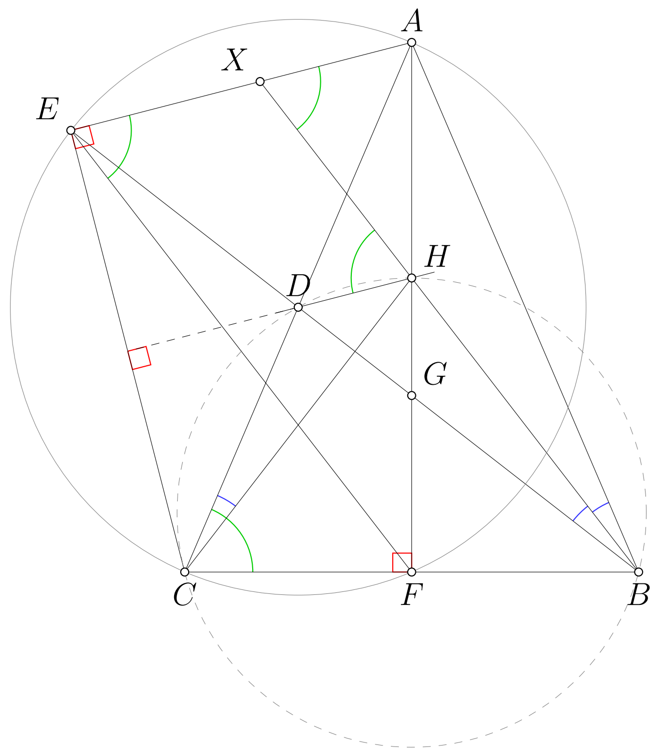
Mais alors

$$\frac{GE}{GB} = \frac{GE}{2GD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{GE}{GD} = \frac{1}{2}\frac{GA}{GH} = \frac{GF}{GH},$$

qui est l'égalité de rapports annoncée.

Solution alternative n°2 :

2) On propose une troisième façon de résoudre l'exercice à l'aide du théorème de l'angle inscrit.



De même que dans les précédentes solutions, le point D est le centre du cercle de diamètre $[AC]$ auquel appartiennent les points E et F, avec en particulier, $\widehat{CEA} = 90°$. On déduit, de même que dans la solution précédente, que les droites (DH) et (EA) sont parallèles.

Notons X le point d'intersection des droites (BH) et (EA). Nous allons montrer que les angles $\widehat{BXA}$ et $\widehat{FEA}$ sont égaux, ce qui implique bien que les droites (EF) et (BH) sont parallèles.

D'une part, d'après le théorème de l'angle inscrit appliqué au cercle de diamètre $[AC]$,

$$\widehat{FEA} = \widehat{FCB} = \widehat{BCD}.$$

D'autre part, la symétrie d'axe (AH) échange les points B et C, de sorte que $\widehat{HCA} = \widehat{HBA}$ (de même que dans la deuxième solution de la question 1)). En utilisant la question 1), on trouve que

$$\widehat{HCD} = \widehat{HCA} = \widehat{HBA} = \widehat{HBD}.$$

D'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, on déduit que les points D, C, B et H sont cocycliques. Ainsi, d'après le théorème de l'angle inscrit,

$$\widehat{DCB} = 180° - \widehat{DHB} = \widehat{XHD}.$$

En utilisant le parallélisme des droites (DH) et (EA) et en utilisant l'égalité des angles alternes-internes $\widehat{XHD}$ et $\widehat{HXA}$, on trouve bien

$$\widehat{FEA} = \widehat{BCD} = \widehat{XHD} = \widehat{HXA},$$

ce qui donne l'égalité d'angles annoncée.

Commentaire des correcteurs : L'exercice, malgré sa position, a été beaucoup abordé, même pour ne tracer que la figure ou pour effectuer des observations élémentaires. Ce constat est assez encourageant. On compte un grand nombre de solutions à la première question et un nombre conséquent de solutions complètes pour la deuxième question. La figure était assez riche en propriétés, ce qui permettait plusieurs approches et rendaient beaucoup d'observations pertinentes pour l'une ou l'autre des approches.

On relève les erreurs récurrentes suivantes :

- Confondre bissectrice et médiane dans la question 1.
- Manquer de justifier soigneusement que D est sur la médiatrice du segment $[EC]$.

Exercice 15
Au stage Animath, il y a n élèves, numérotés de 1 à n, où $n \geqslant 2$ est un entier naturel. Théo dispose d'une infinité de cadeaux différents, où chaque cadeau n'existe qu'en un seul exemplaire. De plus, l'élève numéro i aime un nombre fini $x_i > 0$ de cadeaux parmi les cadeaux proposés par Théo.

Déterminer, en fonction de n, le plus grand réel $c > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Quelques soient les entiers $x_1, \ldots, x_n$, si $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} < c$, alors Théo peut s'arranger pour donner un cadeau à chaque élève de sorte que chaque élève a reçu un cadeau qu'il aime.

Solution de l'exercice 15

Réponse : $\alpha = \dfrac{n}{n-1}$

Dans cet exercice, on cherche à démontrer que $\dfrac{n}{n-1}$ est le plus grand réel vérifiant la propriété de l'énoncé. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si Théo peut s'arranger pour distribuer les cadeaux comme voulu quelques soient les entiers $x_1, \ldots, x_n$, alors $\alpha \leqslant \dfrac{n}{n-1}$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre que dans le cas où $\alpha = \frac{n}{n-1}$, Théo peut toujours distribuer des cadeaux de sorte à plaire à tous les élèves, cette étape s'appelle *la construction* ou encore *la synthèse*.

Analyse :

On montre que $\alpha = \frac{n}{n-1}$. Tout d'abord, $\alpha \leq \frac{n}{n-1}$, car pour $x_1 = \cdots = x_n = n-1$, on a $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{n}{n-1}$, et si les voeux de tous les enfants sont identiques, Théo ne pourra donner le cadeau que personne ne veut à personne sans briser l'un des rêves.

Synthèse :

Supposons maintenant qu'on est dans le cas où $\frac{1}{x_i} + \ldots + \frac{1}{x_n} < \frac{n}{n-1}$, et montrons que Théo peut toujours s'arranger pour que chaque élève reçoive un cadeau qu'il aime.

Remarquons tout d'abord que pour tout $k \leq n$, il y a au plus k enfants avec une liste de taille plus petite que k. C'est vrai pour $k = n$, supposons maintenant que $k < n$. Alors, si ce n'était pas le cas, on aurait $k+1$ enfants avec une liste de taille plus petite que k, et donc

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geqslant \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

On obtient une contradiction avec notre hypothèse sur α.

Théo peut alors distribuer les cadeaux de la façon suivante : quitte à renuméroter les élèves, on peut supposer que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Théo commence alors par distribuer un cadeau à l'élève numéro 1 parmi les x_1 cadeaux voulus par cet élève. On suppose ensuite que Théo a distribué un cadeau aux élèves numéros $1, \ldots, k-1$. Alors $x_k \geqslant k$ par la remarque précédente, de sorte que l'élève k a dans sa liste de cadeaux qu'il souhaite un cadeau qui n'est pas l'un des $k-1$ déjà distribués. Théo lui attribue alors ce cadeau. De proche en proche, on obtient que Théo peut distribuer un cadeau aux n élèves.

Il commence par donner son cadeau à l'éventuel enfant qui a une liste de taille 1, puis il donne un cadeau restant parmi les deux éventuels enfants qui ont une liste de taille plus petite que 2, et ainsi de suite. À chaque étape, mettons k, il est certain de pouvoir donner un cadeau qui correspond à chaque enfant qui a une liste de taille k, car il a donné au plus k cadeaux et chaque enfant accepte k cadeaux.
Ainsi, Théo peut effectivement réaliser tous les rêves lorsque $\sum \frac{1}{x_i} < \frac{n}{n-1}$, et $\alpha = \frac{n}{n-1}$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile et n'a été résolu que par quelques élèves. Il était constitué de deux parties : une partie consistait à montrer que forcément $c \leqslant \frac{n}{n-1}$. Celle-ci demandait simplement de donner un exemple de choix de $x_1, \ldots, x_n$ pour lequel Théo ne pouvait pas répartir les cadeaux vérifiant $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. C'était la partie facile du problème, et il est dommage que peu d'élèves aient vu cette répartition, et obtenu l'inégalité voulue.

Une seconde partie était de prouver que $c = \frac{n}{n-1}$ convenait : le plus simple était de donner un algorithme permettant de donner à chacun un cadeau. Cependant, il fallait voir pourquoi si $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} < \frac{n}{n-1}$ alors l'algorithme fonctionnait. Le plus simple était d'ordonner les x_i, montrer que $x_i \geqslant i$ et conclure.

Cependant plusieurs élèves ont affirmé que si $x_i \geqslant i$ il était clair qu'on pouvait distribuer les cadeaux sans preuve : cela n'est pas du tout évident. Autant il est clair que si $x_1, \ldots, x_i$ valent tous au plus $i - 1$, il peut y avoir un problème pour distribuer les cadeaux si ceux-ci sont identiques, autant la réciproque est loin d'être évidente.

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Algèbre et Arithmétique

1 Découverte (Melvil)

Manipulations algébriques

La factorisation est le fait d'écrire une expression sous la forme d'un produit. Nous parlons souvent de deux méthodes de bases : L'une fait intervenir la mise en évidence d'un facteur commun et l'autre fait intervenir les identités remarquables.

Exemple 1.
Montrer que si $n \geqslant 2$, $4n^2 - 1$ n'est pas un nombre premier.
(On dit que p est un nombre premier si $p \neq 1$ est tel qu'on ne puisse pas l'écrire sous la forme $p = ab$ avec $1 < a, b < p$).

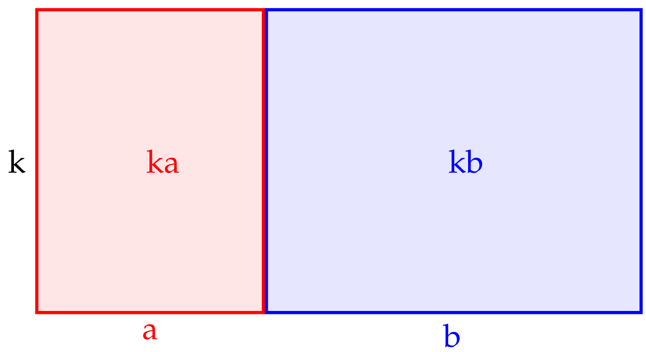
On veut donc montrer qu'on peut trouver a et b tels que $4n^2 - 1 = ab$ et $1 < a, b < 4n^2 - 1$, on dit qu'on cherche à *factoriser* $4n^2 - 1$.

Proposition 2 (Distributivité/ La mise en évidence d'un facteur commun)**.**
On a l'égalité suivante, appelée distributivité, valable pour tous a, b, k :
$k(a + b) = ka + kb$.
On dit que :

— $k(a + b)$ est la forme factorisée puisque c'est un produit.

— $ka + kb$ est la forme développée.

Démonstration.
Une preuve géométrique marche très bien, et les identités remarquables que nous verrons juste après en ont une aussi, elles ont (normalement) été vues en classe.



□

Il est souvent plus intéressant d'avoir la forme factorisée, par exemple le fait que l'un des facteurs est nul si le produit est nul, ou encore des relations de divisibilité (que vous verrez plus tard dans la semaine).

Parfois on devra utiliser cette identité plusieurs fois pour obtenir un résultat totalement factorisé et utile.

Exemple 3.
$ab + a + b + 1 = a(b + 1) + b + 1 = (b + 1)(a + 1)$

Certaines identités sont à connaître et à savoir reconnaître n'importe où, elles sauvent des vies ! (on dit que ce sont des identités remarquables)

Proposition 4 (Identités remarquables)**.**

— $(a + b)^2 = a(a + b) + b(a + b) = a^2 + ab + ab + b^2 = a^2 + 2ab + b^2$
— $(a - b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$ (c'est la précédente en remplaçant b par $-b$)
— $(a + b)(a - b) = a^2 + ab - ab - b^2 = a^2 - b^2$

Revenons à notre exemple précédent avec $4n^2 - 1$: On a $4n^2 - 1 = (2n)^2 - 1^2 = (2n - 1)(2n + 1)$, et on a bien réussi à factoriser cette expression ! (Quand je dis qu'elles peuvent sauver des vies...)

Exercice 1
Factoriser le plus possible $a^4 - b^4$.

Solution de l'exercice 1
On a
$$a^4 - b^4 = (a^2)^2 - (b^2)^2 = (a^2 - b^2)(a^2 + b^2) = (a - b)(a + b)(a^2 + b^2).$$

Exercice 2
Factoriser $a^4 + 4b^4$ (c'est l'identité de Sophie Germain)
Indice : on a $a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2$.

Solution de l'exercice 2
On reconnaît coup sur coup deux identités remarquables (à croire que c'était fait exprès) :
$$a^4 + 4b^4 = a^4 + 4b^4 + 4a^2b^2 - 4a^2b^2 = (a^2 + 2b^2)^2 - (2ab)^2 = (a^2 + 2ab + 2b^2)(a^2 - 2ab + 2b^2).$$

On peut ici voir qu'il faut parfois faire "apparaître" les termes manquants pour qu'on puisse factoriser comme il se doit, et c'est là que réside toute la difficulté de tels problèmes. Un autre exemple pour la route :

Exemple 5.
$a^3 - b^3 = a^3 + a^2b + b^2a - a^2b - b^2a - b^3 = a(a^2 + ab + b^2) - b(a^2 + ab + b^2) = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$

Tiens d'ailleurs... On a $a^1 - b^1 = (a - b)(1)$, $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$, $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$, il y aurait pas un paterne là ?
La réponse est oui (waw !) :

Proposition 6.

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} + b^{n-2}a + b^{n-1})$$

Démonstration. Il suffit de développer le membre de droite, tout se simplifie magiquement ! □

Pour montrer qu'elle est effectivement juste, il suffit de partir du membre de droite et de développer, tout se simplifie magiquement !
Si maintenant on suppose en plus n impair, on peut remplacer b par $-b$ dans la formule précédente, pour avoir

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + a^2b^{n-3} - b^{n-2}a + b^{n-1}).$$

Exercice 3
Calculer $x^m + x^{m+1} + x^{m+2} + \ldots + x^{n-2} + x^{n-1} + x^n$, avec $x \neq 1$ et $m < n$.

Solution de l'exercice 3
On a $x^m + \ldots + x^{n-1} + x^n = x^m(1 + \ldots + x^{n-m-1} + x^{n-m}) = x^m(1^{n-m} + 1^{n-m-1}x + \ldots + 1 \times x^{n-m-1} + x^{n-m} = x^m\left(\dfrac{x^{n-m+1} - 1}{x-1}\right) = \dfrac{x^{n+1} - x^m}{x-1}$

Exercice 4
Factoriser $x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz$.

Solution de l'exercice 4
Cette factorisation est beaucoup plus dure car elle ne fait intervenir aucune technique élémentaire ni terme manquant. Pour parvenir à factoriser cette expression on va s'appuyer sur la symétrie des rôles joués par les 3 variables x, y et z. Sans le justifier rigoureusement on sent bien que les termes de la factorisation doivent eux aussi être symétriques et puisque l'expression de départ est homogène de degré 3, les 2 termes de la parenthèse doivent être homogènes de degré 1 e 2 pour que la factorisation ne soit pas triviale. La seule expression homogène de degré 1 est à constante multiplicative près $x + y + z$. Pour l'autre parenthèse, l'expression doit être une combinaison linéaire des deux expressions suivante $x^2 + y^2 + z^2$ et $xy + yz + zx$. En remarquant que l'expression s'annule pour $x = y = z$, on aboutit au résultat suivant :

$$x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz = (x+y+z)(x^2 + y^2 + z^2 - xy - yz - zx)$$

Implication, équivalence, négation

Ce bout du cours regroupe des définitions importantes de logique qui sont surtout là pour poser les bases pour la partie d'après. Du moment que vous maîtrisez la partie suivante, ça ne sert à rien de connaître celle-là dans tous les détails.

Définition 7 (Implication)**.**
Soient A et B deux phrases, pouvant être vraies ou fausses (qu'on appelle aussi propositions). On dit que A implique B (noté $A \implies B$) si dès que A est vérifiée, B l'est également.

Exemple 8. Si A est la phrase "J'ai tué Bob" et B est la phrase "Bob est mort", on a bien A implique B : si j'ai tué Bob, Bob est forcément mort.
Un exemple un peu plus mathématique peut-être : si $x \geqslant 1,$ alors $x \geqslant 0.$

En général, on repère une implication (par exemple dans un énoncé) par la présence d'un "si", souvent suivi d'un "alors"

Exemple 9.
Soient $a, b > 0$. Montrer que si $a + b = 2,$ alors $ab \leqslant 1.$

Définition 10 (Équivalence)**.**
On peut voir sur tous ces exemples qu'il peut arriver que B soit vérifiée sans que A ne soit vérifiée : ce n'est pas parce que Bob est mort que je l'ai tué !
Des fois on veut que A soit vérifié exactement quand B est vérifié : on veut que $A \implies B$ et que $B \implies A$. On appelle ça une équivalence, qu'on note $A \iff B$, on dit alors que A est équivalente à B, ou encore que A et B sont équivalentes, ou encore A si et seulement si B.

Exemple 11.
Si A est la phrase $x \geqslant 0$ et B est la phrase $x^3 \geqslant 0$, on a bien $A \iff B$.

(Oui le premier exemple est un exemple mathématique, essayez de trouver deux phrases équivalentes de la vie de tous les jours qui ne soient pas simplement une reformulation basique l'une de l'autre)

Définition 12 (Négation)**.**
Si on nous donne une proposition A (donc une phrase pouvant être ou vraie ou fausse), la négation de A est le contraire de A, noté $\neg A$.
Dit dans des termes plus compliqués, $\neg A$ est telle que "A est vraie" $\iff$ "$\neg A$ est fausse".

Exemple 13.
Si A est la proposition "Bob est mort", sa négation est "Bob est vivant".
Si A est "$x < 0$", alors sa négation est "$x \geqslant 0$".
Enfin la négation de "Pour tout $x > 0, x^2+2x-3 > 0$" est "Il existe $x > 0$ tel que $x^2+2x-3 \leqslant 0$".

Ces définitions n'ont pas grand intérêt en elles-mêmes, mais elles permettent de résoudre beaucoup de problèmes si elles sont utilisées dans des raisonnements complexes et construits.

Définition 14 (Raisonnement par Absurde)**.**
Le raisonnement par l'absurde est un raisonnement qui permet de démontrer qu'une affirmation est vraie en montrant que son contraire est faux. Il s'appuie sur la règle logique que :

Si "non P" est faux, alors P est vraie. Autrement dit, L'idée est de supposer $\neg A$ et d'aboutir à une contradiction, à quelque chose qui est toujours faux ($0 > 1$ par exemple). Cela signifie que $\neg A$ est forcément faux, donc que A est vrai.

Exemple 15.
Montrons que $\sqrt{2}$ ne peut pas s'écrire comme un rapport de deux nombres entiers, on dit que $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Supposons par l'absurde que $\sqrt{2}$ soit rationnel, soient donc a, b des entiers tels que $\sqrt{2} = \frac{a}{b}$. On a alors $\frac{a^2}{b^2} = 2$, ou encore $a^2 = 2b^2$. À ce moment là, on remarque que a^2 est pair, donc a est pair, il s'écrit sous la forme $a = 2a'$.
On remplace notre nouvelle expression de a dans l'équation de départ, on trouve $b^2 = 2a'^2$. Ainsi, b^2 est pair, et on a donc $b = 2b'$. En remplaçant, on trouve $a'^2 = 2b'^2$. Cette solution ressemble beaucoup à la solution initiale, puisque on a également $\sqrt{2} = \frac{a'}{b'}$. En plus, la solution est strictement plus petite qu'avant. Si on continue ainsi, on trouvera une solution de plus en plus petite tout en restant dans les entiers, ce qui n'est pas possible puisque $a \geqslant 1$ et $b \geqslant 1$, il y aura un moment où ce ne sera plus le cas.
On appelle un tel raisonnement une descente infinie.

Exercice 5
Montrer que $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal.

Solution de l'exercice 5
Raisonnons par l'absurde et supposons $\frac{1}{3}$ est un nombre décimal. Il existe alors un entier relatif a et un entier relatif b tels que $\frac{1}{3} = \frac{a}{10^b}$ Ainsi, $3 \times a = 10^b$ ce qui signifie que 10^b est un multiple de 3 : la somme de ses chiffres doit donc être divisible par 3, ce qui est absurde. En effet, la somme des chiffres de 10^b est toujours égale à 1 et n'est donc pas divisible par 3.
L'hypothèse « $\frac{1}{3}$ n'est pas un nombre décimal. » est donc fausse et ainsi $\frac{1}{3}$ n'est pas décimal.

Exercice 6
Montrer que $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est irrationnel.

Solution de l'exercice 6
Si $\sqrt{2} + \sqrt{3}$ est rationnel, alors $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 = 5 + 2\sqrt{6}$ également, et $\sqrt{6}$ est aussi rationnel. On raisonne alors de la même manière que précédemment, pour aboutir à une contradiction.

2 Divisibilité et PGCD (Raphaël)

Ce cours est tiré du fabuleux "cours d'arithmétique de base" de Jean-Louis Tu, disponible sur le site de la POFM.

3 Nombres premiers (Paul A)

Ce cours est inspiré de celui Vladimir Ivanov du stage de Valbonne de 2021.

Nombres premiers

Définition 1 (Nombre premier)**.**
On appelle nombre premier un entier naturel qui possède *exactement* 2 diviseurs positifs distincts : 1 et lui-même.

Exemple 2.
Voici la liste des premiers nombres premiers : $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, \ldots$

Remarque 3.
On remarquera que 1 n'est pas un nombre premier. En effet, il ne possède qu'un seul diviseur positif : 1.

Proposition 4.
Pour vérifier si un nombre n est premier, il faut vérifier s'il est divisible par un entier entre 2 et $n-1$. En réalité, il suffit uniquement de tester s'il est divisible par un entier inférieur à $\sqrt{n}$.

Démonstration. Si $n \geqslant 2$ n'est pas premier, alors il possède un diviseur d différent de 1 et n. Si $d \leqslant \sqrt{n}$, on l'aurait trouvé en cherchant les diviseurs inférieurs à $\sqrt{n}$. Sinon, $d > \sqrt{n}$, donc en réarrangeant, on trouve $\dfrac{n}{d} \leqslant \sqrt{n}$, alors que $\dfrac{n}{d}$ est lui aussi un diviseur de n, et on aurait donc trouvé $\frac{n}{d}$. □

Proposition 5.
Soit p un nombre premier et n un entier naturel. Alors soit p divise n, soit p et n sont premiers entre eux.

Démonstration. Les seuls diviseurs de p sont 1 et p, donc les seuls diviseurs communs à p et n possibles sont 1 et p. Ainsi, soit p divise n, soit le seul diviseur commun de p et n est 1 ie n et p sont premiers entre eux. □

Exercice 1
Déterminer tous les nombres premiers entre 30 et 45.

Solution de l'exercice 1
Il n'y en a que 4 : $31, 37, 41, 43$

Exercice 2
Déterminer tous les nombres premiers pairs.

Solution de l'exercice 2
Il n'y en a qu'un seul : 2. En effet, tout nombre pair est divisible par 2, donc tout nombre pair a au moins 3 diviseurs positifs distincts : 1, 2 et lui-même.

Exercice 3
Déterminer toutes les paires de nombres premiers consécutifs

Solution de l'exercice 3
Commençons par remarquer que dans toute paire de nombres consécutifs, il y en a un qui

est pair. Alors, comme le seul nombre premier pair c'est 2 (cf. Exercice 2), les seules paires possibles sont $(1,2)$ ou $(2,3)$. On constate finalement que la première paire n'est pas solution puisque 1 n'est pas premier. Ainsi la seule solution est $(2,3)$ car 2 et 3 sont bien premiers.

Exercice 4
Déterminer tous les nombres premiers de la forme $a^2 - 1$ avec $a \geqslant 1$ un entier.

Solution de l'exercice 4
On reconnait ici une identité remarquable : $a^2 - 1 = a^2 - 1^2 = (a-1)(a+1)$. Notre nombre est alors factorisé et pour que ce soit un nombre premier, il faut que l'un des facteurs soit égal à 1. Ainsi, on soit avoir $a - 1 = 1$ ou $a + 1 = 1$, ce qui donne $a = 2$ ou $a = 0$. Comme on cherche $a \geqslant 1$, on a $a = 2$, donc $a^2 - 1 = 3$ qui est bien premier. La seule solution est donc 3.

Exercice 5
Déterminer tous les entiers naturels p tels que p, $p+2$ et $p+4$ soient tous premiers.

Solution de l'exercice 5
Remarquons que parmis p, $p+2$ et $p+4$, il y en a exactement un qui est divisible par 3 puisque l'un de p, $p+1$ ou $p+2$ l'est (ce sont trois nombres consécutifs), et que $p+1$ est divisible par 3 SSI $p+4$ l'est. Ainsi, l'un de ces trois nombres doit être égal à trois. C'est le même argument que pour les nombres premiers pairs. On peut alors traiter les trois cas et trouver que la seule possibilité est $p = 3$.

Exercice 6
Soit n un entier naturel. Montrer que si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier.

Solution de l'exercice 6
Par contraposée, si n n'est pas premier, alors on peut écrire $n = ab$ avec $a \geqslant 2$ et $b \geqslant 2$. Ainsi,

$$2^n - 1 = (2^a)^b - 1^b = (2^a - 1)\left(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 1\right)$$

Avec $2^a - 1 \geqslant 2$ et $2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \ldots + 1 \geqslant 2$, donc $2^n - 1$ n'est pas premier, ce qui conclut.

Lemme d'Euclide

Lemme 6 (Lemme d'Euclide).
Soit p un nombre premier et a et b des entiers naturels. Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b

Démonstration. On note $ab = pk$ avec k un entier. Si p ne divise pas a, alors a et p sont premiers entre eux car p est premier. Le théorème de Bézout affirme alors qu'il existe u et v tels que $au + pv = 1$, donc $bau + bpv = b$ d'où $b = pku + pbv = p(ku + bv)$, d'où p divise b. $\square$

Remarque 7.
Ce lemme se généralise facilement à un plus grand nombre d'entiers si p divise le produit de plusieurs entiers naturels, alors p divise l'un de ces entiers.

Remarque 8.
Il faut absolument que p soit premier, sans quoi le résultat est complètement faux ! Par exemple, 6 divise $3 \times 4 = 12$ mais 6 ne divise ni 3 ni 4.

Exercice 7
Soit a un entier naturel.

1. Montrer que 7 divise a^2 si et seulement si 7 divise a
2. Montrer que 7 divise a^3 si et seulement si 7 divise a

Solution de l'exercice 7
7 est premier, donc on peut appliquer le lemme d'Euclide :

1. 7 divise $a \times a$, donc 7 divise a. Réciproquement, si 7 divise a, $a = 7k$ avec k un entier, donc $a^2 = 7 \times 7 \times k \times k$, et est donc divisible par 7.
2. C'est la même chose, mais avec le lemme d'Euclide généralisé.

Lemme de Gauss

Lemme 9 (Lemme de Gauss)**.** Soient a, b et n trois entiers naturels tels que a et n soient premiers entre eux. Si n divise ab, alors n divise b.

Démonstration. On sait que n divise ab et nb, donc n divise $\mathrm{pgcd}(ab, nb) = b \times \mathrm{pgcd}(a, n) = b$, d'où le résultat. □

Exercice 8
A l'aide du lemme de Gauss, démontrer le lemme d'Euclide.

Solution de l'exercice 8
Supposons que p (premier) divise ab. Si p ne divise pas a, alors p et a sont premiers entre eux, donc par le lemme de Gauss, p doit diviser b.

Exercice 9
Soient x et y deux entiers. Montrer que si $2x + 1$ divise $8y$, alors $2x + 1$ divise y

Solution de l'exercice 9
$2x + 1$ est impair, donc premier avec 8. On peut donc directement appliquer le lemme de Gauss pour obtenir que $2x + 1$ divise y.

Théorème fondamental

Théorème 10 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.**
Soit $n \geqslant 2$ entier. On peut décomposer cet entier comme un produit de nombres premiers. De plus, cette décomposition est unique ! On appelle cette façon d'écrire n la *décomposition en produit de facteurs premiers* de n.

Exemple 11.
Voici quelques exemples de décompositions :

— $4 = 2^2$

— $17 = 17$

— $24 = 2^3 \times 3$

— $105 = 3 \times 5 \times 7$

Remarque 12.
Quelques remarques importantes :

— L'ordre le l'écriture n'est évidemment pas unique.

— Le fait que 1 n'est pas premier est important, puisque sinon on pourrait ajouter un nombre arbitraire de 1 dans la produit, ce qui retirerait l'unicité, qui est pourtant très importante.

Exercice 10
Montrer qu'un entier est divisible par un nombre premier p si et seulement si p apparait dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Solution de l'exercice 10
Si p est présent dans la décomposition en produit de facteurs premiers, alors on peut écrire $n = p \times k$ puis décomposer k en produit de facteurs premiers, et l'unicité de la décomposition de n garantit que p apparait dans cette décomposition. Réciproquement, c'est évident en écrivant la décomposition.

Exercice 11
Montrer que deux entiers sont premiers entre eux si et seulement s'ils n'ont aucun facteur premier en commun.

Solution de l'exercice 11
Notons ces deux entiers a et b. Si p est un nombre permier divisant à la fois a et b, alors il divise aussi leur pgcd, qui ne vqut donc pas 1. Réciproquement, si $\text{pgcd}(a, b) \neq 1$, alors $\text{pgcd}(a, b)$ a un diviseur premier, qui divise à la fois a et b et qui apparait donc dans la décomposition en produit de facteurs premiers de a et de b.

Exercice 12
Montrer qu'un entier divisible par 2 et par 3 est divisible par 6.

Solution de l'exercice 12
Comme cet entier n est divisible par 2 et 3 et que ce sont des nombres premiers, ils apparaissent tous les deux dans la décomposition en produit de facteurs premiers de n, donc on peut l'ordonner pour écrire $n = 2 \times 3 \times q_1 \times \ldots \times q_r$ d'où la divisibilité par 6.

Exercice 13
Montrer qu'un entier est un carré parfait si et seulement si tous ses diviseurs premiers apparaissent un nombre pair de fois dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.
Montrer qu'un entier est une puissance k-ième si et seulement si tous ses diviseurs premiers apparaissent un de fois divisible par k dans sa décomposition en produit de facteurs premiers.

Solution de l'exercice 13

1. D'abord, si n est un carré, on peut écrire $n = k^2$ avec $k = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$. Ainsi, $n = p_1^{2\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{2\alpha_r}$, et l'unicité de la décomposition garantit alors le résultat. Réciproquement, si $n = p_1^{2\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{2\alpha_r}$, alors $n = k^2$ avec $k = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_r^{\alpha_r}$
2. La deuxième question est parfaitement analogue, mais en remplaçant les 2 par des k.

Exercice 14
Un entier naturel qui est à la fois un carré et un cube est-il une puissance 6-ième ?

Solution de l'exercice 14
La réponse est OUI. En effet, l'exercice précédent nous garantit que tous les exposants dans la décomposition de cet entier doivent être divisibles par 2 et 3, puis l'exercice 12 nous apprend que tous les exposants doivent alors être divisibles par 6. Enfin, la réciproque de l'exercice 13 nous apprend que cela fait de notre entier une puissance 6-ième.

Exercice 15
En fonction de la décomposition en produit de facteurs premiers d'un entier, déterminer son nombre de diviseurs positifs

Solution de l'exercice 15
On note $n = p_1^{\alpha_1} \times \ldots \times p_k^{\alpha_k}$ la décomposition en produit de facteurs premiers de n. Les diviseurs de n sont alors exactement les entiers de la forme $p_1^{\beta_1} \times \ldots \times p_k^{\beta_k}$ avec $\forall i, \quad \beta_i \in [\![0, \alpha_i]\!]$, ce qui donne un total de

$$(\alpha_1 + 1) \times \ldots \times (\alpha_n + 1)$$

diviseurs distincts.

Exercice 16 (Euclide)
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers

Solution de l'exercice 16
Par l'absurde, supposons qu'il n'en existe qu'un nombre fini $p_1, \ldots, p_n$. Alors considérons l'entier $N = p_1 \times \ldots \times p_n + 1$: il n'est divisible par aucun des n nombres premiers listés ci-dessus. Cependant le théorème fondamental de l'arithmétique garantit l'existence d'un diviseur premier de N, ce qui nous donne une contradiction et qui conclut.

Exercice 17
Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers dont le reste de la division euclidienne par 4 vaut 3.

Solution de l'exercice 17
Par l'absurde, supposons qu'il en existe un nombre fini $k \in \mathbb{N}$. Notons les $p_1, \ldots, p_k$. Considérons le nombre $n = 4p_1 \times \ldots \times p_k - 1$. Alors N n'est divisible ni par 2 ni par un des p_i. C'est donc le produit de nombres premiers distincts des p_i et de 2. Or, un produit de nombres premiers de la forme $4m + 1$ est un nombre de la forme $4m' + 1$, donc au moins un des divsieurs de N est de la forme $4l + 3$, et n'apparait pas dans la liste des p_i, ce qui est absurde. Il y a donc une infinité de nombres premiers de la forme $4k + 3$.

Exercice 18
Trouver tous les entiers naturels n tels que $n^4 + 4^n$ soit premier.

Solution de l'exercice 18
On écarte le cas $n = 1$. Si n est pair, le résultat est évident. Sinon, on peut écrire $n = 2k+1, k \in \mathbb{Z}$. Alors on a

$$\begin{aligned} n^4 + 4^n &= (2k+1)^4 + 4 \times (2^k)^4 \\ &= ((2k+1)^2 + 2 \times 2^{2k} + 2 \times (2k+1) \times 2^k)((2k+1)^2 + 2 \times 2^{2k} - 2 \times (2k+1) \times 2^k) \end{aligned}$$

On vérifiera aisément que les deux facteurs sont bien strictement superieurs à 1

4 Inégalités 1 (Maena)

– Manipulation algèbrique sur les inégalités –

Voici une liste de règles (non-exhaustive) de manipulations sur les inégalités qu'il est bon d'avoir en tête.

Soient a, b, c, d quatre réels quelconques, k un réel positif et l un réel négatif. On suppose $a < b$ et $c < d$.

— On peut additionner les inégalités : $a + c < b + d$.

— On inverse quand on passe aux négatifs : $-b < -a$.

— ATTENTION, on ne peut pas soustraire les inégalités. Il est FAUX de dire que $a - c < b - d$ (je vous invite à chercher des contre-exemples). En revanche, en considérant que si $c < d$ alors $-d < -c$, donc on peut l'additionner avec $a < b$ et on obtient que $a-d < b-c$.

— On peut multiplier par un réel positif : $k \times a \leqslant k \times b$. Attention, on passe à une inégalité large, car si $k = 0$, les deux termes sont égaux. Si $k \neq 0$, l'inégalité reste stricte.

— On peut multiplier par un réel négatif en inversant le sens : $l \times b \leqslant l \times a$.

— Si $a, b > 0$ ou $a, b < 0$, on peut passer à l'inverse et on obtient $\frac{1}{b} < \frac{1}{a}$. Attention, si a et b n'ont pas le même signe, on ne peut rien dire.

— Si $a, b > 0$, on a $a^2 < b^2$. Si $a, b < 0$, on a $b^2 < a^2$. De même, attention si a et b n'ont pas le même signe, on ne peut rien dire.

— De manière générale, si a, b appartiennent à un ensemble I. Si f est une fonction croissante sur I, alors $f(a) \leqslant f(b)$ et si f est décroissante, alors $f(b) \leqslant f(a)$. L'inégalité est stricte si la croissance ou décroissance est stricte.

— ATTENTION, on ne peut pas multiplier terme à terme dans le cas général. Je vous invite à également trouver un contre-exemple. En revanche, si $a, c > 0$, alors on $a \times c < b \times d$.

Toutes ces règles sont les mêmes dans le cas d'inégalités larges.

Exercice 1

— Soient x, y deux réels strictement positifs tels que $x \leqslant y$. Montrer que $x - \frac{1}{x} \leqslant y - \frac{1}{y}$.

— Soient x, y deux réels tels que $0 < y \leqslant x \leqslant 4$. Montrer que $(x-y)^2 < 16$.

— Soit x un réel non nul. Montrer que si $|x| < 1$ alors $\frac{1}{|x|} > 1$.

Exercice 2

Soient $a, b, c \in]0, 1]$. Montrer que $a + b + c + \frac{1}{abc} \geqslant \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} + abc$.

Indice : Considérer le produit $(ab-1)(bc-1)(ac-1)$.

Exercice 3

Soient $x, y \in]-1, 1[$. Montrer que $-1 < \frac{x+y}{1+xy} < 1$.

Solution de l'exercice 1

Cet exercice est pour forcer à manipuler des inégalités simples proprement. On a :

1. $x \leqslant y \Leftrightarrow \frac{1}{y} \leqslant \frac{1}{x} \Leftrightarrow -\frac{1}{x} \leqslant -\frac{1}{y} \Leftrightarrow x - \frac{1}{x} \leqslant y - \frac{1}{y}$
2. On a $0 < y \leqslant x$ donc $x - y \geqslant 0$. $x \leqslant 4$, donc $0 \leqslant x - y \leqslant 4 - y < 4$, donc $(x-y)^2 < 4^2 = 16$.

3. Tout simplement, on applique la règle de l'inverse, puisque $|x| > 0$, on a $\frac{1}{1} = 1 < \frac{1}{|x|}$.

Solution de l'exercice 2
On a $0 < a, b, c \leqslant 1$, donc $ab, bc, ac \leqslant 1$, puis $(ab-1), (bc-1), (ac-1)$ sont chacun négatifs, donc le produit est négatif comme on a trois termes négatifs. En développant, on obtient :

$$a^2b^2c^2 - ab^2c - a^2bc - abc^2 + ab + bc + ac - 1 \leqslant 0 \Leftrightarrow a^2b^2c^2 + ab + bc + ac \leqslant ab^2c + a^2bc + abc^2 + 1$$

En divisant tout par abc, on obtient bien :

$$abc + \frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leqslant a + b + c + \frac{1}{abc}$$

Solution de l'exercice 3
On a $-1 < xy < 1$, donc $1 + xy$ est positif. Si on multiplie l'inégalité par le dénominateur, pour éliminer la fraction qui n'est pas facile à étudier. On se ramène vouloir prouver :

$$-1 - xy < x + y < 1 + xy$$

On peut séparer en deux inégalités pour simplifier, d'abord $-1-xy < x+y$, puis $x+y < 1+xy$.
Pour la première on a :

$$-1 - xy < x + y \Leftrightarrow -x - y - 1 - xy < 0 \Leftrightarrow -(x+1)(y+1) < 0$$

Or on a $-1 < x, y$, donc $x + 1$ et $y + 1$ sont positifs. D'où $-(x+1)(y+1) < 0$. Comme on a raisonné par équivalence (et ATTENTION, pas par implication simple), on peut en déduire que $-1 - xy < x + y$. Pour la seconde :

$$x + y < 1 + xy \Leftrightarrow x + y - 1 - xy < 0 \Leftrightarrow -(x-1)(y-1) < 0$$

De même, $x - 1$ et $y - 1$ sont de même signe, donc $-(x-1)(y-1)$ est négatif. Donc on a bien $x + y < 1 + xy$, ce qui conclut.

– Un carré est toujours positif –

On sait que pour tout réel x, $x^2 > 0$. Ce résultat en particulièrement intéressant quand on fait apparaître des carrés en factorisant. Par exemple montrons que pour tout réel x, y, $x^2 + y^2 \geqslant 2xy$. Si on passe de l'autre côté, cela revient à vouloir montrer qu'on a $x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0$. On reconnaît une identité remarquable, c'est donc équivalent à $(x-y)^2 \leqslant 0$ une fois factorisée. Or un carré est toujours positif, donc $(x-y)^2 \geqslant 0$ est toujours vrai, ce qui permet de prouver l'inégalité initiale par équivalence.

Exercice 4
Soit $x > 0$ un réel. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. Dans quel cas avons-nous l'égalité ?

Exercice 5
Soient x, y des réels strictement positifs. Montrer que $x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y$ et trouver les cas d'égalité.

Exercice 6
Soient x, y deux réels quelconques. Montrer que $x^2 + y^2 + 2 \geqslant 2(x + y)$.

Exercice 7
Pour x, y réels, montrer que $x^2 + xy + y^2 \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 4

$$x + \frac{1}{x} \geqslant 2 \Leftrightarrow x^2 + 1 \geqslant 2x \text{ (car } x > 0) \Leftrightarrow x^2 + 1 - 2x \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$$

$(x-1)^2$ est un carré donc toujours positif, donc par équivalence on a $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$. On a le cas d'égalité quand $(x-1)^2 = 0$, cad $x = 1$.

Solution de l'exercice 5

$$x + \frac{y^2}{x} \geqslant 2y \Leftrightarrow x^2 + y^2 \geqslant 2xy \Leftrightarrow x^2 + y^2 - 2xy \geqslant 0 \Leftrightarrow (x+y)^2 \geqslant 0$$

La dernière égalité est toujours vrai, donc par équivalence, la première l'est.

Solution de l'exercice 6

$$x^2 + y^2 + 2 \geqslant 2(x+y) \Leftrightarrow x^2 - 2x + 1 + y^2 - 2y + 1 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x-1)^2 + (y-1)^2 \geqslant 0$$

La dernière inégalité est toujours vraie, car c'est une somme de carrés.

Solution de l'exercice 7

$$x^2 + xy + y^2 = (x + \frac{y}{2})^2 + \frac{3y^2}{4} \geqslant 0$$

car on a une somme de carrés.

Vous noterez que la majorité des raisonnements ici sont fait par *équivalence*. Si l'on part de ce qu'on veut montrer pour arriver à une inégalité qu'on connaît, il faut toujours raisonner par équivalence ! Si on est pas sûre que chaque étape est une équivalence, on part de ce qu'on connaît pour arriver à ce qu'on veut montrer, pour être sûr que chaque étape est réalisable. En effet, parfois on peut passer d'une inégalité à l'autre, mais par revenir dans l'autre sens. Par exemple, si $x < -4$, alors $16 < x^2$. En revanche, si on sait que $16 < x^2$, on ne sait pas dire si $x < -4$ ou $x > 4$.

– L'inégalité arithmético-géométrique –

L'inégalité arithmético-géométrique, appelée IAG, est la suivante pour deux termes $a, b \geqslant 0$:

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

A gauche, on a la classique moyenne arithmétique (utilisée pour calculer vos notes par exemple !) et à droite, une moyenne qu'on appelle la moyenne géométrique.

Comment comprendre la moyenne géométrique ? Intuitivement, imaginez que vous avez un rectangle $a \times b$, donc d'aire ab. Nous voulons savoir la "taille moyenne" d'un côté, au sens où les côtés sont égaux, mais l'aire est conservée : on cherche donc le côté d'un carré d'aire ab. Puisque l'aire d'un carré de côté c est c^2, pour obtenir cette fameuse taille moyenne, on fait $\sqrt{ab}$.

Une autre approche pour retenir et de ses dire que pour "compenser" l'addition on divise, donc pour compenser le produit, on passe à la racine.

L'IAG a n termes $a_1, \ldots, a_n$ tous strictement positifs est :

$$\frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n}$$

Ici, quand on ajoute n termes ensemble, on divise ensuite par n, et quand on multiplie n termes ensemble, on passe à la racine n-ième.

On a égalité dans l'IAG quand tous les termes sont égaux, à savoir $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$. Cela peut-être utile à retenir pour certains exercices.

Si vous avez du mal à retenir le sens des inégalités, souvenez vous pour celle-ci que vous êtes chanceux que vos professeurs fassent la moyenne arithmétique et non pas géométrique de vos notes !

Exercice 8
Soient $a, b, c \geqslant 0$ trois réels. Montrer que $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

Exercice 9
Soient a, b, c trois réels positifs. On suppose que $abc = 8$. Quelle est la valeur minimale que peut prendre $a + b + c$?

Exercice 10
Soient a, b deux réels strictement positifs. Montrer que $a^3 + b^3 + a + b \geqslant 4ab$.

Exercice 11
Soient a, b, c trois réels. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$.

Solution de l'exercice 8
On applique l'IAG à chacun des trois termes succesivement :

$$a + b \geqslant 2\sqrt{ab}, b + c \geqslant 2\sqrt{bc}, c + a \geqslant 2\sqrt{ac}$$

Tous les termes sont positifs, donc en multipliant on obtient que :

$$(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abs$$

Solution de l'exercice 9
En voyant $a + b + c$ on peut directement essayer d'appliquer l'IAG à 3 termes. Celle-ci nous donne :

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

Or $abc = 8$, donc $\sqrt[3]{abc} = 2$. En multipliant par 3 de chaque côté, on obtient :

$$a + b + c \geqslant 3 \times 2 = 6$$

Ce n'est pas suffisant pour conclure, il faut en effet montrer que $a + b + c$ atteint cette borne. On sait que l'IAG est une égalité quand $a = b = c$, donc 6 est bien le minimum pris.

Solution de l'exercice 10
Il ne faut pas avoir peur d'appliquer l'IAG a beaucoup de termes, en premier lieu pour essayer et voir si ça marche.

$$\frac{a^3 + b^3 + a + b}{4} \geqslant \sqrt[4]{a^3b^3ab} = \sqrt[4]{a^4b^4} = ab$$

Solution de l'exercice 11

Cet exercice est en fait assez connu et s'appelle le lemme du tourniquet. Il peut être intéressant à retenir pour des exercices plus compliqués. Ici, il faut être un peu astucieux pour faire apparaître les produits voulus, à savoir ab, bc et ac.

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2}$$

On minore chaque terme de la somme par l'IAG :

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2 b^2} = ab, \frac{b^2 + c^2}{2} \geqslant \sqrt{b^2 c^2} = bc \text{ et } \frac{a^2 + c^2}{2} \geqslant \sqrt{a^2 c^2} = ac$$

Donc en additionnant, on obtient bien que :

$$a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ac$$

5 Récurrence (Antoine)

Exercice 1
Montrer que

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}.$$

Solution de l'exercice 1
Initialisation : On a bien $1=\frac{1\times 2}{2}$.
Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1+2+\cdots+n=\frac{n(n+1)}{2}$$

pour un certain $n\geq 1$. Alors

$$1+2+\cdots+n+n+1=\frac{n(n+1)}{2}+n+1=\frac{n^2+n+2n+1}{2}=\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

comme espéré.

Exercice 2
Montrer que

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Solution de l'exercice 2
Initialisation : On a bien $1=\frac{1\times 2\times 3}{6}$.
Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1^2+2^2+\cdots+n^2=\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

pour un certain $n\geq 1$. Alors

$$\begin{aligned}1^2+2^2+\cdots+n^2+(n+1)^2 &= \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}+(n+1)^2\\ &= \frac{n+1}{6}(2n^2+n+6n+6)\\ &= \frac{n+1}{6}(2n+3)(n+2)\end{aligned}$$

comme espéré.

Exercice 3
Montrer que

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=(1+2+\cdots+n)^2.$$

Solution de l'exercice 3
Initialisation : On a bien $1=1$.
Hérédité : On utilise la formule qu'on a trouvée précédemment. Supposons qu'on ait

$$1^3+2^3+\cdots+n^3=\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$\begin{aligned} 1^3 + 2^3 + \cdots + n^3 + (n+1)^3 &= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^2 + (n+1)^3 \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n^2 + 4(n+1)) \\ &= \frac{(n+1)^2}{4}(n+2)^2 \end{aligned}$$

comme espéré.

Exercice 4
Montrer que pour $q \neq 1$,

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

Solution de l'exercice 4
Initialisation : On a bien $1 = \frac{q-1}{q-1}$.
Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$1 + q + q^2 + \cdots + q^n + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1} + q^{n+1} = \frac{q^{n+1} - 1 + q^{n+2} - q^{n+1}}{q - 1} = \frac{q^{n+2} - 1}{q - 1}$$

Exercice 5
Soit $x \geq 0$ un réel. Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$1 + nx \leq (1 + x)^n.$$

Solution de l'exercice 5
Initialisation : On a bien $1 + x \leq 1 + x$.
Hérédité : Supposons qu'on ait

$$1 + nx \leq (1 + x)^n$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + nx + x + nx^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

car $1 + x \geq 0$ et $nx^2 \geq 0$, ce qui conclut l'hérédité.

Exercice 6
On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$, et

$$u_{n+1} = u_0 + u_1 + \cdots + u_n.$$

Donner une expression explicite pour u_n.

Solution de l'exercice 6
En regardant les premiers termes de la suite, on se rend compte que $u_n = 2^{n-1}$ pour $n \geq 1$. On remarque également que

$$u_{n+1} = u_0 + \cdots + u_{n-1} + u_n = u_n + u_n = 2u_n$$

pour $n \geq 1$.

Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $u_1 = u_0 = 1 = 2^{1-1}$
Hérédité : Supposons que pour un $n \geq 1$, on a $u_n = 2^{n-1}$. Alors

$$u_{n+1} = 2u_n = 2 \times 2^{n-1} = 2^n$$

comme voulu.

Exercice 7
Soient a et b des réels, avec $a \neq 1$. On définit une suite (u_n) par $u_0 = 1$, et

$$u_{n+1} = au_n + b$$

Donner une expression explicite pour u_n.

Solution de l'exercice 7
Ici il faut deviner la formule qu'on veut montrer, ce qui se fait en calculant les premiers termes. Après quelques essais on remarque que

$$u_n = \frac{1-a-b}{1-a}a^n + \frac{b}{1-a}$$

semble convenir, partiellement grâce à la formule de l'exercice 4. C'est donc ce que nous allons montrer par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a $\frac{1-a-b}{1-a} + \frac{b}{1-a} = \frac{1-a}{1-a} = 1$.
Hérédité : Supposons qu'on ait

$$u_n = \frac{1-a-b}{1-a}a^n + \frac{b}{1-a}$$

pour un certain $n \geq 0$. Alors

$$u_{n+1} = au_n + b = \frac{1-a-b}{1-a}a^{n+1} + \frac{ab}{1-a} + b = \frac{1-a-b}{1-a}a^{n+1} + \frac{ab+b-ab}{1-a} = \frac{1-a-b}{1-a}a^{n+1} + \frac{b}{1-a}$$

comme espéré.

Exercice 8
On définit la suite de Fibonacci par $F_0 = F_1 = 1$, et $F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.
Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n.$$

Solution de l'exercice 8
Initialisation : Pour $n = 1$, on a bien $1^2 - 2 \times 1 = -1 = (-1)^1$.
Hérédité : Supposons qu'on ait $F_n^2 - F_{n+1}F_{n-1} = (-1)^n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$F_{n+1}^2 - F_{n+2}F_n = F_{n+1}^2 - (F_n + F_{n+1})F_n = F_{n+1}(F_{n+1} - F_n) - F_n^2 = F_{n+1}F_{n-1} - F_n^2 = -(-1)^n$$

comme espéré.

Exercice 9
Montrer que pour tout $n \geq 1$,

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

Solution de l'exercice 9
Cet exercice est encore plus vicieux, puisqu'il propose une hypothèse de récurrence, mais que celle-ci n'est pas la bonne, puisqu'on aurait du $2 + \frac{1}{(n+1)^2}$ dans l'hérédité, ce qui poserait problème. On va donc montrer quelque chose de plus fort que ce qu'on doit montrer pour pouvoir y arriver par récurrence. On va montrer que la somme en question est en fait plus petite que $2 - \frac{1}{n}$.

Initialisation : On a bien $\frac{1}{1^2} = 1 \leq 2 - \frac{1}{1} = 1$.
Hérédité : Supposons qu'on ait

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} \leq 2 - \frac{1}{n}$$

pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$\frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \cdots + \frac{1}{n^2} + \frac{1}{(n+1)^2} \leq 2 - \frac{1}{n} + \frac{1}{(n+1)^2} = 2 - \frac{(n+1)^2 - n}{n(n+1)^2} \leq 2 - \frac{n(n+1)}{n(n+1)^2} = 2 - \frac{1}{n+1}$$

comme espéré.

Exercice 10
Trouver toutes les suites (a_n) de réels strictement positifs telles que

$$a_1^3 + a_2^3 + \cdots + a_n^3 = (a_1 + a_2 + \cdots a_n)^2.$$

Solution de l'exercice 10
En se rappelant de la formule de l'exercice 3, on se doute qu'on devra avoir $a_n = n$ pour tout n. On le montre donc par récurrence !

Initialisation : On doit avoir $a_1^3 = a_1^2$, donc comme $a_1 \neq 0$, on a $a_1 = 1$.
Hérédité : Supposons que $a_k = k$ pour tout $k \leq n$ pour un certain $n \geq 1$. Alors

$$(a_1 + a_2 + \cdots a_n + a_{n+1})^2 = (a_1 + a_2 + \cdots a_n)^2 + 2a_{n+1}(a_1 + a_2 + \cdots a_n) + a_{n+1}^2.$$

Ainsi, on doit avoir

$$a_{n+1}^3 = (a_1 + a_2 + \cdots a_n + a_{n+1})^2 - (a_1 + a_2 + \cdots a_n)^2 = 2a_{n+1}(a_1 + \cdots a_n) + a_{n+1}^2.$$

En remplaçant dans cette expression les valeurs de $a_1, \dots, a_n$, on trouve

$$a_{n+1}^2(a_{n+1} - 1) = 2a_{n+1}\left(\frac{n(n+1)}{2}\right),$$

et en divisant par a_{n+1}, $a_{n+1}(a_{n+1} - 1) = n(n+1)$. $f(x) = x(x-1)$ étant strictement croissante sur $[1, +\infty[$, notre équation admet au plus une solution, mais on sait que $a_{n+1} = n+1$ en est une ! On *doit* donc avoir $a_{n+1} = n+1$, ce qui conclut l'hérédité, et cette preuve.

6 TD de modulos (Théo et Thomas)

Le cours reprend les différentes notions de la partie 3 du cours de la POFM `http://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf`. Les exercices du TD sont corrigés.

Exercice 1
Trouver les entiers naturels n tels que : $n-1 \mid (n-2)^n - 7n + 5n^{2024} + 3n^2 - 2$

Exercice 2
Quel est le chiffre des unités de 3^{1789} ? de $1777^{1777^{1777}}$?

Exercice 3
Trouver les couples $(a,b) \in \mathbb{N}^2$ tels que $\frac{a^3b-1}{a+1}$ et $\frac{b^3a+1}{b-1}$ soient des entiers.

Exercice 4
Soit $a_1, a_2, \ldots$ la suite d'entiers telle que $a_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$$

Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que $a_n^2 + 1 \mid a_{n+1}^2 + 1$

Exercice 5
Soit $\overline{a_n a_{n-1} \ldots a_1 a_0}$ l'écriture décimale d'un nombre N. Montrer que celui-ci est divisible par 11 si et seulement si $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$ est divisible par 11.

Exercice 6 (exercice 8 coupe animath d'automne 2019)
Existe-t-il un entier dont l'écriture décimale contienne exactement 300 chiffres « 1 », aucun autre chiffre différent de « 0 », et qui soit un carré parfait ?

Exercice 7
A quelle condition sur les chiffres x et y le nombre $\overline{17x85y}$ est-il divisible par 33.

Exercice 8
Montrer que la somme de 3 cubes consécutifs est divisible par 9

Exercice 9
Existe-t-il des entiers a et b tels que

$$a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$$

Exercice 10
Existe-t-il des entiers a et b tels que

$$3a^2 = b^2 + 1$$

Exercice 11
Trouver tous les triplets $(x,y,\ell) \in \mathbb{N}^3$ tels que

$$x^3 + y^3 - 53 = 7^\ell$$

Exercice 12
Déterminer tous les couples $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$x^2 - 2 \cdot y! = 2021$$

Exercice 13
Trouver tous les 3-uplet $(a, b, c) \in \mathbb{N}^3$ tels qu'il existe des entiers positifs x, y, z vérifiant :

$$x! = ab + 1, \; y! = bc + 1 \text{ et } z! = ac + 1$$

Exercice 14
Déterminer toutes les paires d'entiers positifs (k, n) telles que

$$1! + 2! + \ldots + k! = 1 + 2 + \ldots + n$$

Solution de l'exercice 1
On travaille modulo $n - 1$. On a, comme $n \equiv 1\ [n - 1]$:

— $(n - 2)^n \equiv (1 - 2)^n \equiv (-1)^n\ [n - 1]$

— $7n \equiv 7\ [n - 1]$

— $5n^{2024} \equiv 5 \cdot 1^{2024} \equiv 5\ [n - 1]$

— $3n^2 \equiv 3\ [n - 1]$

Puisque l'on a un $(-1)^n$ il est naturel d'effectuer une disjonction de cas selon la parité de n.
Si n est pair on a $(n - 2)^n - 7n + 5n^{2024} + 3n^2 - 2 \equiv 1 - 7 + 5 + 3 - 2 \equiv 0\ [n - 1]$. Ainsi, tout n pair vérifie la condition de l'énoncé.
Si n est impair on a $(n - 2)^n - 7n + 5n^{2024} + 3n^2 - 2 \equiv -1 - 7 + 5 + 3 - 2 \equiv -2\ [n - 1]$. Ainsi il faut et il suffit que $-2 \equiv 0\ [n - 1]$ soit que $n - 1 \mid 2$ ce qui est équivalent à $n = 2$ ou 3, donc à $n = 3$ par imparité.
Les solutions sont donc $n = 3$ et n pair.

Solution de l'exercice 2
Trouver le chiffre des unités revient uniquement à calculer le résidu de ce nombre modulo 10. On se place donc modulo 10.

$$3^{1789} \equiv 3 \cdot 3^{1788} \equiv 3 \cdot (3^2)^{894} \equiv 3 \cdot (-1)^{894} \equiv 3\ [10]$$
$$1777^{1777^{1777}} \equiv 7^{1777^{1777}} \equiv 7 \cdot 7^{1777^{1777}-1} \equiv 7 \cdot (7^2)^{\frac{1777^{1777}-1}{2}} \equiv 7 \cdot (-1)^{\frac{1777^{1777}-1}{2}}$$

Il nous reste alors à déterminer si $\frac{1777^{1777}-1}{2}$ est pair ou impair. On regarde donc $1777^{1777} - 1$ modulo 4. On a

$$1777^{1777} - 1 \equiv 1^{1777} - 1 \equiv 0\ [10]$$

On en déduit que $\frac{1777^{1777}-1}{2}$ est pair donc que

$$1777^{1777^{1777}} \equiv 7 \cdot 1 \equiv 7\ [10]$$

Solution de l'exercice 3
On regarde d'abord modulo $a+1$. On a $a^3b-1 \equiv (-1)^3b-1 \equiv -b-1\ [a+1]$. Or, $a^3b-1 \equiv 0\ [a+1]$ donc $a+1 \mid b+1$.
On regarde maintenant modulo $b-1$. On a $b^3a+1 \equiv a+1\ [b-1]$. Donc, $b-1 \mid a+1$
Il vient par transitivité que $b-1 \mid b+1$ donc que $b-1 \mid b+1-(b-1) = 2.$, Donc $b-1$ vaut $-2, -1, 1$ ou 2. Comme $b \geqslant 0$, il nous reste donc à traiter les cas $b=0$, $b=2$ et $b=3$ à la main. Si $b=0$, comme $a+1$ divise $b+1=1$, on obtient que $a=0$. Si $b=2$, comme $a+1$ divise $b+1=3$, on obtient que $a=0$ ou $a=2$. Si $b=3$, comme $a+1$ divise $b+1=4$ et est divisible par $b-1=2$, on obtient que $a+1=2$ ou 4, donc $a=1$ ou 3. Ainsi les potentielles solutions sont

$$(0,0),(0,2),(2,2),(1,3),(3,3)$$

Pour $(a,b)=(0,0)$, les deux fractions valent -1. Pour $(a,b)=(0,2)$, la première fraction vaut 61 et la seconde 1. Pour $(a,b)=(2,2)$ la première fraction vaut 5 et la seconde 9. Pour $(a,b)=(1,3)$ la première fraction vaut 1 et la seconde 5. Pour $(a,b)=(3,3)$, la première fraction vaut 20 et la seconde vaut 14, donc tous les couples trouvés sont solutions.

Solution de l'exercice 4
On veut montrer que $a_n^2+1 \mid a_{n+1}^2+1$ soit que $a_{n+1}^2+1 \equiv 0\ [a_n^2+1]$
On a

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2+1 &\equiv (a_n^2+a_n+1)^2+1\ [a_n^2+1] \\ &\equiv (a_n^2+1+a_n)^2+1[a_n^2+1] \\ &\equiv (0+a_n)^2+1[a_n^2+1] \\ &\equiv 0\ [a_n^2+1] \end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5
Comme $10 \equiv -1\ [11]$, on a

$$N = \sum_{k=0}^{n} a_k 10^k \equiv \sum_{k=0}^{n} a_k(-1)^k \equiv a_0 - a_1 + a_2 - a_3 \ldots\ [11].$$

En particulier N divisible par 11 équivaut à $N \equiv 0\ [11]$, qui équivaut à $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots \equiv 0\ [11]$, donc équivaut au fait que 11 divise $a_0 - a_1 + a_2 - a_3 + \ldots$

Solution de l'exercice 6
Il suffit de trouver un entier p premier pour lequel p divise notre nombre mais pas p^2. En effet, dans ce cas là notre nombre ne sera pas un carré parfait, car un carré parfait a tous ses facteurs premiersnprésent un nombre pair de fois.
Or, on remarque que 3 divise le nombre d'après le critère de divisibilité par 3 car 3 divise 300 mais à l'inverse 9 ne le divise pas car $9 \nmid 300$
Ce qui conclut qu'il n'existe pas de tels nombres.

Solution de l'exercice 7
Montrer que ce nombre est divisible par 33 revient à montrer qu'il est divisible par 3 et 11 : en

effet si 33 divise le nombre, celui-ci est divisible par 3 et 11, et si 3 et 11 divise le nombre, alors celui-ci a ces facteurs dans sa décomposition en facteurs premiers, donc est divisible par 33. On utilise donc les critères de divisibilités par 3 et 11. Il faut et suffit donc que

$$1+7+x+8+5+y \equiv x+y \equiv 0\ [3]$$

$$y-5+8-x+7-1 \equiv y-x+9 \equiv 0\ [11]$$

x et y vérifient donc le système $\begin{cases} x+y \equiv 0\ [3] \\ x-y \equiv 2\ [11] \end{cases}$

Maintenant on peut tester pour chaque y quel x correspond dans la seconde égalité. Si $y=0$, $x=2$. Si $y=1$, $x=3$. Si $y=2$, $x=4$. Si $y=3$, $x=5$. Si $y=4$, $x=6$. Si $y=5$, $x=7$. Si $y=6$, $x=8$. Si $y=7$, $x=9$. Si $y=8$ il n'y a pas de x solution. Si $y=9$, $x=0$. Les seules possibilités vérifiant aussi la première contrainte sont $(x,y)=(4,2),(7,5)$ et $(0,9)$.

Solution de l'exercice 8
Notons $n-1, n, n+1$ les trois entiers consécutifs. On calcule la somme des 3 cubes.

$$\begin{aligned}(n-1)^3+n^3+(n+1)^3 &= n^3-3n^2+3n-1+n^3+n^3+3n^2+3n+1 \\ &= 3n^3+6n\end{aligned}$$

Pour montrer que 9 divise $3n^3+6n$, il suffit de montrer que $3 \mid n^3+2n = n(n^2+2)$. Or si 3 ne divise pas n, $n^2 \equiv 1\ [3]$, donc 3 divise n^2+2. Sinon 3, divise n, donc dans tous les cas $3 \mid n^3+2n = n(n^2+2)$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9
Soit (a,b) une éventuelle solution. Comme on a des carrés, on regarde l'équation modulo 4. On obtient $a^2+b^2 \equiv -1\ [4]$. Or, un carré modulo 4 vaut 0 ou 1 donc la somme de deux carrés peut valoir $0,1$ ou 2 modulo 4, mais ne peut pas être congrue à -1. Ainsi, il n'existe pas de tels a,b.

Solution de l'exercice 10
Soit (a,b) une éventuelle solution. On regarde cette fois-ci modulo 3. On obtient $b^2+1 \equiv 0\ [3]$. Or, les carrés modulo 3 valent 0 ou 1, donc b^2+1 vaut 1 ou 2 modulo 3. Ainsi cette équation ne peut être vérifiée et il n'existe donc pas de tels entiers a et b.

Solution de l'exercice 11
Soit (x,y,ℓ) une éventuelle solution. On regarde modulo 7. Si $\ell \geq 1$ on a $x^3+y^3+3 \equiv 0\ [7]$. Or, les cubes modulo 7 valent $0,1$ ou -1. Ainsi, x^3+y^3 peut être congru à $-2,-1,0,1,2$ mais ne peut être congru à $-3 \equiv 4\ [7]$. Il nous reste donc le cas $\ell=0$. Si $x \geq 4$ on a $x^3+y^3 \geq x^3 \geq 64 > 54$. Il nous reste à traiter les cas $x=0,1,2,3$, pour lesquels on obtient $y^3 = 54, 53, 46, 27$. Le seul cube étant 27, on a que seul $x=3$ est solution ce qui nous donne la solution $(3,3,0)$.

Solution de l'exercice 12
Soit (x,y) une éventuelle solution. On regarde modulo 8. Si $y \geqslant 4$, notons que $1\times2\times3\times4$ divise $y!$. En particulier 8 divise $y!$. Ainsi $x^2 \equiv 2021 \equiv 5\ [8]$. Or les carrés modulo 8 sont $0,1,4$ donc aucun carré ne vaut 5 modulo 8, on a une contradiction. Pour $y=0,1,2$ ou 3 on trouve

respectivement $x^2 = 2023, 2023, 2025, 2033$, or $44^2 < 2023 < 45^2 = 2025 < 2033 < 46^2$, donc la seule solution est $y = 2$ et $x = 45$, le seul couple solution est $(45, 2)$.

Solution de l'exercice 13
Soit (a, b, c) un triplet solution éventuel, et (x, y, z) donnés par l'énoncé. Sans perte de généralité, et puisque x, y et z jouent des rôles symétriques, on suppose que $x \leqslant y \leqslant z$.

Regardons modulo 3. Pour cela supposons que $x \geqslant 3$. Dans ce cas, $ab \equiv -1 \equiv bc \equiv ca$ [3]. En particulier, 3 ne divise ni a ni b ni c : a, b, c valent 1 ou -1 mod 3. Par principe des tiroirs, deux éléments sont alors égaux mod 3. Par symétrie, on peut supposer que a et b sont égaux modulo 3. On a donc $ab \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \not\equiv -1$ [3] ce qui est absurde.

Ainsi, x vaut 1 ou 2, donc $ab + 1$ vaut 1 ou 2, donc ab vaut 0 ou 1. D'après l'énoncé, on en déduit donc que $a = b = 1$, et $c = z! - 1$. Ainsi à permutation près $(a, b, c) = (1, 1, z! - 1)$.

Réciproquement, si (a, b, c) vaut à permutation près un triplet de la forme $(1, 1, t! - 1)$, à permutation près $(ab + 1, bc + 1, ac + 1)$ vaut $(2!, t!, t!)$.

Solution de l'exercice 14
Dans toute la solution, on notera A_k l'expression $1!+2!+\cdots+k!$ et B_n l'expression $1+2+\cdots+n$. Comme dans tout exercice de ce genre, on commence par rechercher d'éventuelles solutions pour de petites valeurs de k et de n. Notons que (A_k) et (B_n) sont strictement croissantes et que $B_n = n(n+1)/2$.

On calcule alors les premières valeurs de A_k :

— Si $k = 1$, $A_k = 1 = B_1$. Par stricte croissance $(1, 1)$ est l'unique solution avec $k = 1$.

— Si $k = 2$, $A_k = 3 = B_2$. Par stricte croissance $(2, 2)$ est l'unique solution avec $k = 2$.

— Si $k = 3$, $B_3 = 6 < A_k = 9 < B_4 = 10$ donc il n'y a pas de solution.

— Si $k = 4$, $B_7 = 28 < A_k = 33 < B_8 = 36$ donc il n'y a pas de solution.

— Si $k = 5$, $A_5 = 153 = B_17$. Par stricte croissance $(5, 17)$ est l'unique solution avec $k = 2$.

Ainsi on a trois couples solutions : $(k, n) = (1, 1)$, $(2, 2)$ et $(5, 17)$.

Soit (k, n) un couple solution avec $k \geqslant 6$. Essayons de trouver une contradiction au fait que $2A_k = n(n+1)$ en regardant un certain modulo. Notons que comme $2A_5 = 17 \times 18$, à priori si $A_k \equiv A_5$, alors il n'y aura pas de contradiction. On cherche donc un modulo qui ne divise pas $A_k - A_5 = 6! + 7! + \cdots + k!$ pour tout $k \geqslant 6$, donc il suffit de trouver un modulo qui ne divise pas 6!. Le plus petit étant 7, on teste modulo 7.

Modulo 7, $2A_6 \equiv 2(153 + 6!) \equiv 2(153 - 1) \equiv 2 \times 5 \equiv 3$ [7]. En particulier, pour tout $k' \geqslant 6$, $A_{k'} = A_k + 7! + 8! + \cdots + k'! \equiv 3$ [7].

D'autre part, $n(n+1) \equiv 0, 2, 6, 5, 6, 2, 0$ [7] lorsque n varie de 0 à 6. Donc pour $k \geqslant 6$, on ne peut avoir $2A_k \equiv n(n+1)$ [7]. Ainsi il n'y a pas de solution pour $k \geqslant 6$.

En conclusion, les solutions sont les couples $(k, n) = (1, 1)$, $(2, 2)$ et $(5, 17)$.

7 TD d'inégalités 2 (Théo)

Le cours présentait l'inégalité de Cauchy Schwarz et des mauvais élèves, dont les preuves sont détaillées dans le fameux cours https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/11/Inegalites-Theo.pdf. Les exercices du TD sont corrigés.

Exercice 1
Montrer que si a, b, c, d sont strictement positifs, $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{4}{c} + \frac{16}{d} \geqslant \frac{64}{a+b+c+d}$

Exercice 2
Soit $a_1 \dots a_n$ des réels strictement positifs. Montrer que $\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n} \geqslant \frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 3
Soit $a_1 \dots a_n$ des réels. Montrer que $a_1^2 + \cdots + a_n^2 \geqslant \frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 4
Montrer que si a, b, c sont des réels positifs tels que $a^2+b^2+c^2 = 3$, alors $\frac{1}{1+ab} + \frac{1}{1+bc} + \frac{1}{1+ac} \geqslant \frac{3}{2}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 5
Soit n un entier strictement positif, $a_1, \dots, a_n$ des nombres réels strictement positifs, $b_1, \dots, b_n$ des nombres réels strictement positifs. On suppose que $a_1 + \cdots + a_n = b_1 + \cdots + b_n$ et on note $S = a_1 + \cdots + a_n$.

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} = \sum_{i=1}^{n} \frac{b_i^2}{b_i+a_i}$

— Montrer que $\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i^2}{b_i+a_i} \geqslant \frac{S}{2}$

Exercice 6
Soit a, b, x, y, z des réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{x}{ay+bz} + \frac{y}{az+bx} + \frac{z}{ax+by} \geqslant \frac{3}{a+b}$$

Exercice 7
Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $a^2 + b^2 + c^2 = a + b + c$, montrer que

$$\frac{a^2}{a^2+ab} + \frac{b^2}{b^2+bc} + \frac{c^2}{c^2+ca} \geqslant \frac{a+b+c}{2}$$

Exercice 8
Soit a, b, c des réels strictement positifs, montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Trouver les cas d'égalité.

Exercice 9
Déterminer la plus petite valeur de $a^2+b^2+c^2+d^2$ lorsque a,b,c,d sont des réels strictement positifs tels que $a+2b+3c+4d=12$

Exercice 10
Soit x,y des réels positifs, montrer que $x^2+y^2+1 \geqslant x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1}$

Exercice 11
Soit a,b,c strictement positifs, montrer que

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}$$

et déterminer les cas d'égalité.

Exercice 12
Soient x,y,z des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

Exercice 13
Soit x,y,z des réels strictement positifs avec $x^2+y^2+z^2=3$, montrer que

$$\frac{x^2+yz}{x^2+yz+1}+\frac{y^2+zx}{y^2+zx+1}+\frac{z^2+xy}{z^2+xy+1} \leqslant 2$$

Exercice 14
Soit x,y,z des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x+2y}{z+2x+3y}+\frac{y+2z}{x+2y+3z}+\frac{z+2x}{y+2z+3x} \leqslant \frac{3}{2}$$

Exercice 15
Démontrer que, pour tous réels positifs ou nuls x,y,z, non tous nuls, l'inégalité suivante est vraie :

$$\frac{2x^2-x+y+z}{x+y^2+z^2}+\frac{2y^2+x-y+z}{x^2+y+z^2}+\frac{2z^2+x+y-z}{x^2+y^2+z} \geqslant 3.$$

Déterminer tous les triplets (x,y,z) pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Solution de l'exercice 1
D'après l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{4}{b}+\frac{16}{d}=\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}=\frac{2^2}{b}+\frac{4^2}{d}\geqslant\frac{(1+1+2+4)^2}{a+b+c+d}$$

ce qui donne l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 2
On applique l'inégalité des mauvais élèves pour $e_i=1$ et $f_i=a_i$. On obtient $\frac{1}{a_1}+\cdots+\frac{1}{a_n}\geqslant\frac{(1+\cdots+1)^2}{a_1+\cdots+a_n}=\frac{n^2}{a_1+\cdots+a_n}$.

On a égalité si et seulement s'il existe un réel λ tel que $1=\lambda a_i$ pour tout i, c'est-à-dire $a_i=\frac{1}{\lambda}$, donc si et seulement si les a_i sont tous égaux.

Solution de l'exercice 3
On applique l'inégalité des mauvais élèves pour $e_i=a_i$ et $f_i=1$, on obtient $a_1^2+\cdots+a_n^2\geqslant\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{1+\ldots 1}=\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{n}$.

On a égalité si et seulement s'il exsite λ réel tel que pour tout i, $a_i=\lambda$ i.e. tous les a_i sont égaux.

Solution de l'exercice 4
On utilise l'inégalité des mauvais élèves avec $n=3$ les e_i valant tous 1 et $f_1=1+ab$, $f_2=1+ac$, $f_3=1+bc$. On obtient $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geqslant\frac{(1+1+1)^2}{1+ab+1+bc+1+ac}=\frac{9}{3+ab+bc+ca}$. Or, par le lemme du tourniquet, on a $ab+bc+ca\leqslant a^2+b^2+c^2=3$, donc $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}\geqslant\frac{9}{6}=\frac{3}{2}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Alors on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a=b=c$. Comme $a^2+b^2+c^2=3$, on obtient $3a^2=3$ donc $a=b=c=1$. Réciproquement si $a=b=c=1$, $\frac{1}{1+ab}+\frac{1}{1+bc}+\frac{1}{1+ac}=3\frac{1}{1+1}=\frac{3}{2}$.

Solution de l'exercice 5
Notons que $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i+a_i}-\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{b_i^2}{b_i+a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2-b_i^2}{b_i+a_i}=\sum\limits_{i=1}^{n}a_i-b_i=S-S=0$.

On applique l'inégalité des mauvais élèves : $\sum\limits_{i=1}^{n}\frac{a_i^2}{b_i+a_i}\geqslant\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{a_1+b_1+\cdots+a_n+b_n}=\frac{S^2}{2S}=\frac{S}{2}$

Solution de l'exercice 6
Comme on a une somme de fractions, on a envie d'utiliser l'inégalité des mauvais élèves. Pour cela, il faudrait avoir des carrés au numérateur. On peut donc multiplier la première fraction par x au numérateur et dénominateur, la seconde par y et la troisième par z.

On a :

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}=\frac{x^2}{axy+bxz}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+xz)}$$

Ainsi il sufit de montrer que $\dfrac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+xz)}\geqslant\dfrac{3}{a+b}$ donc que $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+xz)$. Or $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\geqslant 3(xy+yz+xz)$ par lemme du tourniquet ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7
Par l'inégalité des mauvais élèves,

$$\frac{a^2}{a^2+ab}+\frac{b^2}{b^2+bc}+\frac{c^2}{c^2+ca} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} = \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc}$$

Or par le lemme du tourniquet $ab+bc+ca \leqslant a^2+b^2+c^2$, donc $\frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{a^2+b^2+c^2+ab+ac+bc} \geqslant \frac{(a+b+c)(a^2+b^2+c^2)}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a+b+c}{2}$ ce qui donne le résultat.

Solution de l'exercice 8
On fait comme pour l'exercice 6. On a par l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b} = \frac{a^2}{ba+ca}+\frac{b^2}{cb+ab}+\frac{c^2}{ac+bc} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)}.$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{(a+b+c)^2}{2(ab+bc+ca)} \geqslant \frac{3}{2}$, *i.e.* que $(a+b+c)^2 \geqslant 3(ab+bc+ca)$, ce qui est équivalent en développant à $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. Ceci étant vrai par le lemme du tourniquet, on a bien prouvé l'inégalité voulue.

Si on a égalité, on a égalité dans le lemme du tourniquet, donc $a=b=c$. Réciproquement si $a=b=c$, les trois fractions valent $1/2$, donc leur somme vaut $3/2$, on a bien égalité si et seulement si $a=b=c$.

Solution de l'exercice 9
Par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$(a^2+b^2+c^2+d^2)(1^2+2^2+3^2+4^2) \geqslant (a+2b+3c+4d)^2 = 12^2.$$

Comme $1^2+2^2+3^2+4^2=30$, on obtient que $a^2+b^2+c^2+d^2 \geqslant \frac{12^2}{30} = \frac{24}{5}$.

Si on a égalité, alors $a/1=b/2=c/3=d/4$, donc $a+2b+3c+4d = a+4a+9a+16a = 30a$, donc il suffit de prendre $a=2/5$, $b=4/5$, $c=6/5$ et $d=8/5$. On a bien $a+2b+3c+4d=12$, et $a^2+b^2+c^2+d^2 = 120/25 = 24/5$ ce qui montre bien que la valeur est atteinte.

Solution de l'exercice 10
Par l'inégalité de Cauchy Schwarz,

$$\begin{aligned} x\sqrt{y^2+1}+y\sqrt{x^2+1} &\leqslant \sqrt{x^2+y^2}\sqrt{x^2+1+y^2+1} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2)(x^2+y^2+2)} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2+1-1)(x^2+y^2+1+1)} \\ &= \sqrt{(x^2+y^2+1)^2-1} < x^2+y^2+1 \end{aligned}$$

ce qui donne bien l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 11
L'inégalité est équivalente à

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\right) \geqslant \frac{9}{4}.$$

On utilise Cauchy Schwarz sur $(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c})$ et $\left(\frac{\sqrt{a}}{b+c} + \frac{\sqrt{b}}{a+c} + \frac{\sqrt{c}}{b+a}\right)$. On obtient que

$$(a+b+c)\left(\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(a+c)^2} + \frac{c}{(a+b)^2}\right) \geqslant \left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)^2.$$

En utilisant l'exercice 8, on a alors que $\left(\frac{a}{b+c} + \frac{b}{a+c} + \frac{c}{a+b}\right)^2 \geqslant \frac{9}{4}$ ce qui donne l'inégalité voulue.

Si on a égalité, on a égalité dans l'exercice 8 donc $a = b = c$.

Réciproquement si on a $a = b = c$, chaque fraction vaut $\frac{1}{4a}$, donc le terme de gauche vaut $\frac{3}{4a}$. Le terme de droite vaut $\frac{3}{4a}$, donc on a bien égalité si et seulement si $a = b = c$.

Solution de l'exercice 12

On utilise l'inégalité des mauvais élèves : on obtient :

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)}.$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)} \geqslant \frac{3}{4}$. Or

$$(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y) = x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+xz).$$

Ainsi $\frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)+(y+z)(y+x)+(z+x)(z+y)} \geqslant \frac{3}{4}$ équivaut à

$$4(x+y+z)^2 \geqslant 3(x^2+y^2+z^2+3(xy+yz+xz))$$

donc à $4(x^2+y^2+z^2)+8(x^2+y^2+z^2) \geqslant 3(x^2+y^2+z^2)+9(xy+yz+xz)$, donc à $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+xz$ qui est vrai d'après le lemme du tourniquet.

Solution de l'exercice 13

Remarquons que $\dfrac{x^2+yz}{x^2+yz+1} = 1 - \frac{1}{x^2+yz+1}$ et de même cycliquement. Ainsi l'inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{x^2+yz+1} + \frac{1}{y^2+zx+1} + \frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant 1.$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves

$$\frac{1}{x^2+yz+1} + \frac{1}{y^2+zx+1} + \frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+3}.$$

Or par le lemme du tourniquet, $xy+yz+xz \leqslant x^2+y^2+z^2 = 3$ donc

$$\frac{1}{x^2+yz+1} + \frac{1}{y^2+zx+1} + \frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant \frac{9}{3+3+3} = 1$$

ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 14

La différence entre le numérateur et le dénominateur de chaque fraction vaut $x+y+z$, il faut donc probablement utiliser ce fait. On a $\dfrac{x+2y}{z+2x+3y} = 1 - \dfrac{x+y+z}{z+2x+3y}$. En faisant de même pour les trois autres termes, l'inégalité est équivalente à

$$3 - (x+y+z)\left(\frac{1}{x+2y} + \frac{1}{y+2z} + \frac{1}{z+2x}\right) \leqslant \frac{3}{2}$$

soit à

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+2y+3z} + \frac{1}{y+2z+3x} + \frac{1}{z+2x+3y}\right) \geqslant \frac{3}{2}.$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves,

$$\left(\frac{1}{x+2y+3z} + \frac{1}{y+2z} + \frac{1}{z+2x}\right) \geqslant \frac{3^2}{x+2y+3z+y+2z+3x+z+2x+3y} = \frac{3}{2(x+y+z)}$$

donc

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+2y+3z} + \frac{1}{y+2z+3x} + \frac{1}{z+2x+3y}\right) \geqslant \frac{3}{2}$$

On a donc l'inégalité voulue

Solution de l'exercice 15
On présente deux solutions.

Première solution : pour ne plus avoir de termes négatifs, et avoir une certaine symétrie on ajoute 2 à chaque fraction. On note que $\dfrac{2x^2-x+y+z}{x+y^2+z^2} + 2 = \dfrac{2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z}{x+y^2+z^2}$, et de même cliquement. L'inégalité à prouver devient :

$$(2x^2+2y^2+2z^2+x+y+z)\left(\frac{1}{x+y^2+z^2} + \frac{1}{y+z^2+x^2} + \frac{1}{z+x^2+y^2}\right) \geqslant 9$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves :

$$\left(\frac{1^2}{x+y^2+z^2} + \frac{1^2}{y+z^2+x^2} + \frac{1^2}{z+x^2+y^2}\right) \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{2(x^2+y^2+z^2)+(x+y+z)}$$

ce qui prouve l'inégalité précédente. D'après le cas d'égalité des mauvais élèves, on a égalité si et seulement si $x+y^2+z^2 = y+z^2+x^2 = z+x^2+y^2$, donc si et seulement si $x+y^2 = y+x^2$ et $y+z^2 = z+y^2$. Or la première égalité est équivalente à $0 = y^2-x^2-(y-x) = (y-x)(y+x-1)$, et la seconde à $0 = (z-y)(z+y-1)$. En particulier, on a égalité si et seulement si $x=y=z$, ou $x=y$ et $z+y=1$, ou $y=z$ et $x+y=1$, ou $x+y=1$ et $z+y=1$. Le dernier cas implique que $x=z$, et dans chacun des trois derniers cas, deux variables sont égales, et la dernière vaut un moins la valeur des deux variables.

Ainsi les triplets solutions sont les (t,t,t) pour $t>0$, et les $(t,t,1-t)$ pour $t \in [0,1]$ pour avoir la positivité et la non nullité des trois variables.

Autre solution : pour ne plus avoir de termes négatifs, on ajoute 1 à chaque fraction. On note que $\dfrac{2x^2-x+y+z}{x+y^2+z^2} + 1 = \dfrac{2x^2+y^2+z^2+y+z}{x+y^2+z^2}$, et de même cliquement. L'inégalité à prouver devient :

$$\frac{2x^2+y^2+z^2+y+z}{x+y^2+z^2} + \frac{2y^2+z^2+x^2+z+x}{y+z^2+x^2} + \frac{2z^2+x^2+y^2+x+y}{z+x^2+y^2} \geqslant 6$$

Posons $A = x + y^2 + z^2$, $B = y + z^2 + x^2$ et $C = z + x^2 + y^2$, l'inégalité précédente se réécrit :

$$\frac{B+C}{A} + \frac{A+C}{B} + \frac{A+B}{C} \geqslant 6$$

Or par IAG $\frac{A}{B} + \frac{B}{A} \geqslant 2$, $\frac{C}{B} + \frac{B}{C} \geqslant 2$ et $\frac{A}{C} + \frac{C}{A} \geqslant 2$, ce qui prouve l'inégalité précédente.

On a égalité si et seulement si $A = B = C$, donc le cas d'égalité se ramène à la discussion précédente.

8 Equations Diophantiennes (Amélie)

Définition 1.
Une équation diophantienne est un équation dont les inconnues sont entières.

Cette définition étant très générale, le niveau des équations diophantiennes peut énormément varier !

Exemple 2 (Facile)**.**

$$ab = 5$$

Exemple 3 (Très très très difficile)**.**

$$a^n + b^n = c^n$$

Ne vous inquiétez pas : en maths olympiques, vous ne rencontrerez que des équations d'un niveau raisonnable.

Quand on rencontre une équation diophantienne, on se demande :

— Y-a-t-il des solutions ?

— S'il y en a un nombre fini, peut-on les exhiber ?

— S'il y en a un nombre infini, peut-on les exprimer simplement ?

L'objectif de ce cours est d'adopter des réflexes face aux équations diophantiennes : factorisation, lemme de Gauss, modulos 3,4 ou 8 (notamment en présence de carrés) ou puissance d'un nombre premier.

Enfin, il faut penser à vérifier que les solutions trouvées fonctionnent réellement.

Rappels de factorisation

Voir le cours de Melvil.

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les x, y entiers tels que $x^2 = 7 + y^2$.

Exercice 2
Trouver tous les couples d'entiers naturels tels que $x^2 - 4y^2 = 3$

Exercice 3
Trouver tous les a, b entiers naturels tels que $2^a + 1 = b^2$.

Exercice 4
Trouver tous les entiers m, n tels que $m^2 - 16 = 3^n$

Exercice 5
Trouver tous les entiers naturels m, n tels que $m^2 - 8 = 3^n$.

Exercice 6
Trouver tous les entiers x, y tels que $2^x = y^2 + y + 1$.

Exercice 7
Trouver tous les entiers strictement positifs a, b, c tels que $a! + b! = 2^c$

Exercice 8
Trouver tous les entiers a, b tels que $a^2 + 1 = b!$

Exercice 9
Trouver tous les entiers m, n tels que $2^m - 1 = 3^n$

Exercice 10
Trouver tous les entiers x, y tels que $x^2y^2 = x^2 + xy + y^2$.

Exercice 11
Déterminer tous les triplets (p, q, r) d'entiers premiers tels que $p + q^2 = r^4$.

Exercice 12
Pour quels entiers naturels n'existe-t-il des entiers a et b tels que $n + a^2 = b^2$?

Exercice 13
Trouver tous les entiers naturels x, n tels que $3 \cdot 2^x + 4 = n^2$

Exercice 14
Trouver tous les entiers positifs x, y, z tels que $x^2 + y^2 - 15 = 2^z$

Exercice 15
Trouver tous les a, b tels que $2^a - 3^b = 7$.

Exercice 16
Trouver tous les x, y, z entiers positifs tels que $2^x + 3^y = z^2$.

Exercice 17
Soit n un entier positif. Trouver tous les diviseurs positifs d de $3n^2$ tels que $n^2 + d$ soit un carré parfait.

Exercice 18
Trouver tous les entiers positifs an, m tels que $125 \cdot 2^n - 3^m = 271$

Exercice 19
Déterminer tous les triplets d'entiers strictement positifs (x, y, z) tels que $2020^x + 2^y = 2024^z$

Solution de l'exercice 1
En factorisant, on obtient $(x - y)(x + y) = 7$ donc $(x - y)$ et $(x + y)$ sont diviseurs associés de 7 (qui est premier). On trouve alors comme solutions $(4, 3)$,$(4, -3)$,$(-4, 3)$ et $(-4, -3)$.

Solution de l'exercice 2
On factorise : $(x - 4y)(x + 4y) = 3$, donc $x - 2y$ et $x + 2y$ sont diviseurs associés de 3, qui est premier. Donc $x + 2y = 3$, donc $x = y = 1$ Or $x + 2y$ est positif donc $x - 2y$ doit l'être aussi (le produit est positif), d'où une absurdité. Il n'y a pas de solution.

On peut aussi regarder modulo 4.

Solution de l'exercice 3
$b^2 - 1 = 2^a$ donc $(b-1)(b+1) = 2^a$. $b-1$ et $b+1$ sont donc des puissances de 2. Par ailleurs, ils sont distants de deux : les seuls à correspondre sont $(2,4)$ et $(-1,1)$ (qui mène à une absurdité), d'où $a = b = 3$.

Solution de l'exercice 4
On factorise : $(m-4)(m+4) = 3^n$ donc $m-4$ et $m+4$ sont deux puissances de 3 distantes de 8 : les seules à correspondre sont 1 et 9, d'où $m = 5$.

Solution de l'exercice 5
Si $n \geqslant 1$, on doit avoir $m^2 - 8 \equiv 0 \mod 3$ soit $m^2 \equiv 2 \mod 3$, or les carrés modulo 3 valent 0 et 1. On a donc $n = 0$, d'où $m = 3$.

Solution de l'exercice 6
Si $x \geqslant 1$, on regarde modulo 2 et on aboutit à une absurdité. Il reste une solution : $x = 0$ et $y = 1$

Solution de l'exercice 7
Si a et b sont plus grands que 3, $3|2^c$ ce qui est absurde.

Supposons $a \geqslant 3$. Par parité, $b = 2$ et il faut que 4 ne divise pas $a!$ (car $2^c - b! \equiv 2 \mod 4$), d'où $a = 3$, $c = 3$.

On trouve aussi les solutions $(1,1,1)$ et $(2,2,2)$.

Solution de l'exercice 8
Supposons $b \geqslant 3$. Alors $b!$ est divisible par 3. Or le membre de gauche ne peut pas être congru à $0 \mod 3$, c'est absurde.

Il ne reste plus que les solutions $(0,0)$, $(0,1)$ et $(1,2)$

Solution de l'exercice 9
On suppose $n \geqslant 1$. En regardant modulo 3, on obtient que $2^m \equiv 1 \mod 3$ donc m est pair. On note $m = 2a$.

On peut alors factoriser : $(2^a - 1)(2^a + 1) = 3^n$. Comme 3 est premier, $2^a - 1$ et $2^a + 1$ sont deux puissances de 3 espacées de 2. Seuls 1 et 3 conviennent, d'où $a = 1$ (donc $m = 2$) et $n = 1$.

Si $n = 0$, on a $m = 1$.

Solution de l'exercice 10
Soit d le *pgcd* de x et y. On note $x = ad$ et $y = bd$. Divisons l'équation par d^2. On obtient : $a^2b^2d^2 = a^2 + ab + b^2$ où a et b sont premiers entre eux. On remarque alors que $a|b^2$, donc $a|b$ (Gauss), donc $a = \pm 1$. De même, $b|a$ donc $b = \pm 1$. On vérifie que $(1, -1)$ est solution.

Solution de l'exercice 11
On remarque qu'au moins l'un des trois est pair donc égal à2, et que les deux autres sont impaires ($p = q = r = 2$ n'est pas solution).

Cas 1 : $p = 2$

$r^4 - q^2 = 2$ soit $(r^2 - q)(r^2 + q) = 2$. Comme $r^2 + q > 0$, on sait que $r^2 - q = 1$ et $r^2 + q = 2$, soit $2q = 3$, impossible.

Cas 2 : $q = 2$

$(r^2 - 2)(r^2 + 2) = p$ or p est premier donc $r^2 - 2 = 1$ et $r^2 + 2 = p$, d'où $r^2 = 3$ ce qui est impossible.

Cas 3 : $r = 2$
$(4-q)(4+q) = p$ or p est premier donc $4 - q = 1$ et $4 + q = p$ soit $q = 3$ et $p = 7$.

Solution de l'exercice 12
L'équation se réécrit $n = b^2 - a^2$, ou encore $n = (a+b)(b-a)$. On a $(a+b)-(b-a) = 2a$ qui est pair, donc $a+b$ et b $b-a$ sont de même parité. S'ils sont tous les deux impairs, n est impair. Sinon, ils sont tous les deux pairs et n est multiple de 4. Ainsi, si n vérifie l'équation, on a $n \not\equiv 4(\mod 4)$. Réciproquement, supposons $n \not\equiv 4(\mod 4)$ et trouvons a et b. On traite deux cas séparé- ment : — Si n est impair, on veut $a+b$ et $b-a$ impairs. On cherche une solution simple, donc on peut par exemple faire en sorte que $b - a = 1$. Ainsi, $b = a+1$ et $n = a + b = 2a+1$. On veut donc prendre $a = \frac{n-1}{2}$ et $b = \frac{n+1}{2}$. On vérifie aisément que pour ces valeurs de a et b, l'équation est vérifiée. — Si n est pair, on veut $a+b$ et $b-a$ pairs. De même qu'avant, on cherche une solution simple donc on peut essayer de prendre $b - a = 2$. Ainsi, $b = a+2$ et $\frac{n}{2} = a + b = 2a+2$. On veut donc prendre $a = \frac{n}{4} - 1$ et donc $b = \frac{n}{4} + 1$. On vérifie aisément que pour ces valeurs de a et b, l'équation est vérifiée.

Solution de l'exercice 13
Pour $x = 0$, l'équation devient $n^2 = 7$ qui n'a pas de solution. Supposons $x > 0$, on factorise : $3 \cdot 2^x = (n-2)(n+2)$. Le membre de gauche est pair donc le membre de droite est paire. Les deux facteurs du membre de droite sont de même parité donc ils sont tous les deux pairs et on a deux cas :

— Cas 1 : $3 \cdot 2^a = n - 2$ et $2^b = n+2$, avec $a + b = x$. On peut combiner ces deux équations pour trouver $2^b = 3 \cdot 2^a + 4$. Notons que $n+2$ et $n-2$ ont pour différence 4 donc ils ne peuvent pas être tous les deux divisibles par 8. On a donc $a \leqslant 2$ ou $b \leqslant 2$. Or $2^b > 4$, donc $b > 2$ et on déduit que $a \leqslant 2$. Si $a = 0$, $2^b = 3 + 4 = 7$ ce qui n'est pas possible. Si $a = 1$, $2^b = 6 + 4 = 10$ ce qui n'est pas possible non plus. Si $a = 2$, alors $2^b = 12 + 4 = 16$ donc $b = 4$. On obtient $x = 6$ et $n = 14$. réciproquement, on vérifie que $3 \cdot 2^6 + 4 = 196 = 14^2$ et le couple $(6, 14)$ est bien solution.

— Cas 2 : $3 \cdot 2^a = n+2$ et $2^b = n-2$, avec $a+b = x$. Les deux équations combinées donnent $2^b + 4 = 3 \cdot 2^a$. De même que précédemment, on a $a \leqslant 2$ ou $b \leqslant 2$.

1. Si $b \leqslant 2$, alors $b = 0, 1$ ou 2. Si $b = 0$, alors $5 = 3 \cdot 2^a$ ce qui n'est pas possible. Si $b = 1$, $6 = 3 \cdot 2^a$ et $a = 1$, soit $x = 2$ et $n = 4$ et on vérifie que $3 \cdot 2^2 + 4 = 16 = 4^2$ et $(2, 4)$ est bien solution. Si $b = 2$, alors $8 = 3 \cdot 2^a$ ce qui n'est pas possible.
2. Si $a \leqslant 2$, alors $a = 0, 1$ ou 2. Si $a = 0$, $2^b + 4 = 3 < 4$ ce qui n'est pas possible. Si $a = 1$, on retombe sur le cas où $b = 1$ et sur le couple $(2, 4)$. Si $a = 2$, $2^b + 4 = 12$ donc $b = 3$. Ceci donne $x = 5$ et $n = 10$. Réciproquement, on vérifie que $3 \cdot 2^5 + 4 = 100 = 10^2$ et $(5, 10)$ est bien solution.

Ainsi l'ensemble des couples (x, n) solutions est $\{(2,4), (5,10), (6,14)\}$

Solution de l'exercice 14
Voir entraînement groupe B 2021.

Solution de l'exercice 15
On suppose $b \geqslant 1$. En regardant modulo 3, on obtient $2^a \equiv 1 \mod 3$, donc $a$est pair. De plus, $a \geqslant 3$ (car $2^a > 7$) donc en regardant modulo 4 on a $-3^b \equiv -1 \mod 4$ donc b est pair. En notant $a = 2x$ et $b = 2y$, on a $(2^x - 3^y)(2^x + 3^y) = 7$ d'où comme le second terme est positif et 7 est premier : $2^x - 3^y = 1$ et $2^x + 3^y = 7$. On obtient alors $2^x = 4$ et $3^y = 3$, soit $a = 4$ et $b = 2$.

Si $b = 0$, $a = 3$ fonctionne.

Solution de l'exercice 16

Regarder modulo 4 donne que y est pair. On note $y = 2y'$. On factorise : $2^x = z^2 - 3^{2y'} = (z - 3^{y'})(z + 3^{y'})$ On note alors $z - 3^{y'} = 2^a$ et $z + 3^{y'} = 2^b$, où $a + b = x$ et $a < b$. Ces deux puissances de deux sont divisibles par 2^a et distantes de $2 \cdot 3^{y'}$, donc $a = 0$ ou $a = 1$. $a = 0$ est impossible par parité. On a donc $z = 2 + 3^{y'}$, et $2^b = 2(1 + 3^{y'})$.

On cherche maintenant à résoudre $2^k = 1 + 3^l$ pour k, l entiers. Modulo 3 donne $k = 2k'$, d'où : $(2^{k'} - 1)(2^{k'} + 1) = 3^l$. On a deux puissances de 3 distantes de 2, il s'agit de 1 et 3.

Finalement, on doit avoir $y = 2$ et $b = 3$, donc $z = 5$ et $x = 4$.

On vérifie que $(4, 2, 5)$ fonctionne.

Solution de l'exercice 17

Soit $d \geqslant 1$ un diviseur de $3n^2$ tel que $n^2 + d$ soit un carré parfait. Puisque $n^2 < n^2 + d <= n^2 + 3n^2 = (2n)^2$, il existe $k \in [\![1, n]\!]$ tel que $n^2 + d = (n + k)^2$. En simplifiant, on obtient $d = 2kn + k^2$, de sorte que $k(k + 2n) \mid 3n^2$.
Notons $\alpha = \gcd(k, n) \geqslant 1$. On dispose d'entiers $\ell, m \geqslant 1$ premiers entre eux tels que avec $k = \alpha l$, $n = \alpha m$. La relation de divisibilité précédente s'écrit alors, après simplification, $\ell(\ell + 2m) \mid 3m^2$. Or on a $\gcd(\ell + 2m, m) = \gcd(\ell + 2m - 2m, m) = \gcd(\ell, m) = 1$, c'est-à-dire $\ell + 2m$ premier avec m, donc avec m^2. Comme $\ell + 2m \mid 3m^2$, on a par le lemme de Gauss $\ell + 2m \mid 3$, c'est-à-dire $\ell + 2m \in \{1, 3\}$. Mais $\ell, m \geqslant 1$ donc $\ell + 2m \geqslant 3$. Autrement dit, $\ell + 2m = 3$ et donc nécessairement, $\ell = m = 1$. Alors $k = n = \alpha$, et $d = k(k + 2n) = 3n^2$.
Réciproquement, $d = 3n^2$ convient puisque c'est un diviseur de $3n^2$ et que $n^2 + 3n^2 = (2n)^2$.

Solution de l'exercice 18

125 étant un cube, il serait bien de prouver que n et m sont des multiples de 3 pour pouvoir factoriser le côté gauche de l'équation. Dans ce but, on regarde l'équation modulo un nombre premier congru à 1 modulo 3.

Regardons par exemple modulo 7. Les puissances de 3 modulo 7 valent $1, 3, 2, 6, 4, 5, 1$ et celles de 2 valent $1, 2, 4, 1$. Or $271 \equiv 5$ modulo 7 et $125 \equiv -1$. Les seules possibilités sont donc d'avoir la puissance de 2 valant 1 et celle de 3 valant 1 ou la puissance de 2 valant 4 et celle de 3 valant 5. Ainsi, on a $n \equiv 0 \pmod 3$ et $m \equiv 0 \pmod 6$ ou $n \equiv 2 \pmod 3$ et $m \equiv 5 \pmod 6$. Si on arrive à exclure la deuxième possibilité, on a bien m, n divisibles par 3. Notons qu'on a forcément $n \geqslant 2$ car $250 < 271$. En regardant modulo 4, on a $3^m \equiv 1$ donc m est pair, on ne peut donc pas avoir $m \equiv 5 \pmod 6$. La deuxième possibilité est donc exclue et les entiers m et n sont divisibles par 3.

On pose $m = 3k$, $n = 3\ell$. L'équation devient

$$271 = (5 \times 2^k)^3 - (3^\ell)^3 = (5 \times 2^k - 3^\ell)(25 \times 2^{2k} + 5 \times 2^{k+1} \times 3^l + 3^{2\ell})$$

Or 271 est premier et comme $(25 \times 2^{2k} + 5 \times 2^{k+1} \times 3^\ell + 3^{2\ell})$ est positif et strictement supérieur à $(5 \times 2^k - 3^\ell)$, on a $5 \times 2^k - 3^\ell = 1$. Si $k \geqslant 3$, on a $3^\ell \equiv -1 \pmod 8$ ce qui n'est pas possible car 3^ℓ vaut 1 ou 3 modulo 8. On obtient donc $k = 0, 1, 2$. Pour $k = 0$, on obtient $3^\ell = 4$ ce qui est bien sûr impossible. Pour $k = 2$, on obtient $3^\ell = 19$ qui est également impossible. Pour $k = 1$, on obtient $3^\ell = 9$ donc $\ell = 2$ donc $(n, m) = (3, 6)$.

Réciproquement $125 \times 2^3 - 3^6 = 1000 - 729 = 271$ donc $(3, 6)$ est bien solution.

La seule solution de l'équation est donc le couple $(3, 6)$.

Solution de l'exercice 19
Déjà rappelons que pour a, b des entiers strictement positifs tels que $V_2(a) \neq V_2(b)$, $V_2(a+b) = \min(V_2(a), V_2(b))$ donc dans ce cas la valuation 2-adique de la somme est le minimum de celle des deux termes.

En particulier, parmi $2020^x, 2^y$ et 2024^z, deux ont la même valuation 2-adique. Donc parmi $xV_2(2020) = 2x$, y et $zV_2(2024) = 3z$, deux sont égales.

Essayons maintenant de faire des remarques airthmétiques pertinentes. Déjà $(1, 2, 1)$ est clairement solution. On peut donc essayer tous les modulos possibles : modulo 3, on a que $1 + 2^y \equiv 2^z$. Les puissances de 2 alternent entre 1 et 2 modulo 3, donc y est pair et z impair. En particulier $2x \neq 3z$, sinon z serait pair. Idem, $y \neq 3z$ car y est pair et z impair.

On a donc $2x = y$. Ainsi $2024^z = 4^x(505^x + 1)$. Or $505^x + 1 \equiv 2 \pmod 4$, donc la valuation 2 adique du terme de droite vaut $2x + 1$. Celle du terme de droite vaut $3z$. Ainsi $3z = 2x + 1$.

On a donc

$$2020^{3x} < (2020^x + 2^y)^3 = 2024^{3z} = 2024^{2x+1} \leqslant 2024 \times (2 \times 2020)^{2x},$$

donc $2020^x \leqslant 2024 \times 2^{2x}$. Ainsi $505^x \leqslant 2024$ donc $x = 1$. On a alors $2024^z = 2024$ donc $z = 1$. Ainsi $(x, y, z) = (1, 2, 1)$ qui convient réciproquement ce qui conclut.

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Soient x, y, z des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geqslant 6.$$

Exercice 2
Déterminer les triplets $(p, q, n) \in \mathbb{N}^3$ avec p, q des entiers premiers et $n \geqslant 1$ tels que $p^2+q^2+3 = 4^n$.

Exercice 3
Soit n un entier strictement et positif et $(x_0, x_1, \ldots, x_n)$ des réels vérifiant $x_0 > x_1 > x_2 > \cdots > x_n > 0$. Montrer que

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \frac{1}{x_1 - x_2} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n.$$

Exercice 4
Existe-t-il un entier strictement positif n tel que $8^n + 47$ est un entier premier ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
On peut appliquer l'IAG en multipliant tous les termes. On obtient :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geqslant 6\sqrt[6]{\frac{x}{y} \times \frac{y}{z} \times \frac{z}{x} \times \frac{y}{x} \times \frac{z}{y} \times \frac{x}{z}} = 6\sqrt[6]{1} = 6$$

Une autre solution est de se souvenir que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$, donc $\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqslant 2$. De même $\frac{y}{z} + \frac{z}{y} \geqslant 2$ et $\frac{x}{z} + \frac{z}{x} \geqslant 2$, et on retombe sur le même résultat.

Solution de l'exercice 2
On commence par regarder modulo 4. On a $p^2 + q^2 + 3 \equiv 0 \pmod 4$. Or un carré de nombre impair vaut 1 modulo 4, donc si p et q sont impairs, on obtient $p^2 + q^2 + 3 \equiv 1 + 1 + 3 \equiv 1 \pmod 4$ ce qui est impossible. Ainsi p ou q vaut 2, par symétrie on peut supposer $p = 2$.

On a donc $7 + q^2 = 4^n$. En regardant modulo 3, $1 + q^2 \equiv 1 \pmod 3$. En particulier, si q n'est pas congru à 0 modulo 3, q^2 vaut 1 modulo 3, donc $1 + q^2 \equiv 2 \not\equiv 1 \pmod 3$. Ainsi q vaut 0 modulo 3, donc 3 divise q, donc $q = 3$.

Ainsi $p^2 + q^2 = 16 = 4^n$ donc $n = 2$. Ainsi les potentielles solution sont $(2, 3, 2)$ et $(3, 2, 2)$, qui conviennent car $2^2 + 3^2 + 3 = 16 = 4^n$

Solution de l'exercice 3
On utilise l'inégalité des mauvais élèves sur la somme de fractions :

$$\frac{1^2}{x_0-x_1}+\cdots+\frac{1^2}{x_{n-1}-x_n} \geqslant \frac{n^2}{x_0-x_n}$$

En particulier, il suffit de montrer que $x_0 - x_n + \frac{n^2}{x_0-x_n} \geqslant 2n$ pour prouver l'inégalité de l'énoncé. Or par IAG, $x_0 - x_n + \dfrac{n^2}{x_0-x_n} \geqslant 2\sqrt{n^2} = 2n$ ce qui conclut.

Une autre solution consiste à forcer l'apparition d'une somme télescopique. On a :

$$x_0 - x_n = (x_0 - x_1) + (x_1 - x_2) + \cdots + (x_{n-1} - x_n)$$

On a $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ pour tout x strictement positif. Ainsi, si on associe les termes deux à deux de cette manière :

$$(x_0-x_1)+\frac{1}{x_0-x_1}+(x_1-x_2)+\frac{1}{x_1-x_2}\cdots+(x_{n-1}-x_n)+\frac{1}{x_{n-1}-x_n}$$

on a n paires de la forme $x + \frac{1}{x}$ qu'on peut chacune minorer par 2.

On obtient donc :

$$x_0 - x_n + \frac{1}{x_0-x_1}\cdots\frac{1}{x_{n-1}-x_n} \geqslant 2n$$

ce qui est équivalent à l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 4

Regardons déjà $n = 1$: on a $8^n + 47 = 55 = 5 \times 11$. On peut donc regarder modulo 5. On a $8^n + 47 > 5$ et $8^n + 47 \equiv 3^n + 2 \pmod 5$. Or les puissances de 3 modulo 5 valent $1, 3, 4, 2, 1, \ldots$. Comme on a une alternance tous les 4, montrons que si n est de la forme $4k + 1$, alors 5 divise $8^n + 47$.

En effet,

$$8^{4k+1} + 47 \equiv 3^{4k} \times 3 + 2 \equiv 81^k \times 3 + 2 \equiv 3 + 2 \equiv 0 \pmod 5.$$

Or $8^n + 47 > 5$ est divisible par 5, donc ce n'est pas premier.

On peut ensuite regarder $n = 2$, pour avoir une idée de diviseur pour de nombreuses valeurs de n. On a donc que $8^n + 47 = 111 = 3 \times 37$. On peut donc regarder modulo 3 : on a $8^n + 47 \equiv (-1)^n - 1 \pmod 3$, qui est nul si et seulement si n est pair. En particulier si n est pair, 3 divise $8^n + 47$ et est un facteur strict, donc $8^n + 47$ n'est pas premier.

Il ne reste donc que le cas où $n \equiv 3 \pmod 4$. Pour cela regardons $n = 3$, on a $8^n + 47 = 559 = 13 \times 43$. On peut donc regarder modulo 13. Si n est de la forme $4k + 3$, alors

$$8^{4n+3} + 47 \equiv 64^{2n+1} \times 8 + 8 \equiv (-1)^{2n+1} 8 + 8 \equiv 0 \pmod{13}.$$

Or $13 < 8^n + 47$, donc $8^n + 47$ n'est pas premier.

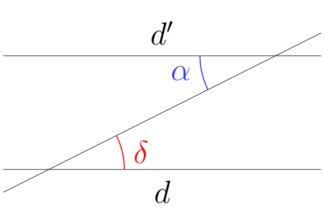
Ainsi pour tout entier $n \geqslant 1$, $8^n + 47$ n'est pas premier.

3 Deuxième partie : Combinatoire et Géométrie

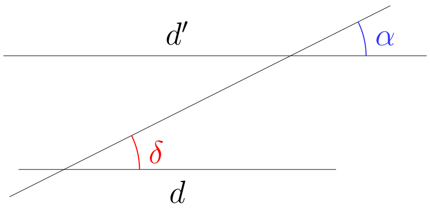
1 Chasse aux angles (Martin)

Ce cours est une introduction à la chasse aux angles. On y redémontre successivement les faits marquants qui serviront pour ce TD :

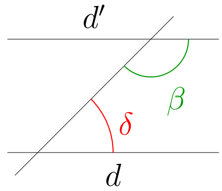
- **Montrer que deux droites sont parallèles :** on utilise pour cela l'équivalence entre droites parallèles et égalité d'angles alternes/internes ou d'angles correspondants :



$\delta = \alpha \Leftrightarrow d \,||\, d'$

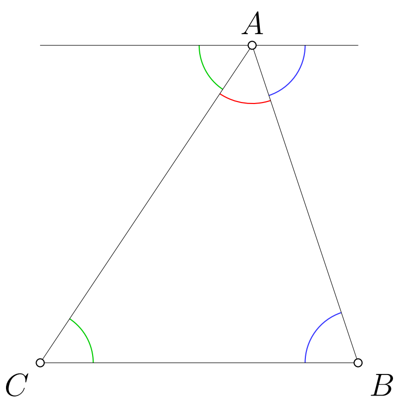


$\delta = \alpha \Leftrightarrow d \,||\, d'$

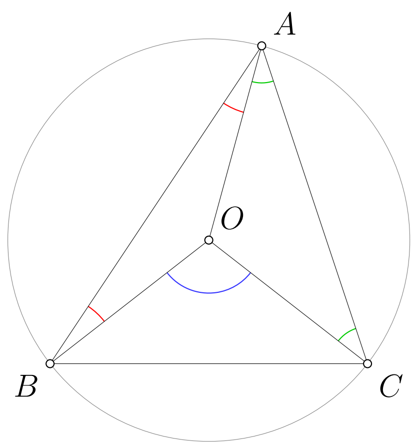


$\delta = 180° - \beta \Leftrightarrow d \,||\, d'$

- Ce résultat nous permet de démontrer que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, ainsi que le théorème de l'angle au centre.

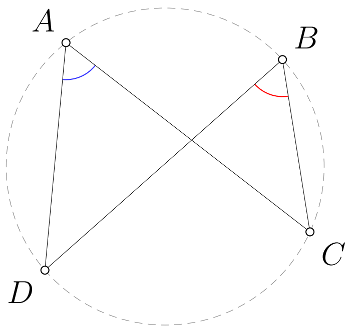


$\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 180°$

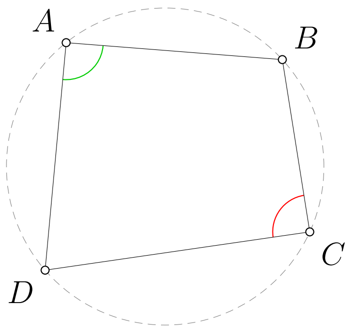


$\widehat{BOC} = 2\,\widehat{BAC}$

- **Le théorème de l'angle inscrit :**



$\widehat{DAC} = \widehat{DBC}$
$\Leftrightarrow$ A,B,C et D cocycliques



$\widehat{DAB} = 180° - \widehat{DCB}$
$\Leftrightarrow$ A,B,C et D cocycliques

Une remarque très importante est que souvent, obtenir que quatre points sont cocycliques fournit immédiatement plusieurs nouvelles égalités d'angles. Ainsi, si vous avez montré que A, B, C et D sont cocycliques grâce à l'égalité d'angles de la configuration de gauche, vous obtenez également l'égalité d'angle de la figure de droite (ou réciproquement). Obtenir une égalité à partir de l'autre est souvent une étape des exercices.

On a ensuite traité les exercices suivants :

Exercices

Exercice 1
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points distincts A et B. Une droite passant par le point A recoupe le cercle Γ_1 en un point C et le cercle Γ_2 en un point D. Une droite passant par le point B recoupe le cercle Γ_1 en un point E et le cercle Γ_2 en un point F. Montrer que les droites (CE) et (DF) sont parallèles.

Exercice 2
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent respectivement aux points P et Q. Une droite ℓ coupe les cercles ω_1 et ω_2 respectivement aux points A, C et B, D de telle sorte que les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre. Montrer qu'on a $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Exercice 3
(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de points A et C sur la droite (BD). Soient B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de points B et D sur la droite (AC). Montrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Exercice 6
(Envoi Géométrie 2020-2021 P4) Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Exercice 7
Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $\widehat{BAC} = 60°$. On note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Montrer que B, I, O, H et C sont cocycliques.

Exercice 8
(Envoi Géométrie 2020/2021 P12) Soit ABC un triangle acutangle tel que $|AC| > |BC|$. Soit H l'orthocentre du triangle ABC, N le pied de la hauteur issue du sommet B et P le milieu du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et CNH se recoupent au point D. Montrer que les points D, N, P et B sont cocycliques.

Exercice 9
Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés BC et AC respectivement en D et E. Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD. Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

Exercice 10
Soit Γ un cercle de centre O et $ABCD$ quatre points sur Γ.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ s'intersectent en P.
Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP s'intersectent en Q.
Montrer que l'angle $\widehat{OQP}$ est droit.

Exercice 11
(Lemme utile) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient M, L et K les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X le point d'intersection de la droite (CI) avec le cercle de dimaètre $[BC]$ et soit Y le point d'intersection des droites (BI) avec le cercle de diamètre $[BC]$. Montrer que les points Y, E, F et X sont alignés et que les points M, X et K sont alignés.

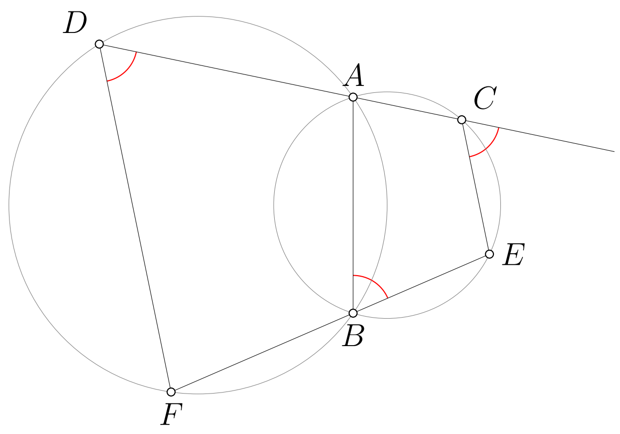
Exercice 12
(EGMO 2022 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit P un point distinct de B sur le segment $[AB]$ et Q un point distinct de C sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP). Montrer que les points T, H et S sont alignés.

Solutions

Exercice 1

Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles qui se coupent en deux points distincts A et B. Une droite passant par le point A recoupe le cercle Γ_1 en un point C et le cercle Γ_2 en un point D. Une droite passant par le point B recoupe le cercle Γ_1 en un point E et le cercle Γ_2 en un point F. Montrer que les droites (CE) et (DF) sont parallèles.

Solution de l'exercice 1



Les points A, B, F et D sont cocycliques donc

$$\widehat{FDA} = 180° - \widehat{FBA} = \widehat{EBA}$$

Les points A, B, E et C sont cocycliques donc

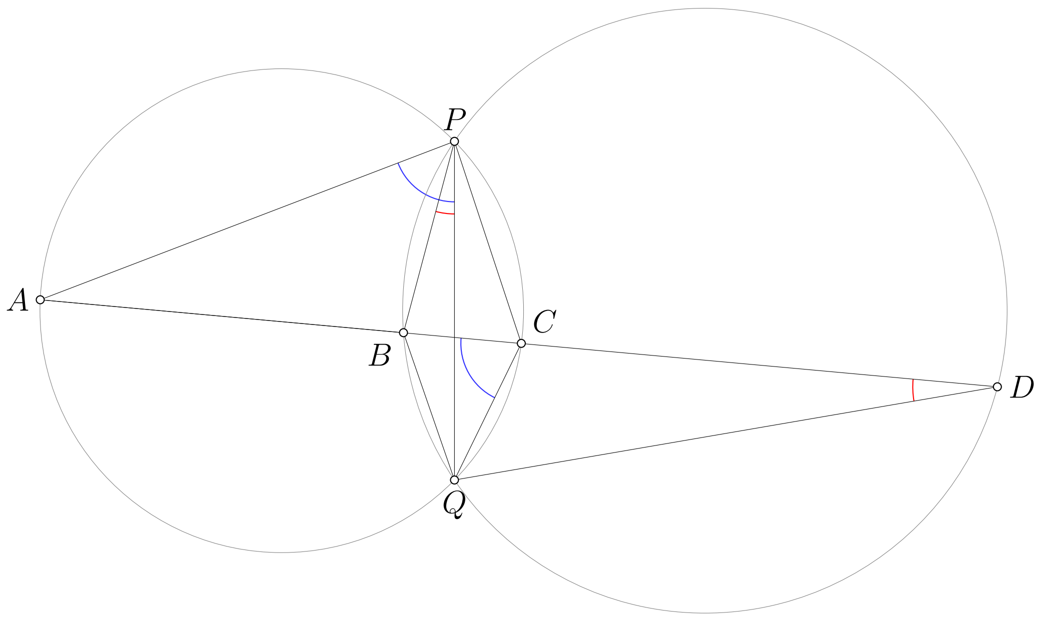
$$\widehat{ABE} = 180° - \widehat{ECA}$$

On obtient donc que $\widehat{FDA} = 180° - \widehat{ACE}$, ce qui signifie que les droites (DF) et (CE) sont parallèles.

Exercice 2

Soient ω_1 et ω_2 deux cercles qui se coupent respectivement aux points P et Q. Une droite ℓ coupe les cercles ω_1 et ω_2 respectivement aux points A, C et B, D de telle sorte que les points A, B, C et D sont alignés dans cet ordre. Montrer qu'on a $\widehat{APB} = \widehat{CQD}$.

Solution de l'exercice 2



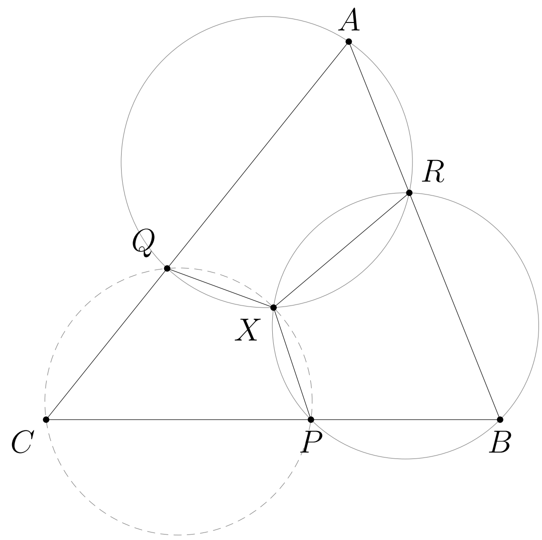
On vérifie que d'après le théorème de l'angle inscrit pour les quadrilatères cycliques $APCQ$ et $PBQD$:

$$\widehat{APB} = \widehat{APQ} - \widehat{BPQ} = \widehat{ACQ} - \widehat{BDQ} = \widehat{CQD}$$

où la dernière égalité provient du fait que la somme des angles du triangle CQD vaut $180°$.

Exercice 3
(Théorème de Miquel) Soit ABC un triangle. Soient P, Q et R des points appartenant respectivement aux segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles AQR, PRB et CQP sont concourants en un point.

Solution de l'exercice 3



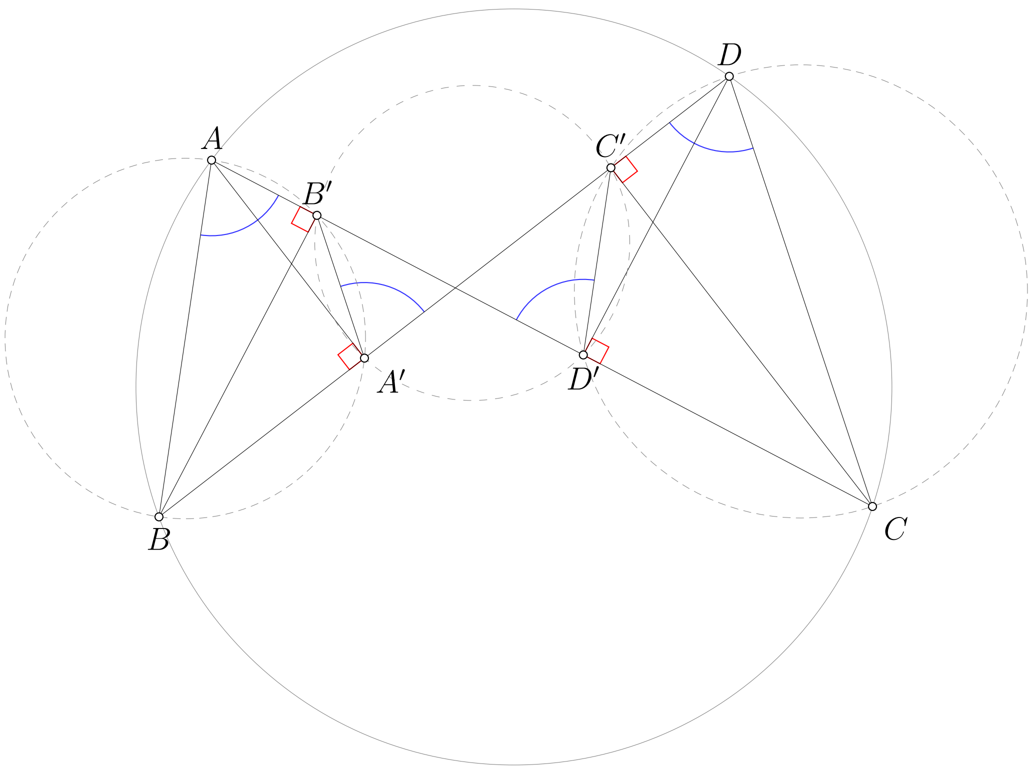
On appelle X le second point d'intersection des cercles circonscirts aux triangles AQR et BRP. Il s'agit de montrer que le point X appartient au cercle circonscrit du triangle CPQ. Or :

$$\widehat{QXP} = 360° - \widehat{PXR} - \widehat{RXQ} = (180° - \widehat{PXR}) + (180° - \widehat{QXR}) = \widehat{PBR} + \widehat{QAR} = 180° - \widehat{PCQ}$$

ce qui montre bien que les points Q, X, P et C sont cocycliques.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Soient A' et C' les projetés orthogonaux respectifs de points A et C sur la droite (BD). Soient B' et D' les projetés orthogonaux respectifs de points B et D sur la droite (AC). Montrer que les points A', B', C' et D' sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4

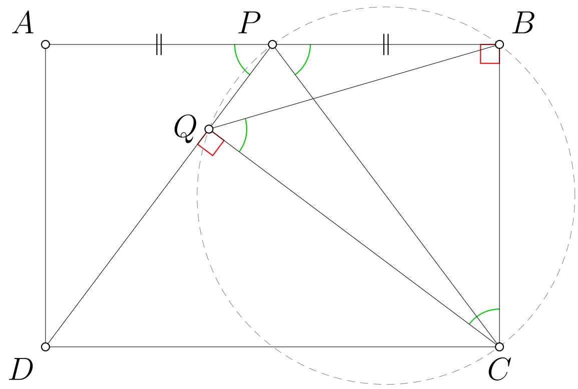


Puisque $\widehat{AB'B} = 90° = \widehat{AA'B}$, le quadrilatère $AB'A'A$ est cyclique. De même, le quadrilatère $DC'D'C$ est cyclique. On déduit

$$\widehat{C'A'B'} = 180° - \widehat{B'A'B} = \widehat{BAC} = \widehat{BDC} = 180° - \widehat{C'D'C} = \widehat{C'D'A'}.$$

Exercice 5
Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle.

Solution de l'exercice 5



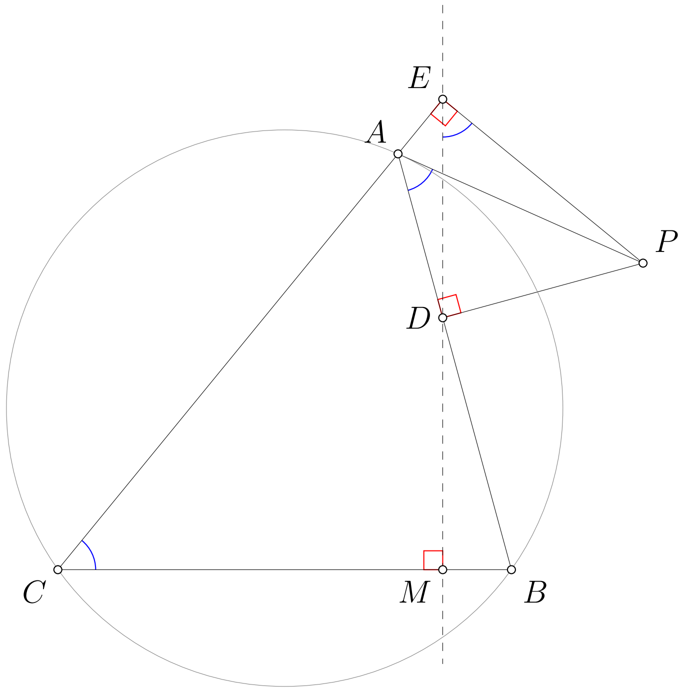
Puisque $\widehat{PQC} = 90° = 180° - 90° = 180° - \widehat{PBC}$, les points Q, P, B et C sont cocycliques. Il vient que $\widehat{CQB} = \widehat{CPB}$.

Les points B et C sont les symétriques respectifs des points A et D par rapport à la médiatrice du segment $[AB]$. On déduit que $\widehat{CPB} = \widehat{DPA}$.

Les points Q, P, B et C sont cocycliques, donc $\widehat{DPA} = 180° - \widehat{QPB} = \widehat{QCB}$. On a donc finalement $\widehat{QCB} = \widehat{BQC}$ et le triangle BQC est isocèle en B.

Exercice 6
(Envoi Géométrie 2020-2021 P4) Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Soit P un point sur la tangente en A au cercle Ω. On note E et D les projections orthogonales de P sur les côtés AC et AB. Montrer que la droite (ED) est perpendiculaire à la droite (BC).

Solution de l'exercice 6



Supposons sans perte de généralité que $AB < AC$.

Tout d'abord, puisque les points D et E sont les projetés orthogonaux du point P sur les droites (AB) et (AC), on a $\widehat{AEP} + \widehat{ADP} = 90° + 90° = 180°$ donc les points E, A, D et P sont cocycliques.

On en déduit notamment que $\widehat{DEP} = \widehat{DAP}$.

Puisque la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC, $\widehat{DAP} = \widehat{BAP} = \widehat{BCA}$.

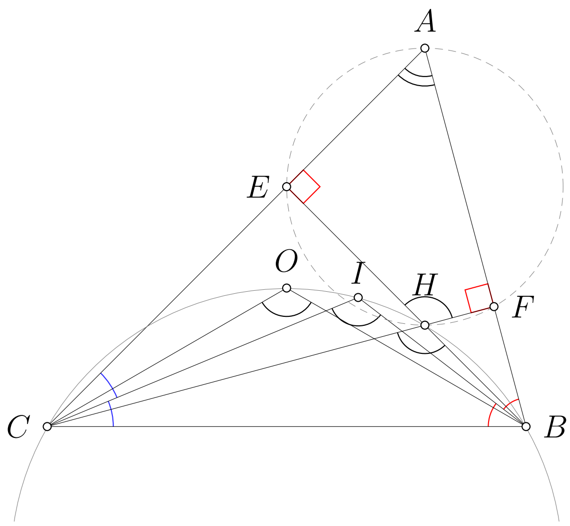
Si on note M le point d'intersection des droites (BC) et (DE), on trouve

$$\begin{aligned}
\widehat{MEC} &= \widehat{DEA} \\
&= 90° - \widehat{DEP} \\
&= 90° - \widehat{DAP} \\
&= 90° - \widehat{BCA} \\
&= 90° - \widehat{MCE}
\end{aligned}$$

donc $\widehat{CME} = 90°$ est les droites (DE) et (BC) sont perpendiculaires.

Exercice 7
Soit ABC un triangle aux angles aigus tel que $\widehat{BAC} = 60°$. On note O le centre du cercle circonscrit, H l'orthocentre et I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Montrer que B, I, O, H et C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7



On va montrer que $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC}$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = 120°$. On sait donc que nous allons devoir montrer successivement $\widehat{BHC} = 120°$ et $\widehat{BIC} = 120°$.

Pour calculer $\widehat{BHC}$, on introduit D, E et F les pieds des hauteurs respectivement issues des sommets A, B et C. Puisque $\widehat{HEA} = 180° - \widehat{HFA} = 90°$, les points A, E, H et F sont cocycliques. Ainsi $\widehat{FHE} = 180° - \widehat{EAF} = 120°$ donc $\widehat{BHC} = \widehat{EHF} = 120°$

Enfin, pour montrer que $\widehat{BIC} = 120°$, on se sert du fait que le point I est le point d'intersection des bissectrices du triangle. Cette définition nous donne en effet accès aux angles $\widehat{BCI}$ et $\widehat{BCI}$ en fonction des angles du triangle. On a donc :

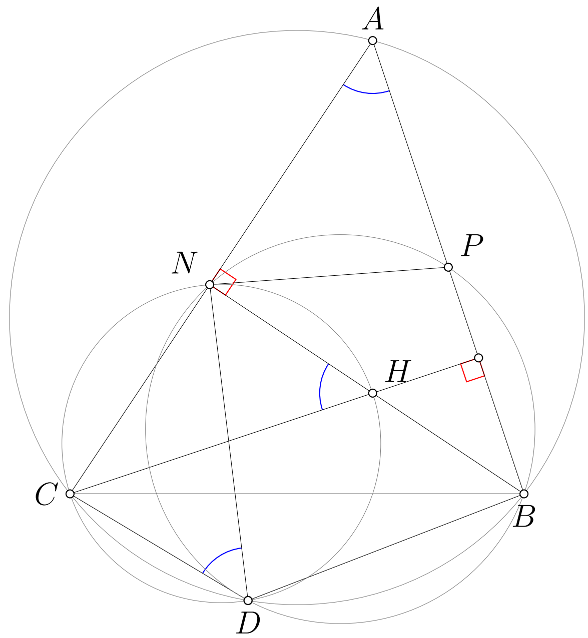
$$\widehat{BIC} = 180° - \widehat{IBC} - \widehat{ICB} = 180° - \frac{1}{2}\widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 180° - \frac{1}{2}(180° - \widehat{BAC}) = 180° - 60° = 120°$$

En conclusion, $\widehat{BOC} = \widehat{BHC} = \widehat{BIC} = 120°$ donc les 5 points B, O, H, I et C sont cocycliques.

On peut traiter de façon similaire le cas où un des angles du triangle ABC est obtus.

Exercice 8
(Envoi Géométrie 2020/2021 P12) Soit ABC un triangle acutangle tel que $|AC| > |BC|$. Soit H l'orthocentre du triangle ABC, N le pied de la hauteur issue du sommet B et P le milieu du segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et CNH se recoupent au point D. Montrer que les points D, N, P et B sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8



Nous n'avons pas forcément de façon de relier les points P et D (ils sont en fait alignés avec le point H, mais nous n'en avons pas besoin pour l'exercice), nous ne pouvons donc calculer un angle qui concerne ces deux points. La seule possibilité est donc de montrer que $\widehat{NDB} = 180° - \widehat{NPB}$.

On peut calculer l'angle $\widehat{NPB}$ à l'aide du théorème de l'angle au centre : en effet, puisque $\widehat{ANB} = 90°$, le milieu P du segment $[AB]$ est le centre du cercle circonscrit au triangle ANB et donc $\widehat{NPB} = 2\widehat{NAB} = 2\widehat{BAC}$.

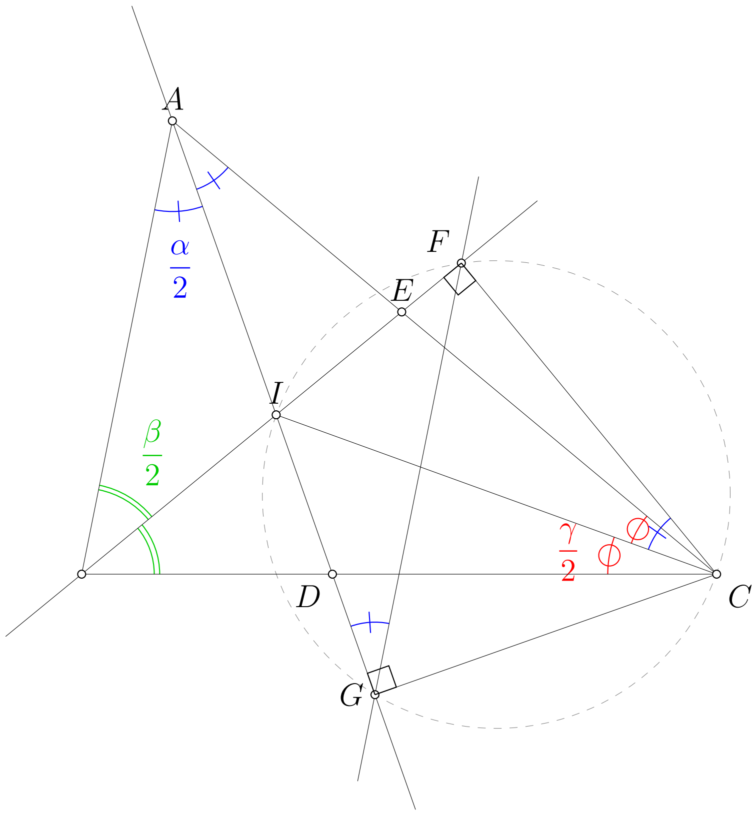
On calcule désormais l'angle $\widehat{NDB}$, qu'on décompose en deux angles plus faciles à calculer :

$$\begin{array}{rcll}
\widehat{NDB} & = & \widehat{CDB} - \widehat{CDN} & \\
 & = & 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CDN} & \text{car les points } A, B, D \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
 & = & 180° - \widehat{CAB} - \widehat{CHN} & \text{car les points } N, H, D \text{ et } C \text{ sont cocycliques} \\
 & = & 180° - \widehat{CAB} - (90° - \widehat{HCA}) & \text{car les droites } (NH) \text{ et } (AC) \text{ sont perpendiculaires} \\
 & = & 180° - \widehat{CAB} - (90° - (90° - \widehat{CAB})) & \text{car les droites } (CH) \text{ et } (AB) \text{ sont perpendiculaires} \\
 & = & 180° - 2\widehat{CAB} &
\end{array}$$

donc on a bien $\widehat{NDB} = 180° - \widehat{NPB}$.

Exercice 9
Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés BC et AC respectivement en D et E. Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD. Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

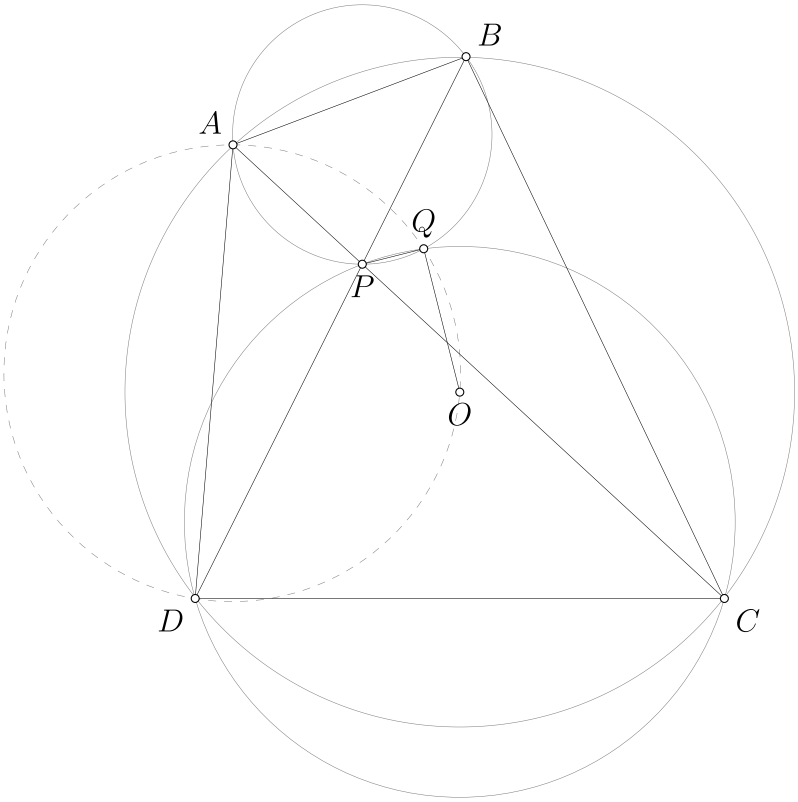
Solution de l'exercice 9



On note α, β, γ les angles du triangle ABC, selon les conventions d'usage. On note I le centre du cercle inscrit. C'est donc en particulier le point d'intersection de (AD) et (BE), et (CI) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$
Alors, on cherche à montrer que $\widehat{AGF} = \widehat{BAG}$.
Comme $\widehat{IFC} = 180 - \widehat{IGC}$, $IFCG$ est cyclique. On a donc $\widehat{AGF} = \widehat{IGF} = \widehat{ICF}$.
En regardant le triangle rectangle BFC, avec le fait que (BI) et (CI) sont des bissectrices, on a $90 = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \widehat{ICF}$. Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180$, avec ce qui précède, $\widehat{AGF} = \frac{\alpha}{2}$, ce qui conclut.

Exercice 10
Soit Γ un cercle de centre O et $ABCD$ quatre points sur Γ.
Les diagonales du quadrilatère $ABCD$ s'intersectent en P.
Les cercles circonscrits aux triangles ABP et CDP s'intersectent en Q.
Montrer que l'angle $\widehat{OQP}$ est droit.

Solution de l'exercice 10

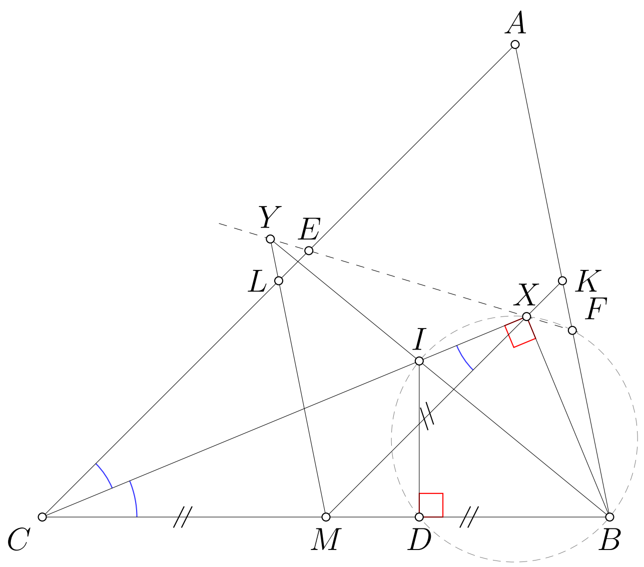


On s'aperçoit que quelque soit la façon dont on essaie de décomposer $\widehat{OQP}$, il faut connaître un angle de la forme $\widehat{OQD}$. De plus avec une figure bien tracé on peut conjecturer que $AOQD$ est un quadrilatère cocyclique.
Effectivement, en utilisant une fois le théorème de l'angle inscrit dans chacun des petits cercles puis le théorème de l'angle au centre dans le grand pour tout ramener en O, on obtient $\widehat{AQD} = \widehat{AQP} + \widehat{QPD} = \widehat{ABP} + \widehat{PCD} = 2 \cdot \frac{1}{2}\widehat{AOD}$, d'où cette cocyclicité.
Finalement, $\widehat{OQP} = \widehat{OQD} + \widehat{DQP} = \widehat{OAD} + \widehat{DCP} = \widehat{OAD} + \frac{1}{2} \cdot \widehat{AOD} = 90°$

Exercice 11

(Lemme utile) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et soient D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. Soient M, L et K les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X le point d'intersection de la droite (CI) avec le cercle de dimaètre $[BC]$ et soit Y le point d'intersection des droites (BI) avec le cercle de diamètre $[BC]$. Montrer que les points Y, E, F et X sont alignés et que les points M, X et K sont alignés.

Solution de l'exercice 11



Puisque X est sur le cercle de diamètre $[BC]$, dont M est le centre, on a $MX = MC$. Le triangle XMC est donc isocèle, de sorte que

$$\widehat{BMX} = 180° - \widehat{CMX} = \widehat{CXM} + \widehat{MCX} = 2\widehat{MCI} = \widehat{BCA}.$$

Les droites (MX) et (CA) sont donc parallèles, de même que les droites (MK) et (CA) par la droite des milieux. On déduit que les points M, X et K sont alignés. De la même façon on montre que les points M, Y et L sont alignés.

On montre à présent que les points E, F et X sont alignés, la démonstration du fait que les points Y, E et F sont alignés s'effectue de manière similaire. Puisque X est sur le cercle de diamètre $[BC]$, $\widehat{CXB} = 90°$, donc on a $\widehat{IXB} = 90°$. Puisque $\widehat{IDB} = \widehat{IFB} = 90°$, les points I, X, F, B et D sont cocycliques.

Nous allons désormais montrer que $\widehat{DFX} = \widehat{DFE}$.

Puisque les droites (DC) et (CE) sont tangentes au cercle inscrit du triangle ABC en les points D et E, le triangle CDE est isocèle en C et

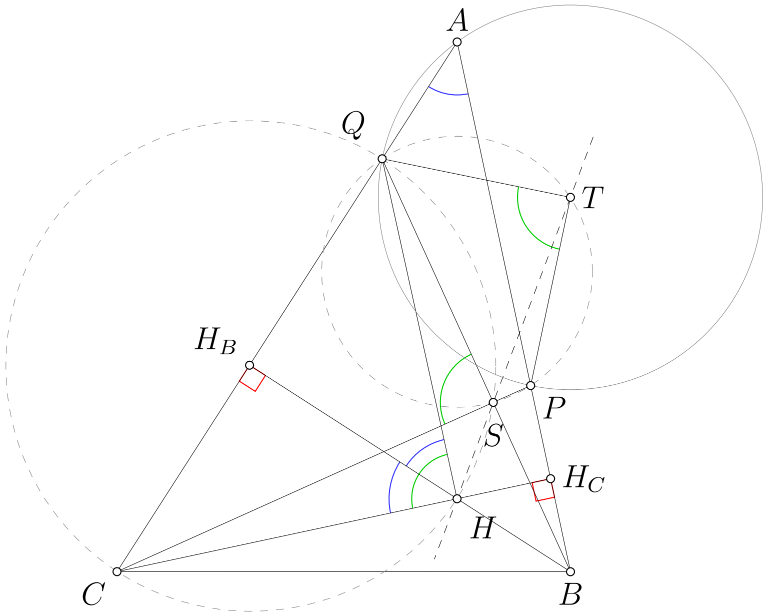
$$\widehat{EFD} = \widehat{CDE} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BCA} = 90° - \widehat{BCX} = \widehat{DBX} = \widehat{DFX}$$

où on a utilisé successivement que le triangle BCX est rectangle en X et que les points D, F, B et X sont sur un même cercle. On a obtenu l'éaglité d'angle désirée, qui montre bien que les points E, X et F sont alignés.

Exercice 12

(EGMO 2022 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $BC < AB$. Soit P un point distinct de B sur le segment $[AB]$ et Q un point distinct de C sur le segment $[AC]$ tels que $BQ = BC = CP$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP). Montrer que les points T, H et S sont alignés.

Solution de l'exercice 12



En l'absence d'idées, on peut chercher à exprimer les différents angles de la figure en fonction des angles du triangle.

On note H_B et H_C les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement.

Par exemple, on peut calculer l'angle $\widehat{CSB}$ en fonction de α, β et γ. Pour cela, on remarque que le triangle PCB est isocèle en P et que la médiatrice du segment $[PB]$ est la droite (HC), de sorte que la droite (HC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$. De même, la droite (HB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{QBC}$. On a alors :

$$\widehat{CSB} = 180° - \widehat{QBC} - \widehat{PCB} = 180° - 2\widehat{HCB} - 2\widehat{HBC} = 180° - 2(90° - \beta) - 2(90° - \beta) = 180° - 2\alpha$$

Cela signifie que $\widehat{QSP} = 180° - 2\alpha = 180° - \widehat{QTP}$ d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle $\mathcal{C}_{APQ}$. Les points T, P, S et Q sont donc cocycliques.

D'autre part, puisque H est sur la médiatrice du segment $[QC]$, le triangle QHC est isocèle en H et la droite (HH_B) est la bissectrice de l'angle $\widehat{QHC}$. On a donc

$$\widehat{QHC} = 2\widehat{H_BHC} = 2(90° - \widehat{HCA}) = 2(90° - (90° - \alpha)) = 2\alpha = 180° - \widehat{CSQ}$$

Les points Q, S, H et C sont donc cocycliques.

Il ne nous reste plus qu'à montrer que $\widehat{HST} = \widehat{HSQ} + \widehat{QST} = 180°$.

Tout d'abord, d'après le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{QTPS}$ et en calculant dans le triangle QPT isocèle en T, on trouve :

$$\widehat{QST} = \widehat{QPT} = \frac{180^\circ - \widehat{PTQ}}{2} = 90^\circ - \alpha$$

D'autre part, d'après le théorème de l'angle inscrit dans $\mathcal{C}_{QSHC}$:

$$\widehat{HSQ} = 180^\circ - \widehat{QCH} = 180^\circ - (90^\circ - \alpha) = 90^\circ + \alpha$$

ce qui conclut bien que $\widehat{HSQ} + \widehat{QST} = 180^\circ$.

2 Principe des tiroirs (Antoine)

Exercice 1
Combien d'enfants faut-il au minimum dans une école pour que l'on soit sûr que 3 d'entre eux au moins aient leur anniversaire le même jour ? (on considère aussi le 29 février)

Solution de l'exercice 1
Si on a $733 = 2 \times 366 + 1$ élèves, d'après le principe des tiroirs, il y a un jour avec au moins 3 anniversaires (ici les tiroirs sont les jours de l'année et les chaussettes sont les dates d'anniversaire).
Par ailleurs, si on a un nombre d'élèves plus petit que 733, on pourra s'arranger pour mettre au plus deux personnes par date d'anniversaire puisque $732 = 2 \times 366$.
Attention cette partie de la solution est importante, ce n'est pas assez de dire que 733 marche, il faut aussi montrer que c'est le plus petit en montrant que les nombres plus petits ne marchent pas !

Exercice 2
On considère un groupe de n personnes ($n > 1$), dans lequel certaines personnes se serrent la main.
Prouver qu'il existe au moins deux personnes ayant donné le même nombre de poignées de main.

Solution de l'exercice 2
Il s'agit de l'exercice 1117 de Mathraining, donc je ne vais pas donner une correction accessible par tout le monde. En revanche, si vous voulez qu'on vous dise si ce que vous avez fait est bon ou pas, n'hésitez pas à soumettre votre solution sur Mathraining.

Exercice 3
On colorie le plan de deux couleurs différentes, montrer qu'il existe deux points de la même couleur à un mètre de distance.

Solution de l'exercice 3
On dessine un triangle équilatéral de côté 1. D'après le principe des tiroirs, il y a deux des sommets de ce triangle qui sont de la même couleur, et ils sont bien à un mètre de distance.

Exercice 4
On considère 5 points dans un carré de côté 2, montrer qu'il y en a deux qui sont à distance au plus $\sqrt{2}$ l'un de l'autre.

Solution de l'exercice 4
Il s'agit de l'exercice 1170 de Mathraining, donc je ne vais pas donner une correction accessible par tout le monde. En revanche, si vous voulez qu'on vous dise si ce que vous avez fait est bon ou pas, n'hésitez pas à soumettre votre solution sur Mathraining.

Exercice 5
Combien d'entiers au minimum doit-on sélectionner dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 20\}$ pour être sûr que parmi ceux-ci on ait deux entiers a et b tels que $a - b = 2$?

Solution de l'exercice 5
L'astuce ici est de construire des tiroirs tels que si on a deux éléments dedans alors leur différence est 2. On peut par exemple s'en sortir avec les tiroirs suivants :

$$\{1,3\}, \{2,4\}, \{5,7\}, \{6,8\}, \{9,11\}, \{10,12\}, \{13,15\}, \{14,16\}, \{17,19\}, \{18,20\}$$

Remarquons que chaque nombre est dans (exactement) un tiroir, donc on peut dire que si on a 11 nombres, deux d'entre eux seront dans un même tiroir, ce qui posera problème. En revanche, si on n'en prend que 10, il est possible de ne pas avoir la condition de l'énoncé, par exemple avec $1, 2, 5, 6, 9, 10, 13, 14, 17, 18$.

Exercice 6
On considère S une partie de l'ensemble des parties de $\{1, 2, \dots n\}$, telle que deux éléments de S ne soient jamais disjoints.
Montrer que S est de cardinal au plus 2^{n-1}.
Montrer que cette borne est atteinte.

Solution de l'exercice 6
On construit encore une fois des tiroirs astucieux, cette fois-ci on met dans un tiroir un ensemble et son complémentaire. Ces deux ensembles sont bien toujours disjoints, et on a 2^{n-1} tiroirs. Ainsi, si S était de cardinal plus grand que 2^{n-1}, on pourrait trouver un ensemble et son complémentaire dans S, ce qui est une contradiction.
Par ailleurs, cette borne est effectivement atteinte, par exemple par S l'ensemble des ensembles contenant 1. Ils sont tous deux-à-deux non disjoints puisqu'ils contiennent tous 1, et S a pour cardinal 2^{n-1} car connaître un sous-ensemble de $[\![1, n]\!]$ qui contient 1 est équivalent à connaître un sous-ensemble de $[\![2, n]\!]$.

Exercice 7
Soient $a_1, \dots a_n$ des entiers relatifs pas forcément distincts, montrer qu'il existe $0 \leq k < l \leq n$ tels que la somme $a_{k+1} + \cdots + a_l$ soit divisible par n.

Solution de l'exercice 7
Il s'agit de l'exercice 1248 de Mathraining, donc je ne vais pas donner une correction accessible par tout le monde. En revanche, si vous voulez qu'on vous dise si ce que vous avez fait est bon ou pas, n'hésitez pas à soumettre votre solution sur Mathraining.

Exercice 8
Sur un tableau sont écrits 20 nombres distincts entre 1 et 64. Sur un autre tableau sont écrites toutes les différences (non nulles, sinon ça n'a pas d'intérêt) qu'on puisse calculer avec ces nombres. Montrer qu'un nombre est écrit quatre fois sur ce deuxième tableau.

Solution de l'exercice 8
La difficulté de cet exercice consiste à compter le nombre de différences qu'on peut obtenir pour ensuite pouvoir appliquer le principe des tiroirs au bon nombre de chaussettes. Chaque couple $x \neq y$ donne lieu à une différence, et on a $20^2 = 400$ couples de nombres. Il faut enlever les couples (x, x), qui sont au nombre de 20. On a donc 380 différences écrites au tableau. Ces nombres varient entre 63 et -63, ce qui laisse 127 possibilités de valeurs (i.e. tiroirs). Seulement, en faisant des petits calculs on voit que $127 \times 3 = 381$! On ne peut donc pas appliquer le principe des tiroirs directement... Mais on peut enlever 0 ! Ça fait plus que 126 tiroirs, et on peut maintenant appliquer notre principe des tiroirs en paix, puisque $126 \times 3 = 378 < 380$.

Exercice 9
On choisit dix entiers quelconques à 2 chiffres. Montrer que parmi eux, on peut trouver deux sous-ensembles disjoints de même somme.

Solution de l'exercice 9

On se rend déjà compte que si on trouve simplement deux ensembles différents de même somme, on pourra répondre au problème en enlevant les nombres qui sont dans l'intersection, ce qui conserverait l'égalité des sommes puisqu'on a enlevé la même chose des deux côtés.
Ainsi le principe des tiroirs semble être un bonne idée. On a $2^{10} = 1024$ ensembles différents possibles, sommant tous à un nombre entre 0 et $99 \times 10 = 990$. Nos tiroirs sont les sommes possibles, et nos chaussettes sont les sous-ensembles. Comme $1024 > 990$, on conclut qu'il y a deux sous-ensembles de même somme, et on finit l'exercice par la remarque du début.

Exercice 10

Considérons 6 points dans un plan. Toutes les arêtes formées par deux de ces points sont colorées en rouge ou en bleu. Montrer qu'il existe un triangle formé par trois de ces points ayant leurs cotés d'une unique couleur.

Solution de l'exercice 10

Voir `https://www.mathraining.be/chapters/42?type=1&which=140`.

Exercice 11

On considère 1000 points distincts dans le plan, tels que tout ensemble de 4 points en contient 2 qui sont à distance inférieure ou égale à 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 contenant 334 points.

Solution de l'exercice 11

Soit d le nombre de points deux à deux à distance strictement supérieure à 1. On sait que $d \leqslant 3$ par la condition de l'exercice. Pour chaque point A, on considère A avec l'ensemble des d points. Si $d = 3$, on sait par la condition de l'énoncé que A est à distance moins de 1 d'un des d points. Si $d < 3$, de même, autrement on aurait pu choisir ce point et avoir $d = 3$. Si on pose les d points comme étant les tiroirs et l'ensemble des 1000 points comme les chaussettes, en appliquant le principe des tiroirs, on a bien 334 points à distance moins de 1 d'un des d points. Donc si on trace le cercle de centre ce point et rayon 1, on résout l'exercice.

3 Invariants/coloriages (Lucile et Quentin)

Invariants

Un invariant est une quantité (qui peut être un nombre entier, un nombre réel,un nombre modulo n, un ensemble de nombre, une suite de nombres....) qui reste inchangée pendant les différentes étapes d'un processus. Cela permet de déterminer qu'une configuration n'est pas accessible à partir d'une autre.

Exercice 1
On écrit les nombres $2, 3, 5, 7, 11$ sur un tableau. En une opération, on peut remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique (c'est-à-dire qu'on remplace x, y par $\frac{x+y}{2}, \frac{x+y}{2}$). Peut-on obtenir 5 nombres égaux après un certain nombre d'opérations ?

Solution de l'exercice 1
On cherche ici une quantité qui ne varie pas. On remarque alors que la somme de tous les nombres écrits au tableau est un invariant. En effet, $x + y = \frac{x+y}{2} + \frac{x+y}{2}$. Au début, la somme vaut $S = 2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$. Supposons qu'après un certain nombre d'étapes, on se retrouve avec cinq nombres entiers égaux, on appelle a ce nombre. On aurait alors $28 = S = 5a$, soit $a = \frac{28}{5}$ qui n'est pas entier, contradiction.
On en déduit qu'il est impossible de se retrouver avec cinq nombre égaux.

Exercice 2
Peut-on répartir les nombres $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes de 3 tels que dans chaque groupe, un des trois nombres soit la somme des deux autres ?

Solution de l'exercice 2
On remarque ici que dans chaque groupe de 3, la somme des nombres est paire. En effet, si trois nombres x, y, z forment un groupe avec $z = x + y$, alors $x + y + z = 2(x + y)$. Ainsi, la somme de tous les nombres est paire aussi (on ajoute des termes qui sont tous pairs). Or la somme des nombres vaut $1 + 2 + 3 + \ldots + 32 + 33 = \frac{33 \times 34}{2} = 33 \times 17$, ce qui est impair. Ce n'est donc pas possible de les répartir en groupes comme souhaité.

Exercice 3
Les entiers de 1 à 2024 sont écrits au tableau. À chaque étape, on en choisit deux qu'on efface et remplace par leur différence. Peut-on se débrouiller pour finir avec un seul nombre égal à 1 à la fin ?

Solution de l'exercice 3
Considérons S la somme de tous les entiers écrits au tableau. Lorsqu'on choisit deux nombres $a \leq b$ pour les remplacer par $b - a$, la somme devient $S - a - b + (b - a) = S - 2a$. La somme n'est donc pas un invariant. En revanche, on retire à S un nombre *pair*, donc la *parité* de la somme est un invariant.
Au début, la somme vaut $S = 1 + 2 + 3 + \ldots + 2024 = \frac{2024 \times 2025}{2} = 1012 \times 2025$ qui est pair. La somme finale doit donc être paire également. On ne peut donc pas se retrouver avec un seul nombre égal à 1 à la fin (cela donnerait lieu à une somme finale impaire).

Exercice 4
On vous donne 20 cartes, chacune contenant exactement un chiffre. Chaque chiffre apparaît sur exactement deux cartes. Est-il possible de réarranger les cartes de telle manière à ce que pour chaque chiffre i, il y a exactement i cartes entre les deux cartes qui contiennent i ?

Solution de l'exercice 4
Soit p_k la position du premier chiffre k (entre 1 et 20). On sait que les deux chiffres k sont en position p_k et p_k+k+1. La somme des positions vaut donc $1+2+\ldots+20 = \frac{20 \times 21}{2} = 210$, mais elle vaut également $[p_0+(p_0+0+1)]+[p_1+(p_1+1+1)]+[p_2+(p_2+2+1)]+\ldots+[p_9+(p_9+9+1)]$, ce qui vaut $10+(0+1+\ldots+9)+2(p_0+p_1+\ldots+p_9)$, d'où $210 = 10+45+2(p_0+p_1+\ldots+p_9)$, mais alors $2(p_0+p_1+\ldots+p_9) = 155$, et on a une contradiction sur la parité. Ce n'est donc pas possible de réarranger les cartes de cette manière.

Exercice 5
Sur une île déserte vivent 2024 caméléons. Au départ, 924 sont jaunes, 700 sont rouges et 400 sont verts. Lorsque deux caméléons de couleur différentes se rencontrent, ils prennent tous les deux la troisième couleur. Lorsque se rencontrent deux caméléons d'une même couleur, il ne se passe rien. Au bout d'un an, tous les caméléons sur l'île sont devenus de la même couleur. Laquelle ?

Solution de l'exercice 5
Soient J, R, V le nombre de caméléons jaunes, rouges, verts respectivement. Lorsque deux caméléons de couleur différente se rencontrent, disons jaune et vert, J prend la valeur $J-1$, V la valeur $V-1$ et R la valeur $R+2$. En particulier, $J-R, R-V$ et $V-J$ varient de 0 ou ± 3, donc *modulo* 3 ils ne varient pas.
Or au début, $J-R = 924-700 = 224 \equiv 2 \pmod 3$, $R-V = 700-400 = 300 \equiv 0 \pmod 3$ et $V-J = 400-924 = -524 \equiv 1 \pmod 3$. La seule possibilité pour que deux nombres soient égaux à 0 est que $R = V = 0$. Donc la couleur restante est nécessairement jaune.
Remarquons qu'on n'a pas prouvé qu'il était possible que tous les caméléons deviennent jaune, mais on a prouvé que s'ils deviennent tous d'une couleur, c'est nécessairement jaune.

Coloriages et pavages

Un certain nombre de problèmes de combinatoire sont des problèmes de "pavage". Dans un tel problème, l'objectif est de recouvrir une forme avec des tuiles de types donnés. Dans ce genre de problème on peut mieux comprendre la situation en utilisant un coloriage, ce qui permet de regrouper les cases en groupes de tailles pas forcément égales mais qui ont toutes les mêmes caractéristiques (ex : dans un échiquier une case noire est toujours entourée de cases blanches)

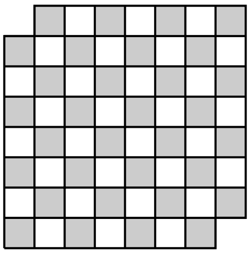
On peut ensuite analyser les tuiles pour savoir quelles couleurs elles peuvent ou sont obligées de recouvrir...

Exercice 6

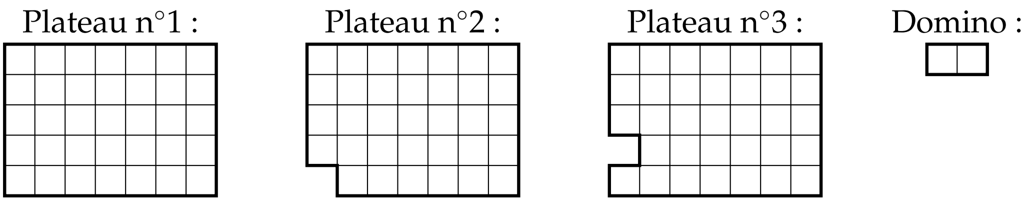
1. Peut-on recouvrir un échiquier 8×8 avec des dominos 2×1 ?
2. On retire un coin d'un échiquer 8×8. Peut-on le recouvrir avec des dominos 2×1 ?
3. On retire deux coins opposés d'un échiquier 8×8. Peut-on le recouvrir avec des dominos 2×1 ?

Solution de l'exercice 6

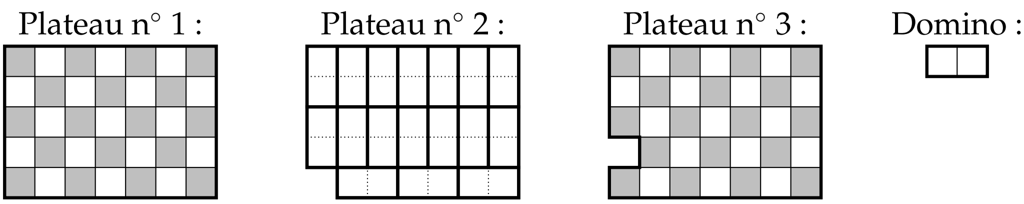
1. Oui, on peut, il suffit de les poser tous horizontalement par exemple.
2. On ne peut plus car il y a un nombre impair de cases et que chaque domino couvre deux cases.
3. On a retiré 2 cases de la même couleur, blanche par exemple, il y a alors 30 cases blanches et 32 cases noires, or un domino recouvre exactement une case blanche et une case noire donc ça n'est pas possible.



Exercice 7
Peut-on paver les plateaux tronqués suivants à l'aide de dominos 2×1 que l'on peut placer verticalement ou horizontalement ?



Solution de l'exercice 7
Le plateau n°1 comporte $7 \times 5 = 35$ cases, or un domino comporte $1 \times 2 = 2$ cases. Il faudrait $\frac{35}{2} = 17.5$ dominos pour le pavé, ce qui n'est pas possible.
Le plateau n°2 est pavable, comme le montre le dessin ci-dessous.
Quant au plateau n°3, en adoptant un coloriage de type échiquer, on dénombre 18 cases noires contre 16 cases blanches. Comme il a 34 cases, il faudrait $\frac{34}{2} = 17$ dominos pour le paver. Mais un domino couvrant nécessairement une case blanche et une case noire, si le pavage était possible on aurait 17 cases noires et 17 cases blanches, ce qui n'est pas le cas ici. Il est donc impossible de paver le plateau n°3 avec les dominos.

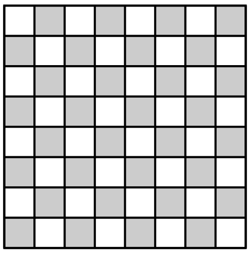


Exercice 8
On se place sur un échiquier 8×8 (donc composé alternativement de cases noires et blanches). On peut changer de couleur :

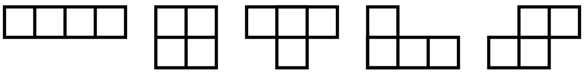
1. toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne
2. les cases d'un carré 2×2

Est-il possible d'obtenir un diagramme comportant une seule case noire ?

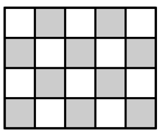
Solution de l'exercice 8
On remarque ici un invariant, la parité du nombre de cases noires.
En effet quand on change la couleur de toutes les cases d'une ligne ou d'une colonne, puisque l'on change la couleur d'un nombre pair de cases, la parité du nombre de cases noires ne change pas.
Cela fonctionne également pour les cases d'un carré 2×2. Au début, on a un nombre pair de cases noires, il doit donc en rester un nombre pair à la fin, il est donc impossible qu'il ne reste qu'une seule case noire.



Exercice 9
Est-il possible de former un rectangle à l'aide des cinq tétraminos suivants ?

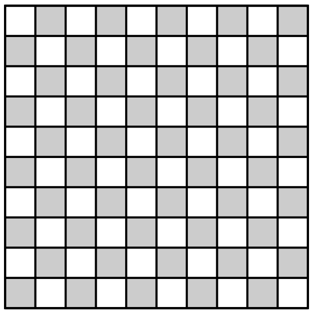


Solution de l'exercice 9
Si on colorie le plan comme un échiquier, alors tous les tétraminos sauf celui en T, recouvrent 2 cases blanches et 2 cases noires, alors que celui en T recouvre une case noire et trois cases blanches (ou l'inverse). Si on pouvait former un rectangle, il aurait $4 \times 5 = 20$ cases, or dans un rectangle de 20 cases il y a autant de cases noires que de blanches, ce qui n'est pas possible avec la présence du tétramino en T.

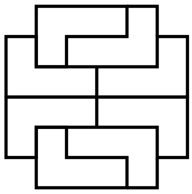


Exercice 10
Montrer qu'un échiquier 10×10 ne peut pas être recouvert à l'aide de 25 tétraminos en T

Solution de l'exercice 10
Dans un échiquier $10 \times 10 = 25 \times 4$, il faudrait 25 tétraminos de 4 cases pour recouvrir l'échiquier. Or un tétramino en T recouvre un nombre impair de cases blanches et nombre impair de cases noirs. Donc 25 tétraminos recouvrent un nombre impair de cases blanches et nombre impair de cases noires, ce qui ne marche pas sur un échiquier 10×10.

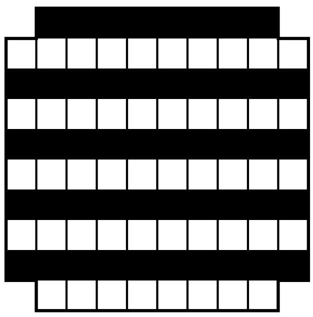


Exercice 11
Considérons un échiquier $n \times n$ dont on aurait retiré les quatre coins.Pour quelles valeurs de n peut-on le recouvrir avec des tétraminos en L comme dans la figure ci dessous

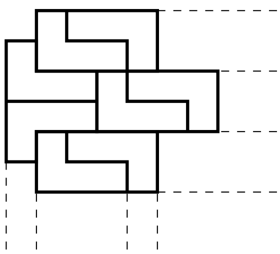


Solution de l'exercice 11
On commence par remarquer que $n^2 - 4$ doit être multiple de 4, donc n est pair.

On colorie l'échiquier comme ci-dessous.

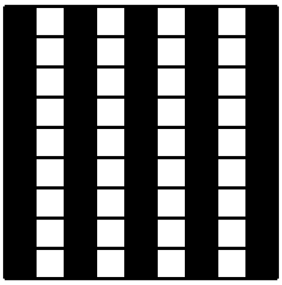


Chaque tétramino recouvre soit 3 cases blanches et une case noire, soit 3 cases noires et une case blanche. Comme il y a le même nombre de cases blanches et de cases noires, il faut utiliser un nombre pair de tétraminos pour tout paver. Autrement dit $n^2 - 4$ doit être multiple de 8. Donc n doit être de la forme $4k + 2$, et on peut trouver des configurations qui marche comme celle ci-dessous



Exercice 12
Sur chaque case du carré 9×9 se trouve un lézard. À un certain signal tous les lézards se déplacent d'une case en diagonale vers une autre case du carré. Certaines cases peuvent être occupées par plusieurs lézards et certaines autres peuvent être vides. Trouver le nombre minimum de cases vides.

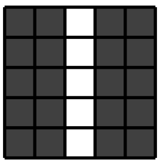
Solution de l'exercice 12
On colorie une colonne sur 2 en noir et l'autre en blanc, comme ci-dessous.



Après le signal, tous les lézards se trouvent sur une case de couleur différente. Il y a 9 cases noires de plus que de cases blanches, donc il y a au minimum 9 cases vides après le signal. On vérifie ensuite que de telles solutions existent.

Exercice 13
Considérons un échiquier 5×5. On écrit -1 sur l'une de ses cases et $+1$ sur toutes les autres. A chaque étape, on peut changer les signes de tous les nombres d'un sous-carré $a \times a$ ($a > 1$), le but étant d'obtenir un $+1$ sur toutes les cases de l'échiquier. Quelles positions initiales du -1 permettent d'arriver à la solution ?

Solution de l'exercice 13
On colorie l'échiquier comme ci-dessous



Dans ce coloriage, chaque sous-carré contient un nombre pair de cases noires. Donc si -1 est sur une case noire, il y aura toujours un nombre impair de -1 sur les cases noires.En opérant une rotation de 90 degrés du diagramme, on constate qu'il est nécessaire que le -1 soit sur la case centrale. Réciproquement, on vérifie qu'un tel coloriage fonctionne, en faisant successivement les coins bas gauche et haut droit en 2×2, puis les coins haut gauche et bas droit en 3×3 (de sorte à obtenir -1 partout), et finalement un 5×5 pour obtenir des $+1$ partout.

Exercice 14
Montrer qu'un rectangle $a \times b$ peut être recouvert par des rectangles $1 \times n$ si et seulement si n divise a ou b.

Solution de l'exercice 14

— Si n divise a ou b, alors c'est évident qu'un tel recouvrement est possible. On suppose alors que n ne divise ni a, ni b

— On utilise n couleurs de sorte qu'un rectangle $1 \times n$ recouvre n couleurs différentes à chaque fois. On numérote les couleurs de 1 à n, et on compte le nombre de case coloriées dans le grand rectangle

— On effectue la division euclidienne de a et b par n. On a $a = k \cdot n + r$ et $b = l \cdot n + q$

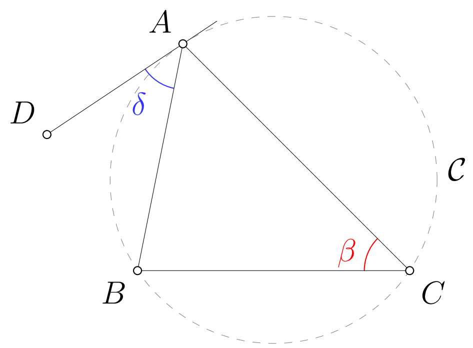
— On sait qu'il y a autant de cases de chaques couleurs sur les rectangles $b \times (n \cdot k)$ et $r \times (l \cdot n)$ donc pour que $a \times b$ soit recouvrables pour des rectangles $1 \times n$, Il faut que ça soit le cas pour le rectangle $r \times q$ or on a le coloriage suivant (avec le rectangle $r \times q$ représenté en blanc).

1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2
4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1
3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5
2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3	4
1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2	3
5	1	2	3	4	5	1	2	3	4	5	1	2

Supposons que le rectangle $r \times q$ fois a autant de cases de chaque couleur : il doit donc en avoir $\frac{rq}{n}$. Mais la couleur 1 est représentée $\min(r, q)$ fois. Donc $\min(r, q) = \frac{rq}{n}$. Si par l'absurde $r, q > 0$, disons $r \leq q$, alors $n = q$, contradiction. Donc soit r soit q est nul, ce qui signifie bien que n divise a ou b.

4 Théorème de l'angle tangent (Eva et Gaspard)

Théorème 1 (Angle tangentiel)**.**
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ et t une droite passant par A. Soit D un point sur t du côté de B.
La droite t est tangente à Γ si et seulement si $\widehat{DAB} = \widehat{ACB}$.
Démonstration
Par cas limite de l'angle inscrit.



$\beta = \delta \Leftrightarrow (AD)$ tangente à $\mathcal{C}$ en

Exercices

Chasses aux angles, 1H30

Exercice 1
Soit ABC un triangle et M le milieu de AB, tel que $MC = AM$. Montrer que ABC est rectangle.

Exercice 2
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soient H_b et H_c les pieds des hauteurs issues de B et C. Montrer que (H_bH_c) est perpediculaire à (AO).

Exercice 3
Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centre O_1 et O_2 s'intersectant en X et Y. On nomme A l'intersection de (O_1X) et Ω_2 et B l'intersection de (O_2X) et Ω_1.
Montrer que O_1BAO_2Y est inscriptible.

Exercice 4
Soit Γ un cercle et $[BC]$ une corde de ce cercle. On note A le milieu de l'arc BC. Soit D et E deux points du cercle qui ne sont pas sur l'arc de A. On considère F et G les points d'intersection respectifs des cordes $[AD]$ et $[AE]$ avec BC. Montrer que D, E, F, G sont cocycliques.

Exercice 5
Soit Ω un cercle circonscrit à ABC de centre O. On nomme D l'intersection de AC et du cercle circonscrit à BOC. Montrer que D est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AOB}$.

Angle tangent

Exercice 6
Soit A l'intersection de deux droites, et Γ un cercle tangent à ces deux droites en B, C. Montrer que ABC est isocèle en A.

Exercice 7
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercle tangents extérieurement en X. Soit (d) une droite tangente à ces deux cercles qui ne passe pas par X, et appelons les points de tangence Y et Z.
Montrer que le triangle XYZ est rectangle en X.

Exercice 8
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) au point P. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite (AB) au point R et la droite (AC) au point S. Montrer que le triangle ARS est isocèle en A.

Exercice 9
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en A et B. Soit X un point situé à l'extérieur de ces deux cercles. La droite (XA) coupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en C et E ; la droite (XB) coupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en D et F. Prouver que (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercice 10
Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre. Prouver que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$

Exercice 11
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles s'intersectant en A et B. On note C l'intersection de la tangente de ω_1 en A avec ω_2 et D l'intersection de la tangente de ω_2 en B avec ω_1. Montrer que (AD) est parallèle à (BC).

Exercice 12
Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Γ.
Soit D le pied de la bissectrice issue de A. Soit P le point d'intersection de la tangente de Γ en A avec BC. Montrer que PAD est isocèle en P.

Exercice 13
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en A et B distincts. On note O le centre de Γ_1. Soit C un point de Γ_1 distinct de A et B, D et E les intersections de Γ_2 respectivement avec (AC) et (BC) . Montrer que (OC) et (DE) sont perpendiculaires.

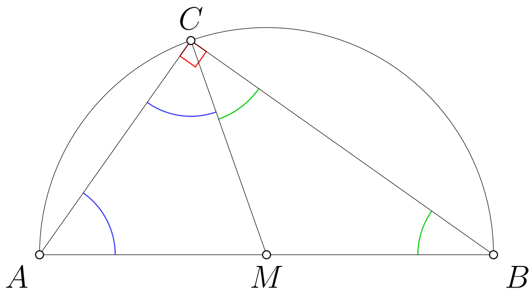
Exercice 14
Soit ω_1 un cercle tangent intérieurement en en second cercle ω_2. On note A le point de tangence. Soit P un point de ω_2. On consière les tangentes à ω_1 passant par P : la première coupe ω_1 en X et recoupe ω_2 en Q, la seconde coupe ω_1 en Y et recoupe ω_2 en R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$

Exercice 15
Soit un demi-cercle de diamètre $[AB]$ sur lequel on choisit deux points C et D. Soit S l'intersection de (AC) et (BD) et T le pied de la perpendiculaire à $[AB]$ issue de S . Montrer que (ST) est la bissectrice de $\widehat{CTD}$.

Exercice 16
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible et tangentiel (i.e. il existe un cercle tangent à tous les côtés). On note respectivement E, F, G et H les points de tangence du cercle inscrit à $ABCD$ avec les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CA]$, $[AD]$. Montrer que $(EG) \perp (HF)$

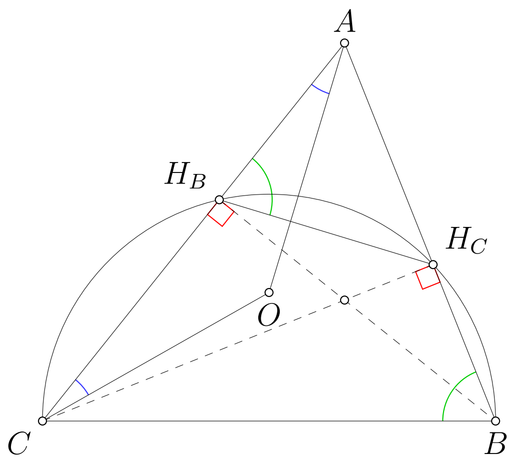
Solutions

Solution de l'exercice 1



Le point M est à égale distance de A, B, C, c'est donc le centre du cercle circonscrit à ABC. Alors on a $2\widehat{ACB} = \widehat{AMB} = 180$ par le théorème de l'angle au centre. Donc $\widehat{ACB} = 90$ comme attendu.

Solution de l'exercice 2



Puisque $\widehat{CH_CB} = 90° = \widehat{CH_BB}$, les points C, H_C, H_B et B sont cocycliques. On a donc avec le théorème de l'angle inscrit

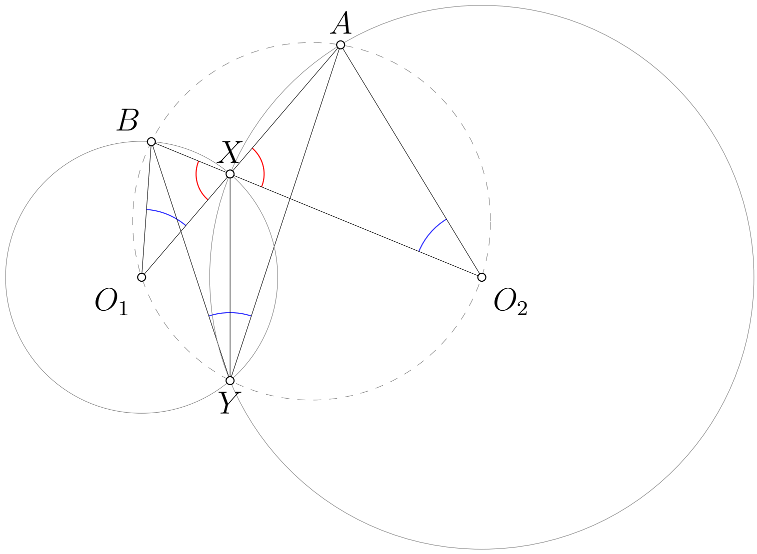
$$\widehat{H_CH_BA} = 180° - \widehat{CH_BH_C} = \widehat{ABC}.$$

D'autre part, le triangle AOC étant isocèle en C, on vérifie avec le théorème de l'angle au centre que

$$180° = \widehat{AOC} + \widehat{CAO} + \widehat{ACO} = 2\widehat{ABC} + 2\widehat{CAO}.$$

Ainsi, $\widehat{CAO} = 90° - \widehat{ABC} = 90° - \widehat{H_CH_BA}$, donc les droites (AO) et (H_BH_C) sont bien perpendiculaires.

Solution de l'exercice 3



Les triangles BXO_1 et AXO_2 sont tous les deux isocèles, respectivement en O_1 et O_2. De plus, les angles $\widehat{BXO_1}$ et $\widehat{AXO_2}$ sont opposés par le sommet donc égaux. On déduit que les triangles BXO_1 et ZXO_2 sont semblables (ils sont isocèles et ont le même angle à la base). Ainsi,

$$\widehat{AO_2B} = \widehat{AO_2X} = \widehat{BO_1X} = \widehat{BO_1A}.$$

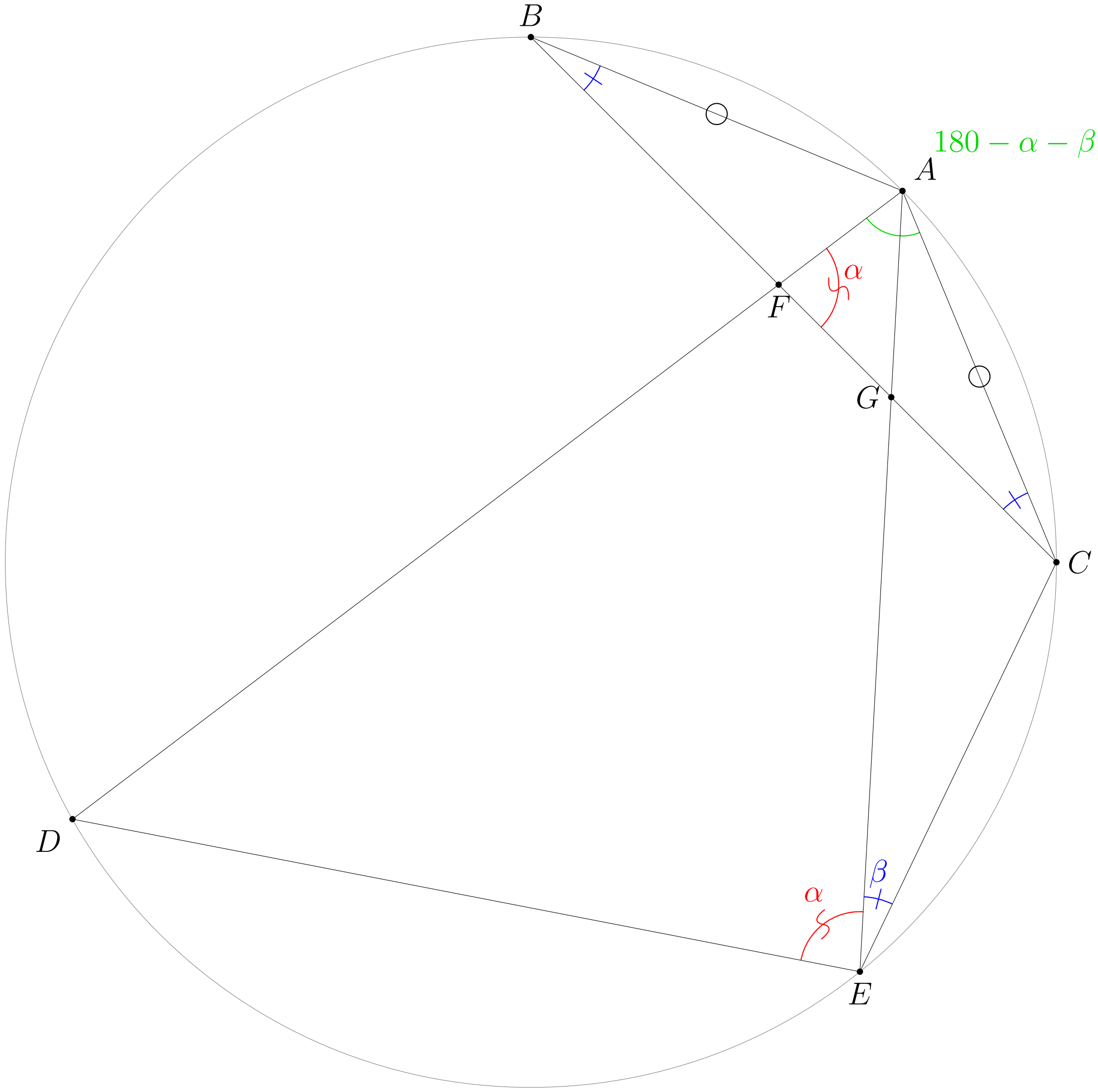
Les points B, A, O_2 et O_1 sont donc cocycliques.

D'autre part, d'après le théorème de l'angle au centre et l'égalité $\widehat{AO_2X} = \widehat{BO_1X}$,

$$\widehat{BYA} = \widehat{BYX} + \widehat{XYA} = \frac{1}{2}\widehat{BO_1X} + \frac{1}{2}\widehat{XO_2A} = \widehat{AO_2B}.$$

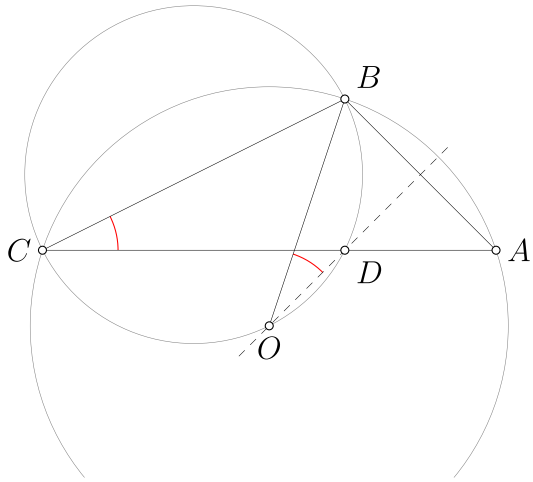
Les points B, Y, O_2 et A sont donc cocycliques. Les points B, O_1, Y, O_2 et A sont donc cocycliques.

Solution de l'exercice 4



On va montrer que $DEGF$ est cyclique en montrant que $\widehat{DEG} + \widehat{DFG} = 180°$. On définit, $\widehat{AED} = \alpha$ et $\widehat{ACB} = \beta$.
On remarque tout d'abord que ABC est isocèle en A (c'est comme ça qu'on peut définir le milieu), donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \beta$. Comme $ABEC$ est cyclique, $\widehat{AEC} = \beta$.
De plus, $ACED$ est cyclique donc $\widehat{DAG} = 180-(\alpha+\beta)$. Avec la somme des angles du triangle AFC, on a $\widehat{AFC} = 180 - (180 - \alpha - \beta) - \beta = \alpha$. D'où $\widehat{DFG} = 180 - \alpha$ et le résultat.

Solution de l'exercice 5

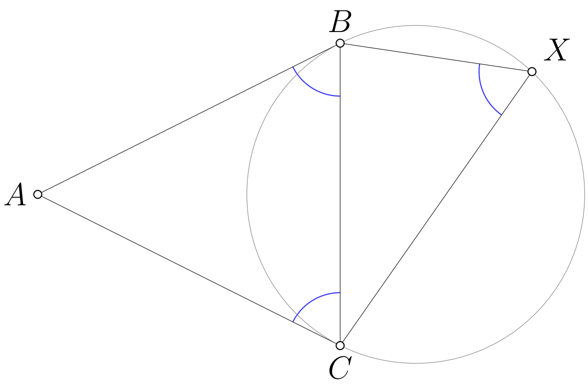


Il suffit de montrer que $\widehat{DCB} = \widehat{ACB}$.
Or, d'après le théorème de l'angle inscrit dans le cercle passant par B, C, O et D, on a :

$$\widehat{DCB} = \widehat{DOB} = \frac{1}{2}\widehat{BOA} = \widehat{ACB}$$

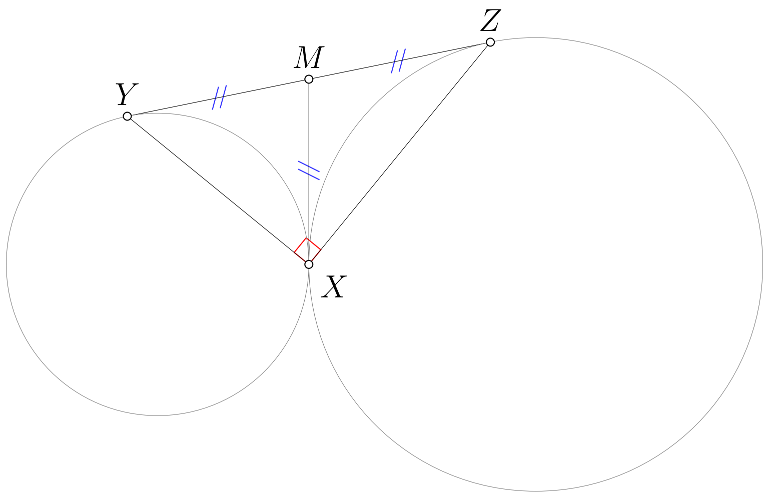
où la dernière égalité provient du théorème de l'angle au centre.

Solution de l'exercice 6



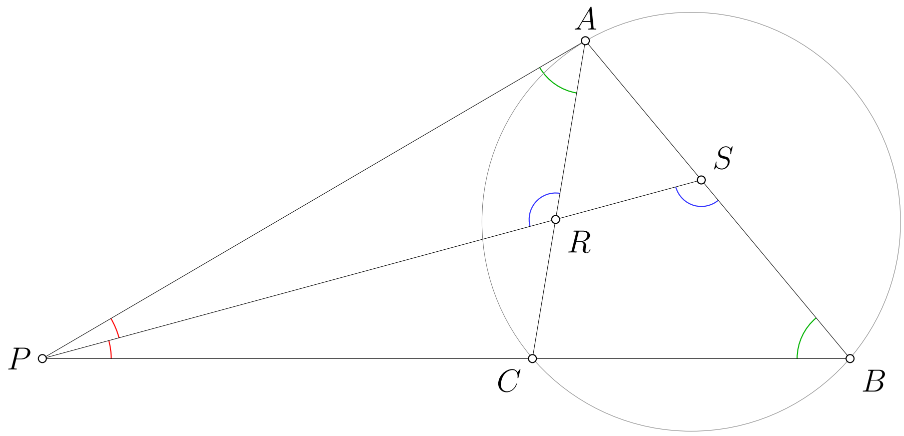
Soit X un point sur le cercle. Par angle tangent, on a $\widehat{ABC} = \widehat{BXC} = \widehat{ACB}$. Le triangle est donc isocèle.

Solution de l'exercice 7



Soit M le point d'intersection de la tangente commune aux deux cercles Γ_1 et Γ_2 en X. D'après l'exercice précédent, les triangles MXY et MXZ sont isocèles. Ainsi, $MY = MX = MZ$. D'après l'exercice 1, on peut conclure que le triangle XYZ est rectangle en X.

Solution de l'exercice 8



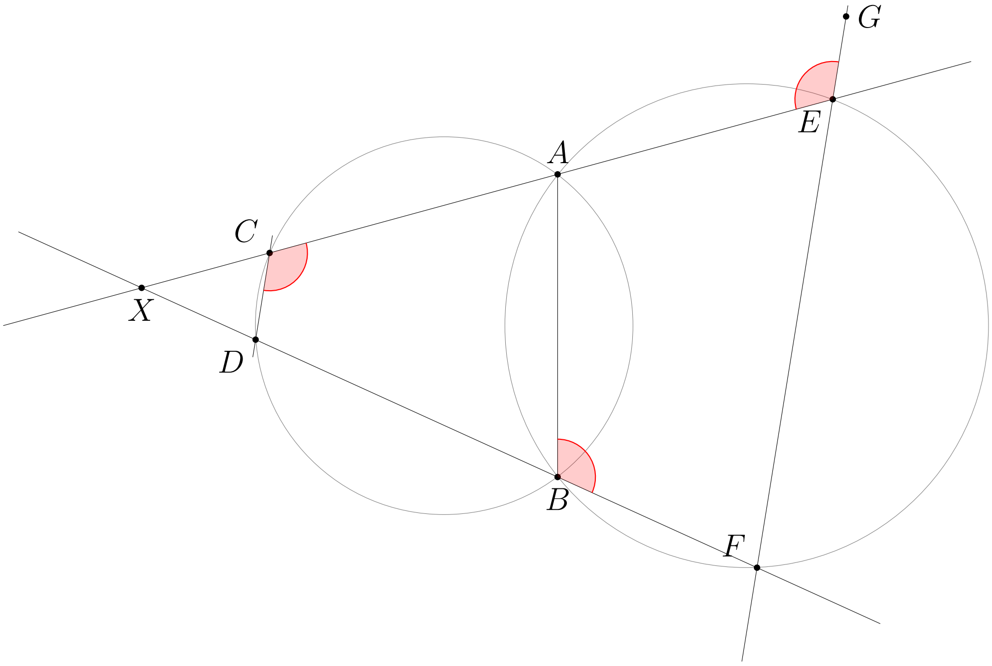
On montre que $\widehat{ARS} = \widehat{ASR}$, ce qui est équivalent à montrer que $180° - \widehat{ARS} = 180° - \widehat{ASR}$, ou encore que $\widehat{PRA} = \widehat{PSC}$.

Or $\widehat{RPA} = \widehat{SPC}$ car la droite (RS) est bissectrice de l'angle $\widehat{APC}$. De plus, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{PAR} = \widehat{BCA} = \widehat{PCS}$. On déduit

$$\widehat{PRA} = 180° - \widehat{PAR} - \widehat{RPA} = 180° - \widehat{SBP} - \widehat{BPS} = \widehat{PSC}$$

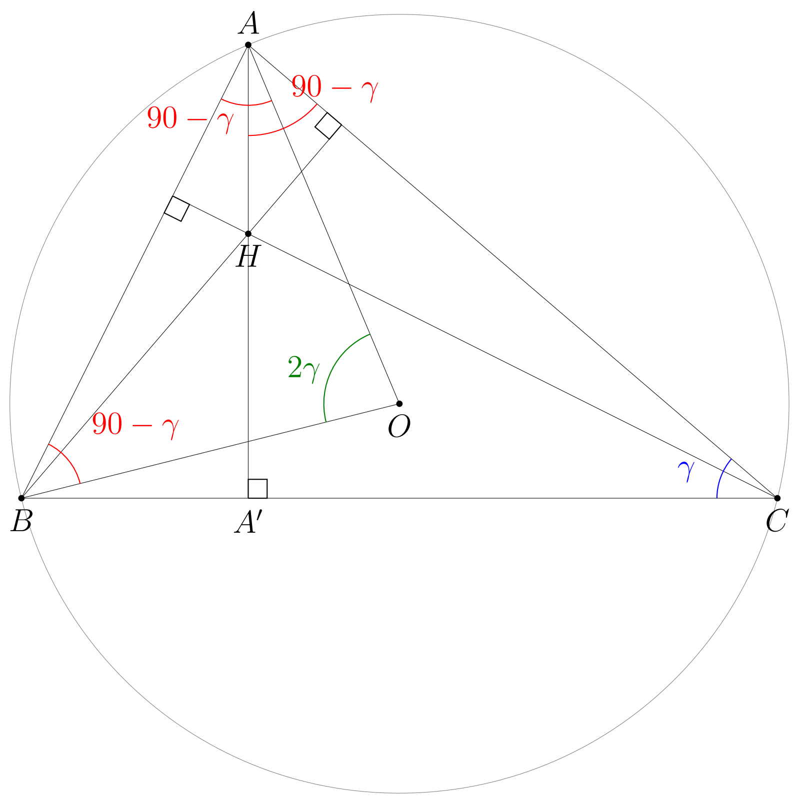
donc le triangle ARS est bien isocèle en A.

Solution de l'exercice 9



On introduit le point G sur la figure.
A, B, C et D sont cocycliques donc $\widehat{DCA} = 180 - \widehat{DBA}$. D, B et F sont alignés donc $\widehat{FBA} = 180 - \widehat{DBA} = \widehat{DCA}$. De même par cyclicité de $ABFE$ et l'angle plat, on a $\widehat{AEG} = 180 - \widehat{AEF} = \widehat{ABF} = \widehat{DCA}$.
Ainsi, par angles alternes-internes, (CD) et (EF) sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

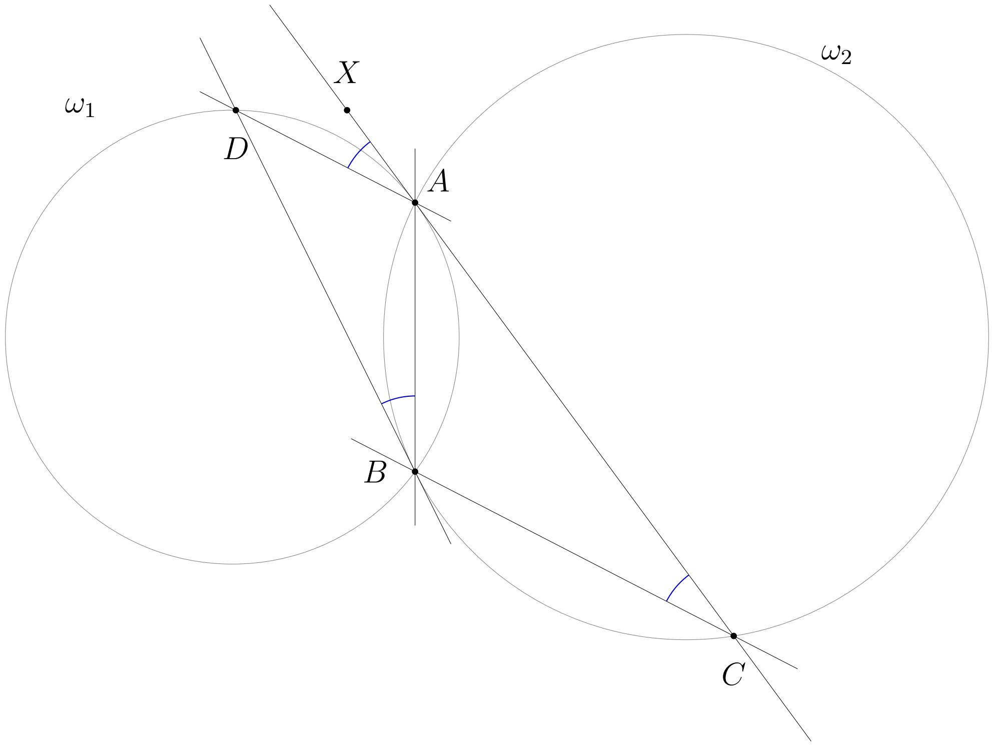


On appelle $\gamma = \widehat{ACB}$.
Par le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 2\gamma$. Comme AOB est isocèle en O, on a avec la somme des angles du triangle qui vaut $180°$: $2\widehat{BAO} + \widehat{AOB} = 180°$, d'où $\widehat{BAO} = 90 - \gamma$.
On note A' le pied de la hauteur de A. Comme $AA'C$ est rectangle en A'. On a

$$\widehat{A'AC} = 90 - \widehat{ACA'} = 90 - \gamma$$

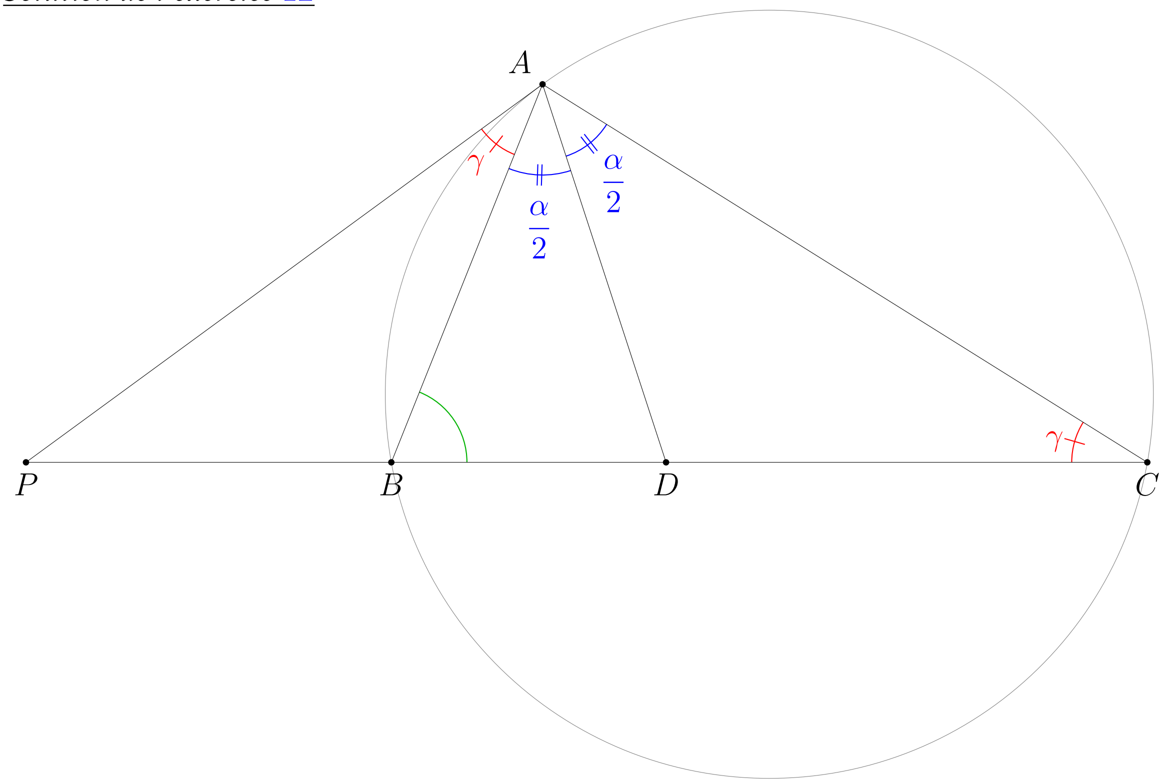
On a donc bien obtenu $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$

Solution de l'exercice 11



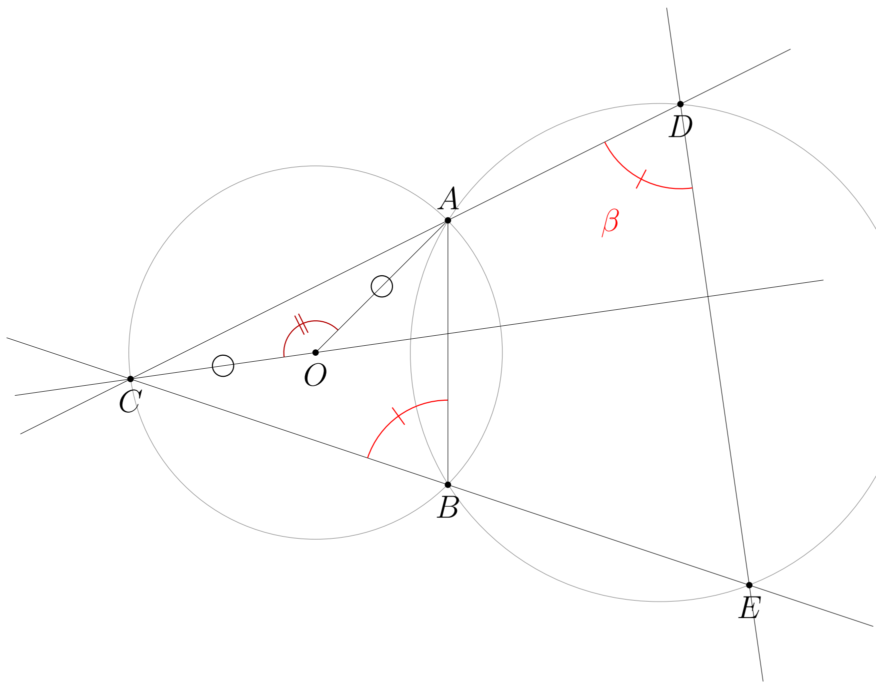
On va prouver la propriété de parallélisme avec les angles correspondants $\widehat{XAD}$ et $\widehat{ACB}$
PAr le théorème de l'angle tangentiel en A pour ω_1, on a $\widehat{XAD} = \widehat{ABD}$. De plus, avec le théorème de l'angle tangentiel, on a $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.
On a alors bien $\widehat{XAD} = \widehat{ACB}$ et (DA) est parallèle à (BC).

Solution de l'exercice 12



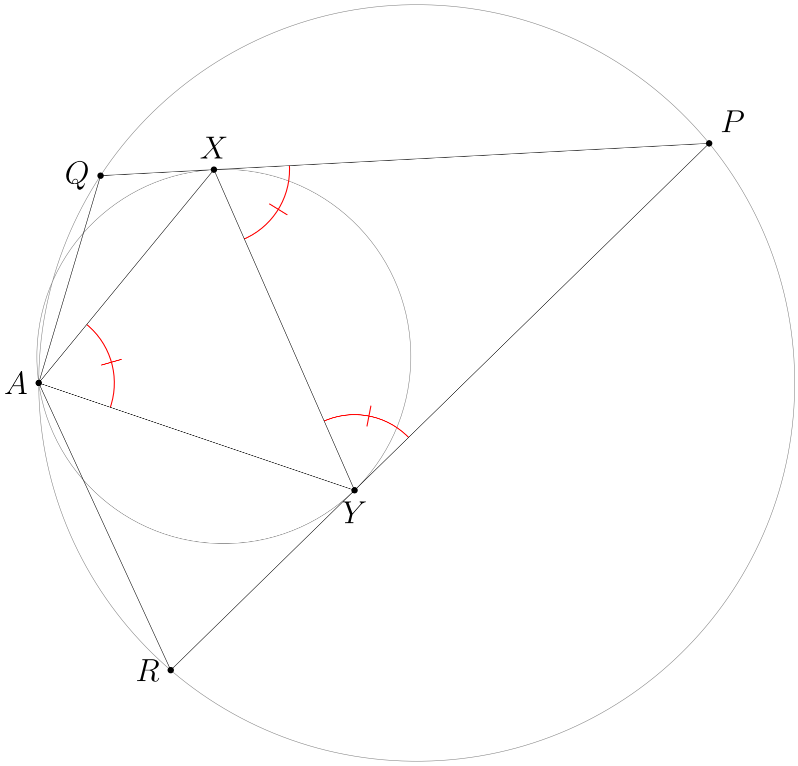
On note α, β et γ les angles $\widehat{BAC}$, $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Comme (PA) est une tangente à Γ, on a $\widehat{PAB} = \gamma$. Par ailleurs comme la somme des angles d'un triangle vaut $180°$, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ et $\widehat{DBA} + \widehat{BAD} + \widehat{BAD} = 180°$. Dès lors, $\widehat{ADP} = \widehat{ADB} = \gamma + \frac{\alpha}{2} = \widehat{PAD}$. Donc PAD est isocèle en P.

Solution de l'exercice 13



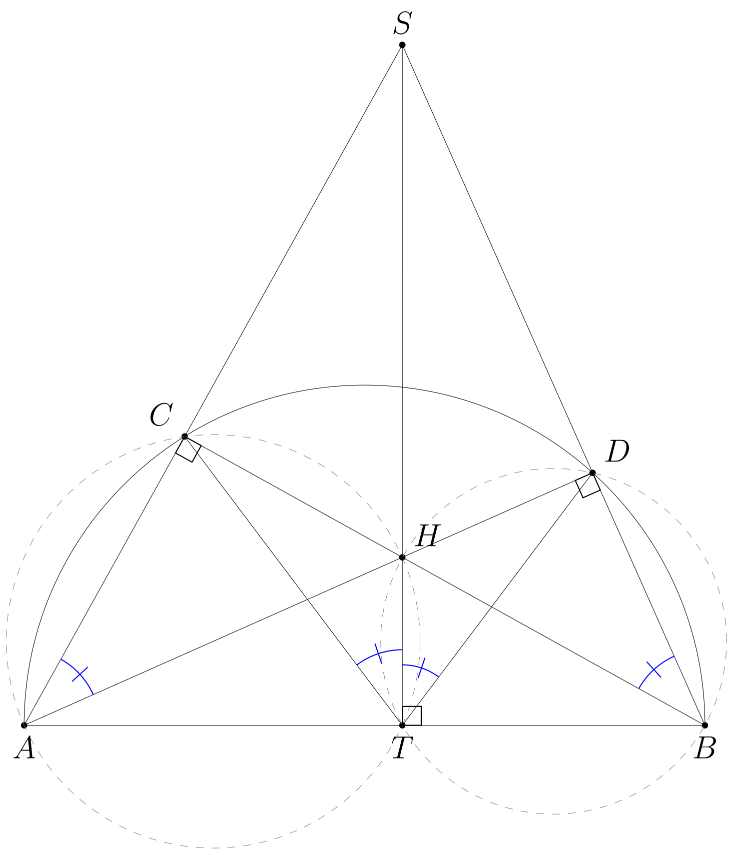
Comme $ADEB$ est cyclique, $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, on note cet angle β. Par le théorème de l'angle au centre, $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 2\beta$. Or AOC est isocèle en O, donc $2\widehat{ACO} + \widehat{COA} = 180°$ soit $\widehat{ACO} = 90 - \widehat{ABC} = 90 - \beta$ et donc $\widehat{ACO} + \widehat{CDE} = 90°$ ce qui conclut (on a un triangle rectangle).

Solution de l'exercice 14



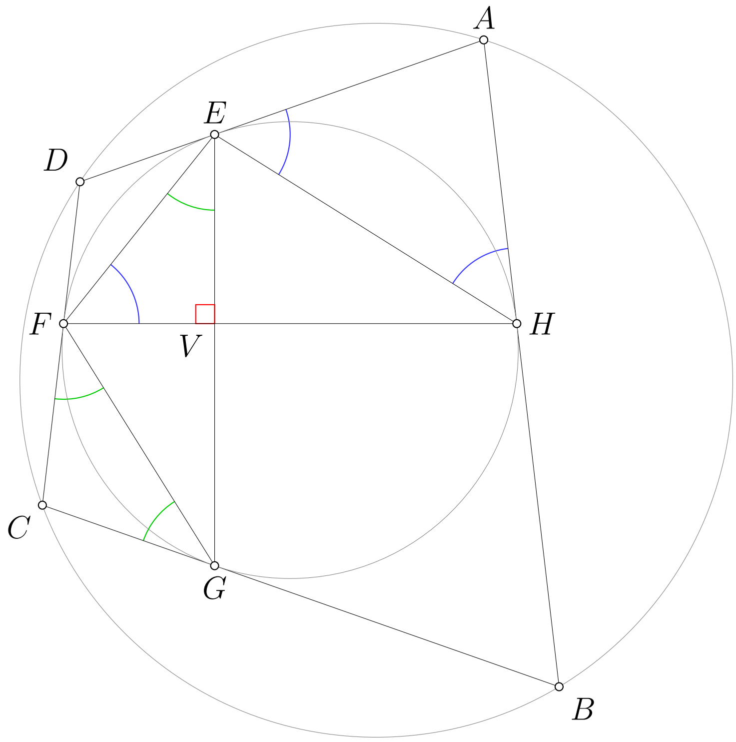
Comme $AQPR$ est cyclique, on a $\widehat{QAR} = 180 - \widehat{XPR}$. Or (PX) et (PY) sont des tangentes donc, $\widehat{PXY} = \widehat{XAY} = \widehat{PYX}$. En appliquant cela au triangle PXY, on a $2\widehat{XAY} + \widehat{XPY} = 180$. Avec la première égalité, on obtient, $2\widehat{XAY} = \widehat{QAR}$

Solution de l'exercice 15



Cet exercice revient à montrer que l'orthocentre d'un triangle est aussi le centre du cercle inscrit du triangle formé par les pieds des hauteurs.
Ici, on introduit H, l'hortocentre de ABS qui est donc le point de concourrance de (CB), (DA) et (ST). Et on raisonne par chasse aux angles.
Comme la somme de deux angles droits est égale à $180°$, on en déduit que les points $ATHC$ et $TBDH$ sont cocycliques. Ainsi, en utilisant le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{HTD} = \widehat{HBD} = \widehat{CAD} = \widehat{CTH}$.
D'où le résultat.

Solution de l'exercice 16



Soit V le point d'intersection de (EG) et (FH). On a

$$\begin{aligned}
\widehat{VFE} &= \widehat{HFE} \\
&= \widehat{EHA} \text{ par angle tangentiel} \\
&= \frac{180 - \widehat{EAH}}{2} \text{ car } EHA \text{ est iscocèle en } A \\
&= \frac{\widehat{FCG}}{2} \text{ par angle inscrit} \\
&= \frac{180 - 2 \cdot \widehat{CFG}}{2} \text{ car } CFG \text{ est iscocèle en } C \\
&= 90 - \widehat{GEF} \text{ par angle tangentiel} \\
&= 90 - \widehat{VEF}
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

5 Triangles semblables (Clémentine et Rémi)

Cours

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si ils sont proportionnels c'est-à-dire si il existe k un réel (positif) tel que $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ Autrement dit si en augmentant la taille de l'un et eventuellement en le retournant on peut les superposer. Cela se traduit par des égalités d'angles et de rapports de longueurs :

1) Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs angles sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ On note alors $ABC \sim A'B'C'$

2) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

Exercices

Exercice 1
(Droite des milieux) Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que $(ED)//(BC)$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle. On note D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 3
(Pythagore) Soit ABC est un triangle rectangle en A. Montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exercice 4
(Puissance d'un point) Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites (AB) et (CD) (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P. Montrez que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Exercice 5
(Puissance d'un point intérieur au cercle) Soit ω un cercle et P un point hors du cercle. Soient (d) et (d') deux droites passant par P qui intersectent chacune le cercle deux fois. On nomme ces intersections A, A' et B, B'. Soit X l'intersection des droites (AB') et $(A'B)$. Montrer que $XA \cdot XB' = XB \cdot XA'$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de $[AC]$. On note E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[AD]$. Montrer que $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{AD}{AB}$.

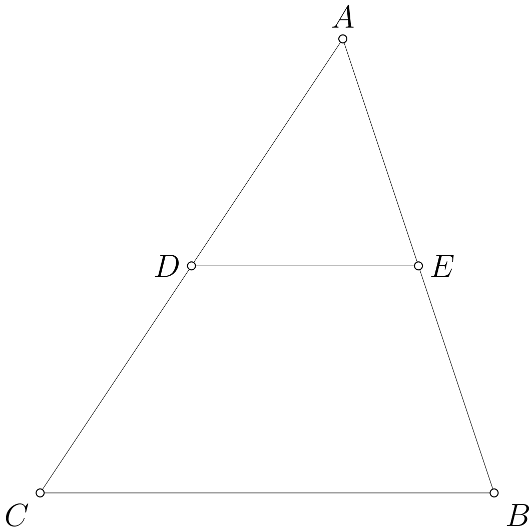
Exercice 7
(Ptolémée) Soit A, B, C, D quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Exercice 8
Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. Soit L le point d'intersection de (FC) et (BD), et K celui de (EC) et (BD), Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC). Montrer que $CP = CQ$.

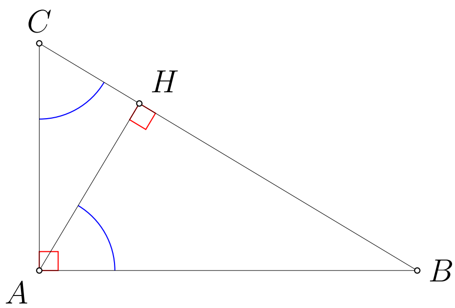
Exercice 9
Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2, s'intersectant en deux points X et Y. Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y. On note B l'intersection de (AY) avec Ω_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Solutions

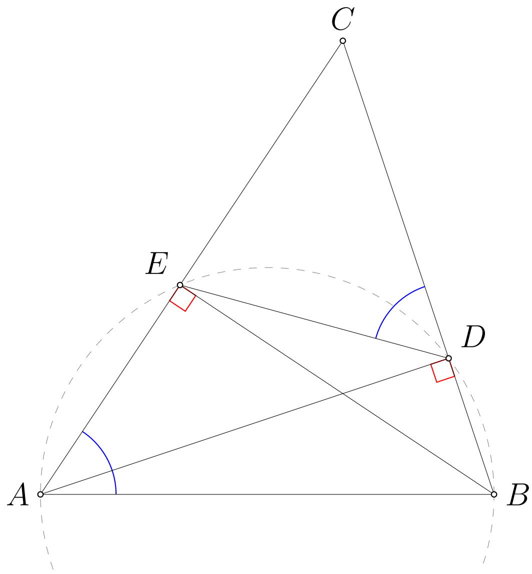
Solution de l'exercice 1
On a $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$ On a donc bien $AED \sim ABC$ donc $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ donc $(ED)//(BC)$



Solution de l'exercice 2
Soit H_A le pied de la hauteur issue de A : On a $ABC \sim H_ABA \sim H_AAC$ donc $\frac{AB}{AH_B} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH_A$ De même $\frac{AC}{AH_C} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = BC \cdot CH_A$ Donc on a bien $AB^2 + AC^2 = BC(H_AB + H_AC) = BC^2$.

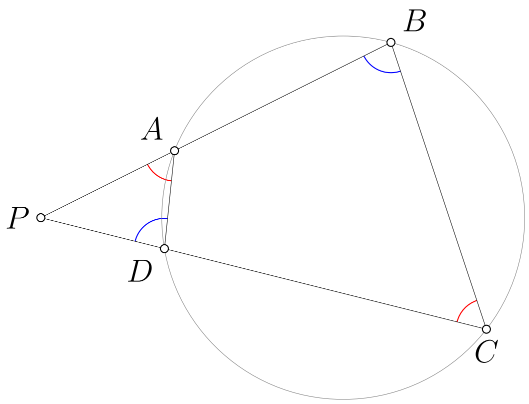


Solution de l'exercice 3
On a $ABDC$ cocycliques donc $\widehat{CDE} = 180 - \widehat{BDE} = \widehat{BAC}$ ce qui conclut.



Solution de l'exercice 4

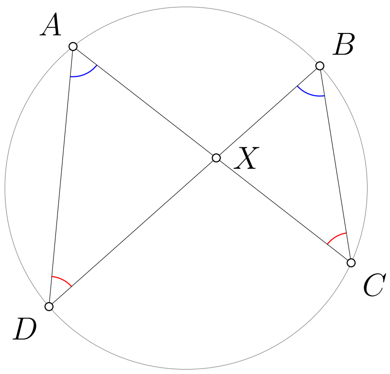
On a $PCA \sim PBD$ donc $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \Leftrightarrow PC \cdot PD = PA \cdot PB$



$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

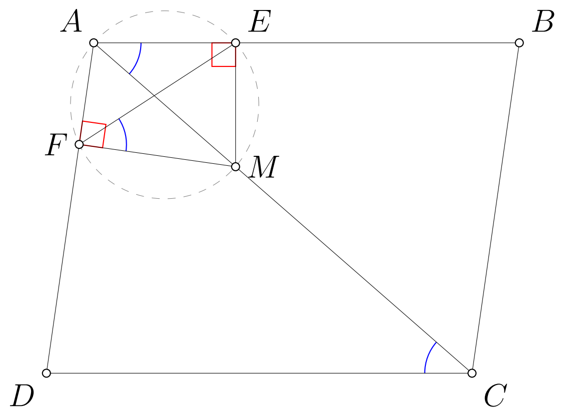
Solution de l'exercice 5

On a $AA'X \sim BB'X$ Il vient donc $\frac{AX}{BX} = \frac{A'X}{B'X} \Rightarrow AX \cdot XB' = XB \cdot XA'$



Solution de l'exercice 6

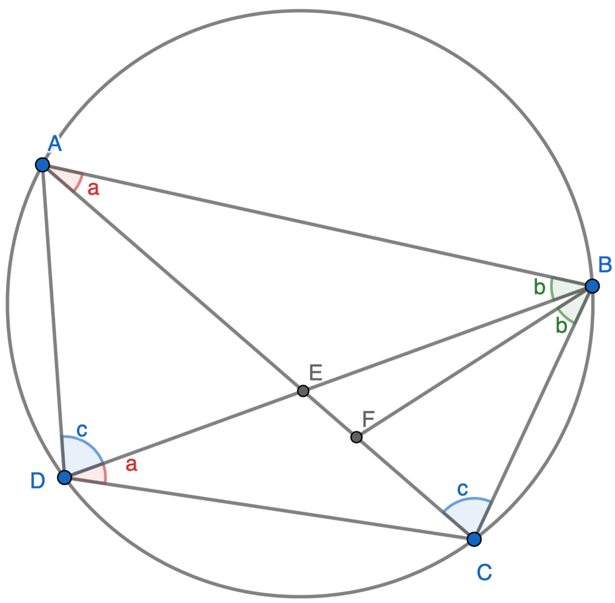
On a premièrement $\widehat{AFM} = 90 = 180 - 90 = 180 - \widehat{AEM}$ Donc $AEMF$ sont cocycliques. Donc $\widehat{EMF} = 180 - \widehat{FAE} = 180 - \widehat{BAD}$ Or on est dans un parallélograme donc $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAD} = \widehat{EMF}$. On a de plus $\widehat{EFM} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ On a donc les triangles MFE et BAC semblables donc $\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$



Solution de l'exercice 7

On nomme E le point d'intersections des diagonales et F le point de EC tq $\widehat{ABE} = \widehat{FBC}$ On a $BFA \sim BCD$ et $BFC \sim BAD$ donc $\frac{AF}{AB} = \frac{DC}{DB}$ et $\frac{CF}{CB} = \frac{DA}{DB}$ donc

$$(AF + FC) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA.$$



Solution de l'exercice 8

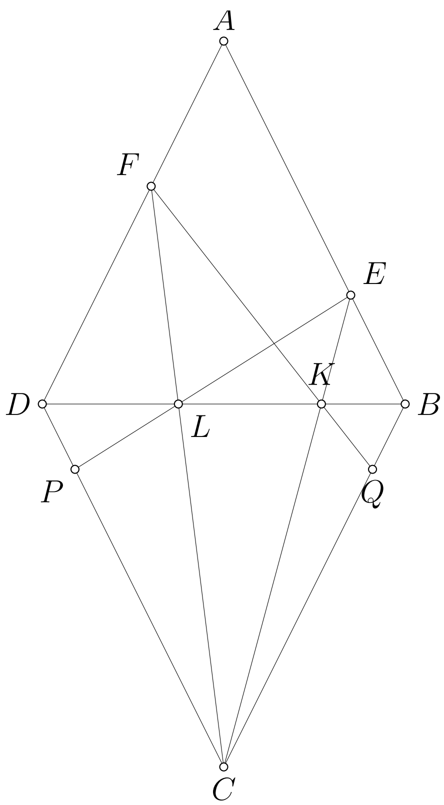
On remarque que $BQK \sim KFD$ ce qui nous donne $\frac{BQ}{FD} = \frac{QK}{DK}$. De même on a donc $KEB \sim KCD$, de sorte que $\frac{KB}{KD} = \frac{EB}{CD}$. En combinant les deux on obtient $\frac{QK}{DF} = \frac{EB}{CD}$, c'est-à-dire

$$QB = \frac{EB \cdot DF}{CD}.$$

On réitère : $DPL \sim BEL$ donc $\frac{DP}{BE} = \frac{DL}{BL}$. De même, $DFL \sim BCL$ donc $\frac{DF}{BC} = \frac{DL}{BL}$. En combinant on a donc

$$DP = \frac{DF \cdot BE}{BC} = \frac{EB \cdot DF}{CD} = BQ.$$

On a donc bien $CQ = CP$.

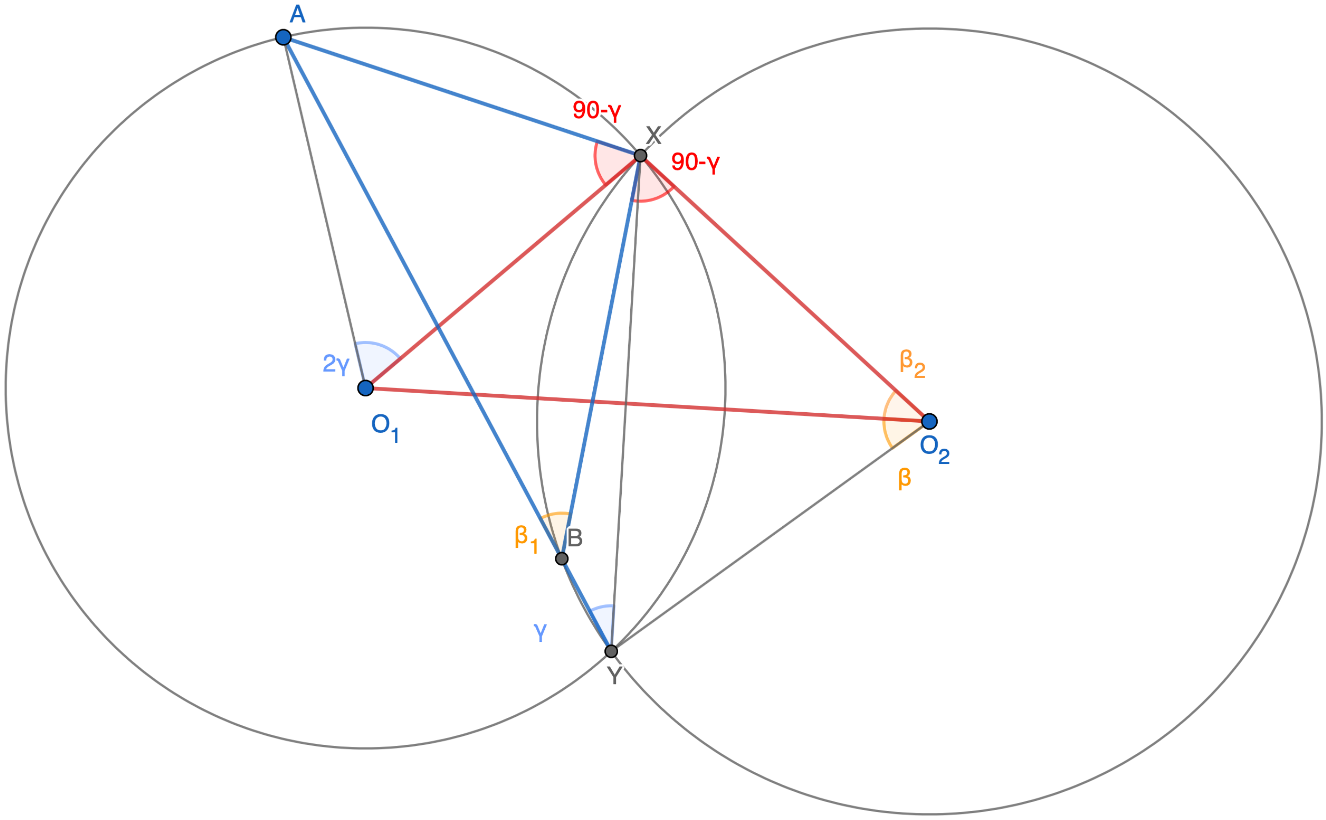


Solution de l'exercice 9

Soit $\beta = \widehat{ABX}$. On a donc $\widehat{XO_2O_1} = \frac{1}{2}\widehat{XO_2Y} = 180 - \widehat{XBY} = \beta$ De plus, soit $\gamma = \widehat{XYA}$, on a $\widehat{A0_1X} = 2\gamma$ donc $\widehat{AXO_1} = 90 - \gamma$. Dans le même temps on a $\widehat{BXO_2} = \widehat{YX0_2} + \widehat{BXY} = 90_\beta + (180 - (180 - \beta) - \gamma) = 90 - \gamma$ Donc

$$\widehat{AXB} = \widehat{AXO_1} + \widehat{O_1XB} = \widehat{YXB} + \widehat{O_1XB} = \widehat{O_1XO_2}$$

Donc on a bien $XO_1O_2 \sim XAB$


A
90-γ
X
90-γ
2γ
O1
β2
O2
β
β1
B
γ
Y

6 Principe de l'extremum (Aimeric)

Théorème 1.
Tout ensemble fini possède un maximum et un minimum.

Théorème 2.
Tout ensemble d'entiers naturels possède un minimum.

Exercice 1
À un tournoi, chacun rencontre tous ses adversaires et il n'y a pas d'égalité. Tout le monde écrit sur sa feuille le noms des adversaires qu'il a battus, et et les noms sur la feuille des adversaires vaincus. Montrer qu'un participant a tous les autres noms sur une feuille.

Solution de l'exercice 1
On considère la personne qui a le plus de noms sur sa feuille. Si il lui manque un nom, elle a perdu contre une personne, qui a donc tous les noms de cette personne plus un, impossible.

Exercice 2
Sur un cercle, on dispose n nombres de sorte que chacun soit la moyenne des deux qui l'entourent. Montrer que tous les nombres sont égaux.

Solution de l'exercice 2
Le maximum doit être entouré par deux nombres qui lui sont égaux. De proche en proche, tous les nombres doivent alors être égaux.

Exercice 3
On dispose de $n \geqslant 3$ points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe A, B, C tel qu'il n'y a aucun autre point sur les segments $[AB], [AC], [BC]$.

Solution de l'exercice 3
On considère le triangle de plus petit périmètre. Si la condition n'est pas vérifiée (mettons D est sur le segment $[AB]$), alors d'après l'inégalité triangulaire DBC est de plus petit périmètre, impossible.

Exercice 4
Des nombres $x_1, x_2, \ldots x_{100}$ vérifient la propriété $x_1 + x_2 = 2x'_1, x_2 + x_3 = 2x'_2, \ldots, x_{100} + x_1 = 2x'_{100}$ où les x'_i sont une permutation des x_i. Montrer que tous les x_i sont égaux.

Solution de l'exercice 4
On considère le plus grand des x'_i, qui est donc égal au plus grand des x_i. Puisque $x_i + x_{i+1} = 2x'_i$, ce maximum est atteint au moins deux fois. En réutilisant cette formule sur le deuxième x'_i maximal, on montre de même que le maximum est atteint trois fois, puis que tous les x_i sont égaux.

Exercice 5
Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer qu'il existe deux couples de partenaires de danse f, g et f', g' tels que f et g', f' et g n'ont pas dansé ensemble.

Solution de l'exercice 5
On considère le garçons ayant dansé avec le plus de filles g, puis f' une fille n'ayant pas dansé

avec ce garçon, et enfin g' ayant dansé avec f'. Puisque g a dansé avec le plus de filles mais pas f', il existe une fille f avec laquelle g a dansé mais pas g'.

Exercice 6
Avec un nombre impair de personnes, chacun arrose son voisin le plus proche. Montrer qu'une personne ne sera pas arrosée.

Solution de l'exercice 6
On procède par récurrence. Prenons le couple d'arroseurs les plus proches, qui s'arrosent donc l'un l'autre. Si une autre personne les arrose, il y a parmi les $n-2$ autres participants au plus $n-3$ arroseurs, donc une personne ne sera pas arrosée. Sinon, on conclut par hypothèse de récurrence avec les $n-2$ autres personnes.

Exercice 7
Sur un ensemble fini S du points du plan, toute droite passant par deux éléments par deux points passe par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.

Solution de l'exercice 7
On considère le couple point, droite (qui passe par au moins trois points de l'ensemble) qui minimise la distance (non nulle) : mettons A, d. Par hypothèse, il y a deux points sur d du même côté de la perpendiculaire à la d passant par A (appelée d') dans notre ensemble : disons B, C avec B plus proche de d' que C. Alors par inégalité triangulaire le couple B, (AC) a une plus petite distance : impossible. Donc tous les points sont alignés.

Trouver le plus petit entier

Exercice 8
À un tournoi, chaque participant rencontre chaque adversaire deux fois, et marque un point pour une victoire et aucun pour une défaite (pas de match nul). Le dernier récolte 5 points. Combien y a-t-il de participants au minimum ?

Solution de l'exercice 8
Analyse : s'il y a n participants, il y a au moins $5n$ points distribués, et comme chaque match attribue exactement un point $n(n-1)$ points sont distribués au total. $5n \leqslant n(n-1) \iff n \leqslant 6$ donc il doit y avoir au moins six participants. Si on a six participants et que chacun gagne la moitié de ses matchs contre chaque adversaire, chacun aura marqué 5 point. Donc 6 est le minimum.

Exercice 9
On colorie les entiers de 2 à 31 en utilisant k couleurs. Si n divise strictement m, n et m sont de couleur différente. Combien faut-il de couleurs au minimum ?

Solution de l'exercice 9
Les puissances de 2 doivent toutes être de couleur différente car chacune divise ou est divisée par les trois autres : il faut au moins quatre couleurs. À l'inverse, en coloriant de la même couleur tous les entiers de 2^k à $2^{k+1}-1$ (compris), la condition est respectée, puisque si n divise strictement m, $n \leqslant \frac{m}{2}$

Exercice 10
Un groupe de n amis prend r photos distinctes (deux photos n'ont pas exactement les mêmes

personnes) qui contiennent au moins une personne chacune. Trouver le plus grand r tel que pour chaque paire de photos on trouve au moins une personne qui apparaît sur les deux.

Solution de l'exercice 10
Cf. principe des tiroirs

Exercice 11
Combien de coups de couteau faut-il donner au minimum pour partager un gâteau (en deux dimensions, chaque part doit avoir de la crème sur le dessus) en 13 parts ? (pas forcément égales)

Solution de l'exercice 11
Une construction à quatre coups de couteau n'est pas difficile à trouver. Montrons qu'il s'agit du minimum. À chaque coup de couteau, le couteau divise une part en deux (donc ajoute une part) à chaque fois qu'il rencontre une nouvelle part, soit sur le bord du gâteau, soit après avoir rencontré un ancien coup de couteau. Le k-ième coup ajoute donc au plus k parts. Il y a donc après k coups au plus $1 + \frac{k(k+1)}{2}$ parts, donc il faut bien au moins quatre coups.

Exercice 12
On dispose de douze boules dont une est soit plus légère soit plus lourde (on ne sait pas). Combien de pesées au minimum faut-il faire pour déterminer de quelle boule il s'agit, et son poids ?

Solution de l'exercice 12
Il y a 24 possibilités puisque chacune des douze boules peut être plus légère ou plus lourde. Après avoir choisi une stratégie à n étapes, on peut avoir 3^n résultats différents, puisque à chaque étape il y a trois issues possibles. Si on veut pouvoir déterminer laquelle de ces possibilités est la bonne, chaque résultat doit correspondre à au plus une possibilité : on veut $3^n \geqslant 24$ donc $n \geqslant 3$.
Montrons la construction. On commence par peser quatre boules de chaque côté :

- Si la balance reste à l'équilibre, les quatres autres peuvent être plus lourdes ou plus légères. On en met deux d'un côté et une de l'autre, plateau que l'on complète avec une boule sûre. Si le plateau penche d'un côté, comparer les deux boules du même côté permet de conclure, sinon il faut peser la boule laissée sur le côté avec une autre.
- Sinon, on dispose de chaque côté du plateau deux boules potentiellement plus lourdes et une potentiellement plus légère. Si le plateau penche d'un côté, comparer les deux boules les plus lourdes du côté qui penche permet de conclure. Sinon, on compare les plus légères laissées sur le côté entre elles.

Rappel 3.
Ces deux derniers exercices illustrent que la difficulté peut se trouver aussi bien sur la partie analyse que la partie synthèse du raisonnement. Il est donc crucial d'expliciter chaque étape de la réponse.

7 Géométrie : TD récapitulatif (Aurélien

En stand-by...

8 Jeux à stratégie gagnante (Benoît et Gabriel)

Nous reprenons le cours et une partie des exercices proposés par Théo et Augustin, que nous remercions, pour le cours qu'ils ont donné au groupe A pendant le stage d'été 2023

Qu'est-ce qu'un jeu combinatoire ?

On retrouve souvent en combinatoire des jeux entre 2 joueurs qui jouent chacun leur tour dans un espace défini, et à partir d'une configuration initiale.

— les règles sont strictes et donnent les coups que peut faire un joueur dans n'importe quelle situation, tout comme la condition de victoire de chacun des joueurs ou de nulle

— les 2 joueurs connaissent les règles du jeu et tous les états actuels du jeu

— il n'y a aucun hasard dans le jeu. L'issue de chaque coup est connue par les 2 joueurs est connue à l'avance

Exercices début - Jeu complémentaire

Exercice 1 (TD 2023)
a) Il y a n allumettes posées sur une table. En commançant par Gabriel, Gabriel et Benoît prennent à tour de rôle 1, 2, ou 3 allumettes. Celui qui prend la dernière a perdu. Déterminer qui a une stratégie gagnante et la décrire.
b) Même question, mais celui qui prend la dernière allumette gagne la partie.

Solution de l'exercice 1
a) En commençant par la fin, on sait que 1 est perdant. Ainsi, 2, 3 et 4 sont gagnants car on peut depuis ces positions atteindre 1 qui est perdant. L'on a alors 5 qui est perdant car on ne peut atteindre depuis cette position que des positions gagnantes. On trouve ensuite que 9 aussi est perdant, et plus généralement tous les nombres $\equiv 1 \pmod 4$.
Il suffit pour Gabriel à son premier tour de rejoindre un nombre $\equiv 1 \pmod 4$ puis ensuite, à chaque fois que Benoît prend b allumettes d'en prendre $4-b$. Ainsi il maintient le nombre d'alumettes $\equiv 1 \pmod 4$. Comme celui-ci diminue de 4 à chaque étape, au bout d'un moment il vaut 1 donc Gabriel gagne bien. Benoît peut adopter la même stratégie sans la première étape si dès le début $n \equiv 1 \pmod 4$.
On peut prouver que cette stratégie marche car le joueur qui l'applique aura après un tour de jeu (constitué de ce qu'a retiré l'adversaire plus ce qu'il a retiré) retiré exactement 4 allumettes, donc il laissera l'autre joueur devant tous les nombres d'allumettes s'écrivant sous la forme $4k+1$ inférieurs à n, donc à la fin devant 1.
Donc si $n \equiv 1 \pmod 4$ Gabriel perd sinon il gagne.

b) On trouve cette fois ci que $1, 2, 3$ sont gagnants, 4 est perdant, donc $5, 6, 7$ sont gagnants et 8 perdant, et plus généralement les nombres divisibles par 4 semblent être les uniques positions perdantes. Donc si n est divisible par 4 Gabriel perd sinon il gagne. La stratégie est sinon la même qu'à la question d'avant à la différence que le joueur qui applique la stratégie s'arrange au début pour arriver sur un nombre $\equiv 0 \pmod 4$ (et non $\equiv 1$).

Exercice 2 (TD 2023)
Partant de 0 et en commançant par Antoine, Antoine et Théo ajoutent chacun leur tour à la

quantité en cours un nombre de leur choix parmi $\{1, 2, ..., 10\}$. Celui qui atteint 100 gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 2
En partant de la fin, on voit que 89 est perdant, tout comme 78, 67, 56, ... , 12, 1 (les nombres $\equiv 1 \pmod{11}$). 0 n'étant pas perdant, Antoine gagne. Une stratégie qu'il peut appliquer est de toujours rejoindre un nombre $\equiv 1 \pmod{11}$, ce qui est possible en prenant 1 allumette au premier tour puis à chaque tour, après que Théo ait pris x allumettes en prendre $11 - x$.

Etat d'un jeu - Position et stratégie gagnante

L'état d'un jeu est l'ensemble des informations relatives à la position actuelle : cela n'inclut pas seulement à quoi ressemble le jeu, mais aussi qui est le prochain joueur à jouer, voire d'autres informations en fonction des jeux (par exemple, aux échecs, il est important de savoir s'il est encore possible de roquer).

On appelle *état final* l'état suivant le dernier coup d'une partie (où l'un des deux joueurs a gagné / où les joueurs ont fait nulle).

Une position est dite *gagnante* pour A s'il peut forcer sa victoire. On peut alors dire que A possède une *stratégie gagnante* (sans pour autant forcément la décrire). Une position gagnante pour A est perdante pour B, et vice-versa. Dans le cas où il peut y avoir des égalités, on peut aussi avoir des stratégies qui permettent de ne pas perdre.

Lorsqu'il faut décrire une stratégie gagnante pour A, il faut qu'il puisse l'appliquer quels que soient les coups de B et montrer qu'elle marche dans tous les cas. Par exemple, prenons l'exercice suivant :
"Alice et Bob jouent à un jeu sur un échiquier 100×100. Tour par tour en commençant par Alice, chaque joueur choisit une case qui n'a pas encore été choisie et la colorie dans sa couleur (rouge pour Alice, bleu pour Bob). Montrez que Bob peut toujours faire en sorte qu'Alice ne puisse colorier aucun carré 3×3 entierement en rouge."
On pourrait intuitivement penser à une stratégie du style "Bob joue toujours à côté d'Alice" pour être certain qu'aucune des cases qu'elle colorie ne soit le centre d'un carré 3×3, mais cela ne marcherait pas (on trouve facilement un contre-exemple en prenant le cas où Alice colorie en dernier le centre du carré 3×3).

Il faut donc s'assurer que la stratégie soit applicable et fonctionne quels que soient les coups de l'adversaire.

Souvent plus une stratégie est compliquée et floue (et dépendant de beaucoup de coups précédents de l'adversaire), plus prouver qu'elle fonctionne sera difficile (voire infaisable). Il est important d'essayer de définir des stratégies qui sont facilement applicables.

Jeu fini

Un jeu est *fini* s'il n'est pas possible d'y jouer une infinité de coup.

Le jeu du morpion est par exemple un jeu fini car chaque coup remplit une des 9 cases de la grille et il faut au moins une case de libre pour pouvoir jouer, donc une partie ne peut pas durer plus que 9 coups.

Utilité : dans un jeu fini sans égalité, il y a forcément un des 2 joueurs qui a une stratégie gagnante. Ainsi, si l'on montre qu'un jeu est fini et qu'il ne peut pas y avoir d'égalité, alors on peut montrer que A a une stratégie gagnante en montrant que B n'en a pas.

Montrer qu'un jeu est fini est toujours un bon réflexe : même si beaucoup de jeux sont clairement finis, parfois il n'est pas clair que c'est le cas. Pour cela, il faut trouver un paramètre positif entier qui diminue strictement au fil du temps (par exemple le nombre de cases vides au morpion), ou un paramètre entier qui augmente strictement à chaque fois, mais est borné (par exemple le nombre de cases remplies au morpion)

Exercices - Positions gagnantes/perdantes

Exercice 3 (TD 2023)
Lilian et Yanis jouent sur un échiquier de taille $m \times n$ au jeu suivant : il y a un pion en bas à gauche de l'échiquier, et en commançant par Lilian, ils le déplacent chacun leur tour en ligne droite d'autant de cases qu'ils le souhaitent vers le haut ou vers la droite. Le premier à atteindre le coin en haut à droite gagne. Pour quels (m, n) Lilian a-t-il une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 3
Lilian a une stratégie gagnante pour tous les (m, n) tels que $m \neq n$.
Elle consiste à colorier les carrés ayant pour coordonnées $(m, n), (m-1, n-1), (m-2, n-2), ...$
A chaque tour, Lilian pourra mettre le pion sur une de ces cases là (sauf s'il y est déjà au départ, d'où la condition $m \neq n$), et Ynais ne peut pas atteindre une case coloriée à partir d'une autre case coloriée.
Lorsque $m = n$, Yanis peut appliquer cette stratégie et donc c'est lui qui a une stratégie gagnante.

Exercice 4 (TD 2023)
On place un jeton sur la case $C1$ d'un échiquier classique (8×8). Deux joueurs le déplacent à tour de rôle, en respectant la règle suivante : à chaque tour, on peut déplacer le jeton d'autant de cases que l'on veut, mais au moins une, soit vers la droite, soit vers le haut, soit en diagonale vers la droite et vers le haut. Celui des deux joueurs qui amène le jeton en H8 gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 4
En commençant par la fin, on trouve les positions perdantes de l'échiquier. On les trouve en partant de $H8$, qui est perdant. Toutes les cases qui peuvent mener à $H8$ sont donc gagnantes.
L'on sait ensuite que $G6$ et $F7$ sont perdantes car elles ne mènent qu'à des cases gagnantes.
L'on sait donc que toutes les cases qui mènent à $G6$ et $F7$ sont gagnantes, et ainsi de suite.
Ainsi, on trouve toutes les cases perdantes de l'échiquier : $H8$, $G6$, $F7$, $E3$, $C5$, $D1$ et $A4$.
$C1$ étant une case gagnante, c'est le joueur qui commence qui gagne, sa stratégie étant à chacun de ses tours de rejoindre une case perdante, ce qui sera toujours possible car il partira à chaque fois de cases gagnantes car son adversaire partira lui de cases perdantes.

Jeu symétrique

Un jeu est *symétrique* si la seule différence entre les 2 joueurs est qui commence.

Utilité : dans un jeu symétrique, le fait qu'une position soit gagnante pour un joueur ou l'autre ne dépend que du prochain à jouer. Ainsi, il peut être plus simple de dire qu'une position est gagnante pour celui dont c'est le tour, auquel cas on parle de position 1-*gagnante*, ou pour celui qui vient de jouer (autrement dit la position est 2-*gagnante*), plutôt que de considérer que la position est gagnante pour le joueur A ou B.

Exercices - Jeu symétrique

Exercice 5 (TD 2019, groupe B)
Horia et Yanlin jouent à un jeu sur un échiquier (8 fois 8) : à tour de role, en commençant par Horia, ils placent des dominos sur deux cases libres de l'échiquier. Le premier joueur qui ne peut plus placer de domino sans chevaucher un domino existant a perdu. Lequel des deux joueurs dispose d'une stratégie gagnante ? Et sur un plateau de 8 cases sur 7 ?

Solution de l'exercice 5
Yanlin a une stratégie gagnante : il peut jouer les coups symétriques de ceux de Horia selon une symétrie centrale. Après chaque coup de Yanlin, le plateau est symétrique, donc si Horia joue quelque part, l'endroit opposé est libre aussi et Yanlin peut y jouer. Sur un plateau 8 fois 7, c'est Horia qui peut gagner : elle occupe les deux cases centrales avec son premier domino, puis utilise la stratégie de la symétrie centrale.

Exercice 6 (TD 2019, groupe B)
Octave et Daniel jouent à un jeu : il y a initialement deux tas de composé de a cailloux. A tour de rôle, en commençant par Octave, ils enlèvent un ou plusieurs cailloux, mais toujours issus d'un seul tas (pas forcément le même d'un coup sur l'autre). Celui qui prend le dernier caillou gagne. Qui a une stratégie gagnante ?
Même question si un des deux tas a a cailloux et l'autre b cailloux (avec $a \neq b$).

Solution de l'exercice 6
Si $a = b$, Daniel peut gagner : à chaque fois qu'Octave prend des cailloux dans un tas, il prend le même nombre de cailloux dans l'autre tas. Ainsi, les deux tas restent égaux après le tour de Daniel, et c'est forcément lui qui prend le dernier caillou. Si les deux tas sont de tailles différentes, Octave gagne en prenant des cailloux dans le tas le plus gros afin d'égaliser les deux tas, puis en appliquant la stratégie précédente.

Astuces - réflexes à avoir

— il est souvent intéressant de partir de l'état final d'un jeu pour déterminer en remontant les coups quels sont les positions gagnantes/perdantes. On parle alors d'*analyse rétrograde*, notamment pour les jeux symétriques. Si une position ne mène qu'à des positions gagnantes, elle est perdante. Si une position mène à une position perdante, elle est gagnante.

— il arrive que les stratégies du style "jouer le symétrique de l'adversaire" marchent, notamment pour les jeux où le premier à ne plus pouvoir jouer perd la partie
Attention : S'assurer qu'une telle stratégie est possible quels que soient les coups de l'adversaire (s'il y a un nombre impair de case, la case du centre n'a pas de symétrique par rapport au centre ou par rapport à un axe séparant la grille en 2, et donc la stratégie ne marche pas en tant que tel)

— il est parfois utile de paver l'espace sur lequel se joue le jeu. Dans ce cas, privilégier les pavages recouvrant 2 cases par pavé, afin de pouvoir à chaque fois compléter le pavé dans lequel l'adversaire a joué

Exercices - S'il nous reste du temps

Exercice 7 (TD 2023)
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Sur un tableau $n \times n$, composé exclusivement de cases blanches, Assem et Elias jouent au jeu suivant : Assem commence par noircir la case en haut à gauche, puis chacun leur tour, ils noircissent une case adjacente (par un côté) à la dernière case noircie. Le premier à ne plus pouvoir jouer perd la partie. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 7
En faisant un pavage en dominos 2×1 quand n est pair (par exemple en mettant $\frac{n}{2}$ dominos d'affilé sur chaque ligne), Elias peut à chacun de ses tours compléter le domino dans lequel Assem vient de colorier une case. A chaque fois que Assem jouera, tous les dominos seront pleins, donc Elias pourra toujours appliquer sa stratégie. Ainsi, il est sûr de toujours pouvoir jouer, et donc de ne pas perdre.
Quand n est impair, Assem joue dans un coin. Il pave la ligne contenant le coin avec $\frac{n-1}{2}$ dominos, fait de même dans la colonne contenant le coin, et pave le carré $(n-1) \times (n-1)$ restant avec des dominos comme pour le cas pair. Il applique alors la même stratégie que celle donnée à Elias dans le cas n pair, et donc il gagne car il peut toujours jouer.

Exercice 8 (TD 2023)
Soit n un entier pair > 3. Noé et Marc jouent à un jeu. Chacun à leur tour, ils écrivent un 0 ou un 1 sur un sommet d'un n-gone initialement vierge. Noé commence et gagne si, après l'un de ses coups, il y a trois sommets consécutifs du n-gone tels que la somme des nombres qui y sont inscrits est un multiple de 3. Marc gagne s'il empêche Noé de gagner. Déterminer qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 8
Si la somme des nombres inscrits sur 3 sommets consécutifs est divisible par 3, c'est que la somme est 0 ou 3, donc que les 3 sommets sont des 1 ou des 0 (donc le même nombre).
Marc apparie 2 par 2 des sommets consécutifs (par exemple pour un décagone, il les apparie ainsi $1-1-2-2-3-3-4-4-5-5$), et après que Noé ait écrit x dans un sommet, il écrit $1-x$ dans le sommet de la même paire.
Puisque dans 3 sommets consécutifs, il y en a 2 dans un même pavé, Marc est avec cette stratégie certain qu'il n'y ait pas 3 consécutifs avec les mêmes chiffres, donc qu'il n'y a pas 3 sommets consécutifs dont la somme des sommets est divisible par 3.

Exercice 9 (TD 2023)
Sur la table se trouvent 2024 jetons. Tour à tour, Emile et Paul doivent enlever au moins un

jeton et au plus la moitié des jetons restants au moment où ils jouent. Le joueur qui laisse un unique jeton sur la table perd la partie. C'est Emile qui commence. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

Solution de l'exercice 9

On commence par la fin pour trouver les premières positions perdantes : $2, 5, 11, 23$. Il semble que les positions perdantes sont exactement les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ (i.e. les termes qu'on obtient en faisant successivement fois 2 plus 1).

Montrons par récurrence sur n que si le nombre de jetons de départ k vérifie $u_n \leqslant k < u_{n+1}$, alors la position est perdante si $k = u_n$ gagnante sinon.

Pour $n = 1$, 2 est perdant, et à partir de 3 ou 4 on peut aboutir à 2, donc 2 est gagnant, mais pas 3 et 4, ce qui donne la propriété pour $n = 1$.

Pour l'hérédité supposons l'hypothèse vraie au rang n. Si $k = u_{n+1} = 2u_n + 1$, le premier joueur peut enlever entre 1 et u_n jetons, donc le nombre de jeton sera entre $u_n + 1$ et $u_{n+1} - 1$, donc la position sera gagnante par hypothèse de récurrence. Par contre, si $u_{n+1} < k < u_{n+2} = 2u_{n+1} + 1$, on a le premier joueur va enlever $k - u_{n+1}$ jetons. On a bien $k - u_{n+1} > 0$, et $k - u_{n+1} \leqslant \frac{k}{2}$ équivaut à $\frac{k}{2} \leqslant u_{n+1}$, donc à $k \leqslant 2u_{n+1}$ qui est vrai car $k < 2u_{n+1} + 1$. Le second joueur est alors dans une position perdante, donc si $u_{n+1} < k < u_{n+2}$ la position est gagnante, ce qui conclut l'hérédité.

Ainsi les positions perdantes sont exactement les termes de la suite, qui est strictement croissante : ils valent successivement $2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, 3071$, donc 2024 n'est pas un terme de la suite, Emile a une stratégie gagnante.

Exercice 10 (TD 2019, groupe B)

Le nombre 10^{2019} est écrit au tableau. Serge et Aline jouent à un jeu : à tour de rôle, ils peuvent soit effacer un nombre x écrit au tableau et le remplacer par deux nombres entiers a et b, à condition que $ab = x$, soit effacer deux nombres égaux écrits au tableau. Celui qui ne peut plus jouer perd. Si Serge commence, qui a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 10

Nous montrerons que Serge a un stratégie gagnante.

G décompose d'abord 10^{2019} en $2^{2019} \times 5^{2019}$. Maintenant, grâce au théorème fondamental de l'arithmétique, on se retrouve dans une situation assez similaire à celle des cailloux (Exercice 6) : en effets les facteurs issus du 2^{2019} et ceux issus du 5^{2019} ne pouvant jamais être égaux, c'est comme si on jouait deux jeux parfaitement similaires en même temps sur deux tableaux distincts. Ainsi pour gagner, il suffit maintenant que Serge reproduise à chaque tour ce que fait Aline mais sur le tableau qu'Aline n'a pas joué.

Exercice 11 (TD 2023)

Gaspard et Lucile jouent avec une infinité d'assiettes ronde de 15 cm de rayon sur une table ronde d'un mètre de rayon au jeu suivant : chacun leur tour en commançant par Gaspard, ils placent une assiette sur la table de telle manière à ce que l'assiette soit entièrement sur la table et qu'elle ne recouvre aucune autre assiette. Le premier à ne plus pouvoir jouer a perdu. Qui a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 11

Notons que le jeu est fini : au k-ième tour les assiettes occupent une surface de $k\pi 0,01^2$ mètres carré. En particulier, comme l'aire vaut au plus celle de la grande table i.e. π, on obtient que $k \leqslant 10000$: le jeu ne peut durer indéfiniment. Ainsi il y a forcément un gagnant et un perdant.

Gaspard a une stratégie gagnante. Il peut commencer par mettre une assiette au milieu de la table (de sorte que le centre de la table et de l'assiette soient confondus), puis à chacun de ses tours de jouer le symétrique de Gaëtan par rapport au centre de la table. En effet une fois la première assiette posée au centre, une assiette et son symétrique ne se superposent pas. Et comme le jeu est symétrique à tout moment, lorsqu'elle rajoute une assiette, il ne peut se superposer avec une autre, sinon le coup précédent de Gaëtan aurait été interdit. De cette manière, il est certain de pouvoir jouer à chaque fois que Lucile le peut, et donc de ne pas perdre. Ainsi comme il y a forcément un gagnant et un perdant, Gaspard gagne à coup sûr.

Exercice 12 (TD 2023)
Gaëtan et Antoine jouent à un jeu sur un échiquier 8×8. Tour par tour en commençant par Gaëtan, chaque joueur choisit une case qui n'a pas encore été choisie et la colorie dans sa couleur (rouge pour Chloé, bleu pour Antoine). Montrez que Antoine peut toujours faire en sorte que Gaëtan ne puisse colorier aucun carré 2×2 entièrement en rouge.

Solution de l'exercice 12
On adopte le pavage suivant :
1-1-2-2-3-3-4-4
5-6-6-7-7-8-8-5
9-9-10-10-11-11-12-12
13-14-etc.
Antoine colorie à chaque fois la case du même numéro que celui que Gaëtan vient de colorier (et chaque carré 2×2 a deux cases avec des numéros identiques, donc il est avec cette stratégie certain que Gaëtan n'aura pas colorié de carré 2×2).

Exercice 13 (Envoi de combinatoire 2019-2020, exercice 13)
Soit $n > 1$. Raphaël et Aimeric jouent au jeu suivant. $2n$ cartes numerotées de 1 à $2n$ sont melangées puis disposées dans une ligne, de manière à ce que les faces numérotées soient visibles. Chacun à leur tour, Raphaël et Aimeric choisissent une carte, soit celle tout à droite soit celle soit à gauche de la ligne, et la garde pour eux, jusqu'à ce que toutes les cartes aient été prises. Raphaël commence. A la fin du jeu, chaque joueur calcule la somme des numéros des cartes qu'il a prises. Le joueur ayant la plus grande somme gagne. Un joueur dispose-t-il d'une façon de ne pas perdre ?

Solution de l'exercice 13
Oui, Raphaël a une stratégie gagnante. IL colorie une carte sur 2 en noir en allant de gauche à droite et le reste en blanc (de telle manière à ce que 2 cartes consécutives n'aient pas la même couleur). Il regarde la couleur dont la somme des cartes est la plus élevée (ou égale) et choisit une carte de cette couleur en premier. Aimeric aura ensuite le choix entre 2 cartes de l'autre couleur, laissant à Raphaël le choix entre 2 cartes de couleur différente et ainsi de suite. Ainsi, il pourra toujours choisir une carte de la même couleur que celle qu'elle a choisi au début, tandis que Aimeric sera toujours obligé d'avoir que des cartes de l'autre couleur.
Ainsi l'un aura la somme des cartes noires à la fin, et l'autre la somme des cartes blanches, et comme Raphaël avait pu choisir au début laquelle prendre, il est certain de ne pas perdre.

Exercice 14
Emilhan et Mano jouent à un jeu avec deux bols remplis de grains de riz. Initialement il y a 13 grains de riz dans chaque bol. Chacun leur tour en commençant par Emilhan, ils peuvent au choix :

1. Manger un grain de riz dans chaque bol
2. Manger un grain de riz dans un seul bol
3. Déplacer un grain de riz d'un bol à l'autre

Celui qui prend le dernier grain de riz gagne. Montrer que Emilhan a une stratégie gagnante

Solution de l'exercice 14

Pour commmencer on peut essayer de repérer les solutions gagnantes et perdantes. Pour décrire une situation, on dira qu'on est dans le cas $a - b$ quand il y a a grains à gauche et b grains à droite. Par ailleurs on pourra remarquer par symétrie que si $a - b$ est gagnant ou perdant, c'est aussi le cas pour $b - a$.

On peut commencer à regarder ce qu'il se passe pour les petits nombres. Tout d'abord comme on peut prendre un grain dans chaque bol, $1 - 0$ et $1 - 1$ sont gagnants. Cela donne que $2 - 0$ est perdant. Ainsi, $3 - 1$, $3 - 0$ et $2 - 1$ sont gagnants. Il suit $2 - 2$ et $4 - 0$ perdants. On peut continuer ainsi mais on peut aussi observer que les situations avec a et b paires semblent perdantes.

Pour le prouver, on peut observer que pour une situation avec $a - b$ paire, le joueur Emilhan peut répondre au jeu de son adversaire Mano de la façon suivante :

— Si Mano prend un grain dans un bol, Emilhan prend un grain dans le même bol (comme le nombre de grain était pair dans le bol initialement, il y en a bien un de plus).
— Si Mano prend un grain dans chaque bol, Emilhan fait de même (de même par parité, Emilhan peut le faire)
— Si Mano déplace un grain, Emilhan prend un grain dans chaque bol (encore une fois par parité c'est possible)

Ainsi pour chaque double tour, on revient à une situation avec des grains de riz pairs. De plus, le nombre de grains diminue à chaque tour donc à un moment Emilhan va rendre la situation $0 - 0$, c'est que Emilhan a gagné !

Ici, $13 - 13$ est gagnant et en effet Emilhan peut rendre les tas pairs et pairs en prenant un grain dans chaque, c'est elle qui peut gagner !

Exercice 15 (2023 May Olympiad, P2)
Aurélien et Quentin ont disposé 50 tas de $1, 2, 3 \ldots 50$ pièces respectivement sur une table. Il jouent au jeu suivant : chacun leur tour en commençant par Aurélien, un joueur choisit un tas et son adversaire détermine à quel joueur revient ce tas. Ils continuent ainsi jusqu'à ce qu'un d'entre eux aient 25 tas de pièces. Quand ceci arrive, l'autre prend tous les tas restants et la partie s'arrête. Celui ayant le plus de pièces gagne.
Qui de Quentin et Aurélien a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 15

Montrons qu'il existe une srtatégie gagnante pour Quentin.
L'idée à garder en tête est que Quentin n'a pas besoin de maximiser son score mais seulement d'avoir un tout petit plus qu'Aurélien. Par ailleurs quand le jeu se finit, chaque joueur a exactement 25 tas, on peut donc déterminer qui a gagné en regardant seulement la moyenne de pièces par tas plutôt que la somme des pièces.

Notons $m = \frac{51}{2}$ (c'est la moyenne du nombre de pièces par tas), et pour k entre 1 et 50, notons $k^* = 51 - k$, de sorte que $\frac{k+k^*}{2} = m$ et $(k^*)^* = k$ (en fait k^* est le symétrique de k par rapport à m sur la droite réelle).
Voici la stratégie de Quentin sur deux tours :

— Aurélien choisit la pile à k pièces, si $k > m$, alors Quentin prend le tas. Sinon, il le donne à Aurélien.

— Ensuite, Quentin choisit le tas k^*.

Il est assez immédiat qu'à chaque tour, la moyenne du nombre de pièces par tas des tas de Quentin est supérieure à m, et que celle des tas d'Aurélien est inférieure à m, et que celle des tas restants est inférieure à m seuelement quand Aurélien obtient un tas. Pour montrer que Quentin gagne, il faut regarder ce qui se passe à la fin du jeu :

— Si Quentin a atteint 25 tas, alors il a gagné, car Aurélien et lui ne peuvent pas avoir le même nombre de pièces ($\frac{50\times51}{2}$ est impair) et que son nombre de pièces est supérieur à $25m$.

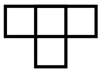
— Si Aurélien a atteint 25 tas, alors la moyenne de pièces par tas des tas restants est supérieure à m donc le nombre final de pièces de Quentin sera aussi encore supérieur à $25m$.

4 Entraînement de fin de parcours

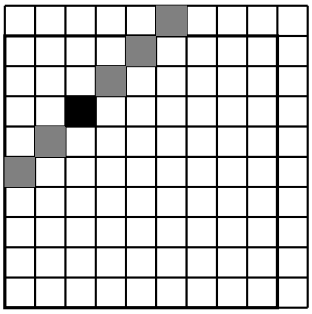
Exercices

Exercice 1
Soit Γ un cercle, B et C deux points sur Γ et D un point sur la tangente à Γ en B. Soit A un point sur la parallèle à (BC) passant par D, et X le deuxième point d'intersection entre (AC) et Γ. Montrer que les points A, B, D et X sont cocycliques.

Exercice 2
Soit $n \geq 1$ tel que on peut paver une grille $n \times n$ avec des pièces de la forme suivante, sans recouvrement ni débordement. (Les rotations de la pièce sont autorisées.) Montrer que c'est possible si et seulement si n est un multiple de 4.



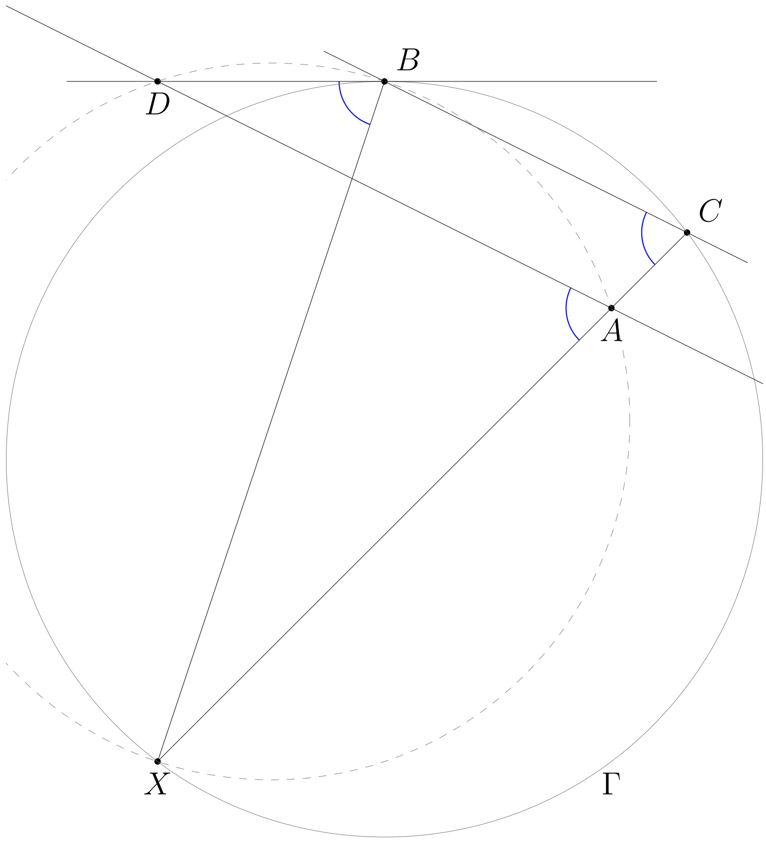
Exercice 3
Alice et Bob jouent à un jeu. À tour de rôle, en commençant par Alice, ils choisissent une case d'un carré 10×10 et colorient toutes les cases d'une des 2 diagonales qui contient cette case. La diagonale en question peut contenir des cases déjà coloriées. Le premier joueur qui ne peut plus colorier de case a perdu. Lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante ?



Exercice 4
Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice (intérieure) de $\widehat{ABC}$ recoupe (CD) en X, et (AD) en Y. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle DXY. Montrer que A, C, D et O sont cocycliques.

Solutions

Solution de l'exercice 1



On fait une chasse aux angles, et on obtient

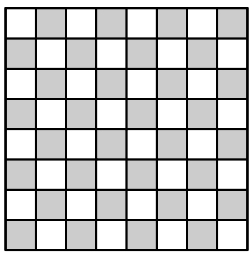
$$\widehat{DBX} = \widehat{BCX} = \widehat{DAX}$$

par angle tangentiel et parallélisme respectivement. Cela donne bien la cocyclicité par la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

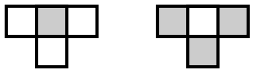
Solution de l'exercice 2

Supposons d'abord qu'un tel pavage est possible. Remarquons qu'un tétramino ayant 4 cases, et la grille en ayant n^2, si un recouvrement est possible on a nécessairement $4 \mid n^2$, autrement dit n est pair.

Colorions la grille $n \times n$ avec un coloriage de type échiquier.

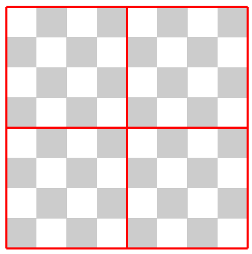


On remarque alors qu'un tel tétramino en T recouvre nécessairement soit 3 cases blanches et une case noire, soit 3 cases noires et une case blanche.

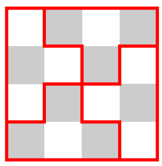


Or, n étant pair, il y a autant de cases noires que de cases blanches (il y en a $\frac{n^2}{2}$). Soit B le nombre de tétraminos recouvrant 3 cases blanches et N celui recouvrant trois cases noires. On a alors $3B+N$ cases blanches recouvertes, et $3N+B$ cases noires. Ainsi, $3B+N = 3N+B$, donc $2B = 2N$, autrement dit $B = N$. On a utilisé au total $B + N = 2B$ tétraminos, chacun avec 4 cases. On a donc $n^2 = 4 \times 2B = 8B$, donc 8 divise n^2, ainsi n est multiple de 4.
À ce stade, on a montré que si un recouvrement est possible, alors n est un multiple de 4.

Réciproquement, supposons que n est un multiple de 4, et montrons qu'un tel recouvrement est possible. Comme n est un multiple de 4, on peut séparer la grille $n \times n$ en blocs 4×4.



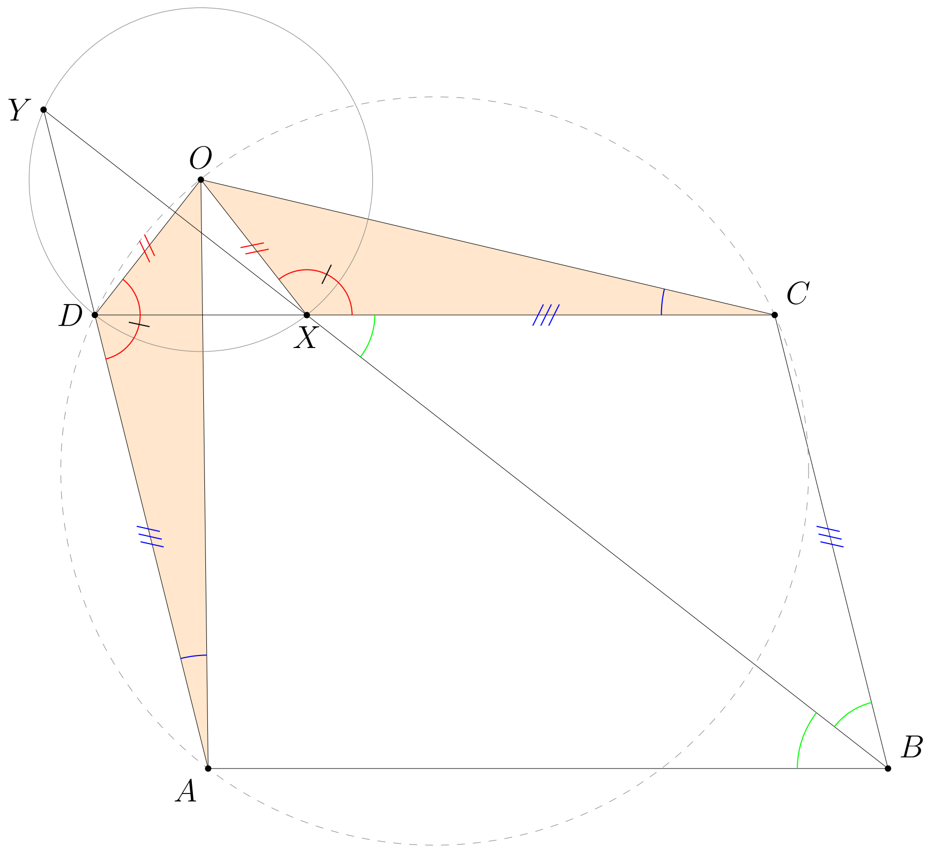
Or un bloc 4×4 est pavable avec 4 tétraminos, comme le montre le dessin ci-dessous.



Finalement, la grille $n \times n$ est pavable avec des tétraminos en T si et seulement si n est multiple de 4.

Solution de l'exercice 3
Montrons que Bob a une stratégie gagnante.
Il suffit que Bob joue le coup symétrique à celui d'Alice par rapport à l'axe central vertical (entre la 5-ème et la 6-ème case). Il faut montrer que Bob peut toujours jouer ce coup s'il a appliqué cette stratégie aux tours précédents :
Avant le tour d'Alice la grille est symétrique, et ainsi la case qu'Alice choisit et sa case symétrique sont encore blanches, et il n'existe aucune diagonale passant par une case et son symétrique, et ainsi la case symétrique ne peut être grisée par Alice. Ainsi, Bob peut toujours jouer après Alice, et donc il gagne.

Solution de l'exercice 4



Posons $\widehat{CBX} = \alpha$. Une chasse aux angles rapide utilisant le fait que (BX) est la bissectrice de $\widehat{CBA}$ et le parallélisme nous apprend que

$$\widehat{CBX} = \widehat{XBA} = \widehat{CXB} = \alpha,$$

donc le triangle BCX est isocèle en C, et $CX = BC = AD$. De plus, par définition de O, on a $OD = OX$. On se rend compte qu'on a beaucoup de longueurs égales, et que si on arrivait à montrer que CXO et ADO étaient isométriques, on aurait $\widehat{OCX} = \widehat{OAD}$, ce qui conclurait quant à la cocyclicité de A, D, O, C. On essaie donc de montrer que $\widehat{ODA} = \widehat{OXC}$. D'un côté, on a

$$\widehat{ADO} = \widehat{ADX} + \widehat{XDO} = 2\alpha + 90 - \frac{\widehat{DOX}}{2} = 2\alpha + 90 - \widehat{DYX} = 90 + \alpha.$$

De l'autre coté, on a

$$\widehat{CXO} = 180 - \widehat{DXO} = 180 - \left(90 - \frac{\widehat{DOX}}{2}\right) = 90 + \widehat{XYD} = 90 + \alpha.$$

Ainsi on a bien $\widehat{CXO} = \widehat{ADO}$, et comme on a également $AD = CX$ et $DO = OX$, donc ADO et CXO sont bien isométriques, d'où $\widehat{OCD} = \widehat{OCX} = \widehat{OAD}$, et on a fini.

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Combinatoire et géométrie

1 Chasse aux angles (Baptiste)

Ce cours est inspiré de l'excellent cours de Domitille et Benoît au stage de Valbonne 2022.
du stage de Valbonne 2022

2 Principe des tiroirs (Maena)

Théorème 1.
Principe des tiroirs SSi $n+1$ éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient au moins 2 éléments.

Démonstration. Par l'absurde, si tous les ensembles contiennent 0 ou 1 élément, alors le nombre d'éléments est inférieur ou égal à n. □

Théorème 2.
Principe des tiroirs généralisé SSi $nk+1$ éléments doivent être rangé dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble avec $k+1$ éléments.

Théorème 3.
Principe des tiroirs infini SSi une infinité d'éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient une infinité d'éléments.

Remarque : On parle d'éléments et d'ensembles, mais en pratique les ensembles sont généralement une "propriété", et on cherche à montrer que deux éléments ont la même propriété.

Note : Cela s'appelle le principe des tiroirs, car on parle généralement de *chaussettes* pour les éléments et de *tiroirs* pour les ensembles. Ainsi, le principe se reformule de la manière suivant : si on a $n+1$ chaussettes à ranger dans n tiroirs, un des tiroirs contiendra au moins deux chaussettes. Les *tiroirs* et les *chaussettes* seront parfois précisés pour clarifier les raisonnements.

– Exemples –

Exercice 1
Baptiste veut attraper une paire de chaussettes dans le noir. Il a 6 chaussettes rouges, 13 bleues et 8 blanches. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'en avoir 2 de même couleur ?

Exercice 2
Une personne a entre 0 et 300000 cheveux sur la tête. L'agglomération de Marseille contient 2000000 habitants. Combien de Marseillais au minimum ont le même nombre de cheveux ?

Exercice 3
Combien de personnes faut-il au minimum pour que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Exercice 4
Il y a n élèves au stage de Cachan Junior et certains se sont serrés la main en arrivant. Montrer qu'il existe deux personnes ayant serré le même nombre de mains.

– TD –

Exercice 5
Montrer que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est toujours pair pour a, b, c entiers.

Exercice 6
On colorie le plan en blanc et noir. Montrer qu'il existe deux points de même couleur distant d'exactement $1cm$.

Exercice 7
On prend une quadrillage 3×7 et on colorie chaque case en noir ou blanc. Montrer qu'il existe un rectangle inclu dans le quadrillage tel que ses 4 sommets soient de la même couleur.

Exercice 8
On prend 5 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe 2 points dont la distance est inférieure à $\frac{3}{4}$.

Exercice 9
On prend cinq points distincts du plan à coordonnées entières. Montrer qu'il en existe d'eux tel que le milieu du segment les reliant soient à coordonnées entières.

Exercice 10

1. 4 points sont sur un cercle. Montrer qu'il existe un demi-cercle (bords compris) qui contient 3 de ces points.
2. 5 points sont sur une sphère. Montrer qu'il existe une demi-sphère (bords compris) qui contient 4 de ces points.

Exercice 11
On considère un tableau 3×3 tel que sur chaque case figure -1, 0 ou 1. On considère la somme de chacune des colonnes, lignes et grandes diagonales. Montrer que parmi ces sommes, il y en a toujours deux qui sont égales.

Exercice 12
Bérénice a écrit 2024 nombres entiers sur une feuille de papier. Démontrer que, parmi ces 2024 nombres, il en existe deux dont la différence est divisible par 2023.

Exercice 13
Au goûter, les quinze élèves du groupe A se sont partagés cent bonbons. Démontrer qu'il y a au moins deux élèves qui ont pris le même nombre de bonbons.

Exercice 14
On tire 51 nombres entre 1 et 100. Montrer que l'on peut en trouver deux tels que l'un des deux divise l'autre.

Exercice 15
Montrer que le produit de cinq entiers consécutifs (strictement positifs) ne peut pas être un carré.

Exercice 16
On choisit 10 entiers quelconques inférieurs à 100. Montrer qu'on peut trouver 2 sous-ensembles de ces 10 entiers, A et B disjoints et non vides de même somme.

Généralement, un exercice ne va pas reposer entièrement sur le principe des tiroirs. Ce dernier sere juste une étape intermédiaire dans un problème de combinatoire plus large, voir d'algèbre ou d'arithmétique comme par exemple dans l'exercice 14 ou 15. L'objectif à long terme est de le garder dans un coin de sa tête comme d'un outil, et de ne pas hésiter à "forcer" son apparition parfois pour obtenir des informations supplémentaires sur les objets considérés.

Solution de l'exercice 1
Ici, les *tiroirs* sont les couleurs, car on en veut au moins deux de la même couleur. Les *chaussettes* sont les chaussettes. Il y a trois couleurs donc on prend quatre chaussettes.

On constate bien que les *tiroirs* sont une "propriété" : la couleur. Chaque chaussette a forcément une des 3 couleurs donc on peut les ranger dans ces catégories.

Solution de l'exercice 2
Il faut appliquer ici le principe des tiroirs généralisés. Les *chaussettes* sont les Marseillais et le nombre de cheveux possible d'avoir les *tiroirs*. Il y a 300001 tiroirs pour 2000000 Marseillais. Par le principe des tiroirs généralisés, $300001 \times 6 + 199994 = 2000000$, donc il y a au moins 7 personnes qui ont le même nombre de cheveux.

Solution de l'exercice 3
On veut au moins deux anniversaires le même jour, les *tiroirs* sont donc les jours et les *chaussettes* sont les personnes. Il y a 366 jours, il nous faut donc 367 personnes.

Solution de l'exercice 4
On veut montrer que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est toujours pair.

Une mauvaise idée serait de développer ce produit. En effet, avoir une quantité sous forme de produit permet d'avoir rapidement des informations sur sa divisibilité. Ici il suffit qu'un des trois facteurs soit divisible par 2.

Les *tiroirs* et *chaussettes* sont moins immédiats. On peut remarquer qu'on parle de parité, un tiroir classique est "être pair" ou "être impair" (vous remarquerez que encore une fois c'est une propriété).

On a trois nombres a, b et c, donc par le principe des tiroirs, deux ont la même parité. Donc leur différence sera paire, ce qui nous donne bien un facteur pair.

Solution de l'exercice 5
On cherche à montrer qu'au moins deux personnes ont serré le même nombre de mains. Directement, les *chaussettes* sont donc les personnes et les *tiroirs* le nombre de mains serrées (le "au moins deux" indique qui seront les chaussetes, et la propriété qui suit indique les tiroirs).

Il y a n élèves, donc un élève peut serrer au plus $n-1$. Or si un élève serre $n-1$ mains, aucun élève n'aura serré 0 main. Donc de 1 à $n-1$ on a bien $n-1$ tiroirs. Dans l'autre sens, si un élève serre 0 main, aucun élève n'aura serré $n-1$ mains donc encore une fois, de 0 à $n-2$ on a $n-1$ tiroirs. On conclut avec le principe des tiroirs.

Solution de l'exercice 6
On cherche "au moins deux" points de même couleur distant d'exactement $1cm$. Directement les *chaussettes* sont les points. Les *tiroirs* sont les couleurs. Si on a trois points à distance 1 les

uns des autres, on peut conclure directement. Pour cela, il faut remarquer que si on prend un triangle équilatéral de côté 1, ses sommets respectent cette condition.

Vous pouvez vous amuser à chercher des constructions avec plus de points telles que tous les points soient équidistants les uns des autres pour pouvoir faire cet exercice avec plus de points et plus de couleurs !

Solution de l'exercice 7

Chaque colonne comporte trois cases qui peuvent être coloriées en deux couleurs différentes, soit $2^3 = 8$ possibilités de remplissage. Si on se retrouve avec le même remplissage pour deux colonnes différentes, on a d'office un rectangle.

Supposons qu'une colonne a ses trois cases de la même couleur, disons noir. N'importe quelle autre colonne qui comporte au moins deux cases noires forment un rectangle avec cette colonne. On veut donc éviter quatre remplissages (3 cases noires ou 3 possibilités avec deux cases noires). Donc il reste que quatre autre remplissages, pour les 6 colonnes, donc par principe des tiroirs on aura forcément deux colonnes identiques donc un rectangle.

Si on a aucune colonne qui a ses trois cases de la même couleur, il y a alors 6 remplissages possibles, donc de nouveau par principe des tiroirs, deux colonnes ont le même remplissage, cad forment un rectangle.

Solution de l'exercice 8

Les *chaussettes* sont les points. On divise notre carré en quatre petits carrés égaux (en rejoignant les milieux des côtés opposés), ce sont nos *tiroirs*. La plus grande distance dans un petit carré est sa diagonale $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$. Comme on a 5 points, on aura forcément deux points dans un même petit carré qui respecteront la condition.

Solution de l'exercice 9

De nouveau, on peut deviner en lisant l'énoncé que les *chaussettes* vont être les points. Les *tiroirs* sont moins évidents. On considère les coordonnées des points, on les représente donc sous la forme (x, y). Si on a deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), le milieu du segment est $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. La condition pour que le milieu soit à coordonnées entières est que x_1 et x_2 aient la même parité, de même pour y_1 et y_2. De nouveau la parité va être nos *tiroirs*. Plus précisément, les couples de parité, à savoir $(P, P), (P, I), (I, I), (I, P)$. On a bien 4 tiroirs pour 5 points, donc deux points vont avoir la même parité pour respectivement x_1, x_2 et y_1, y_2.

Solution de l'exercice 10

1. Naturellement, les *tiroirs* sont les demi-cercles et les *chaussettes* sont les points. Maintenant, tout ce qu'on peut dire avec cette information est qu'un demi-cercle contient au moins 2 points. Il faut donc raffiner les choix des demi-cercles. L'énoncé précise : bords compris. On peut donc tracer un diamètre qui passe par un des points, ce point appartient aux deux demi-cercles et ainsi il reste 3 points à répartir entre deux demi-cercles. Il y aura donc un demi-cercle avec au moins 2 points par principe des tiroirs + le point sur le diamètre, ce qui conclut.

2. L'idée est la même. Cette fois-ci c'est un plan qui va séparer notre sphère en demi-sphère. Une droite pour le diamètre est définie par un point et le centre. Un plan ici est défini par le centre et deux points. On peut donc placer deux points d'office dans les deux demi-sphères ! Il reste donc 3 points à séparer dans les deux demi-sphères et on conclut de la même manière.

Solution de l'exercice 11
On veut deux sommes égales, les *chaussettes* vont donc être les différentes sommes (ce qui correspond au nombre de lignes, colonnes et diagonales) et les *tiroirs* les valeurs que ces sommes peuvent prendre. On a 8 lignes + colonnes + diagonales, or les valeurs possibles des sommes vont de -3 à 3 donc 7 valeurs. On conclut par principe des tiroirs.

Solution de l'exercice 12
On cherche deux nombres dont la différence est divisble par 2022. On peut donc intuiter que les *chaussettes* sont les nombres. Pour les *tiroirs*, on a utilisé la parité dans un exercice précédent. On peut généraliser cette idée à la congruence module m. Donc pour la parité, on a bien toujours deux tiroirs, congru à 0 quand c'est pair et à 1 quand c'est impair. Ici, si on regarde la congruence, on aura 2021 tiroirs (2021 restes différents possibles). On sait donc qu'on a deux nombres qui ont la même congruence module 2022, et ainsi leur différence sera divisible par 2022.

Solution de l'exercice 13
Le principe des tiroirs est moins explicite dans cet exercice. Supposons que tous les enfants aient pris un nombre différent de bonbons. Il y aurait donc 15 valeurs de "bonbons pris" différentes (nos tiroirs). Supposons naïvement que les valeurs possibles sont $0, 1, 2, \ldots, 13, 14$. La somme des bonbons est 105, donc ce n'est pas possible. On se rend compte que considérer ces valeurs suffisents, car si des enfants ont pris encore plus de bonbons, la quantité totale serait juste plus grande. Donc on a au plus 14 valeurs (tiroirs) différentes pour 15 enfants, par principe des tiroirs, deux enfants ont pris le même nombre de bonbons.

Solution de l'exercice 14
Ici, on aimerait trouver une forme qui permette d'exploiter des relations de divisbilité. Une première écriture qui peut venir en tête est la décomposition en facteurs premiers. Cependant, on remarque assez vite que la quantité de facteurs différents ne rend pas le problème plus simple. On cherche 50 tiroirs, on peut penser à écrire chaque entier n sous la forme $2^k \times m$ avec 2^k la partie paire et m la partie impaire, car il y a 50 parties impaires possibles (nombres impaires en 1 et 100). Ainsi il existe deux entiers de la forme $2^k \times m$ et $2^{k'} \times m$, avec m identique. Si on suppose $k < k'$, alors on a $(2^k \times m) | (2^{k'} \times m)$ ce qui résoud le problème.

Solution de l'exercice 15
Soit a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 nos cinq entiers consécutifs. Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier. Il peut y avoir au plus un seul entier parmis 5 entiers consécutifs qui est divisible par p. Ainsi, puisque le produit des cinq entiers est un carré, si p apparaît dans la décomposition d'un des a_i, il a une puissance paire. En fonction des puissances de 2 et 3 dans la décomposition en facteurs premiers des a_i, on a chacune des situations suivantes possibles :

1. a_i est un carré si la puissance de chacun de ses facteurs est paire.
2. a_i est $2\times$ un carré, si juste 2 a une puissance impaire.
3. a_i est $3\times$ un carré, si juste 3 a une puissance impaire.
4. a_i est $6\times$ un carré, si 2 et 3 ont une puissance impaire.

D'après le principe des tiroirs, il existe deux a_i, a_j avec $i \neq j$ qui sont dans la même catégorie. La différence entre deux carrés consécutifs n^2 et $n^2 + 2n + 1$ est $2n + 1$. Donc la différence minimale est pour $n = 1$, c'est-à-dire 3. Donc si a_i et a_j sont tous deux dans la catégorie (2), (3) ou (4), leur différence minimale est $2 \times 3 = 6$, ce qui est absurde car ils sont parmis 5 entiers consécutifs. Donc a_i et a_j sont forcément dans la catégorie (1). Les deux seuls carrés à distance inférieure à 5 sont 1 et 4, donc il faut forcément que $(a_1, a_{2,3}, a_4, a_5) = (1, 2, 3, 4, 5)$. Or

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5! = 120$$

n'est pas un carré. Donc c'est bien impossible.

Solution de l'exercice 16
Les *chaussettes* vont être les différents sous-ensembles des 10 entiers et les *tiroirs* les valeurs possible de la somme de leurs éléments. Pour le nombre de tiroirs, la valeur maximale d'un ensemble est $91 + 92 + \cdots + 100 < 10 * 100 = 1000$, donc le nombre de tiroirs va être inférieur à 1000 (ici prendre une borne grossière suffit, on pourrait éventuellement raffiner en prenant la valeur maximum exacte). Il y a $2^{10} - 1 = 1023$ (-1 pour enlever l'ensemble vide) sous-ensembles possibles. Il y a donc deux sous-ensembles distincts qui ont la même somme. Cependant il reste une subtilité, on les veut distincts. Pour ça, il faut enlever les éléments en communs, puisqu'on enlèvera la même quantité, leur somme sera toujours égale, et ils ne seront jamais vide car distincts.

3 Angle tangent (Raphaël)

Ce cours reprend la section 2.1.1 de l'excellent cours Progresser en géométrie de Martin, disponible sur le site de la POFM.

4 Invariants/coloriages (Amélie et Aurélien)

Invariants

Certains problèmes de combinatoire ont une situation initiale, une situation finale et des opérations prédéfinies que l'on peut appliquer.

Exercice 1
On écrit les nombres $2, 3, 5, 7, 11$. Une opération consiste à prendre deux nombres de même parité et à les remplacer par deux copies de leur moyenne arithmétique. Peut-on obtenir 5 fois le même nombre après un nombre fini d'opérations ?

Une méthode classique (et très efficace) pour résoudre de tels exercices consiste à exhiber un invariant.

Pour cela, on cherche quelque chose qui n'est pas modifié par les opérations autorisées.

Solution de l'exercice 1
Une opération ne modifie pas la somme totale : ce sera donc notre invariant. Si l'on obtient 5 fois le même nombre à la fin, la somme totale doit être divisible par 5. Or, $2+3+5+7+11 = 28$ ne l'est pas : ce n'est donc pas possible.

Exercice 2
Théo et Antoine se déplacent sur les points du plan à coordonnées entières. Théo se trouve initialement sur $(42, 42)$ et Antoine sur $(0, 1)$. À chaque tour, ils se déplacent d'une unité verticalement ou horizontalement. Peuvent-ils se retrouver sur la même case ?

Solution de l'exercice 2
On colorie les cases de somme de coordonnées paire en rouge, les autres en bleu (on obtient une sorte de damier). À chaque tour, Théo et Antoine changent de couleur de case. Ils ne sont pas sur la même couleur au début, ils ne le seront donc jamais. En particulier, ils ne seront jamais sur la même case.

Pavages

Définition 1.
Faire un **pavage** consiste à recouvrir une forme géométrique donnée (par exemple un carré 4×4) par des pièces données (par exemple des dominos 1×2), que l'on peut généralement tourner dans tous les sens.

Pour démontrer qu'un pavage est impossible, on s'appuie généralement sur un argument arithmétique (voir ex 2) ou sur un coloriage (voir ex 3)

Exemple 2.
Peut on paver un carré 7×7 avec des pièces 3×1 et des pièces constituées de 3 cases en forme de L ?

Solution : Non, on ne peut pas : les pièces recouvrent un nombre de cases divisible par 3, or 49 ne l'est pas.

Exemple 3.
Soit n un entier naturel. On possède un carré de $2n \times 2n$ cases où on a retiré la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver un tel carré avec des dominos ?

Solution : Non ! On colorie notre carré complet comme un damier, en commençant par une case noire. Dans notre situation, il manque deux cases noires : il y a plus de cases blanches que de cases noires. Or, chaque domino recouvre une case de chaque couleur : le pavage est impossible.

Obstacles à placer

Certains problèmes décrivent une grille où on peut placer des tuiles, et il faut placer un miminum d'obstacles d'une certaine forme pour empêcher tout placement de tout tuile.

Exercice 3
On considère une grille 9×9 où on veut placer un mimimum de pièges 1×1 pour qu'on ne puisse plus placer de tuile 3×1 (verticales ou horizontales).

Solution de l'exercice 3
En diagonale+ pavage par des 3 times 1.

Exercice 4
On considère une grille 6×6 où on veut placer un mimimum de pièges 1×1 pour qu'on ne puisse plus placer de tuile de trois cases en L (on a le droit de les tourner).

Solution de l'exercice 4
Dans un petit carré 2×2, si moins de deux cases sont occupées par un obstacle alors on peut toujours placer un L.

On trouve alors un coloriage avec 18 cases bloquées (par exemple en damier).

TD

Exercice 5
On possède 64 ampoules initialement éteintes, réparties dans un carré de 8×8. Au bout de chaque ligne (respectivement chaque colonne), on trouve un interrupteur pouvant changer l'état de toute la ligne (rep. la colonne). Peut-on n'avoir que l'ampoule en haut à gauche allumée ?

Exercice 6
On considère une grille 5×5, et on veut placer des obstacles de taille 1×1 pour empêcher de paver la grille avec des tuiles 3×1. Combien doit-on en poser au minimum ?

Exercice 7
Sur une grille 2024×2024, on peut bouger un jeton d'une case vers une autre si ces deux cases ont un côté commun. Est-il possible, en partant avec le jeton dans le coin inférieur gauche, d'amener le jeton dans le coin supérieur droit en passant une et une seule fois par toutes les cases ?

Exercice 8
Dans un grand hall 5×5, les organisateurs d'un forum ont décidé d'empêcher les espaces vides de 2×2 en plaçant des murs entre deux cases. Quel est le nombre minimal de murs à poser ?

Exercice 9
On possède 2024 piles de jetons, la i-ième pile contenant p_i jetons, où p_i est la i-ième nombre premier. On peut :

— Séparer une pile en deux et ajouter un jeton à l'une des deux piles ainsi créées

— Fusionner deux piles et ajouter un jeton à la nouvelle pile
Peut-on, après un nombre fini d'opérations, obtenir 2024 piles de 2024 jetons ?

Exercice 10
Pour quels entiers n peut-on paver une grille $n \times n$ avec des tétraminos en forme de T ?

Exercice 11
Magellan aborde lors de son tour du monde une île où se trouve une population de ca- méléons : 155 sont rouges, 49 bleus et 96 verts. Chaque fois que deux caméléons de couleur différente se rencontrent, ils prennent la troisième couleur. Sinon, il ne se passe rien. Lorsque Robinson Crusoé est naufragé sur la même île quelques siècles plus tard, verra-t-il encore plusieurs couleurs de caméléons ?

Exercice 12
Le carrelage du palais de Minos est recouvert de carreaux de taille 2×2 et 1×4. Malheureusement, une d'elle s'est cassé et il ne reste plus que des dalles de rechange de l'autre forme.
Peut-il réorganiser les carreaux déjà placés pour effectuer sa réparation ?

Exercice 13
Amélie, Baptiste et Clémentine se trouvent dans le plan, aux coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. À chaque seconde, l'un des trois se déplace d'une certaine distance sur une droite parallèle à la droite qui relie les deux autres. Peuvent-ils arriver aux positions $(1, 0)$, $(0, 1)$, $(2, 2)$?

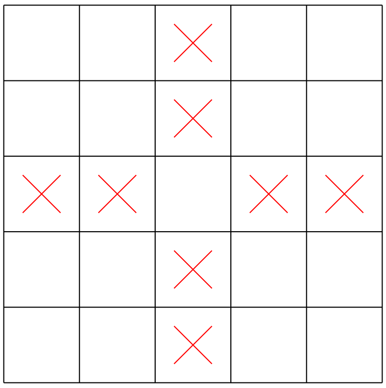
Exercice 14
On considère une grille 6×6. Un pion est autorisé à se déplacer d'aborde d'une case, puis de deux, puis d'une, puis de deux... Peut-il parcourir une et une seule fois les 36 cases en respectant cette alternance ?

Exercice 15
Rémi et Martin jouent à un jeu : Rémi pose un cavalier sur un échiquier 8×8. Puis les joueurs déplacent à tour de rôle le cavalier selon les règles des échecs, en commençant par Martin. Celui qui retourne sur une case qui a déjà été occupée par le cavalier perd.
Qui a une stratégie gagnante ?

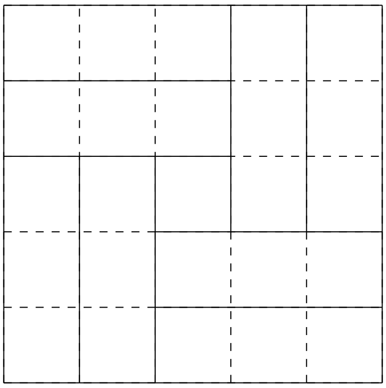
Exercice 16
On considère une grille $2^n \times 2^n$ où l'on a retiré une case. Peut-on la paver avec des pièces en forme de L (de taille 3) ?

Solution de l'exercice 5
Une opération ne modifie pas la parité d'ampoules allumées. Au début, il y en a un nombre pair (0) et à la fin, un nombre impair (1) : c'est absurde.

Solution de l'exercice 6
On sait placer 8 obstacles pour empêcher les triominos d'être placés.



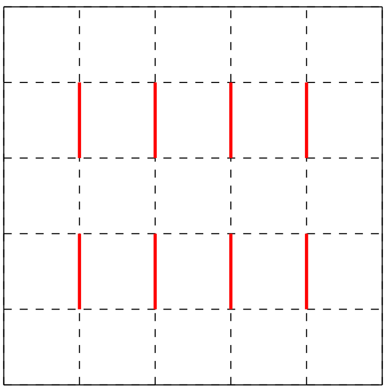
De plus, on peut placer 8 triominos droits disjoints dans le carré, comme suit.



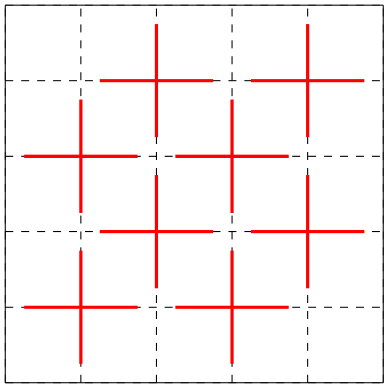
Sur chacun il faut placer au moins un piège et ces pièges doivent tous être différents, donc il faut au moins 8 pièges.

Solution de l'exercice 7
On peut repérer que la parité de la somme des coordonnées et du nombre de déplacements effectués ne varie pas. Or, la somme est paire au début et comme il faut faire $2024^2 - 1$ déplacements pour visiter toutes les cases, la : c'est impossible.

Solution de l'exercice 8
Les organisateurs doivent construire 8 murs. Ils peuvent le faire comme suit.



De plus, dans chacune des croix sur la figure suivante, ils doivent placer un moins un mur, sinon cela formerait une salle.



Comme il y a 8 croix, il faut au moins 8 murs et la construction précédente était optimale.

Solution de l'exercice 9
On peut repérer deux invariants :

— la parité du nombre de piles avec un nombre pair de jetons

— la parité de la somme du nombre de piles et du nombre de jetons

Dans les deux cas, les situations initiale et finale ne correspondent pas.

Solution de l'exercice 10
Chaque pièce recouvrnt 4 cases, il faut dans un premier temps que n soit pair. Avec un coloriage en damier, on peut disitinguer deux types de pièces : celles qui recouvrent 3 cases blanches et une case noire, et celles qui recouvrent 3 cases noires et une case blanche. Comme n est pair, il y a autant de cases de chaque couleur, donc autant de pièces de chaque type. Il y a donc un nombre pair de tuiles, et comme chacune recouvre 4 cases, n^2 doit être divisible par 8, donc n doit être divisible par 4. Si tel est le cas, on trouve un pavage qui fonctionne sur un carré 4×4 et que l'on peut reproduire.

Solution de l'exercice 11
Notons r, b, v les nombres de caméléons rouges, bleus et verts respectivement. Lorsque deux caméléons se rencontrent, la congruence modulo 3 des différences $r-b$, $r-v$, $b-v$ ne changent pas. Grâce à ces invariants, on sait que l'on a toujours $r - b \equiv 1 \mod 3$, $b - v1 \mod 3$ et $r - v \equiv 1 \mod 3$. Comme $r + b + v = 300 \equiv 0 \mod 3$, on ne peut pas arriver à une situation dans laquelle une des couleurs compterait 300 caméléons et les autres 0.

Solution de l'exercice 12
Voir cours donné par Aline à Valbonne 2020 en groupe B.

Solution de l'exercice 13
L'invariant à considérer est l'aire du triangle formé par les trois animatheurs. Or, cette aire vaut $\frac{1}{2}$ au début, et devrait valoir $\frac{3}{2\sqrt{2}}$, c'est donc impossible.

Solution de l'exercice 14
Voir l'exercice 4 de l'entraînement de fin de parcours du groupe B au stage de Valbonne 2022.

Solution de l'exercice 15
A l'aide d'un coloriage, on associe les cases deux à deux de telle façon que Martin puisse répondre à chaque coup de Rémi par une case qui n'a jamais été occupée. Comme il y a une nombre pair de case, Martin gagne.

Solution de l'exercice 16

On fait une récurrence. Pour $n = 1$, c'est bon. On suppose la propriété vraie jusqu'à n, et on considère une grille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ à laquelle il manque une case. Il existe une sous-grille de taille $2^n \times 2^n$ dans laquelle se trouve la case manquante. Sans perte de généralité, on suppose qu'il s'agit du coin supérieur gauche. On applique l'hypothèse de récurrence à ce carré-là. Puis, on pave le coin supérieur droit sans son coin inférieur gauche (on sait le faire par hypothèse de récurrence), le coin inférieur gauche sans son coin supérieur droit et le coin inférieur droit sans son coin supérieur gauche. Les trois cases restantes forment un triomino.

5 Triangles semblables (Rémi)

Cours

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si ils sont proportionnels c'est-à-dire si il existe k un réel (positif) tel que $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ Autrement dit si en augmentant la taille de l'un et eventuellement en le retournant on peut les superposer. Cela se traduit par des égalités d'angles et de rapports de longueurs :
1) Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs angles sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ On note alors $ABC \sim A'B'C'$
2) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

Exercices

Exercice 1
(Droite des milieux) Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de $[AB]$ et $[AC]$. Montrer que $(ED)//(BC)$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle. On note D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 3
(Pythagore) Soit ABC est un triangle rectangle en A. Montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$.

Exercice 4
(Puissance d'un point) Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites (AB) et (CD) (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P. Montrez que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Exercice 5
(Puissance d'un point intérieur au cercle) Soit ω un cercle et P un point hors du cercle. Soient (d) et (d') deux droites passant par P qui intersectent chacune le cercle deux fois. On nomme ces intersections A, A' et B, B'. Soit X l'intersection des droites (AB') et $(A'B)$. Montrer que $XA \cdot XB' = XB \cdot XA'$.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de $[AC]$. On note E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[AD]$. Montrer que $\dfrac{ME}{MF} = \dfrac{AD}{AB}$.

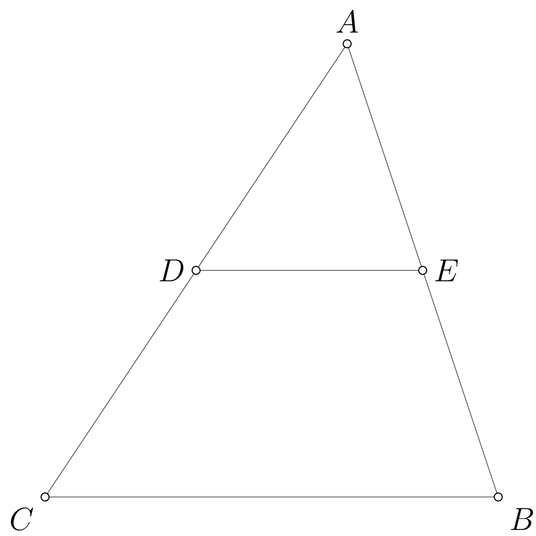
Exercice 7
(Ptolémée) Soit A, B, C, D quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Exercice 8
Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. Soit L le point d'intersection de (FC) et (BD), et K celui de (EC) et (BD), Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC). Montrer que $CP = CQ$.

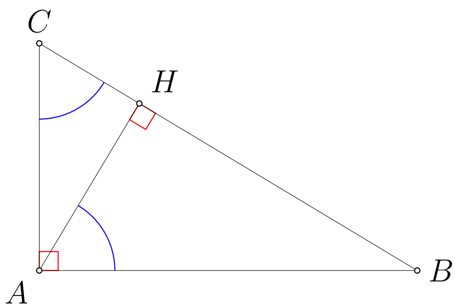
Exercice 9
Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2, s'intersectant en deux points X et Y. Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y. On note B l'intersection de (AY) avec Ω_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Solutions

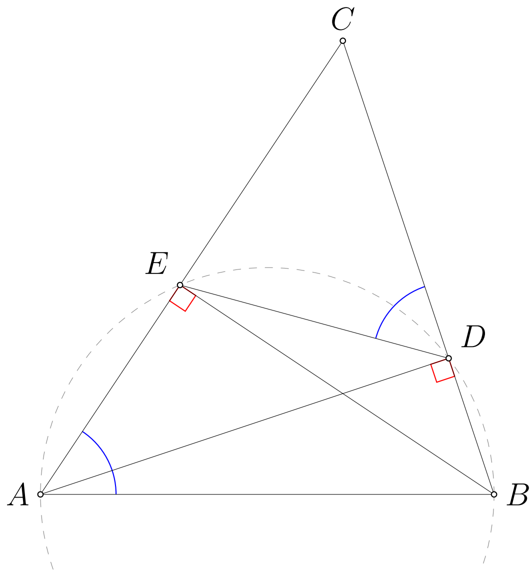
Solution de l'exercice 1
On a $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$ On a donc bien $AED \sim ABC$ donc $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ donc $(ED)//(BC)$



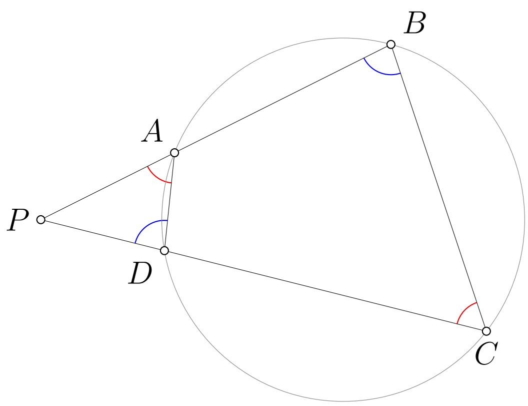
Solution de l'exercice 2
Soit H_A le pied de la hauteur issue de A : On a $ABC \sim H_ABA \sim H_AAC$ donc $\frac{AB}{AH_B} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH_A$ De même $\frac{AC}{AH_C} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = BC \cdot CH_A$ Donc on a bien $AB^2 + AC^2 = BC(H_AB + H_AC) = BC^2$



Solution de l'exercice 3
On a $ABDC$ cocycliques donc $\widehat{CDE} = 180 - \widehat{BDE} = \widehat{BAC}$ ce qui conclut

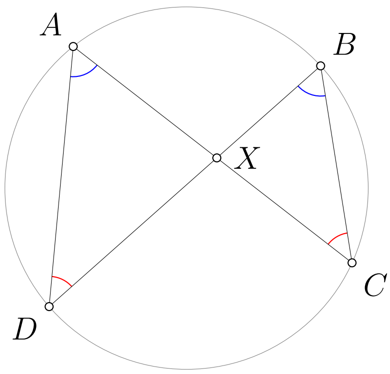


Solution de l'exercice 4
On a $PCA \sim PBD$ donc $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \Leftrightarrow PC \cdot PD = PA \cdot PB$



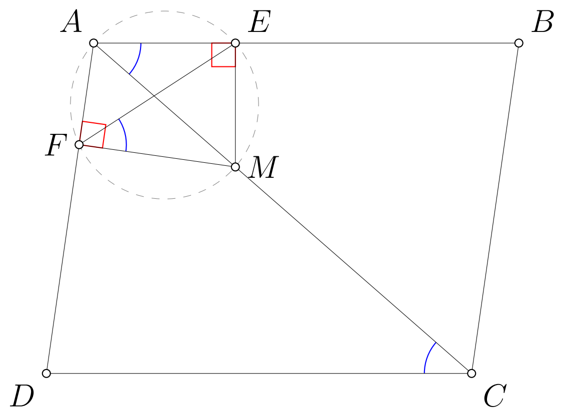
$$PA \cdot PB = PC \cdot PD$$

Solution de l'exercice 5
On a $AA'X \sim BB'X$ Il vient donc $\frac{AX}{BX} = \frac{A'X}{B'X} \Rightarrow AX \cdot XB' = XB \cdot XA'$



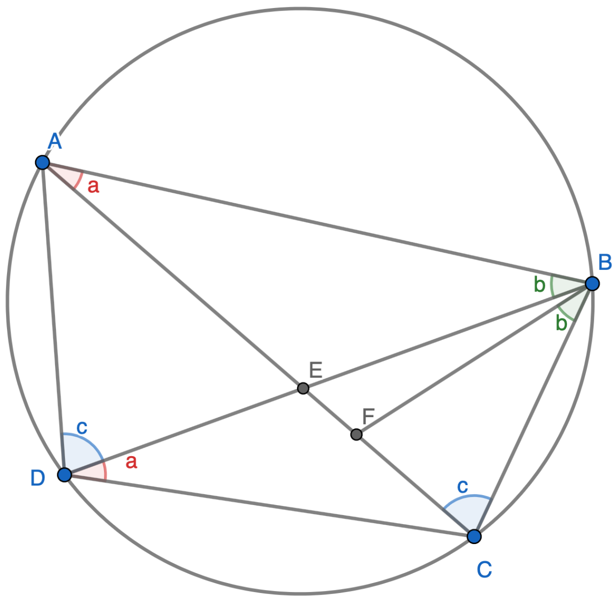
Solution de l'exercice 6

On a premièrement $\widehat{AFM} = 90 = 180 - 90 = 180 - \widehat{AEM}$ Donc $AEMF$ sont cocycliques. Donc $\widehat{EMF} = 180 - \widehat{FAE} = 180 - \widehat{BAD}$ Or on est dans un parallélograme donc $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAD} = \widehat{EMF}$. On a de plus $\widehat{EFM} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ On a donc les triangles MFE et BAC semblables donc $\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$



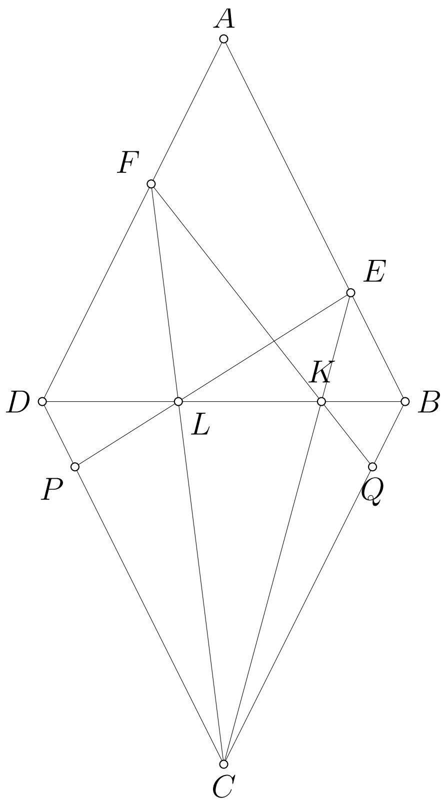
Solution de l'exercice 7

On nomme E le point d'intersections des diagonales et F le point de EC tq $\widehat{ABE} = \widehat{FBC}$ On a $BFA \sim BCD$ et $BFC \sim BAD$ donc $\frac{AF}{AB} = \frac{DC}{DB}$ et $\frac{CF}{CB} = \frac{DA}{DB}$ donc $(AF + FC) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$



Solution de l'exercice 8

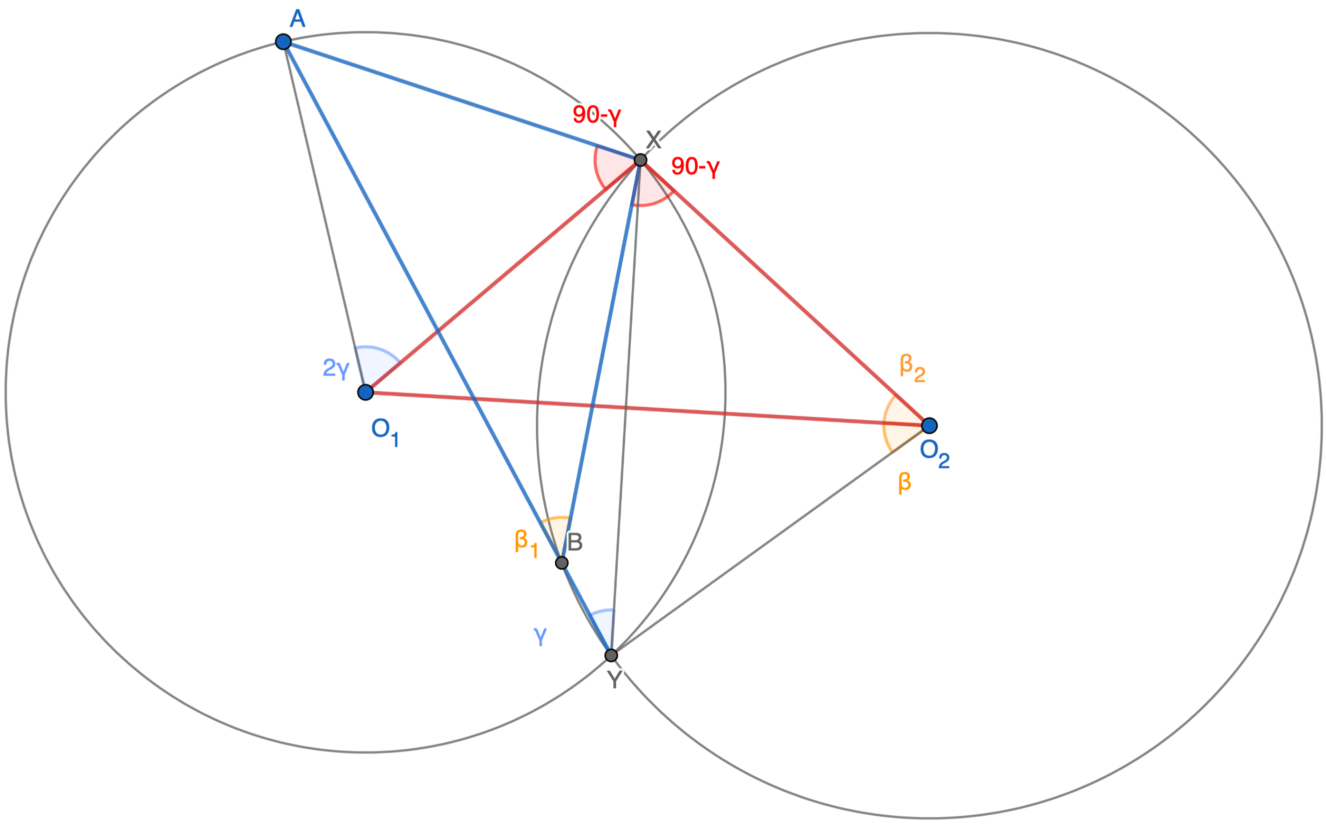
On remarque que $BQK \sim KFD$ ce qui nous donne $\frac{BQ}{FD} = \frac{QK}{DK}$
de même on a donc $KEB \sim KCD$ donc $\frac{KB}{KD} = \frac{EB}{CD}$
En combinant les deux on obtient $\frac{QK}{DF} = \frac{EB}{CD}$ cad $QB = \frac{EB \cdot DF}{CD}$
on réitère : $DPL \sim BEL$ donc $\frac{DP}{BE} = \frac{DL}{BL}$
de même $DFL \sim BCL$ donc $\frac{DF}{BC} = \frac{DL}{BL}$
en combinant on a donc $DP = \frac{DF \cdot BE}{BC} = \frac{EB \cdot DF}{CD} = BQ$
on a donc bien $CQ = CP$



<u>*Solution de l'exercice 9*</u>
Soit $\beta = \widehat{ABX}$. On a donc $\widehat{XO_2O_1} = \frac{1}{2}\widehat{XO_2Y} = 180 - \widehat{XBY} = \beta$ De plus, soit $\gamma = \widehat{XYA}$, on a $\widehat{A0_1X} = 2\gamma$ donc $\widehat{AXO_1} = 90 - \gamma$. Dans le même temps on a $\widehat{BXO_2} = \widehat{YX0_2} + \widehat{BXY} = 90_\beta + (180 - (180 - \beta) - \gamma) = 90 - \gamma$ Donc

$$\widehat{AXB} = \widehat{AXO_1} + \widehat{O_1XB} = \widehat{YXB} + \widehat{O_1XB} = \widehat{O_1XO_2}$$

Donc on a bien $XO_1O_2 \sim XAB$


A
90-γ
X
90-γ
2γ
O1
β2
O2
β
β1
B
γ
Y

6 Principe de l'extremum et optimisation (Corentin et Martin)

Introduction (qui fait aussi office de cours)

Quelques rappels :

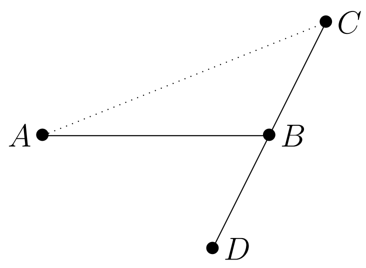
— Un ensemble **non-vide** d'entiers **naturels** admet toujours un **minimum**.
— Plus largement, un ensemble **fini et non-vide** de nombres réels admet toujours un maximum et un minimum.

Et ... c'est tout!! Le principe de l'extremum est aussi simple et élégant qu'utile. On le retrouve souvent dans des problèmes où l'on demande de construire une certaine situation, ce que l'on fait en utilisant la maximalité/minimalité d'un certain élément. Autrement, on peut l'utiliser dans un raisonnement par l'absurde pour montrer qu'une telle construction est impossible.
Plus largement, ce principe est un outil toujours intéressant à utiliser dès qu'il peut l'être, il permet alors souvent d'avancer dans un problème.

Un petit exemple pour commencer :

Exemple 1.
On se donne des points dans le plan tels que chaque point soit le milieu de deux autres. Montrer que les points sont en nombre infini.

Démonstration.
On suppose par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de points. On considère un couple de points (A, B) tel que la distance AB soit maximale. B est par hypothèse le milieu de deux points qu'on nommera C et D. On a alors $AC > AB$ ou $AD > AB$, contredisant la maximalité de AB. Conclusion, les points sont bien en nombre infini.



□

Exercices

Exercice 1
Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer que l'on peut trouver deux garçons g et g' et deux filles f et f' tels que g a dansé avec f mais pas f' et g' a dansé avec f' mais pas f.

Exercice 2
On considère tous les points du plan à coordonnées entières. A chaque point, on associe un

entier strictement positif tel que chaque nombre est la moyenne arithmétique de ses quatre voisins. Montrer que tous les nombres sont égaux

Exercice 3 (Problème de Sylvester)
On se donne n points du plan. On suppose que pour deux points quelconques distincts, il en existe un troisième aligné avec les deux premiers. Montrer que tous les points sont alignés.

Exercice 4
On dispose 3036 nombre réels $a_1, a_2, ...a_{3036}$ sur un cercle, chaque nombre étant égal à la valeur absolue de la différence des deux nombres situés après lui dans le sens horaire. Autrement dit, on a $a_1 =\mid a_2 - a_3 \mid, a_3 =\mid a_4 - a_5 \mid, ..., a_{3035} =\mid a_{3036} - a_1 \mid, a_{3036} =\mid a_1 - a_2 \mid$ La somme de ces nombres est égale à 2024. Quels sont ces nombres ?

Exercice 5
On place les n^2 entiers $1, 2, \ldots, n^2$ dans un tableau $n \times n$ (sans répétition). On dit que deux cases sont voisines si elles ont au moins un point en commun. Prouver qu'il existe deux cases voisines dont la différence des valeurs vaut au moins $n + 1$.

Exercice 6
Dans un cercle, on trace un nombre fini supérieur ou égal à 2 de cordes, tel que chaque corde tracée passe par le milieu d'au moins une autre corde tracée. Montrer que toutes ces cordes sont des diamètres.

Exercice 7
On a placé $n \geq 1$ dépôts d'essence autour d'un circuit. La quantité d'essence totale placée dans ces dépôts est suffisante pour qu'une voiture qui en disposerait puisse faire au moins un tour complet du circuit. Montrer qu'en partant d'un des dépôts, et en s'approvisionnant à chaque dépôt qu'elle croise, une voiture sans essence initialement peut bien réaliser ce tour.

Exercice 8
Soit $n \geq 1$ un entier. Considérons un parlement composé de n députés. On suppose que chaque député a exactement trois ennemis. On suppose que la relation d'inimitié est symétrique (si a est ennemi de b, alors b est ennemi de a). Montrer qu'il est possible de séparer le parlement en deux commissions telles que chaque député ait au plus un ennemi dans sa commission.

Exercice 9
Montrer que tout entier naturel supérieur ou égal à 2 possède au moins un diviseur premier.

Pour la culture : lien avec le principe de récurrence et la descente infinie

Axiome 2 (Principe de récurrence)**.**
Soit $P(n)$ une propriété telle que $P(0)$ est vraie et que pour tout $n \geq 0$, P(n) implique P(n+1). Alors $P(n)$ est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$

Axiome 3 (Principe de descente infinie)**.**
Il n'existe pas de suite strictement décroissante d'entiers naturels.

Proposition 4.
Les trois axiomes suivants sont équivalents :

1. Le principe de récurrence
2. Le principe du minimum
3. Le principe de descente infinie

Démonstration.

(2) ⇒ (1) Soit $P(n)$ une propriété telle que $P(0)$ est vraie et, pour tout $n \geqslant 0$, $P(n)$ implique $P(n+1)$. On pose $E = \{n \in \mathbb{N} \mid P(n) \textit{ est fausse}\}$. Par l'absurde, supposons E non-vide. Par le principe du minimum, E admet alors un minimum n_0. $P(n_0)$ est donc fausse, donc $n_0 > 0$. Par mnimalité de n_0, $P(n_0 - 1)$ est vraie. Donc $P(n_0)$ est vraie aussi, contradiction. On en déduit que E est vide, donc que $P(n)$ est vraie pour tout n.

(1) ⇒ (2) Soit E un ensemble d'entiers naturels qui n'a pas de minimum ; on va montrer que E est vide. On note $P(n)$ la propriété « E ne contient aucun entier inférieur ou égal à n ». Comme E n'a pas de minimum, $0 \notin E$, donc $P(0)$ est vraie. De plus, si $P(n)$ est vraie, alors $n+1$ n'appartient pas à E, sinon ce serait le minimum de E ; $P(n+1)$ est donc vraie. Par le principe de récurrence, $P(n)$ est vraie pour tout n ; ainsi E est vide.

(2) ⇒ (3) Soit (u_n) une suite d'entiers naturels. Par le principe du minimum, il existe un entier naturel n_0 tel que u_{n_0} soit minimal. On a alors $u_{n_0} \leqslant u_{n_0+1}$, et la suite (u_n) n'est pas strictement décroissante.

(3) ⇒ (2) Supposons qu'il existe un ensemble non vide d'entiers naturels, E, n'admettant pas de minimum. Pour tout $n_i \in E$, il existe donc $n_{i+1} \in E$ tel que $n_{i+1} < n_i$. En partant d'un entier $n_0 \in E$, on construit ainsi une suite strictement décroissante d'entiers naturels, dont l'existence contredit le principe de descente infinie.

□

Solutions

Solution de l'exercice 1

Considérons le garçon g qui a dansé avec le plus de filles, f' une fille avec laquelle il n'a pas dansé et g' un garçon avec lequel f' a dansé. Si on ne peut trouver les quatre personnes désirées par l'énoncé, alors pour toute fille f ayant dansé avec g, f doit également avoir dansé avec g'. Mais alors, g' a dansé avec au moins une fille de plus que g, ce qui contredit la maximalité de g. Absurde.

Solution de l'exercice 2

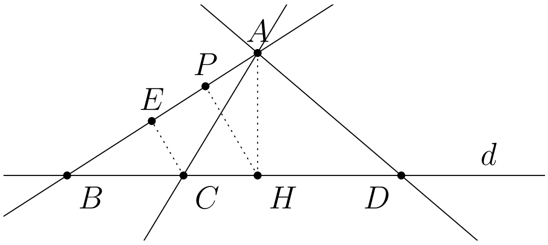
Les valeurs étant des entiers naturels, on peut considérer m la plus petite de ces valeurs. On se place un point ayant cette valeur. On note a, b, c et d les valeurs de ses voisins. On a par hypothèse $m = (a+b+c+d)/4$, et m étant la valeur minimale, elle est inférieure ou égale aux quatre autres. Si l'une des quatre valeurs, disons a, est strictement supérieure à m, on a :

$$m = \frac{a+b+c+d}{4} > \frac{m+b+c+d}{4} \geq \frac{m+m+m+m}{4} = m$$

et donc $m > m$, ce qui est absurde. On a donc nécessairement $m = a = b = c = d$. En chacun des voisins peut s'appliquer ce même raisonnement, et on prouve de proche en proche que les valeurs sont égales à m en tout point.

Solution de l'exercice 3

Pour chaque paire de points distincts, traçons la droite passant par ces deux points. Supposons par l'absurde que tous les points ne sont pas alignés. Autrement dit, tous les points ne sont pas sur une même droite. Il existe donc des distances entre les points et les droites qui sont strictement positives. Considérons donc le point et la droite qui ont la plus petite distance strictement positive. Appelons A ce point et d la droite. Par d, il passe par hypothèse au minimum trois points B, C et D, qu'on place comme sur la figure.



En posant H le projeté orthogonal de A sur d, si $C \in [BH]$, on pose E celui de C sur AB et P celui de H sur AB, et on a par le théorème de Thalès :

$$\frac{CE}{HP} = \frac{BC}{BH} \leq 1$$

d'où : $CE \leq HP$. Or, $HP \cdot AB = AH \cdot BH = 2\mathcal{A}_{ABH}$, ce qui donne :

$$HP = AH \cdot \frac{BH}{AB} < AH$$

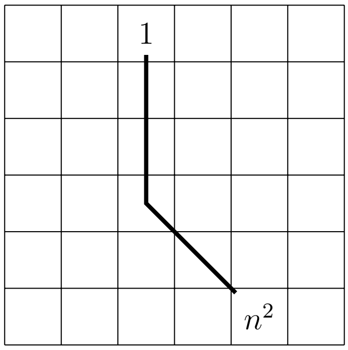
Finalement, on obtient que $CE < AH$.
La distance de C à la droite (AB) est strictement inférieure à celle entre A et d, et un raisonnement similaire dans le cas où $C \in [HD]$ apporte la même conclusion, qui contredit la minimalité de la distance AH. Tous les points sont donc alignés.

Solution de l'exercice 4

Notons que tous les nombres sont positifs d'après l'énoncé. On pose $a_i = max(a_1, a_2, ..., a_{3036})$. Si $a_{i+1} \geq a_{i+2}$, alors $a_i =\mid a_{i+1} - a_{i+2} \mid= a_{i+1} - a_{i+2}$, d'où : $a_{i+1} = a_i + a_{i+2} \geq a_i$ Il faut donc que $a_{i+2} = 0$, pour ne pas contredire la maximalité de a_i. Donc $a_{i+1} = a_i$. Mais alors $a_{i-1} =\mid a_{i+1} - a_i \mid= 0$.
De même, si $a_{i+1} < a_{i+2}$, on trouve que $a_{i+1} = 0$ et $a_i = a_{i+2}$. On trouve finalement de proche en proche que le motif $(a_i, a_i, 0)$ est répété 1012 fois sur ce cercle. En particulier, la somme des nombres disposés sur le cercle vaut $2024a_i$, donc $a_i = 1$. Les nombres disposés sur le cercle sont donc 2024 1 et 1012 0, avec le motif $(1, 1, 0)$ répété 1012 fois.

Solution de l'exercice 5

On peut supposer que $n \geqslant 2$ (si $n = 1$, il n'y a pas de cases voisines). On considère la case contenant 1 et celle contenant n^2. Il existe un chemin passant par au plus n cases voisines.



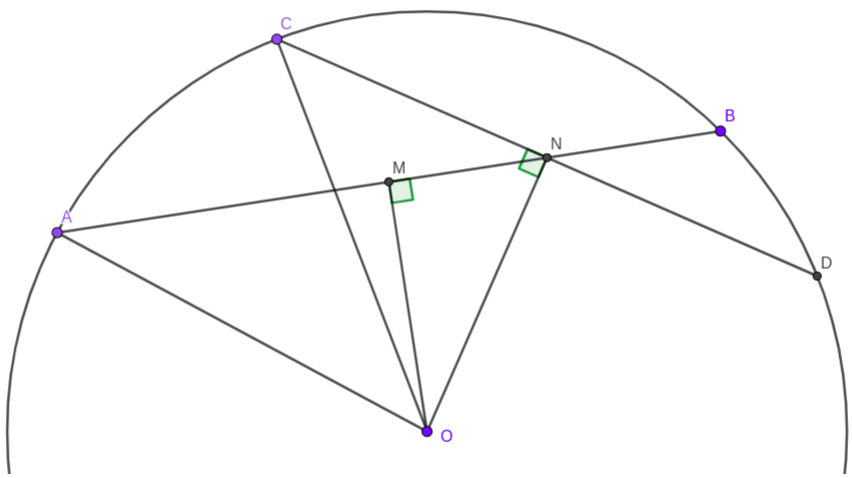
Notons $1 = c_1, c_2, , \ldots, c_{n-1}, c_n = n^2$ les valeurs des cases successives par lesquelles passe le chemin. Supposons par l'absurde que toutes les différences entre deux cases voisines sont inférieures ou égales à n. On a alors :

$$\begin{aligned} n^2 - 1 &= c_n - c_1 \\ &= (c_n - c_{n-1}) + (c_{n-1} - c_{n-2}) + \cdots + (c_2 - c_1) \\ &\leqslant |c_n - c_{n-1}| + |c_{n-1} - c_{n-2}| + \cdots + |c_2 - c_1| \\ &\leqslant \underbrace{n + \cdots + n}_{n-1 \text{ fois}} \\ &\leqslant n^2 - n, \end{aligned}$$

ce qui est absude car $n \geqslant 2$. Conclusion, il existe deux cases voisines dont les valeurs ont une différence supérieure ou égale à $n + 1$.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

Les longueurs des cordes constituent un ensemble fini de nombres réels, on considère une corde $[AB]$ dont la longueur est le minimum de cet ensemble, et on note M son milieu. D'après l'énoncé, il existe une autre corde $[CD]$ dont le milieu N appartient à $[AB]$. Notons que $N = M$ implique que $ACBD$ est un rectangle, donc comme $[AB]$ et $[CD]$ ne sont pas des diamètres, que $[AB] = [CD]$, ce qui est exclu.



Ainsi, $[ON]$ est l'hypothénuse du triangle rectangle OMN, donc $ON > OM$, ce qui donne $ON^2 > OM^2$. On utilise alors le théorème de Pythagore dans deux autres triangles rectangle de la figure pour obtenir, sachant que $OA = OC$:

$$AM^2 = OA^2 - OM^2 > OC^2 - ON^2 = NC^2$$

On en déduit que $AB = 2AM > 2NC = CD$, donc que $[AB]$ n'est pas la corde de longueur minimale, absurde. Donc toutes les cordes tracées sont des diamètres.

Solution de l'exercice 7

Solution avec avec un raisonnement proche du principe de l'extremum

On fait faire un tour de circuit à une autre voiture suffisamment chargée en essence, en la faisant toutefois s'approvisionner à chaque dépôt. La quantité d'essence de son résevoir a atteint un minimum à un des dépôts, avant qu'elle s'y réapprovisionne. C'est de ce dépôt que doit partir notre voiture sans essence initialement. (La quantité d'essence de son réservoir ne sera alors jamais nulle autrepart qu'à un dépôt et elle pourra faire un tour complet)

Solution par récurrence

On pose H_n l'assertion : "La voiture peut faire le tour avec n dépôts vérifiant la condition de l'énoncé." Si $n = 1$ alors d'après l'énoncé, la voiture peut faire le tour du circuit en s'approvisionant à l'unique dépôt.
Soit maintenant $n \geq 1$, supposons que H_n soit vrai, et montrons que $H_n \implies H_{n+1}$. On considère un circuit à $n+1$ dépôts, que l'on numérote de 1 à $n+1$. On note d_i la distance entre le dépôt i et le dépôt $i+1$ (les indices sont pris modulos n) et δ_i la distance maximale que peut parcourir la voiture avec la quantité d'essence contenue dans le dépôt i. La condition de l'énoncé se réécrit :

$$\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i \geq \sum_{i=1}^{n+1} d_i$$

Ceci implique qu'il existe i tel que $\delta_i \geq d_i$ (autrement on aurait $\sum_{i=1}^{n+1} \delta_i < \sum_{i=1}^{n+1} d_i$, absurde). On "fusionne" alors les dépôts i et $i+1$, dans le sens où on les considère comme un seul dépôt dont la quantité d'essence permet de parcourir la distance :

$$\delta'_i = \delta_i + \delta_{i+1} - d_i$$

On pose alors : $\delta'_j = \delta_j$, $d'_j = d_j$ pour $j \in [\![1, i-1]\!]$ et $\delta'_j = \delta_{j+1}$, pour $j \in [\![i+1, n]\!]$, ainsi que $d'_j = d_{j+1}$ pour $j \in [\![i, n]\!]$. On se ramène donc à un problème à n dépôts, lesquels vérifient bien la condition de l'énoncé, en effet :

$$\sum_{j=1}^{n} \delta'_j = \sum_{j=1}^{n+1} \delta_j - d_i \geq \sum_{j=1}^{n+1} d_j - d_i = \sum_{j=1}^{n} d'_j$$

D'après l'hypothèse de récurrence, la voiture est alors capable de faire un tour complet du circuit, donc H_{n+1} est vraie. Par le principe de récurrence, la voiture peut donc faire le tour du circuit avec n dépôts pour tout $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 8

On pose m le nombre de paires $\{a, b\}$ où a et b sont deux députés ennemis faisant partie de la même commission, et on considère une configuration où m est minimal. Supposons qu'une telle configuration ne satisfasse pas la condition de l'énoncé et qu'il existe un député avec au moins deux ennemis dans sa commission. Alors en changeant de commission ce député, on casse au moins deux relations d'inimitiés, et on en crée au plus une, dans le cas où notre député a son troisième ennemi dans la commission qu'il rejoint. m a donc diminué strictement, contredisant la minimalité de notre configuration, absurde. Notre configuration satisfait donc la condition de l'énoncé.

Solution de l'exercice 9

Soit $n \geq 2$ entier. On considère E l'ensemble des diviseurs strictement plus grands que 1 de n. E n'est pas vide puisqu'il contient au moins n. Donc, d'après le principe du minimum, E admet un minimum m. Supposons que m ne soit pas premier, il existe donc d tel que $1 < d < m$ avec $d \mid m$. Donc $d \mid n$, donc $d \in E$, or $d < m$, absurde. m est donc premier et n possède bien un diviseur premier.

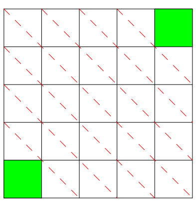
Problèmes d'optimisation

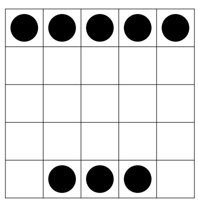
Par problème d'optimisation, on entend tout problème dont l'énoncé ressemble à "trouver le plus petit entier n tel que...". Indépendamment des techniques permettant d'attaquer ce type de problèmes, qui sont nombreuses et variées, le but de cette partie est de présenter le protocole de résolution et de rédaction de la solution de tels problèmes.

Un problème d'optimisation contient nécessairement deux parties, appelées *analyse* et *construction*. Voyons avec un exemple :

Exemple 5.
Sur un échiquier 2023×2023, un fou est une pièce qui peut se déplacer uniquement en diagonale et d'autant de cases que voulu. On dit qu'un fou peut en *attaquer* un autre si, en un seul coup, il peut se déplacer vers la case surlaquelle se trouve le deuxième fou. Quel est, le nombre maximum de fous que l'on peut placer sur l'échiquier de telles sorte que deux fous quelconques ne s'attaquent jamais ?

Solution de l'exemple





Posons $n = 2023$.

Considérons les diagonales parallèles à la diagonale principale reliant la coins supérieur gauche au coin inférieur droit, comme sur la figure de gauche. Chacune de ces diagonales ne peut contenir plus d'un fou, sans quoi on aurait deux fous qui pourraient s'attaquer mutuellement. De plus, au plus une seule des deux cases vertes contient un fou. Puisqu'il y a $n + n - 1 - 2 = 2n - 3$ diagonales rouges, l'échiquier contient au plus $2n - 2$ fous.

Réciproquement, en plaçant les fous comme sur le figure de droite, c'est-à-dire en occupant toutes les cases de la première rangée et toutes les cases sauf les coins de la dernière rangée, on trouve bien une configuration à $2n - 2$ fous où deux fous ne s'attaquent jamais.

Le maximum est donc $2n - 2 = 4044$.

Méthodologie

La preuve est divisée en deux parties. Dans un premier temps, on a montré que toute configuration valide contient au plus $2n - 2$ fous. Cette étape est appelée *l'analyse*. Dans un second temps, on a montré qu'il existe bien une configuration valide contenant exactement $2n - 2$ fous. Cette étape est appelée la *construction*.

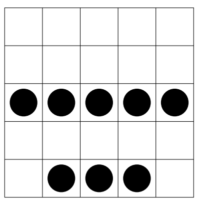
Chacune de ces deux étapes est **essentielle** pour que la preuve soit complète. Si on n'a montré que l'analyse, on a seulement montré que $2n - 2$ est un majorant du nombre de fous, mais on n'a pas montré que c'est bien le plus petit majorant (par exemple, 3n est également un majorant, mais ce n'est pas pour autant le plus grand entier recherché). Si on n'a montré que la construction, on a montré qu'une configuration avec $2n - 2$ fous existe mais on n'a pas montré qu'il n'existe pas une configuration avec plus de fous.

Erreur à ne pas commettre

Observons le raisonnement suivant :

Considérons la configuration de la figure de droite. Celle-ci contient $2n - 2$ fous, et on constate qu'on ne peut pas rajouter de fous. Ainsi, il n'est pas possible d'avoir plus de $2n - 2$ fous sur l'échiquier, c'est donc le plus grand entier.

Ce raisonnement ne constitue pas une preuve. Ce n'est pas parce qu'on ne peut pas rajouter de fous à la configuration proposée qu'il n'existe pas une configuration complètement différente et comportant plus de fous. D'ailleurs, on ne peut pas rajouter de fous à la configuration ci-dessous :



Pourtant, comme on l'a vu, il existe des configurations possédant plus de n fous.

Ainsi, même si la borne est correcte et si l'affirmation est correcte, la preuve proposée est fausse et ne rapportera pas beaucoup de points. L'erreur sous-jacente est de confondre *maximum local* et *global*. On prendra donc garde à ne pas chercher à mélanger les deux parties dans son raisonnement.

Conseils

Pour aborder de tels problèmes, il y a principalement deux approches :

- Tester des petits cas (ie résoudre le même exercice pour un échiquier plus petit par exemple) pour deviner la réponse et ensuite entreprendre de démontrer les deux parties.
- Chercher à montrer directement l'analyse ou la construction. Pour la construction, on cherchera souvent une configuration "harmonieuse", par exemple avec de nombreuses symétries. Pour l'analyse, on peut par exemple commencer par des raisonnements naïfs pour obtenir un premier majorant (exemple : "il y a au plus n^2 cases sur l'échiquier, donc le nombre maximum de fous est inférieur à n^2") et affiner ce raisonnement pour obtenir progressivement une meilleure borne.

Bien souvent, l'une des deux parties est plus facile à montrer que l'autre. Si l'on veut gratter des points sur l'exercice, on peut chercher à deviner quelle partie est la plus simple et la démontrer pour récupérer les points de l'exercice associés à cette partie.

On pourra pratiquer ces conseils sur les exercices suivants.

Exercices

Exercice 10
Quel est le plus grand nombre de jetons que l'on peut placer sur un échiquier de taille 8×8 de sorte que chaque ligne, chaque colonne et chaque grande diagonale contienne au plus 4 jetons.

Exercice 11
Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, ..., 31$ en utilisant k couleurs.

Exercice 12 (AHSME 1990, P9)
On considere un cube dont toutes les aretes sont coloriees soit en rouge, soit en noir et telle que toute face du cube possede au moins une arete noire. Quel est le nombre minimal d'aretes noires ?

Exercice 13
On considère une grille de taille 2019×2019. Sur cette grille sont posés des cailloux. Une configuration est dite belle si il n'existe pas de parallélogramme formé par quatre cailloux $ABCD$, tels que A,B,C, et D ne soient pas tous alignés.

Quel est le plus grand nombre de cailloux qu'il est possible de mettre dans une grille ?

Exercice 14
(Coupe Animath 2023) Théo place des jetons dans les cases d'un tableau de taille 30×30 en respectant les règles suivantes :

— Chaque case contient au plus un jeton.

— Pour chaque case vide, il y a, parmi les cases de la même ligne ou de la même colonne, au moins une case contenant un jeton.

— Pour chaque jeton, il y a, parmi les cases de la même ligne ou de la même colonne, au plus une autre case contenant un jeton.

Déterminer le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante : quelle que soit la disposition choisie par Théo, chaque carré de taille $k \times k$ de la grille contient au moins une case avec un jeton.

Exercice 15

(Estonie 2021) Soit $k > 1$ un entier positif. Déterminer le plus petit entier n pour lequel on peut colorier certaines cases d'un tableau $n \times n$ en noir de telle sorte que deux cases noires n'aient pas de côté ou de sommet en commun et chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

Solutions

Solution de l'exercice 10

On procède en deux étapes :

Analyse :

Comme chaque ligne contient au plus 4 jetons et qu'il y a 8 lignes, on peut placer au plus $8 \times 4 = 32$ jetons sur l'échiquier.

Construction :

Réciproquement, la configuration suivante vérifie les propriétés de l'énoncé et contient 32 jetons.

•	•	•	•				
				•	•	•	•
•	•	•	•				
				•	•	•	•
•	•	•	•				
				•	•	•	•
•	•	•	•				
				•	•	•	•

Le plus grand entier est donc $n = 32$.

Solution de l'exercice 11

On procède en deux étapes :

Analyse :

Il nous faut au moins 4 couleurs. En effet, considerons les nombres $2, 4, 8$ et 16. Alors comme 2 divise les trois autres, il doit etre d'une couleur differente des trois autres, comme 4 divise 8 et 16, il soit lui aussi d'etre d'une couleur differente, et de meme pour 8 et 16 car 8 divise 16.

Construction : 4 couleurs conviennent :

$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31$

Solution de l'exercice 12

On procède en deux étapes :

Analyse :

Il nous faut *au moins* 3 aretes noires. En effet, chaque arete est partagee entre 2 faces, et comme il y a 6 faces, il nous faut au moins $\frac{6}{2} = 3$ aretes noires.

Construction :

3 convient effectivement : il suffit qu'aucune paire d'aretes ne partage de sommet.

Solution de l'exercice 13

Dans ce problème, on cherche le plus grand entier satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus grand entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c est bien le plus grand entier, on va d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \leqslant c$ et d'autre part on va montrer que l'on peut trouver une grille possédant exactement c cailloux satisfaisant la propriété.

On s'empresse de tester l'énoncé pour des valeurs plus petites, par exemple pour une grille de taille 3×3, 4×4 ou même 5×5, afin de deviner la valeur. On trouve dans ces petits cas que les plus grands entiers sont respectivement $5, 7$ et 9. On peut conjecturer que la valeur recherchée sera donc $2 \times 2019 - 1 = 4037$.

En testant ces petites valeurs, on a pu remarquer que la présence de cailloux sur une colonne forçait que certains emplacements soient vides. Nous allons donc essayer de formaliser ce raisonnement.

Analyse :

On considère les paires de cailloux qui sont sur la même colonne. Si il y a deux telles paires dont les cailloux sont à même distance sur des colonnes différentes alors on obtient un parallélogramme, ce que l'on veut éviter.

Soit n_i le nombre de cailloux dans la i-ième colonne. Sur la colonne i il y a par conséquent au moins $n_i - 1$ paires à distances distinctes. Puisque pour deux colonnes fixées, la distance entre deux quelconques cailloux de la première colonne doit être différente de la distance entre deux quelconques cailloux de la deuxième colonne, toutes les distances entre deux paires de cailloux appartenant à la même colonne doivent être distinctes. Cela fait en tout $(n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \cdots + (n_{2019} - 1) = n - 2019$ distances distinctes avec n le nombre total de cailloux. Or il y a au plus 2018 distances possibles, puisqu'il y a 2019 emplacements pour un cailloux dans une colonne. Ceci montre que $n \leqslant 2018 + 2019 = 4037$.

Construction :

Réciproquement, si on remplit chaque case de la première ligne par un caillou et chaque case de la première colonne par un caillou et on laisse les autres cases vides, on a alors placé $2 \times 2019 - 1 = 4037$ cailloux sans créer de parallélogrammes.

Le plus grand entier recherché est donc 4037.

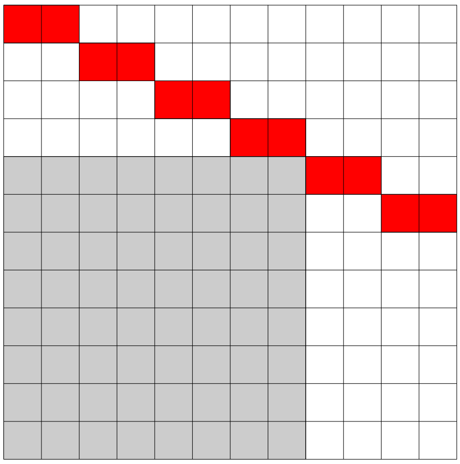
Solution de l'exercice 14

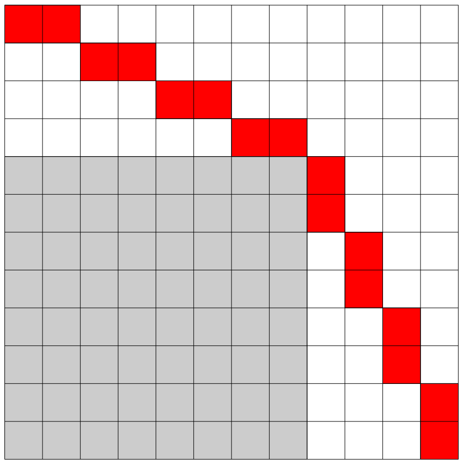
Réponse : $k = 21$

Dans cet exercice, on cherche à démontrer que 21 est le plus petit entier vérifiant la propriété de l'énoncé. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si, quelle que soit la disposition des jetons, chaque carré de taille $k \times k$ contient un jeton, alors $k \geqslant 21$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre que dans le cas où $k = 21$, quelle que soit la disposition, tout carré de taille $k \times k$ contient au moins une case avec un jeton, cette étape s'appelle *la synthèse*.

Analyse :

Considérons la configuration suivante : sur la ligne numéro i en partant du haut, avec $i \leqslant 10$, on place un jeton sur la case à l'intersection avec la colonne $2i - 1$ et un jeton sur la case à l'intersection avec la colonne $2i$. On a représenté ci-dessous cette construction pour un carré 12×12 sur la figure de gauche ci-dessous :





La figure de droite donne une autre construction possible.

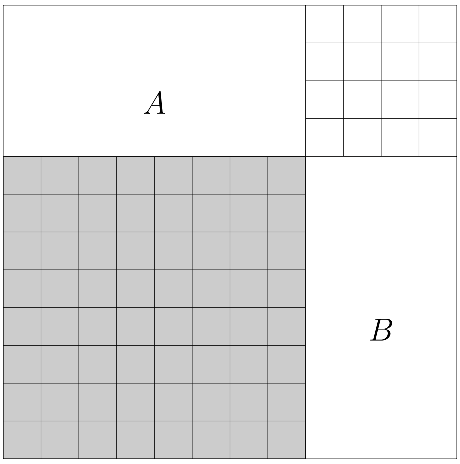
Ainsi, si k vérifie la propriété, on a $k \geqslant 21$.

Synthèse :

Montrons que pour toute configuration de jetons vérifiant les propriétés, tout carré de taille 21×21 contient au moins un jeton.

Supposons que cela ne soit pas le cas et qu'il existe une configuration de jetons dans laquelle le tableau contient un carré de taille 21×21 sans jeton. Quitte à intervertir certaines lignes et certaines colonnes, on suppose que ce carré est celui qui contient le coin inférieur gauche du tableau.

On considère alors le schéma suivant :



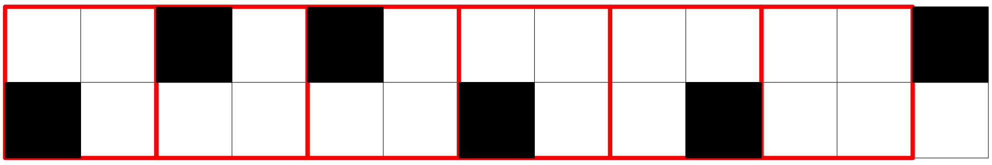
Puisqu'il y a au plus deux jetons par ligne, les 9 premières lignes en partant du haut contiennent ensemble au plus 18 jetons. La partie A contient donc au plus 18 jetons. Comme la partie A possède 21 colonnes, il y a au moins une colonne qui ne contient pas de jetons. De la même manière en raisonnant sur B, on extraie au moins une ligne qui ne contient pas de jetons. Mais alors la case à l'intersection de cette ligne et de cette colonne ne vérifie pas la propriété de l'énoncé, ce qui est absurde.

<u>*Solution de l'exercice 15*</u>
Dans ce problème, on cherche le plus petit entier n satisfaisant une certaine propriété. Supposons que l'on veuille montrer que le plus petit entier recherché est l'entier c. Pour montrer que c'est bien le plus petit entier, on doit d'une part montrer que si un entier n satisfait la propriété, alors $n \geqslant c$ et on doit montrer d'autre part que l'on peut trouver un tableau $n \times n$ satisfaisant la propriété de l'énoncé.

Commençons par déterminer la valeur minimale que peut prendre l'entier n. Soit donc n un entier vérifiant la propriété de l'énoncé.

Considérons un carré quelconque de taille 2×2 à l'intérieur du tableau. Si un tel carré contenait 2 cases noires, ces deux cases auraient un côté ou un sommet en commun, ce qui est contraire à l'hypothèse de l'énoncé. Ainsi, un quelconque carré de taille 2×2 contenu dans le tableau $n \times n$ ne peut contenir au plus qu'une case noire.

Regardons maintenant 2 lignes consécutives du tableau. On découpe ces deux lignes en carrés de tailles 2×2 en partant de la gauche (la colonne située à l'extrémité droite peut éventuellement n'appartenir à aucun carré 2×2 si n est un entier impair). Chaque carré contient au plus une case noire, et la rangée constituée de deux lignes consécutives doit contenir exactement $2k$ cases noires car chaque ligne contient exactement k cases noires. La colonne située à l'extrémité droite contient au plus 1 case noire, ce qui signifie qu'il y a au moins $2k-1$ cases noires réparties dans les carrés de taille 2×2. Il y a donc au moins $2k-1$ tels carrés de taille 2×2. Ainsi, la longueur n des deux lignes vérifie $n \geqslant 2(2k-1)+1 = 4k-1$.

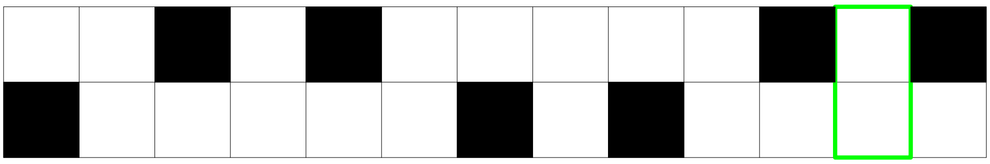


Nous avons démontré que n était forcément supérieur à un certaine expression dépendant de k. On est alors tenté de penser qu'il s'agit là de la valeur optimale et pour le montrer, on entreprend de construire un tableau $(4k-1)\times(4k-1)$ satisfaisant la propriété. Pour trouver un tel tableau dans le cas général, on commence d'abord par trouver un tableau fonctionnel pour les petites valeurs de k. Par exemple, on essaye de trouver un tableau 7×7 vérifiant la propriété pour $k=2$. Après plusieurs essais, on s'aperçoit qu'un tel tableau n'existe pas, signifiant que $4k-1$ n'est pas la valeur optimale désirée.

On entreprend désormais de démontrer qu'un entier n vérifiant la propriété vérifie $n \geqslant 4k$. Pour cela, il nous suffit de démontrer que n ne peut valoir $4k-1$.

Supposons par l'absurde qu'il soit possible de colorier certaines cases d'un tableau de taille $(4k-1)\times(4k-1)$ de telle sorte que chaque ligne et chaque colonne possède exactement k cases noires.

On a vu dans le raisonnement précédent que pour deux lignes consécutives, il y avait au plus $2k-1$ cases noires contenues dans les $4k-2$ première colonnes (les colonnes les plus à gauche). Donc la dernière colonne contient forcément exactement une case noire. Cela signifie que les deux cases de la deuxième colonne en partant de la droite sont toutes les deux blanches. Comme ce raisonnement est valable pour n'importe quelles deux lignes consécutives, cela signifie que la deuxième colonne en partant de la droite ne contient aucune case noire, ce qui est contraire à l'hypothèse.



On a donc montré que n ne pouvait valoir $4k-1$. Ainsi, $n \geqslant 4k$.

Réciproquement, on peut bien construire un tableau $4k\times 4k$ satisfaisant la propriété de l'énoncé. Pour trouver une telle construction, on essaye bien sûr de trouver une construction pour des petites valeurs de k. Voici un construction dans le cas général : on découpe le tableau $4k\times 4k$ en 4 carrés de côté $2k\times 2k$. Le carré $2k\times 2k$ du coin supérieur gauche est appelé SG, le carré $2k\times 2k$ du coin inférieur gauche est appelé SD, le carré $2k\times 2k$ du coin supérieur droit est appelé IG et le carré $2k\times 2k$ du coin inférieur droit est appelé ID.

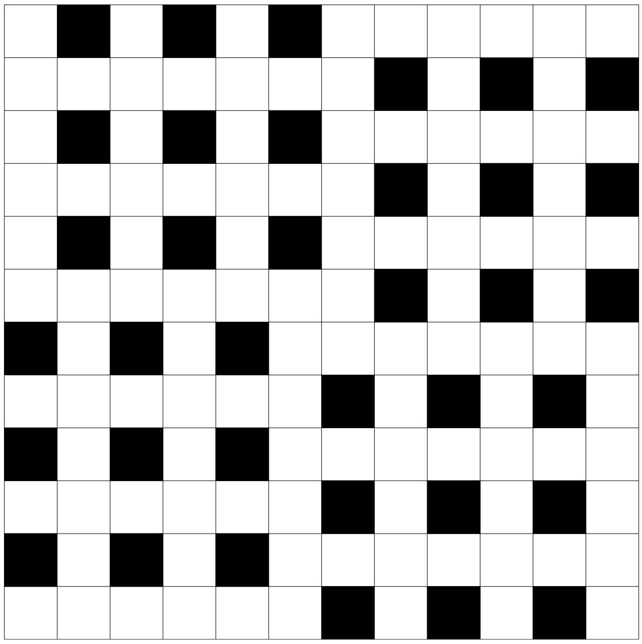
On quadrille le carré SG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur droit.

On quadrille le carré SD avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur droit.

On quadrille le carré IG avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin supérieur gauche.

On quadrille le carré ID avec des petits carrés 2×2. Dans chaque carré 2×2, on colorie en noir la case située dans le coin inférieur gauche.

On a représenté ici un configuration vérifiant la propriété pour $k = 3$.



7 Géométrie : TD récapitulatif et théorème du pôle Sud (Corentin et Thomas)

On a d'abord fait des rappels de la semaine puis on a expliqué les configurations du pôle Sud ainsi que la preuve en suivant le poly de Martin que l'on peut trouver ici : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2023/02/cours.pdf

Pot-pourri

Exercice 1
Soit ω_1 et ω_2 2 cercles. Soit (d) une tangente commune à ces deux cercles en A et B. Soit M le milieu de $[AB]$. Soient P et Q des points sur ω_1 tels que M, P, Q alignés et R, S des points sur ω_2 tels que M, R, S alignés. Montrer que P, Q, R, S est cocylique

Exercice 2
Soient A, B, C, D quatre points cocycliques et E l'intersection de (AB) et (CD) Montrer que :

$$\frac{AC}{BC} \times \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$$

Exercice 3
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P autre que D et ω_2 en le point Q autre que B. Montrer que $BQ = DP$

Exercice 4 (Lemme du bocal)
Soient ω et Ω deux cercles tangents intérieurement en T avec ω à l'intérieur du cercle Ω. On note A et B deux points sur le cercle Ω de telle sorte que (AB) une droite tangente à ω au point X. Montrer que la droite (TX) coupe l'arc $\widehat{AB}$ en son milieu

Exercice 5 (Abel Mathematics Competition, $2016 - 2017$, Finale, Problème 2)
Soit ABC un triangle et soit D, E et F les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soit X un point à l'intérieur de ABC. Soient A', B' et C' les symétriques du point X par rapport respectivement aux points D, E et F. Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes

Pôle Sud

Exercice 6 (pôle nord)
Soit ABC un triangle. On pose N l'intersection de la bissectrice *extérieure* de $\widehat{BAC}$ avec le cercle circoncrit à ABC. Montrer que N est sur la médiatrice de $[BC]$.

Exercice 7 (cercle antarctique)
Soit ABC un triangle et S l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit à ABC. Montrer que I, B et C sont sur un cercle de centre S.

Exercice 8 (cercle exinscrit et cercle antarctique)
Soit ABC un triangle, on note I le centre du cercle inscrit et S le pôle sud issu de A.

— Montrer que la bissectrice *intérieure* de $\widehat{BAC}$ et les bissectrices *extérieures* de $\widehat{ABC}$ et $\widehat{BCA}$ sont concourantes. On note I_A leur point d'intersection.

— Montrer que I_A est le centre d'un cercle tangent au segment $[BC]$ et aux droites (AB) et (AC), appelé cercle $A-$exinscrit de ABC

— Montrer que I_A est sur le cercle antarctique de centre S, et que $[II_A]$ est un diamètre de ce cercle.

Exercice 9
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On suppose que le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le côté $[AB]$ en un point E et que le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le côté $[AC]$ en un point F. Démontrer que $BE = CF$.

Exercice 10
Soit ABC un triangle. Soit O, H respectivement le centre du cercle circonscrit et l'orthocentre du triangle ABC. On note O' le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point O et de l'arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC ne contenant pas le point A. Montrer que la droite (AO') est la bissectrice de l'angle $\widehat{HAO}$.

Exercice 11 (BXMO 2011 problème 2)
Soit ABC un triangle dont I est le centre du cercle inscrit. Les bissectrices $(AI), (BI), (CI)$ coupent les côtés opposés en D, E, F respectivement. La médiatrice de $[AD]$ coupe (BI) et (CI) en M, N respectivement. Montrer que A, I, M, N sont cocycliques.

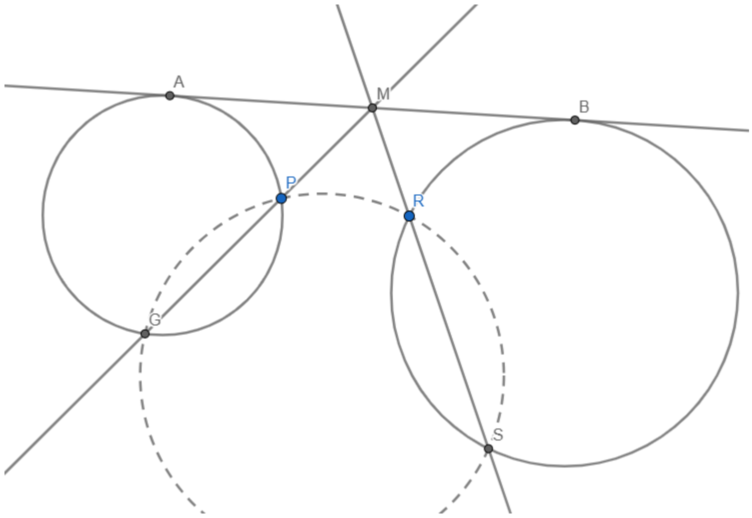
Exercice 12 (Exercice 7 envoi de géométrie 2022-2023)
Soit ABC un triangle. On note D et E les milieux respectifs des côtés AB et AC. Soit O le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. On note K le point d'intersection des droites (OE) et (BC). On note L le deuxieme point d'intersection de la droite (OD) avec le cercle circonscrit au triangle OKB. On note F la projection orthogonale de A sur le droite (KL). Montrer que les points D, E et F sont alignés.

Exercice 13 (Caucase MO 2018 Senior problème 2)
Soit ABC un triangle, P, Q et R sur les côtés AB, BC et CA tels que $AP = AR$, $BP = BQ$ et $\widehat{PIQ} = \widehat{BAC}$. Montrer que les droites (QR) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 14 (problème 2 test de novembre senior 2022)
Soit $ABCD$ un parallélogramme et soit G le centre de gravité du triangle ABD. Soit P et Q les points de la droite (BD) tels que les droites (GP) et (PC) sont perpendiculaires et les droites (GQ) et (QC) sont perpendiculaires. Démontrer que la droite (AG) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PAQ}$.

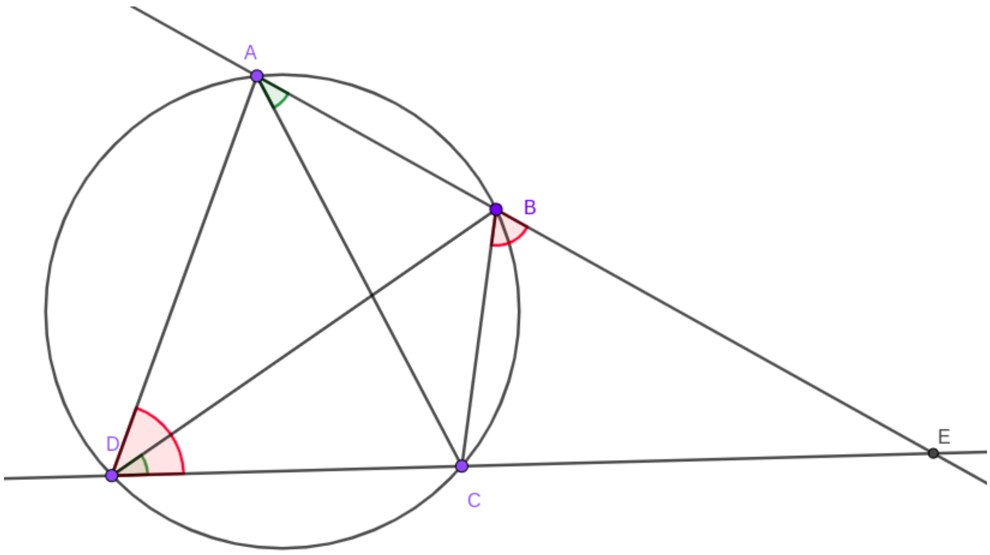
solutions

Solution de l'exercice 1



Par puissance en M par rapport à ω_1 on a $MA^2 = MP \cdot MQ$. Par puissance en M par rapport à ω_2 on a $MB^2 = MR \cdot MS$. Or, comme M est le milieu de $[AB]$ on sait que $MA^2 = MB^2$. On en déduit que $MP \cdot MQ = MR \cdot MS$. Ainsi, par la réciproque de puissance d'un point on a $PQRS$ cyclique.

Solution de l'exercice 2



On a $\widehat{EAC} = \widehat{BDE}$ (angle inscrit), d'où $ECA \sim EBD$, on a ainsi :

$$\frac{EC}{AC} = \frac{BE}{BD}$$

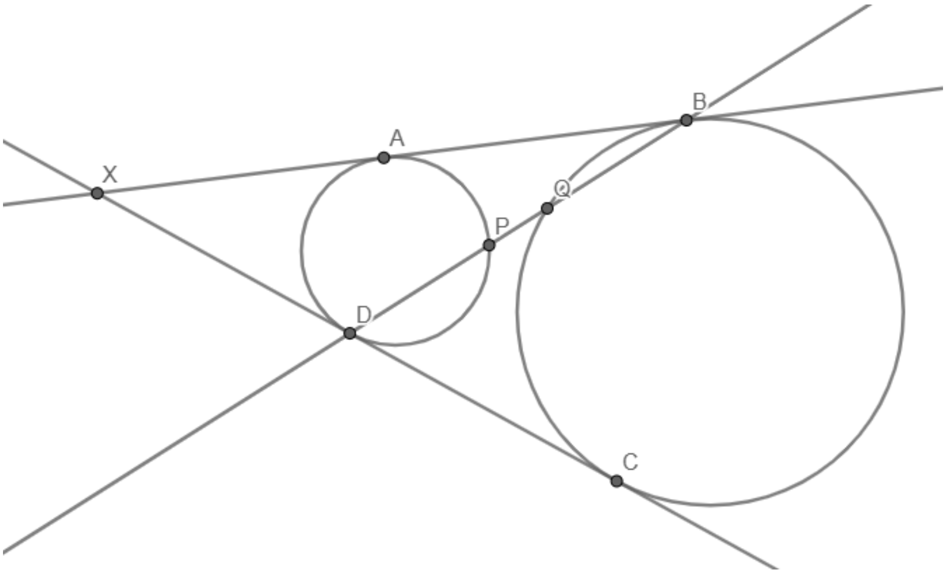
De même, la cocyclicité de A, B, C et D donne $\widehat{EBC} = \widehat{EDA}$ et $\widehat{ECB} = \widehat{EAD}$, ce qui permet d'affirmer que $EBC \sim EDA$ Ainsi, on obtient :

$$\frac{BC}{EC} = \frac{AC}{AE}$$

Et on retrouve finalement, en faisant le produit de ces deux relations :

$$\frac{AC}{BC} \times \frac{AD}{BD} = \frac{AE}{BE}$$

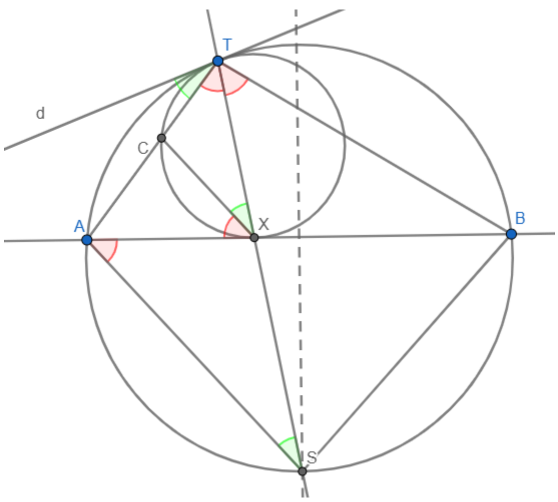
Solution de l'exercice 3



Par puissance d'un point en B on a $BP \cdot BD = BA^2$. Par puissance en D on a $DC^2 = DQ \cdot DB$. Montrons que $AB = CD$: Soit X l'intersection de (AB) et (CD), par puissance en X on a $XA^2 = XC^2$ et $XB^2 = XD^2$ donc $AB = (XB - XA) = (XD - XC) = CD$. (si $(AB)//(CD)$ les cercles sont de même rayon donc $ABCD$ est un rectangle et la conclusion s'ensuit).
On a donc

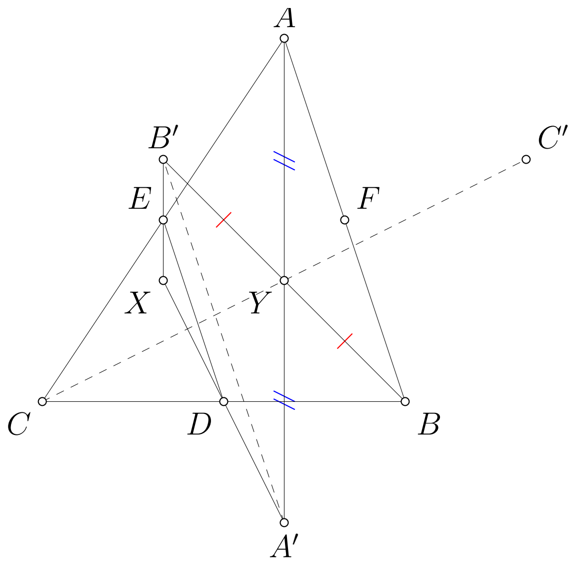
$$\begin{aligned} BP \cdot BD = DQ \cdot DB &\iff BP = DQ \\ &\iff BQ + PQ = DP + PQ \\ &\iff BQ = DP \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 4



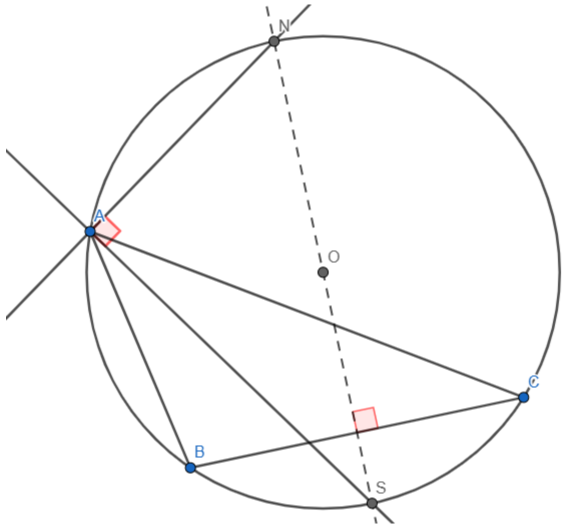
L'idée est ici d'effectuer un chasse aux angles pour montrer que (TX) est la bissectrice de l'angle $\widehat{ATB}$. En effet on pourra ainsi conclure par pôle Sud que l'intersection de (TX) et du cercle circonscrit à ABT (soit Ω) est simplement le pôle Sud du point A dans ABT et donc qu'il appartient à la médiatrice de $[AB]$
Soit (d) la tangente commune aux cercle ω et Ω. Soit S l'intersection de (TX) avec Ω et C la deuxième intersection de (TA) avec ω
Par angle tangentiel on a $\widehat{ATd} = \widehat{AST}$ et $\widehat{CTd} = \widehat{CXT}$. On en déduit par angle correspondant que $(CX)//(AS)$
De plus, par angle tangentiel on a $\widehat{AXC} = \widehat{CTX}$ et par angle alterne-interne on a $\widehat{ACX} = \widehat{XAS}$. Enfin, par angle inscrit on a $\widehat{XAS} = \widehat{BAS} = \widehat{BTS}$. Donc (TS) est la bissectrice de $\widehat{ATB}$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5



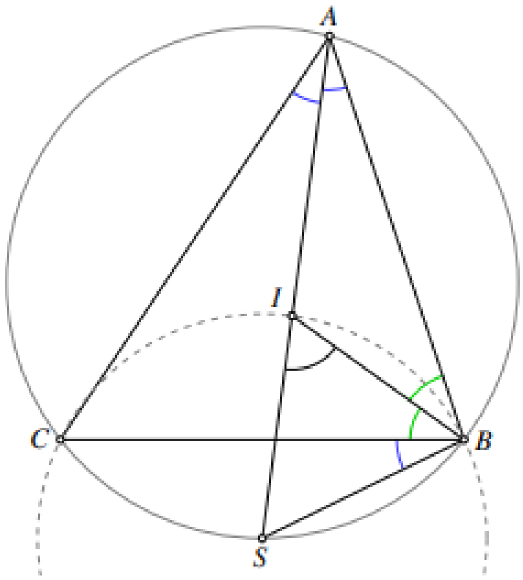
Puisque les points D et E sont les milieux des segment $[XA']$ et $[XB']$, d'après le théorème des milieux, $EF = \frac{1}{2}A'B'$. Les droites (AB) et $(A'B')$ sont donc parallèles et $AB = A'B'$. Le quadrilatère $ABA'B'$ est donc un parallélogramme. Le point d'intersection des droites (AA') et (BB') est donc le milieu communs des segments $[AA']$ et $[BB']$. On trouve de même pour le point d'intersection des droites (BB') et (CC'). Le point d'intersection est donc commun.

Solution de l'exercice 6



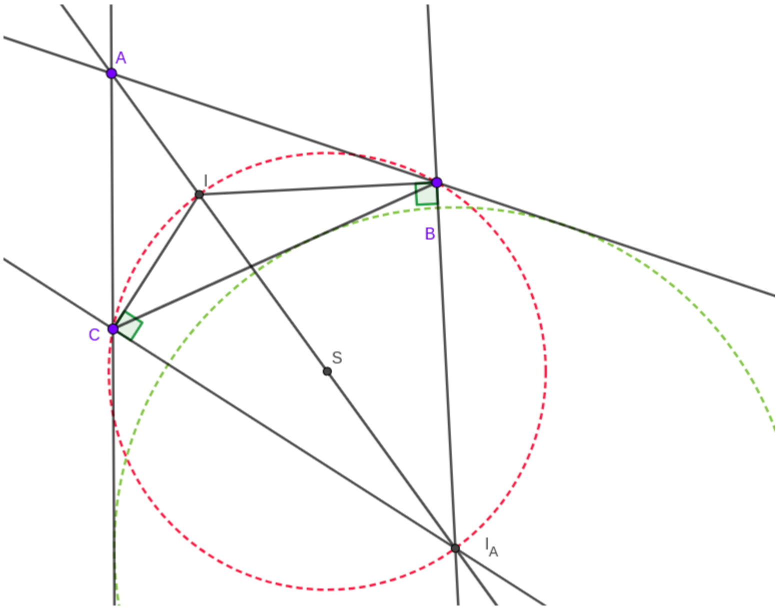
Soit S le pôle Sud de A dans le triangle ABC. Puisque la bissectrice extérieure est perpendiculaire à la bissectrice intérieure on a $\widehat{NAS} = 90°$. On en déduit que $[NS]$ est un diamètre du cercle circonscrit à ABC. De plus, la médiatrice de $[BC]$ passe par S car S est le pôle Sud et passe par O car O est égale distance de B et de C. Ainsi, cette médiatrice passe aussi par N.

Solution de l'exercice 7



On remarque que S est le pôle Sud du triangle ABC issu de A ainsi on a $SB = SC$. De plus, comme la somme des angles d'un triangle vaut 180 on a $\widehat{SIB} = 180 - \widehat{BIA} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$. Or, par angle inscrit, $\widehat{IAB} = \widehat{SAB} = \widehat{SAC} = \widehat{SBC}$ et comme (BI) est la bissectrice de $\widehat{ABC}$ on a $\widehat{IBA} = \widehat{IBC}$. Ainsi, $\widehat{SIB} = \widehat{SBC} + \widehat{IBC} = \widehat{IBS}$. On en déduit que SIB est isocèle en D donc $SI = SB = SC$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8

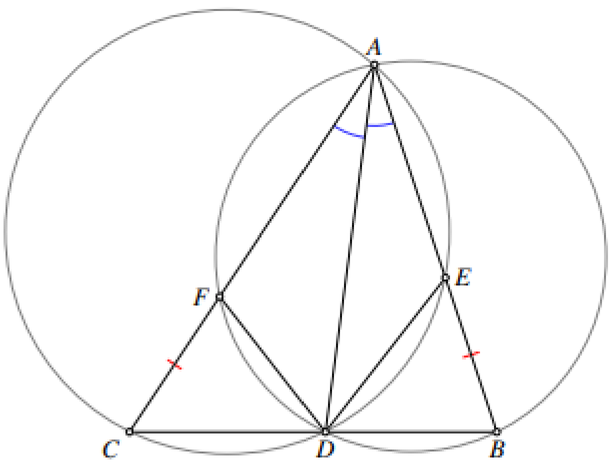


— On pose I_A l'intersection de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et de la bissectrice extérieure de $\widehat{ABC}$. Par définition, I_A est à équidistance des droites (AB) et (AC), et des droites (BC) et (AB). Il est donc à équidistance des droites (AC) et (BC), donc sur l'une des bissectrices intérieures ou extérieures de $\widehat{BCA}$. Clairement, il ne s'agit pas de la bissectrice intérieure, autrement on aurait $I_A = I$ et les bissectrices intérieures et extérieures de $\widehat{ABC}$ seraient confondues.

— I_A est à équidistance des droites (AC), (BC) et (AB) et est donc le centre d'un cercle tangent à ces trois droites.

— On a $\widehat{IBI_A} = \widehat{ICI_A} = 90$ donc I, B, C et I_A sont bien cocycliques, et $[II_A]$ est bien un diamètre.

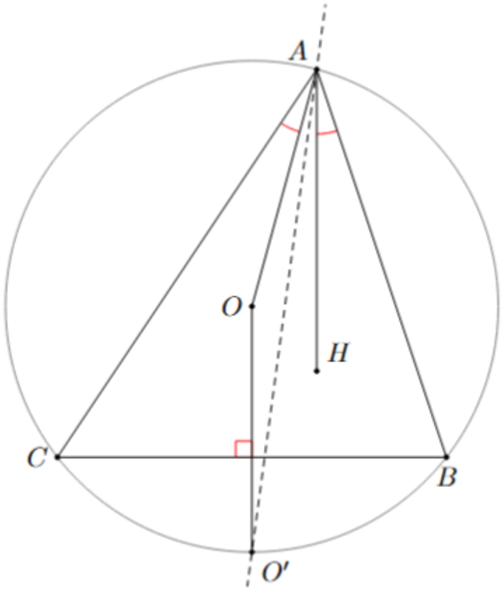
<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



On veut montrer que les triangles BDE et DFC sont isométriques. Puisque (AD) est la bissectrice de $\widehat{FAB}$ et de $\widehat{CAE}$ par théorème du pôle Sud on a que D est sur la médiatrice de

$[CE]$ et de $[FB]$. Ainsi, $CD = DE$ et $FD = DB$. Il nous reste à montrer que $\widehat{BDE} = \widehat{FDC}$. Or, par angle inscrit on a $\widehat{BDE} = 180 - \widehat{EDC} = \widehat{CAE} = \widehat{FAB} = 180 - \widehat{FDB} = \widehat{FDC}$

Solution de l'exercice 10

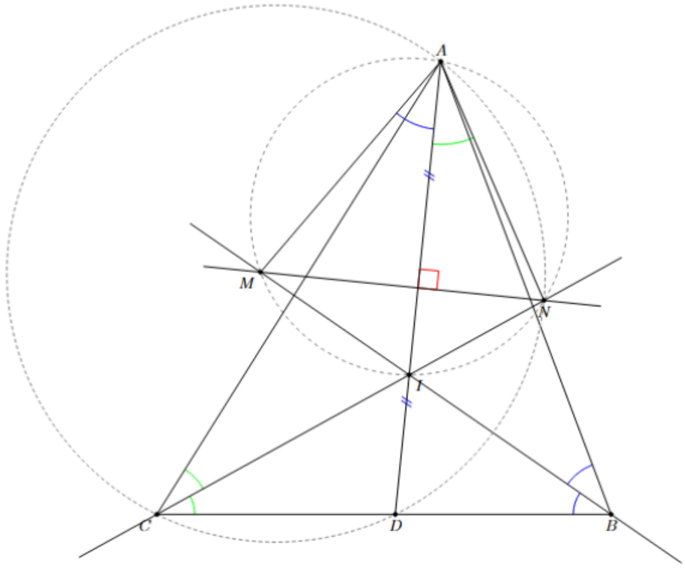


Tout d'abord, puisque la perpendiculaire à la droite (BC) passant par le point O est la médiatrice du segment $[BC]$, le point O' est le pôle Sud du point A dans le triangle ABC.
Le point O' appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Pour montrer qu'il appartient à la bissectrice de l'angle HAO, il suffit de montrer que $\widehat{HAB} = \widehat{OAC}$ (qui est également un résultat bien connu sur l'orthocentre).
Le triangle AOC est isocèle au point O donc $\widehat{COA} = 180° - 2\widehat{CAO}$. D'après le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{COA} = 2\widehat{CBA}$. Ainsi, $2\widehat{CBA} = 180° - 2\widehat{CAO}$. Si bien que

$$\widehat{CAO} = 90° - \widehat{CBA}$$

Or la droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires donc $90° - \widehat{CBA} = \widehat{HAB}$. On retrouve donc bien que $\widehat{CAO} = \widehat{HAB}$, ce qui permet de conclure.

Solution de l'exercice 11

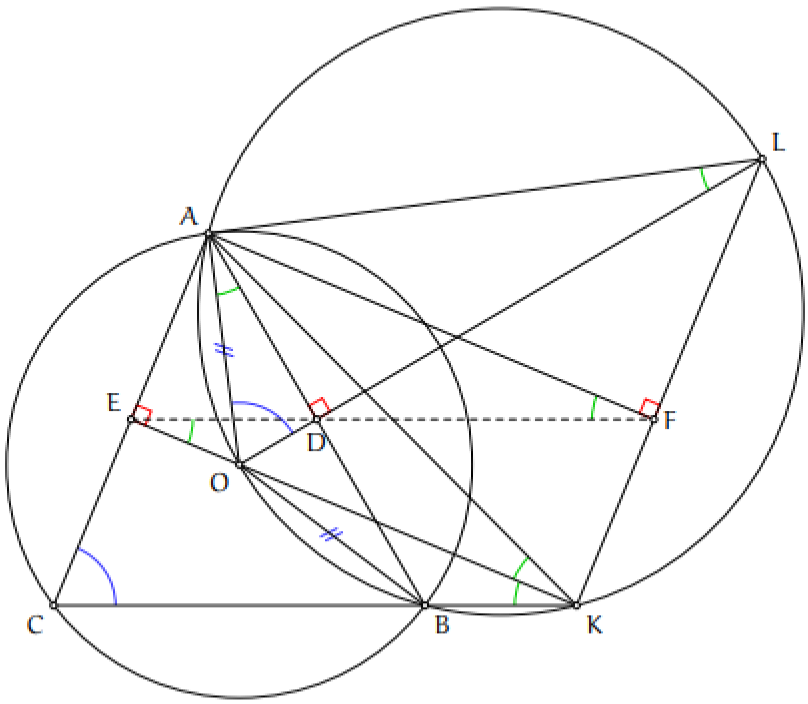


Des bissectrices et des médiatrices s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. Le point M est en effet par définition le pôle sud du point B dans le triangle BAD donc le quadrilatère $BAMD$ est cyclique. De même, le quadrilatère $CAND$ est cyclique. Il vient

$$\widehat{MAN} = \widehat{MAD} + \widehat{DAN} = \widehat{MBD} + \widehat{NCD} = \widehat{IBC} + \widehat{ICB} = 180^\circ - \widehat{BIC} = 180 - \widehat{MIN}$$

ce qui montre bien que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 12



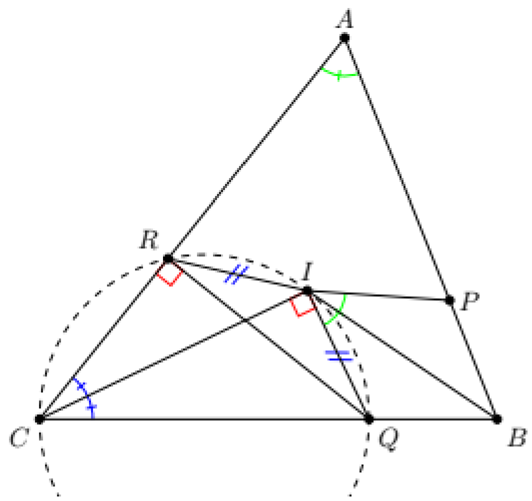
Le point I appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{RAP}$ et donc à la médiatrice du segment $[RP]$. Cela implique que $IR = IP$. On obtient de même en considérant la bissectrice de l'angle

$\widehat{ABC}$ que $IP = IQ$. Il vient que $IR = IQ$. Le point I est dont sur la bissectrice de l'angle $\widehat{QCR}$ et sur la médiatrice du segment $[RQ]$. Il s'agit donc du pôle Sud du sommet C dans le triangle RQC donc les point I, R, Q et C sont cocycliques.
Pour montrer que les droites (RQ) et (AC) sont perpendiculaires, il suffit donc, d'après le théorème de l'angle inscrit, de montrer que $\widehat{CIQ} = 90°$.
La droite (IB) étant un axe de symétrie du quadrilatère $IPBQ$, on obtient que $\widehat{QIB} = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$ et $\widehat{QBI} = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$. On déduit que

$$\widehat{IQC} = 180° - \widehat{IQB} = \widehat{QIB} + \widehat{IBQ} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BCA} = 90° - \widehat{QCI}$$

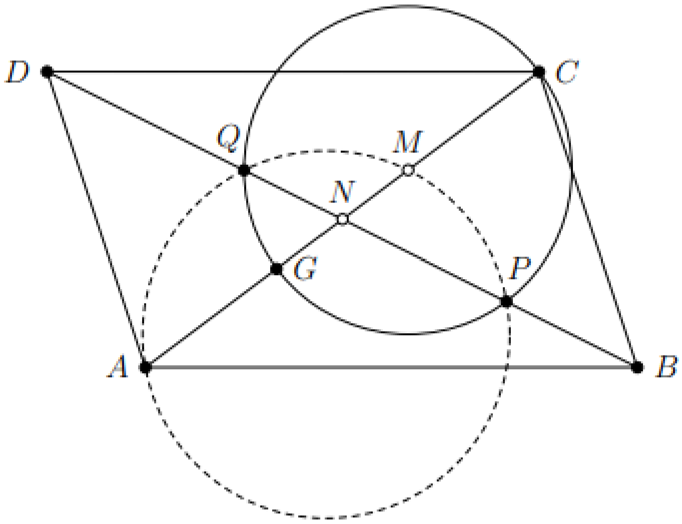
On a donc bien que $\widehat{CIQ} = 90°$.

Solution de l'exercice 13



Après avoir tracé la figure on remarque que A appartient au cercle circonscrit à OKB.
En effet, par droite des milieux on a $(CB)//(ED)$ donc par angle alternes-internes on a $\widehat{BKO} = \widehat{CKE} = \widehat{KED} = \widehat{OED}$. Or, comme $\widehat{OEA} = 90°$ et $\widehat{ODA} = 90°$ le quadrilatère $OAED$ est cyclique. Il vient que $\widehat{OED} = \widehat{OAD} = \widehat{OAB}$. Ainsi on en conclut par angle inscrit que $AOBKL$ cyclique.
On remarque alors que O se situe au milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ainsi c'est le pôle Sud du point K dans le triangle ABK. On en déduit que (OK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{AKB}$ d'ouù $\widehat{OKB} = \widehat{OKA}$. Puis par angle inscrit on a $\widehat{OKA} = \widehat{OLA}$
En utilisant les angles droits de la figure on remarque que $ALFD$ et $AFKE$ sont cycliques. Ainsi, $\widehat{AFE} = \widehat{AKE}$ et $\widehat{AFD} = \widehat{ALD}$ ce qui conclut que E, D, F sont alignés.

Solution de l'exercice 14



Tout d'abord puisque $ABCD$ est un parallélogramme et que la droite (AG) passe par le milieu de $[BD]$ on en déduit que (AG) est une diagonale du parallélogramme.
Puisque $\widehat{CGP}$ et $\widehat{CGQ}$ sont droits on en déduit que les points C, G, P et Q résident sur un même cercle de diamètre $[CG]$.
Il est alors intéressant d'introduire M le centre de cercle afin de symétriser un petit plus le problème. De plus, une figure propre et grande nous permet de conjecturer que les points A, M, Q, P sont cocycliques. Ainsi comme M se situe sur la médiatrice de $[PQ]$ on aurait par théorème du pôle Sud que (AM) est la bissectrice de $\widehat{PAQ}$. Montrons donc que $AMPQ$ est cyclique.
On remarque alors assez vite qu'un chasse angle n'aboutit pas pour démontrer la cocyclité. De plus, les centres de gravités induisent des égalités de rapport puisque G se trouve au $2/3$ de la médianne. Il est donc naturel d'utiliser la puissance de points. On introduit donc N l'intersection des diagonales du quadrilatère.
Par puissance en N dans $CPGQ$ on a $NQ \cdot NP = NC \cdot NG$. Or, les diagonales d'un quadrilatère se coupent en leur milieu donc $NQ \cdot NP = NA \cdot NG$. Or, $NM = MG - NG = \frac{1}{2}GC - NG = \frac{1}{2}(NC + NG) - NG = \frac{1}{2}NA - \frac{1}{2}NG = \frac{1}{2}AG = NG$. On a donc $NQ \cdot NP = NA\dot{N}M$ ce qui implique que $MPQA$ est cyclique ce qui conlut par pôle Sud.

8 Comptage (Emilhan)

Ce cours reprend le magnifique cours de comptage de Raphaël au groupe B du stage de Valbonne 2023.

2 Entraînement de mi-parcours

Entraînement de mi-parcours, groupe B

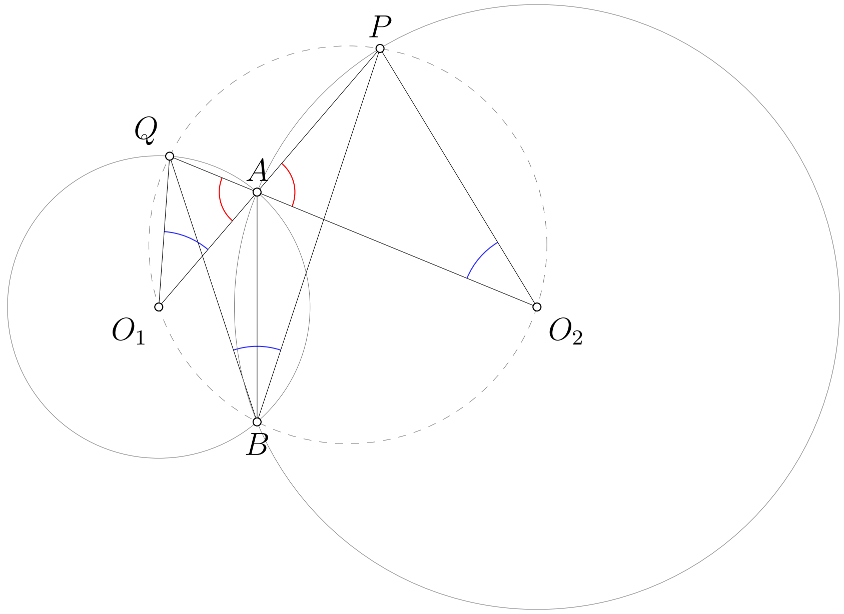
Stage olympique de Valbonne 2024

18 août 2024

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Exercice 1
Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles s'intersectant en A et B. On note O_1 le centre de Ω_1 et O_2 celui de Ω_2. La droite (O_1A) intersecte le cercle Ω_2 une nouvelle fois en P et la droite (O_2A) intersecte le cercle Ω_1 à nouveau en en Q. Montrer que les points O_1, O_2, P, Q et B sont cocycliques.

Solution de l'exercice 1



Les triangles QAO_1 et PAO_2 sont tous les deux isocèles, respectivement en O_1 et O_2. De plus, les angles $\widehat{QAO_1}$ et $\widehat{PAO_2}$ sont opposés par le sommet donc égaux. On déduit que les triangles QAO_1 et PAO_2 sont semblables (ils sont isocèles et ont le même angle à la base). Ainsi,

$$\widehat{PO_2Q} = \widehat{PO_2A} = \widehat{QO_1A} = \widehat{QO_1P}.$$

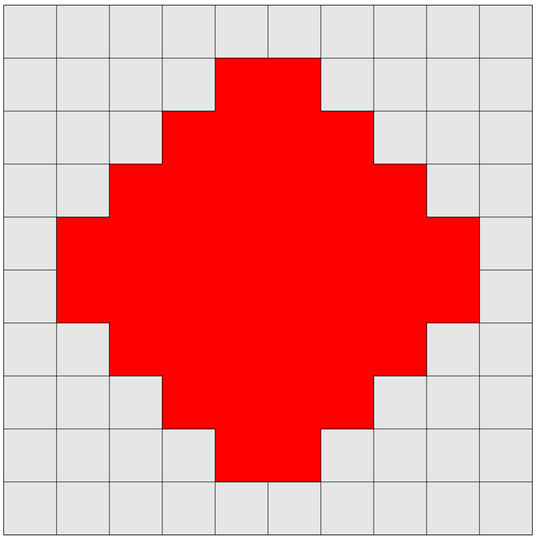
Les points Q, P, O_2 et O_1 sont donc cocycliques.

D'autre part, d'après le théorème de l'angle au centre et l'égalité $\widehat{PO_2A} = \widehat{QO_1A}$,

$$\widehat{QBP} = \widehat{QBA} + \widehat{ABP} = \frac{1}{2}\widehat{QO_1A} + \frac{1}{2}\widehat{AO_2P} = \widehat{PO_2Q}.$$

Les points Q, B, O_2 et P sont donc cocycliques.
Finalement, les points Q, O_1, B, O_2 et P sont donc cocycliques.

Exercice 2
Peut-on paver la partie grise de la grille ci-dessous avec des dominos de taille 2×1 ?



Solution de l'exercice 2
On montre deux solutions de cet exercice.

Solution 1 :

Considérons un hypothétique pavage de cette forme et regardons la case marquée d'un 1 dans la figure suivante. Ici, on suppose qu'elle est dans un domino avec sa voisine de droite.

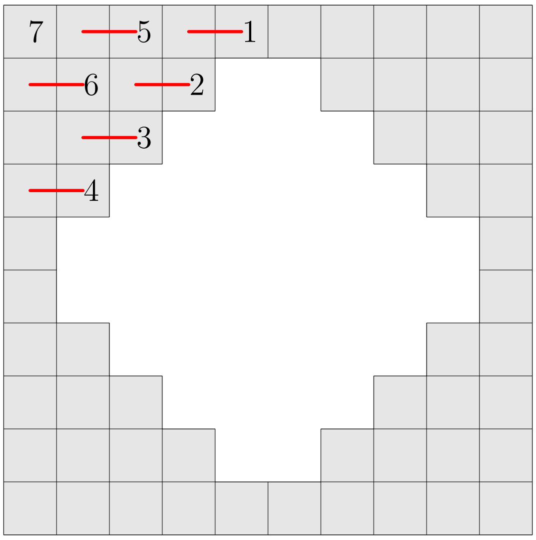


FIGURE 1 – Solution 1, premier cas

Dans ce premier cas, la case 2 doit forcément être reliée à sa voisine de droite, puis la case 3 également, ainsi de suite jusqu'à ce qu'un coin (7) soit laissé seul. Ce premier cas ne mène donc à aucun pavage, un pavage relierait forcément la case 1 à sa voisine de gauche. En faisant le même raisonnement tourné d'un quart de tour, on déduit qu'il est également obligatoire de placer un domino vertical sur le bord gauche comme sur la figure 2.

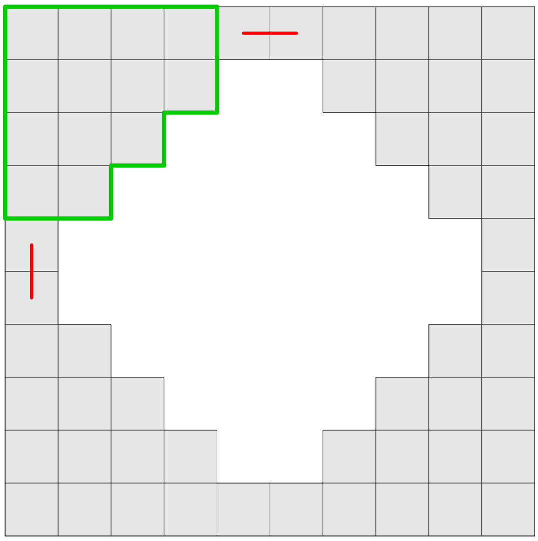


FIGURE 2 – Solution 1, deuxième cas

Mais alors, ces dominos délimitent une zone (en vert sur la figure) de 13 cases, et comme 11 est impair, cette zone ne peut pas être pavée.

Solution 2 :

On considère le pavage suivant, avec certaines cases en noir, d'autres en blanc et certaines sans couleur.

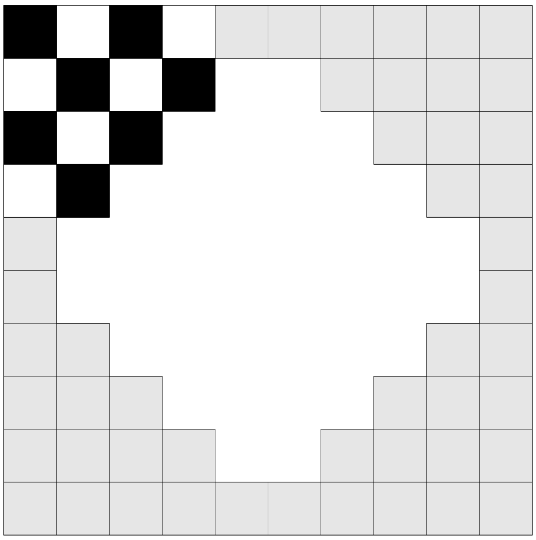


FIGURE 3 – Solution 2, par coloriage

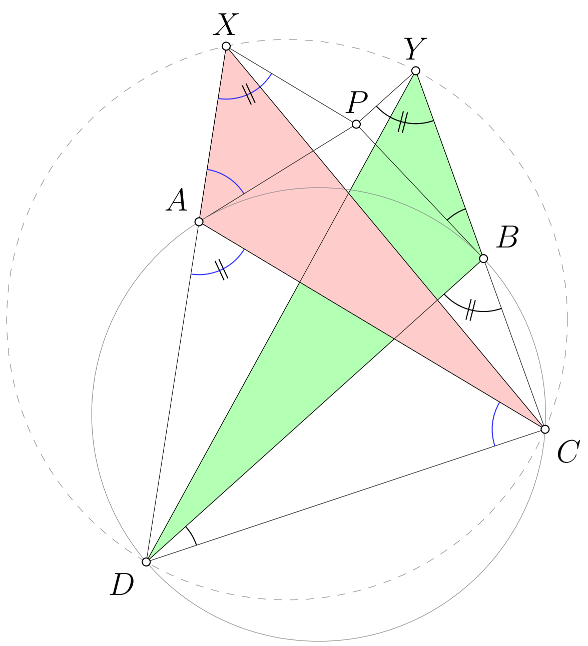
Remarquons que tout domino couvrant une case noire doit également recouvrir une case blanche (l'inverse n'est pas vraie). Par conséquent, le nombre de cases noires courvertes par des dominos est inférieur ou égal au nombre de cases blanches couvertes par des dominos. Or, dans ce coloriage, il y a plus de cases noires que de cases blanches. Il est donc impossible de paver cette forme.

Exercice 3
Considérons une grille carrée de n lignes et n colonnes dont chaque case contient un entier compris entre 1 et $2n-1$ inclus. Une telle grille est appelée une grille *d'argent* si, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, la réunion de la i-ème ligne et la i-ème colonne contient tous les éléments de l'ensemble $\{1, 2, ..., 2n-2, 2n-1\}$.
Montrer qu'il n'existe pas de grille *d'argent* pour $n = 2025$.

Solution de l'exercice 3
Supposons qu'il existe une grille d'argent pour $n = 2025$. On appelle croix la réunion d'une colonne et d'une ligne de même numéro. Chaque case est comprise dans exactement deux croix, sauf celles de la diagonale qui sont comprises dans deux croix.
Or, d'après l'énoncé, tous les nombres de l'ensemble $\{1, 2, ..., 3992, 3993\}$ figurent exactement une fois sur chaque croix puisqu'une croix contient $2n-1$ cases. Ainsi, comme 2025 est un nombre impair, chaque nombre doit apparaître sur la diagonale. Or il y a 2025 cases sur la diagonale, et $3993 > 2025$, on a une absurdité.
Il n'existe donc pas de grilles d'argent pour $n = 2025$.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère non croisé inscrit dans un cercle Γ. Les tangentes à Γ en A et B se coupent en P. La parallèle à la droite (AC) passant par P coupe (AD) en X. La parallèle à la droite (BD) passant par P coupe (BC) en Y. Montrer que les points X, Y, C, D sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Puisque les droites (PX) et (AC) sont parallèles, $\widehat{DAC} = \widehat{DXP}$. D'autre part, d'après le théorème de l'angle tangentiel,

$$\widehat{XAP} = 180° - \widehat{DAC} - \widehat{CAP} = 180° - \widehat{DAC} - \widehat{CDA} = \widehat{DCA}.$$

On déduit que $\Delta XAP \sim \Delta ACD$. De la même façon, on montre que $\Delta YPB \sim \Delta BCD$. Les égalités de rapport induites donnent alors

$$\frac{XA}{AC} \overset{\Delta XAP \sim \Delta ACD}{=} \frac{PA}{CD} = \frac{PB}{CD} \overset{\Delta YPB \sim \Delta BCD}{=} \frac{YB}{BD},$$

où on a utilisé que $PA = PB$ car P est le point d'intersection des deux tangentes en A et en B.

Comme d'autre part $\widehat{XAC} = 180° - \widehat{DAC} = 180° - \widehat{BDC} = \widehat{YBD}$ d'après le théorème de l'angle inscrit, on déduit que $\Delta XAC \sim \Delta YBD$. Ceci implique en particulier

$$\widehat{DXC} = \widehat{AXC} \overset{\Delta XAC \sim \Delta YBD}{=} \widehat{BYD} = \widehat{CYD},$$

donc les points D, X, Y et C sont cocycliques.

3 Deuxième partie : Algébre et Arithmétique

1 Récurrence (Raphaël

Les exercices proposés sont tirés du livre «Solutions d'Expert», Arthur Engel.

Exercice 1
Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Solution de l'exercice 1
On montre la formule par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 1$ on a

$$\frac{1}{1(1+1)} = \frac{1}{2} = 1 - \frac{1}{1+1}$$

et donc la formule est correcte.

Hérédité : On suppose que la formule est correcte pour n

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} = 1 - \frac{1}{n+1}.$$

Alors

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k(k+1)} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} &= 1 - \frac{1}{n+1} + \frac{1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 + \frac{-(n+2)+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{n+1}{(n+1)(n+2)} \\ &= 1 - \frac{1}{n+2}\end{aligned}$$

et on en déduit la formule est aussi correcte pour $n+1$.

Exercice 2
On se donne n voitures identiques sur une piste circulaire. Au total elles ont juste assez d'essence pour faire un tour de piste. Montrer qu'une voiture peut effectuer un tour complet en prenant l'essence des voitures sur son chemin.

Solution de l'exercice 2
Donnons une solution par récurrence.

Initialisation : Si il n'y a qu'une seule voiture alors elle a exactement l'essence pour faire un tour.

Hérédité : Supposons que si il y a une solution pour n voitures. Montrons qu'il en existe aussi une lorsqu'il y a $n+1$ voitures. Par principe des tiroirs il existe au moins une voiture qui a suffisamment d'essence pour atteindre la voiture suivante. En effet si ce n'était pas le cas les trajets possibles des différentes voitures formerait des parties de piste strictement disjointes et la somme des longueur de toutes ces parties (donné par la quantité d'essence initiale) est égale à un tour complet. Donc il existe au moins une voiture qui peut rejoindre la voiture suivante. On peut alors voir que le problème est équivalent si on retire la deuxième voiture et que l'on ajoute sa quantité d'essence dans le réservoir de la première. En effet toute voiture atteignant la première en prenant son essence pourra atteindre la deuxième et avancera alors d'une distance équivalente donné par la somme des quantités d'essence des deux voitures. En retirant la deuxième voiture on se ramène au problème avec seulement n voitures sur la piste et la quantité totale d'essence n'a pas changé. On peut alors utiliser l'hypothèse de récurrence et en déduire il existe une solution à ce problème.

Exercice 3
Montrer que

$$\sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\cdots\sqrt{2}}}} \leqslant 2.$$

Solution de l'exercice 3
Montrons cette propriété par récurrence où n est le nombre de "$\sqrt{2}$" qui apparaissent dans la formule.

Initialisation : Pour $n = 1$ on a bien $\sqrt{2} \leqslant 2$.

Hérédité. On note $u_n = \sqrt{2}^{\sqrt{2}^{\cdots^{\cdots\sqrt{2}}}}$ avec n fois le signe "$\sqrt{2}$" et notons $u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n}$. Supposons que la formule est vrai pour n

$$u_n \leqslant 2$$

alors

$$u_{n+1} = \sqrt{2}^{u_n} \leqslant \sqrt{2}^2 = 2$$

ce qui montre que la formule est aussi vrai pour $n + 1$.

Exercice 4
Montrer qu'une carte est coloriable avec deux couleurs si et seulement si le nombre d'arêtes partant de chaque sommet est pair.

Solution de l'exercice 4
On montre cela par récurrence sur le nombre d'arête.

Initialisation : Il n'y a pas d'arêtes, seulement une face qui recouvre toute la carte que l'on peut donc colorier avec une seul couleur.

Hérédité : Considérons une carte avec $n + 1$ arêtes. Choisissons un sommet où des arêtes (un nombre paire) se croisent. Faisons le tour de ce sommet et recollons chaque arête avec une voisine comme si c'étaient des chemins arrivant à une ville et qui finalement l'évitaient sans la traverser. Par exemple avec un sommet à 4 arête cela donne le schéma suivant

$$\times \quad \rightarrow \quad \asymp$$

sommet avec arètes — les arêtes évitant le sommet

Dans cette nouvelle figure il y a moins de arêtes donc par hypothèse de récurrence il est possible de colorier la carte avec deux couleurs. À partir de ce coloriage on replace les arêtes initiales sans changer la couleur des différentes faces. La figure ainsi obtenue est bien un coloriage avec deux couleurs.

Pour la réciproque si un sommet est lié à un nombre impair d'arêtes, en faisant le tour du sommet on doit colorier les faces alternativement et on a alors une impossibilité : la dernière face est de la même couleur que la première.

Exercice 5
On se donne $2n$ points dans l'espace et on trace au total $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer que l'on peut trouver trois points qui forment un triangle.

Solution de l'exercice 5
On note degré le nombre d'arêtes partant d'un point. Comme chaque arête relie 2 sommets on a la relation

$$\sum \text{degré} = 2 \times \text{nombre d'arête}$$

Montrons maintenant cet exercice par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 2$, il y a 4 points et 5 arêtes. Donc la somme des degré est égale à dix. Par principe des tiroir il existe un sommet avec au moins un degré $\geqslant 3$, celui ci est donc relié à tout les autres sommets. Une arête de plus forme alors un triangle.

Hérédité : Considérons le cas avec $2n+2$ points. Choisissons 2 sommets x, y reliés par une arête. Si il existe un sommet z qui soit relié à la fois à x et à y alors cela forme un triangle et on a gagné. Sinon il ne peut pas y avoir plus de n arêtes reliant x ou y à un autre sommet du graphe. Effaçons x, y et les arêtes reliées à x ou à y. On obtient alors un graphe avec seulement $2n$ sommets et au moins $(n+1)^2 + 1 - (n+1) = n(n+1) + 1 > n^2 + 1$. Par hypothèse de récurrence dans le graphe restant il existe un triangle.

Exercice 6
Montrer que

$$\sqrt{2\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}}} < 3.$$

Solution de l'exercice 6
Les racines sont ennuyeuses pour faire le calcul. Si on élève l'inégalité de l'énoncé au carré on obtient

$$\sqrt{3\sqrt{4\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}} < \frac{3^2}{2}$$

et si on recommence on a

$$\sqrt{4\sqrt{5\cdots\sqrt{(N-1)\sqrt{N}}}} < \frac{1}{3}\left(\frac{3^2}{2}\right)^2.$$

Ce qui donne l'idée d'introduire la suite u_n définit par

$$u_2 = 3 \quad \text{et} \quad u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n}$$

et il s'agirait de montrer que $\sqrt{N} < u_{N-1}$. On va montrer par récurrence une formule plus forte $\mathcal{H}_n = "u_n \geqslant n+1"$.

Initialisation : $u_2 = 3 \geqslant 2+1$, OK.

Hérédité : Supposons que $u_n \geqslant n+1$. Alors

$$u_{n+1} = \frac{u_n^2}{n} \geqslant \frac{(n+1)^2}{n} = \frac{n^2+2n+1}{n} \geqslant \frac{n^2+2n}{n} = n+2$$

et la formule de récurrence est donc vérifier pour $n+1$.

Remarque : il s'agit d'une idée très courante, parfois le raisonnement par récurrence ne fonctionne pas avec la formule de l'énoncé et il s'agit alors d'en démontrer une un peu plus forte.

Exercice 7

Montrer que

$$\underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ fois}} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right).$$

Solution de l'exercice 7

Il s'agit d'un bon exercice pour faire quelques rappels sur les formules de trigonométrie :

$$\cos^2 a + \sin^2 a = 1$$

$$\sin(a+b) = \cos a \sin b + \sin a \cos b$$
$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$

$$\sin(2a) = 2\cos a \sin a.$$

$$\cos(2a) = \cos^2 a - \sin^2 a = 2\cos^2 a - 1 = 1 - 2\sin^2 a$$

Dans notre cas on peut poser $\alpha = 2a$ et réécrire la deuxième égalité

$$\cos(\alpha) + 1 = 2\cos^2\left(\frac{\alpha}{2}\right)$$

et donc

$$\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \sqrt{\frac{\cos(\alpha)+1}{2}}.$$

Notons $u_n = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)$ et montrons la formule par récurrence.

Initialisation : Pour $n=1$ on a

$$u_1 = 2\cos\left(\frac{\pi}{4}\right) = 2 \times \frac{\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}.$$

Hérédité : Supposons que

$$u_n = \underbrace{\sqrt{2+\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}}_{n \text{ fois}}$$

alors

$$u_{n+1} = 2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+2}}\right) = 2\sqrt{\frac{\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+1}{2}} = \sqrt{2\cos\left(\frac{\pi}{2^{n+1}}\right)+2} = \sqrt{2+u_n}$$

et donc avec l'hypothèse de récurrence on obtient

$$u_{n+1} = \sqrt{2+\underbrace{\sqrt{2+\cdots+\sqrt{2+\sqrt{2}}}}_{n \text{ fois}}}$$

ce qui montre la formule pour le cas $n+1$.

Exercice 8
Soit a_n le nombre de mot de longueur n avec les $\{0,1\}$ et qui n'ont pas deux 1 à distance 2. Exprimer a_n en fonction des nombre de Fibonacci F_n ($F_1 = F_2 = 1$ et $F_{n+2} = F_{n+1} + F_n$).

Solution de l'exercice 8
Considérons d'abord une modification de l'exercice où les mots n'ont pas deux 1 à distance 1 (à la place de distance 2) et notons b_n le nombre de tel mot. Montrons que $b_n = F_{n+2}$.

Initialisation : Pour $n = 1$ il y a deux mots possibles $\{0,1\}$ et $F_3 = F_1 + F_2 = 2$ et pour $n = 2$ il y a trois mots possibles $\{00, 01, 01\}$ et $F_4 = F_2 + F_3 = 1 + 2 = 3$.

Hérédité : Supposons que la formule soit vrai pour n et $n-1$. Montrons quelle est vrai pour $n+1$. On peut classer les nombres de longueur $n+1$ en deux groupes : ceux qui commencent par 0 et ceux qui commencent par 1. Pour les premiers ils sont de la forme "$0x_1\cdots x_n$", avec les lettres $x_i \in \{0,1\}$ où dans "$x_1\cdots x_n$" il n'y a pas deux 1 consécutifs. Il y en a donc b_n tel mots. Pour les seconds ils sont de la forme "$10x_1\cdots x_{n-1}$" car la deuxième lettre ne peut pas être un 1. De même dans "$x_1\cdots x_{n-1}$" il n'y a pas deux 1 consécutifs. Il y en a donc b_{n-1} tel mots. Ainsi $b_{n+1} = b_n + b_{n-1}$. Par hypothèse de récurrence $b_n = F_{n+2}$ et $b_{n-1} = F_{n+1}$ donc $b_{n+1} = F_{n+2} + F_{n+1} = F_{n+3}$.

Reprenons maintenant l'exercice initial où il n'y a pas deux 1 à distance 2. Si $n = 2m$ alors on peut écrire le mots sous la forme

$$x_1y_1x_2y_2\cdots x_my_m$$

où les mots "$x_1x_2\cdots x_m$" et "$y_1\cdots y_m$" n'ont pas deux 1 consécutifs. On en déduit que $a_{2m} = b_m \times b_m = F_{m+2}^2$. Maintenant si $n = 2m+1$ alors on peut écrire le mots sous la forme

$$x_1y_1x_2y_2\cdots x_my_mx_{m+1}$$

où les mots "$x_1x_2\cdots x_{m+1}$" et "$y_1\cdots y_m$" n'ont pas deux 1 consécutifs. On en déduit que $a_{2m+1} = b_{m+1} \times b_m = F_{m+3}F_{m+2}$.

Exercice 9
Dans un pays chaque ville sont reliées à toutes les autres villes par une route à sens unique. Montrer qu'il existe une ville à partir de laquelle on peut aller n'importe quelle autre ville en utilisant au plus deux routes.

Solution de l'exercice 9
Raisonnons par récurrence. L'initialisation est facile et considérons alors un pays avec $n+1$ ville. Soit v une ville de ce pays. Le reste des villes est alors divisé en deux ensembles :

$$A = \{\text{Les villes à partir desquelles on peu aller vers } v\}$$
$$B = \{\text{Les villes où on peut aller en partant de } v\}$$

L'ensemble A forme un plus petit pays contenant moins de villes (au plus n). Donc par hypothèse de récurrence il existe une ville w dans A à partir de laquelle on peut atteindre toutes les autres villes de A en seulement deux routes. De plus à partir de w on peut atteindre v en seulement 1 route et n'importe quelle ville de B en deux routes, l'itinéraire étant de passer par v. Ce qui termine la preuve.

2 Divisibilité et PGCD (Gaspard)

Exercice 1
Soient a, b, c, d des entiers relatifs. Montrer que si $a \mid b$ et $c \mid d$, alors $ac \mid bd$.

Exercice 2
Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Exercice 3
Trouver tous les entiers naturels n verifiant $n^2 + 1 \mid n$

Exercice 4
Trouver tous les entiers naturels n verifiant $n + 1 \mid n^2 + 1$

Exercice 5
Trouver les n tels que $2^n + 1 \mid n^2 + 1$.

Exercice 6
Soient x et y des entiers. Montrer que $2x + 3y$ est divisible par 7 si, et seulement si $5x + 4y$ l'est.

Exercice 7
Résoudre dans $\mathbb{Z}$: $x + 2 \mid x^2 + 3$
et $n + 2 \mid n^3 + 7n^2 + 15n + 8$

Exercice 8
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^3 + n - 2$ est une puissance de 2

Exercice 9
Déterminer les entiers $n \in \mathbb{Z}$ tels que $n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n + 3 = 0$.

Exercice 10 (JBMO 2013)
Trouver les entiers naturels non nuls a et b tels que $\dfrac{a^3b-1}{a+1}$ et $\dfrac{b^3a+1}{b-1}$ sont des entiers.

Exercice 11 (IMO 1959, Probleme 1)
Montrer que pour tout entier n, $\dfrac{21n+4}{14n+3}$ est irréductible.

Exercice 12
Trouver l'ensemble des diviseurs communs de $2n + 3$ et $3n + 2$.

Exercice 13
Soit a, b, n tels que $pgcd(a, n) = pgcd(b, n) = 1$. Montrer que $pgcd(ab, n) = 1$

Exercice 14
Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que ab et $a + b$ sont premiers entre eux.

Exercice 15
On considère les nombres de Fermat, $F_n = 2^{(2^n)} + 1$ pour $n \in \mathbb{N}$. Montrer que, pour tout $n \in \mathbb{N}$

et $k \in \mathbb{N}$, $F_n \mid F_{n+k} - 2$. En déduire que les nombres de Fermat sont deux à deux premiers entre eux.

Exercice 16
Pour quels entiers positifs n a-t-on $3^{n-1} + 5^{n-1} \mid 3^n + 5^n$

Exercice 17
Pour des entiers strictement positifs m et n, Calculer

$$pgcd(2^m - 1, 2^n - 1)$$

Généralisez

Exercice 18
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $f(1) + f(2) + \ + f(n)|1 + 2 + ...n$ pour tout $n > 0$.

Exercice 19
Pour tout ensemble $A = \{x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\}$ de cinq entiers positifs distincts, on note S_A la somme de ses éléments et T_A, le nombre de triplets (i, j, k) avec $1 \leqslant i < j < k \leqslant 5$ pour lesquels $x_i + x_j + x_k$ divise S_A. Trouver la valeur maximale prise par T_A

Solution de l'exercice 1
$a \mid b$ et $c \mid d$ donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ka$, $d = k'c$, donc $bd = (kk')(ac)$ donc $ac \mid bd$

Solution de l'exercice 2
Pour le permier cas, il suffit de remarquer que parmi deux nombres consecutifs, au moins l'un des deux est pair (on peut sinon s'en convaincre en regardant la division euclidienne de n par 2). Comme le produit d'un nombre pair par n'importe quel autre entier est pair, alors $n(n + 1)$ est bien pair.
Pour le deuxième cas, on remarque que $n(n + 1)$ est pair, donc $2 \mid n(n + 1)(2n + 1)$. Quant a la divisibilité par 3, si $3 \mid n$, on a fini, sinon le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 ou 2. Dans le premier cas, on vérifiera que $2n + 1$ est divisible par 3 et dans le deuxième, que $n + 1$ est divisible par 3. Dans tous les cas, $n(n + 1)(2n + 1)$ est divisble par 3, et donc par 6.

Solution de l'exercice 3
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n^2 + 1| > |n|$, donc la seule possibilite est que $n = 0$.
Réciproquement, on a bien $1 \mid 0$.

Solution de l'exercice 4
Si $n + 1 \mid n^2 + 1$, alors $n + 1 \mid (n + 1)^2 - (n^2 + 1)$, donc $n + 1 \mid 2n$, donc $n + 1 \mid 2n - 2(n + 1)$, donc $n + 1 \mid -2$, donc $n = 0$ ou $n = 1$.
Réciproquement, 0 et 1 conviennent bien.

Solution de l'exercice 5
On montre par récurrence que pour $n > 4$, on a $2^n > n^2$. On teste donc pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$ et on trouve que les solutions sont $n = 2$ et $n = 4$.

Solution de l'exercice 6
Il suffit de remarquer que $(2x+3y)+(5x+4y) = 7x+7y$, cette quantité étant toujours divisible par 7.

Solution de l'exercice 7
On a

$$x+2 \mid x^2+3-(x-2)(x+2)=7$$

Donc $x+2 \in \{7,1,-1,-7\}$. Réciproquement, $x \in \{-9,-3,-1,5\}$.
On a $n+2 \mid n^3+7n^2+15n+8-(n+2)(n^2+5n+5)=-2$. Donc de la même manière, $n \in \{-4,-3,-1,1\}$.

Solution de l'exercice 8
Soit n une éventuelle solution. Alors $n^3+n-2=(n-1)(n^2+n+2)$ donc $n-1$ et n^2+n+2 sont des puissances de 2. Comme $n-1 < n^2+n+2$, nécessairement $n-1 \mid n^2+n+2$. On en déduit que $n-1 \mid n^2+n+2-(n-1)(n+2)=4$. Les diviseurs positifs de 4 sont $1,2,4$ donc les seules valeurs possibles pour n sont $2,3,5$. En testant chaque possibilité, seuls 2 et 5 conduisent à des solutions.

Solution de l'exercice 9
Soit n une éventuelle solution, alors en faisant passer le 3 de l'autre côté de l'égalité, on obtient que $n \mid 3$. Donc $n \in \{-3,-1,1,3\}$. Réciproquement, seuls -1 et 3 conviennent.

Solution de l'exercice 10
https://jbmo2013.tubitak.gov.tr/sites/default/files/jbmo2013solutions.pdf

Solution de l'exercice 11
Une fraction est irréductible ssi son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Or on a l'identité de Bézout $3\times(14n+3)-2\times(21n+4)=1$, donc le numérateur et le dénominateur sont bien premiers entre eux pour tout n et la fraction est bien irréductible.

Solution de l'exercice 12
Résoudre ce problème revient à chercher d le PGCD de $2n+3$ et de $3n+2$. Ecrivons la division euclidienne de n par 5 : $n=5k+r$ où $k\in\mathbb{Z}$ et $r\in\{0;1;2;3;4\}$. Ainsi $d \mid 10k+(2r+3)$ et $d \mid 15k+(3r+2)$, d'où $d \mid 3\times(10k+(2r+3))-2\times(15k+(3r+2))=5$. Ainsi d vaut 1 ou 5 et donc $d \mid (3r+2)-(2r+3)=r-1$. Puisque $r\in\{0;1;2;3;4\}$, on a $d=5 \Rightarrow r=1$. La réciproque est claire. Ainsi, $d=5 \iff n\equiv 1[5]$, et d vaut 1 dans les autres cas.

Solution de l'exercice 13
Soit d un diviseur commun de ab et n. En notant $d'=pgcd(d,a)$, on a que $d' \mid pgcd(a,n)$ donc $d'=1$. De même en notant $d''=pgcd(d,b)$, on obtient $d''=1$. De plus on a $d \mid d'd''$ donc $d=1$ pour tout d et $pgcd(ab,n)=1$. Une preuve beaucoupe plus rapide existe en utilisant les diviseurs premiers de a et b.

Solution de l'exercice 14
Soit d un diviseur commun de ab et de $a+b$. Alors $d \mid a(a+b)-ab=a^2$. Par symétrie, $d \mid b^2$, donc d divise le pgcd de a^2 et b^2. L'exercice précédent permet alors de calculer que le pgcd de a^2 et b^2 vaut 1 ce qui conclut.

Solution de l'exercice 15
Par récurrence sur k, $2^{(2^n)}-1 \mid 2^{(2^{n+k})}+1-2=2^{2^k\times 2^n}-1=(2^{2^{k-1}\times 2^n}-1)(2^{2^{k-1}\times 2^n}+1)\cdots$ ce qui conclut. Un diviseur commun de F_n et de F_m divise donc 2 par combinaison linéaire. Ne pouvant être égal à 2 car tout nombre de Fermat est impair, il est nécessairement égal à 1. Ainsi, tout terme de la suite des nombres de Fermat est premier avec tous les précédents, ce qui implique que deux nombres de Fermat distincts sont premiers entre eux

Solution de l'exercice 16
Si $5^{n-1}+3^{n-1} \mid 5^n+3^n$, alors $5^{n-1}+3^{n-1} \mid 5^n+3^n-5(5^{n-1}+3^{n-1}) = -2\cdot 3^{n-1}$. Ainsi,$5^{n-1}+3^{n-1} \leqslant 2\cdot 3^{n-1}$, d'où $5^{n-1} \leqslant 3^{n-1}$ et on en déduit que $n=1$. Réciproquement, pour $n=1$, 2 divise bien 8 et $n=1$ est notre seule solution.

Solution de l'exercice 17
Spdg on suppose que $m>n$ puis on écrit la division euclidienne de m par n. On a donc q,r tels que $m=qn+r$ et $0\leqslant r<n$. On a alors

$$pgcd(2^m-1,2^n-1) = pgcd(2^n-1,(2^m-1)-(2^n-1)2^{m-n}) = pgcd(2^n-1,2^{m-n}-1)\cdots = pgcd(2^n-1,2^r-1)$$

en répétant les opérations précédentes q fois On peut donc suivre la même méthode que pour l'algorithme d'Euclide pour obtenir le pgcd de m et n dans ce cas là, et on a bien $pgcd(2^m-1,2^n-1) = pgcd(2^{pgcd(m,n)}-1,2^0-0) = 2^{pgcd(m,n)}-1$.

Solution de l'exercice 18
On a $f(1)\mid 1$, donc $f(1)=1$. Ensuite, $1+f(2)\mid 3$, et $f(2)=2$ car $f(2)>0$. Ensuite, $3+f(3)\mid 6$, et encore une fois $f(3)=3$ car $f(3)>0$. On peut donc se dire que $f(n)=n$ pour tout n, ce qu'on va montrer par récurrence forte.
Initialisation : On vient de montrer que $f(1)=1$, $f(2)=2$, $f(3)=3$.
Hérédité : Soit $n\geqslant 3$ tel que $f(i)=i$ pour tout $i\leqslant n$.
Alors $1+2+\ +n+f(n+1)\mid 1+2+...n+1$, donc $\dfrac{n(n+1)}{2}+f(n+1)\mid \dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
Or pour $n\geqslant 3$, $\dfrac{\frac{n(n+1)}{2}}{\frac{(n+1)(n+2)}{2}} = \dfrac{n}{n+2} = 1-\dfrac{2}{n+2} > \dfrac{1}{2}$,
donc $\dfrac{n(n+1)}{2}+f(n+1) > \dfrac{n(n+1)}{2} > \dfrac{1}{2}\dfrac{(n+1)(n+2)}{2}$.
La seule valeur entière possible pour $\dfrac{\frac{(n+1)(n+2)}{2}}{\frac{n(n+1)}{2}+f(n+1)}$ est donc 1, ou encore $f(n+1) = n+1$, comme voulu. Ainsi notre récurrence tient, et $f(n)=n$ pour tout $n>0$.

Solution de l'exercice 19
Nous allons prouver que T_A vaut au plus 4. On suppose d'emblée que dans $A = \{x_1,x_2,x_3,x_4,x_5\}$ on a $x_1<x_2<x_3<x_4<x_5$.
On appelera bon un triplet (i,j,k) s'il correspond aux conditions de l'énoncé. On remarque tout d'abord qu'aucun des triplets $(3,4,5)$, $(2,4,5)$, $(1,4,5)$, $(2,3,5)$, $(1,3,5)$ n'est bon puisque par exemple

$$x_5+x_3+x_1 \mid S_A \Rightarrow x_5+x_3+x_1 \mid x_2+x_4$$

ce qui est impossible vu que $x_5>x_4$ et $x_3>x2$. De même, aucun des triplets de la forme $(x,y,5)$ où $y>2$ n'est bon. Ainsi, il y a au plus 5 bons triplets qui sont parmi $(1,2,5)$, $(2,3,4)$, $(1,3,4)$, $(1,2,4)$, $(1,2,3)$. Seulement, si $(1,2,5)$ et $(2,3,4)$ sont bons simultanéments, on a

$$x_1+x_2+x_5 \mid x_3+x_4 \Rightarrow x_5 < x_3+x_4$$

et

$$x_2+x_3+x_4 \mid x_1+x_5 \Rightarrow x_2+x_3+x_4 \leqslant x_1+x_5 < x_1+x_3+x_4 < x_2+x_3+x_4$$

absurde.
Donc $T_a \leqslant 4$.

Réciproquement, si $A = \{1, 2, 3, 4, 494\}$, $T_A = 4$, puisque $6 \mid 498$, $7 \mid 497$, $8 \mid 496$, et $9 \mid 495$.

3 Nombres premiers (Gabriel)

Aperçu premier

Vous avez vu la notion de divisibilité, ainsi que celle de plus grand diviseur commun. Certains nombres sont remarquables vis à vis de cette propriété, et nous permettent en retour de mieux la comprendre.

Définition 1 (Nombre premier).
On dit qu'on nombre p est *premier* s'il a pour seuls diviseurs positifs 1 et lui-même. On notera ici $\mathbb{P}$ l'ensemble des nombres premiers.

Exemple 2.
2 est le seul nombre premier pair, $3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ sont premiers, ainsi que 1789, par contre $2024 = 8 \times 11 \times 23$ ne l'est pas.

Exercice 1
Trouvez tous les $p \in \mathbb{N}$ tels que p, $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers.

Solution de l'exercice 1
L'un de ces trois nombres est divisible par 3. Ainsi seul $p = 3$ peut convenir. On vérifie que 3, 5 et 7 sont premiers.

Proposition 3 (Plus petit diviseur premier).
Soit $n > 1$, son plus petit diviseur différent de 1 est premier.

Exercice 2
Trouvez tous les $(p, n) \in \mathbb{P} \times \mathbb{N}$ tels que $p - 4 = n^4$.

Solution de l'exercice 2
On a $p = n^4 + 4 = (n^2 + 2)^2 - (2n)^2 = (n^2 - 2n + 2)(n^2 + 2n + 2)$. Comme le facteur de droite est plus grand que le facteur de gauche, et que p est premier on a $n^2 - 2n + 2 = 1$ donc $n = 1$ et $p = 5$.

Il est dur de donner une description explicite de $\mathbb{P}$, mais par contre on sait répondre assez précisément à des questions telle que : "En quelle quantité sont les nombres premiers ?"

Théorème 4 (dû à Euclide ♣).
Il y une infinité de premiers, ou de manière équivalente, pour tout entier N, il existe un premier $p > N$.

Démonstration. On raisonne par l'absurde. Supposons que $\mathbb{P} = \{p_1, \ldots, p_n\}$, et considérons $q = p_1 p_2 \ldots p_n + 1$. On a pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $\mathrm{pgcd}(q, p_i) = 1$ ce qui contredit la Proposition 3. □

Exercice 3 (Suisse 2020 P1)
Trouvez toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que

$$\forall (n,m) \in {\mathbb{N}^*}^2, \quad f(n) + f(m) \mid n + m.$$

Solution de l'exercice 3
Tout d'abord, $2f(1) \mid 2$, donc $f(1) = 1$.
Par ailleurs pour p premier, $1 + f(p-1) \mid p$ donc $f(p-1) = p-1$.
Ainsi, pour n quelconque $p + f(n) - 1 | p + n - 1$. Or, si $f(n) \neq n$, on doit avoir $2(p + f(n) - 1) \leqslant p + n - 1$, *i.e.* $p \leqslant n - 2f(n) + 1$. Ainsi comme p peut être arbitrairement grand, on a bien $f(n) = n$. Réciproquement, on vérifie que la fonction identité convient.

Remarque 5.
La preuve d'Euclide, et la Proposition 3 suggèrent une idée intéressante : si l'on connaît tous les premiers inférieurs ou égaux à $\sqrt{q}$, on peut facilement déterminer si q est premier ou non. En fait, développer cette intuition nous donne un algorithme (crible d'Eratosthène) très efficace pour obtenir les premiers séquentiellement.

Décomposition en facteurs premiers

La Proposition 3 donne l'idée d'essayer d'exprimer les nombres entiers comme des produits de premiers, ce qu'on peut en effet faire presque directement.

Proposition 6 (Existence d'une décomposition)**.**
Pour tout entier $n > 1$, il existe des premiers distincts $p_1, \ldots, p_m$ et des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}.$$

On appelle ceci une décompostion en facteurs premiers de n.

Démonstration. On peut raisonner par récurrence. Notons H_n la proposition "pour tout $k \in \mathbb{N}$ tel que $1 < k < n$, k admet une décomposition en facteurs premiers". H_1 et H_2 sont immédiatement vraies. Supposons maintenant H_n vraie, et notons p le plus petit diviseur de n, qui est premier d'après la Proposition 3. Si $p = n$, on a directement une décomposition de n, sinon on l'obtient de la décompostion de $\frac{n}{p} < n$ (qui existe par H_n), et ainsi H_{n+1} est vraie, ce qui conclut la récurrence. $\square$

Une fois une décomposition obtenue, on aimerait avoir l'unicité de celle-ci, mais ce qu'on a dit sur les premiers jusqu'à maintenant ne suffit pas à la montrer. On en vient à donner deux lemmes essentiels.

Lemme 7 (Gauss ♣)**.** Soit a, b, c des entiers tels que $\mathrm{pgcd}(a,b) = 1$.

1. Si $a \mid bc$, alors $a \mid c$.

2. Si $a \mid c$ et $b \mid c$ alors $ab \mid c$.
3. Si $\operatorname{pgcd}(a, c) = 1$ alors $\operatorname{pgcd}(a, bc) = 1$.

Démonstration.

1. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $bc = ma$. Par le théorème de Bézout, il existe $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$. Ainsi, $acu + bcv = c$ et $c = a(cu + mv)$.
2. $ab \mid bc$ et $ab \mid ac$, donc ab divise leur pgcd, qui est c. (c'est surtout un rappel).
3. Bézout nous donne l'existence de $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $ax + cy = 1$, et $(u, v) \in \mathbb{Z}^2$ tels que $au + bv = 1$. Alors $bv \cdot cy = (1 - ax)(1 - au) = 1 - (u + v - uva)a$, et donc par l'autre sens de Bézout, bc est premier avec a.

$\square$

Remarque 8.
Le "lemme de Gauss" réfère le plus souvent aux points 1 et 3.

Lemme 9 (Euclide ♣)**.** Soit $p \in \mathbb{P}$ et b, c des entiers.
Si $p \mid bc$, alors $p \mid b$ ou $p \mid c$.

Lemme 10 (Euclide généralisé)**.** Soit $p \in \mathbb{P}$ et $b_1, b_2 \dots, b_m$ des entiers.
Si $p \mid b_1 b_2 \cdots b_m$, alors il existe $i \in \{1, \dots, m\}$ tel que $p \mid b_i$.

Démonstration. Si $p \nmid b$ alors p et b sont premiers entre eux et donc $p \mid c$ par le lemme de Gauss, ce qui montre le lemme d'Euclide. Le lemme d'Euclide généralisé est obtenu par une rapide récurrence. $\square$

Remarque 11.
Le "ou" du lemme d'Euclide n'est pas exclusif, et l'indice i n'est pas forcément unique.
Par ailleurs, il faut absolument faire attention au sens des divisibilités données par le lemme de Gauss quand on l'utilise pour des exercices.

Exemple 12.
Soit $p \in \mathbb{P}$, et $n \in \mathbb{N}$ tel que $1 \leqslant n \leqslant p - 1$, alors $p \nmid n!$ et $p \nmid (n - p)!$ mais $p \mid p! = \binom{p}{n} n!(n - p)!$, ainsi $p \mid \binom{p}{n}$.

Exercice 4
Montrez que $p \mid (a + b)^p - (a^p + b^p)$.

Solution de l'exercice 4
Il suffit de développer le binôme de Newton : $(a+b)^p - (a^p + b^p) = \sum_{k=1}^{p-1} \binom{p}{k} a^k b^{n-k}$, or d'après l'exemple précédent, $p \mid \binom{p}{k} a^k b^{n-k}$, d'où le résultat voulu.

On peut enfin énoncer le résultat suivant.

Théorème 13 (Théorème fondamental de l'arithmétique ♣).
Soit $n > 1$ un entier, notons $p_1, \ldots, p_m$ les premiers inférieurs ou égaux n. Il existe des **uniques** exposants entiers (éventuellement nuls) $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \cdots p_m^{\alpha_m}.$$

Démonstration. Raisonnons par l'absurde. Supposons le Théorème 13 faux, on dispose de n *minimal* pour lequel il existe $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$ et $\beta_1, \ldots, \beta_m$ pour lesquels $n = \prod_i p_i^{\alpha_i} = \prod_i p_i^{\beta_i}$ et on a au moins un indice i_0 tel que $\alpha_{i_0} \neq \beta_{i_0}$. Si $\alpha_{i_0} \geqslant 1$ et $\beta_{i_0} \geqslant 1$, $\frac{n}{p_{i_0}} < n$ admet deux décompositions, ce qui est absurde. Ainsi sans perte de généralité, $\alpha_{i_0} = 0 < \beta_{i_0}$ mais alors $p_{i_0} \mid \prod_{i \neq i_0} p_i^{\alpha_i}$ ce qui est absurde, au vu du lemme d'Euclide généralisé.

□

Définition 14.
Il est souvent utile, pour un p spécifique, de regarder son exposant dans la décomposition en facteurs premiers de n. C'est la *valuation p-adique de n*, notée $v_p(n)$ (par exemple $v_5(75) = 2$). Cependant, tant qu'on n'est pas suffisamment familier avec la décomposition, il peut être plus prudent d'utiliser la périphrase précédente quand on en a besoin.

Exercice 5 (Autriche Junior 2021 P4)
Soit p un nombre premier ainsi que m et n des entiers strictement positifs tels que $p^2+m^2 = n^2$. Prouver que $m > p$.

Solution de l'exercice 5
Par manipulation algébrique, $p^2 = (n-m)(n+m)$. Par le théorème précédent, on a

— soit $p = n - m = n + m$, ce qui est impossible car $m > 0$;

— soit $p^2 = n + m$ et $n - m = 1$. Ainsi $p^2 = 2m + 1$ et donc

$$m = \frac{p^2 - 1}{2}.$$

Si $p = 2$, il est simple de vérifier que l'équation initiale n'a pas de solution. Ainsi $p \geqslant 3$ et $\frac{p^2-1}{2} \geqslant \frac{3p-1}{2} > p$.

On peut, par ailleurs, utiliser cette décomposition pour donner une expression explicite du pgcd et du ppcm.

Proposition 15.
Soit a, b deux entiers, $p_1 \ldots p_m$ des nombres premiers distincts et $\alpha_1 \ldots \alpha_m$ ainsi que $\beta_1 \ldots \beta_m$ des entiers (éventuellement nuls) pour lesquels $a = \prod_i p_i^{\alpha_i}$ et $b = \prod_i p_i^{\beta_i}$ alors on a

$$\operatorname{pgcd}(a, b) = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\min(\alpha_i, \beta_i)}.$$

Démonstration. Notons $g = \prod_{i=1}^{m} p_i^{\min(\alpha_i,\beta_i)}$. Il est clair que $g \mid a$ et $g \mid b$. Soit $I = \{i \in \{1 \dots m\} : \alpha_i \geqslant \beta_i\}$ et J le complémentaire de I dans $\{1, \dots, m\}$. On a

$$\frac{a}{g} = \prod_{i \in I} p_i^{\alpha_i - \beta_i} \text{ et } \frac{b}{g} = \prod_{i \in J} p_i^{\beta_i - \alpha_i}.$$

Comme I et J sont disjoints, $\frac{a}{g}$ et $\frac{b}{g}$ sont premiers entre eux, ce qui est caractéristique du pgcd. □

Vers l'infini et au-delà !

Nous avons déjà évoqué le fait qu'il existe une infinité de nombres premiers. Néanmoins, il est possible d'avoir besoin de résultats plus précis. Par exemple, quelle est la proportion de nombres premiers ? Ou encore est-ce qu'il existe une infinité de nombres premiers respectant une certaine propriété ? On peut tenter d'adapter l'argument d'Euclide, ce qui marche plutôt bien dans les situations suivantes.

Exercice 6
Montrez qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels qu'il existe un entier k pour lequel $p = 4k + 3$.

Dans la suite me permettrai d'utiliser la formulation familière "de la forme $4k+3$", l'entier k spécifique pour lequel on a l'égalité étant ici sans importance.

Solution de l'exercice 6
Cet exercice se comprend beaucoup mieux une fois la notion de *modulo* connue, sans laquelle tout paraît sorti d'un chapeau.
Résultat préliminaire :

1. Le produit de deux nombres de la forme $4k + 1$ est de la même forme.
2. Le produit de deux nombres de la forme $4k + 3$ est de la forme $4k + 1$.
3. Le produit d'un nombre de la forme $4k + 1$ et un nombre de la forme $4k + 3$ est de la forme $4k + 3$.

En effet pour $(a, b) \in \mathbb{N}^2$, on a $(4a + 1)(4b + 1) = 4(4ab + a + b) + 1$ ainsi que $(4a + 3)(4b + 3) = 4(4ab + 3a + 3b + 2) + 1$ et $(4a + 1)(4b + 3) = 4(4ab + 3a + b) + 3$.

Ceci étant prouvé, revenons à l'exercice et montrons le résultat par l'absurde. Notons $\{p_1, \dots, p_n\}$ les premiers de la forme $4k + 3$, si n est impair, la conjonction de (2) et (3) donne alors que $N = p_1 \cdots p_n + 4$ est de la forme $4k + 3$ et la contraposée du $1.$ affirme alors que N admet un diviseur premier q de la forme $4k + 3$ dans sa décomposition en facteurs premiers. Comme dans la preuve d'Euclide, q est différent des p_i, ce qui est absurde et permet de conclure. Si n est pair, il faut considérer le nombre $N = p_1p_2p_3 \cdots p_n + 2$ et la suite du raisonnement est parfaitement similaire.

Exercice 7
Existe-t-il une infinité de nombres premiers de la forme $2024k + 23$? Si oui, démontrez-le.

Solution de l'exercice 7
Non, 23 est le seul tel nombre premier car $2024 = 23 \times 88$.

Remarque 16 (Bazooka et missile balistique)**.**
On peut prouver par un argument similaire à celui de l'exercice 6 qu'il existe une infinité de premiers de la forme $6k+5$. Par contre pour montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers de la forme $4k+1$, on devra faire intervenir d'autres arguments comme celui d'*ordre*. En fait, il s'agit là de cas particuliers d'un théorème général, dû à Dirichlet. L'idée à garder en tête est que les nombres premiers sont à peu près répartis uniformément dans $\mathbb{N}$.

Exercice 8
On note p_n le n-ème premier, montrez que $p_n \leqslant 2^{2^{n-1}}$.

Solution de l'exercice 8
On fera une récurrence forte.
Initialisation : On a $p_1 = 2 \leqslant 2^{2^0} = 2$ et $p_2 = 3 \leqslant 2^{2^1} = 4$.
Hérédité : Supposons que la propriété est vraie pour tous les rangs $k \leqslant n$. Considérons $q = p_1 \dots p_n + 1 \leqslant 2^{2^0} \cdot 2^{2^1} \cdots 2^{2^{n-1}} + 1 = 2^{\sum_{k=0}^{n-1} 2^k} + 1 = 2^{2^n - 1} + 1 \leqslant 2^{2^n}$. Par la Proposition 3, q admet un diviseur premier p. Comme q est premier avec p_i, pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$, on a $p_{n+1} \leqslant p$, et ainsi $p_{n+1} \leqslant 2^{2^n}$, ce qui conclut la récurrence.

Remarque 17 (beaucoup de premiers)**.**
La borne de l'exercice est loin d'être optimale, par exemple $p_6 = 13$ tandis que $2^{2^5} = 2^{32} = 4294967296$. En fait, il faut garder en tête que les nombres premiers sont relativement nombreux (et donc p_n est relativement petit). Pour des n assez grands, p_n est inférieurs à n^α avec $\alpha > 1$ (il y a plus de nombres premiers que de carrés par exemple), mais prouver une telle borne est très difficile... Avec des connaissances de MO, on pourrait plus raisonnablement montrer que $p_n \leqslant 4^n$, en partant des exercices 10 et 11.

Plus d'exercices

Voici quelques exercices pour vous entraîner, suivis de leurs solutions.

Exercice 9
Soit p un premier supérieur à 4. Montrez que $12 \mid p^2 - 1$.

Exercice 10 (squarefree)
On dit que s est *squarefree* ou encore *quadrafreit*, si aucun carré ne divise s. Montrez que, pour tout entier n, il existe un unique couple (s, k) avec s squarefree et $k \geqslant 2$ pour lequel $n = sk^2$.

Exercice 11 (Compter les squarefrees)
Soit m le nombre de premiers inférieurs à n. On note S le nombre d'entiers squarefree inférieurs à n. Montrez que $S \leqslant 2^m$.

Exercice 12 (Une fonction multiplicative)
Pour $n \geqslant 1$, on note $\tau(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Montrez que si a et b sont premiers entre eux alors

$$\tau(ab) = \tau(a)\tau(b).$$

Exercice 13 (Canada 2023 P1)
J'ai pensé à un nombre n entre 1 et 50, vous devez le trouver. Vous avez le droit de me poser des questions de la forme "m divise-t-il n ?" où m est un entier naturel. En combien de questions au minimum êtes-vous sûr de trouver n ?

Exercice 14 (Schur dans un cas simple)
Soit a et b dans $\mathbb{N}^* \times \mathbb{N}$. On note $\mathcal{P}$ l'ensemble des p premiers tels qu'il existe $n \in \mathbb{N}$ pour lequel $an+b \neq 0$ et $p \mid an+b$. Montrez que $\mathcal{P}$ est infini.

Exercice 15 (Un lemme utile)
Soit a et b des entiers non-nuls. Montrez qu'il existe a' et b' premiers entre eux tels que $a' \mid a$ ainsi que $b' \mid b$ et

$$a'b' = \mathrm{ppcm}(a, b).$$

Exercice 16 (Italie 2019 P2)
Soit p et q des nombres premiers. Montrez que si $p + q^2$ est un carré parfait, alors pour tout n, $p^2 + q^n$ n'en est pas un.

Exercice 17 (Lemme de Schur)
Soit Q un polynôme à coefficients entiers avec $\deg Q \geqslant 1$. On note $\mathcal{P}(Q)$ l'ensemble des p premiers tels qu'il existe $n \in \mathbb{Z}$ pour lequel $Q(n) \neq 0$ et $p \mid Q(n)$. Montrez que $\mathcal{P}(Q)$ est infini.

Exercice 18 (Retour algorithmique sur l'exercice 15)
Donnez un algorithme permettant de calculer a', b' respectant l'énoncé de l'exercice 15 sans passer par la decomposition en facteurs premiers.

Solutions des exos

Solution de l'exercice 9
Le premier p est impair, donc $2 \mid p-1$ et $2 \mid p+1$, donc $4 \mid p^2+1$. Soit k et r le quotient et le reste de la division euclidienne de p par 3, c'est à dire $p = 3k + r$ où $r \in \{0, 1, 2\}$. Comme $p \neq 3$, $r \neq 0$. Si $r = 1$ alors $3 \mid p-1 \mid p^2-1$. Si $r = 2$ alors $3 \mid p+1 \mid p^2-1$. Dans tous les cas $3 \mid p^2-1$ et donc $12 \mid p^2-1$ par le deuxième point du lemme de Gauss.

Solution de l'exercice 10
On peut faire l'exercice en passant seulement par les lemmes de Gauss ou d'Euclide, en montrant d'abord l'existance puis l'unicité... Mais ça ressemble comme deux gouttes d'eau à la preuve du théorème fondamentale (Théorème 13) donc on va essayer de directement l'utiliser :

On part de la décomposition de $n = \prod_{i=1}^{m} p_i^{a_i}$. On essaie de trouver la forme des décompositions de s et k. Si $n = sk^2$ il existe b_i et c_i tels que $s = \prod_{i=1}^{m} p_i^{b_i}$ et $k = \prod_{i=1}^{m} p_i^{c_i}$. Ainsi on a $a_i = 2c_i + b_i$. Mais par ailleurs $b_i \leqslant 1$, sans quoi p_i^2 diviserait s qui ne serait pas squarefree. Tout ceci veut dire que b_i et c_i sont le reste et le quotient de la division euclidienne de a_i par 2. Réciproquement s et k construits avec de tels b_i et c_i conviennent.

Solution de l'exercice 11
Comme dans l'exercice précédent, si $s = \prod_{i=1}^{m} p_i^{b_i}$ est squarefree,pour tout $i \leqslant m$, on a $b_i \leqslant 1$ c'est à dire $b_i = 0$ ou $b_i = 1$ (sans quoi $p_i^2 \mid s$=. On a moins de 2 choix possibles et indépendants pour chacun des m facteurs premiers de s, c'est à dire qu'il y a moins de 2^m de squarefree s convenables.

Solution de l'exercice 12
Montrons qu'à tout diviseur de d de ab correspond un unique couple (d_a, d_b) tel que $d = d_a d_b$,

$d_a \mid a$ et $d_b \mid b$. Soit d un diviseur de ab, on définit $d_a = \text{pgcd}(a,d)$ et $d_b = \frac{d}{d_a}$. De plus d_b et $\frac{a}{d_a}$ sont premiers entre eux et donc $d_b \mid b\frac{a}{d_a}$ donne $d_b \mid b$ par le lemme de Gauss. C'est l'unique façon d'écrire d comme produit d'un diviseur de a et d'un diviseur de b : en effet si on dispose de d'_a et d'_b respectant les même conditions, alors $d'_a d'_b = d_a d_b$ donne $d_a \mid d'_a$ par le lemme de Gauss, mais aussi $d'_a \mid d_a$, d'où $d_a = d'_a$ et $d'_b = d_b$. Réciproquement, si $d_a \mid a$ et $d_b \mid b$ alors $d_a d_b \mid ab$. Ainsi de cette correspondance, on trouve obtient l'égalité cardinale $\tau(ab) = \tau(a)\tau(b)$. Notez par ailleurs qu'en remarquant que $\tau(n) = \sum_{d \mid n} 1$ ceci peut s'écrire

$$\tau(ab) = \sum_{d \mid ab} 1 = \sum_{\substack{(d_a,d_b) \text{ tq} \\ d_a \mid a \text{ et } d_b \mid b}} 1 \cdot 1 = \sum_{d_a \mid a} 1 \sum_{d_b \mid b} 1 = \tau(a)\tau(b).$$

Solution de l'exercice 13

Jouer au jeu (tout seul ou à deux) permet de se faire une idée de la solution : il faut poser des questions "p divise-t-il n ?" ou p est un premier.

Les premiers entre 1 et 50 sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19, 23, 29, 31, 37, 41, 43, 47$, au nombre de 15. On va montrer qu'il vous faut 15 questions au plus pour trouver mon nombre.

En effet il vous faut au moins 15 questions : si j'ai pensé à 1, le seul moyen d'en être sûr est que je réponde "non" à tous les questions $p \mid n$. Vous avez une stratégie en seulement 15 questions : posez d'abord des questions pour $m = 2, 3, 5, 7$

— Si j'ai répondu "non" au quatre questions, n est 1 ou un premier $\geqslant 11$ donc il vous suffit maintenant de 11 questions pour trouver n.

— Si j'ai répondu "oui" pour 2 et "non" aux autres, $m \in \{2, 4, 8, 16, 22, 26, 32, 34, 38, 44, 46\}$, il vous suffit maintenant de 11 questions pour trouver n

— Si j'ai répondu "oui" à 3 et "non" aux autres, $m \in \{3, 9, 27, 33, 39\}$ etc.

— Si j'ai répondu "oui" 5, ou à 7 ou à plusieurs questions, cela veut dire que vous connaissez $k \geqslant 5$ pour lequel $n = kn'$, en posant des questions de la forme $m = km'$ il vous suffit de $\lfloor \frac{50}{k} \rfloor$ questions pour trouver n.

Notons qu'en connaissant le théorème de Tchebychev (historiquement postulat de Bertrand), qui donne pour tout n l'existence d'un premier compris entre n et $2n$, on dispose d'une preuve plus courte et plus générale de l'exercice.

Solution de l'exercice 14

L'idée est de se ramener à un cas plus simple pour lequel on peut directement utiliser l'argument d'Euclide. Supposons dans un premier temps que $b = 1$. Alors pour $k \in n$ on a $\text{pgcd}(k, ak+1) = 1$. Et donc s'il existe un entier m pour lequel $\mathcal{P} = \{p_1, \ldots, p_m\}$ alors pour $k = p_1 p_2 \cdots p_m$ on obtient que $ak + 1$ est premier avec tous les p_i, ce qui est absurde.

Dans le cas général, on se ramène au cas spécifique en regardant les n multiples de b.

Solution de l'exercice 15

Passer par la décomposition en facteurs premiers est le plus simple : notons $a = \prod_i p_i^{\alpha_i}$, $b = \prod_i p_i^{\beta_i}$, $a' = \prod_i p_i^{\gamma_i}$ et $b' = \prod_i p_i^{\delta_i}$. On vérifie aisément que a' et b' définis par

$$\gamma_i = \begin{cases} \alpha_i & \text{si} \quad \alpha_i \geqslant \beta_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

et

$$\delta_i = \begin{cases} \beta_i & \text{si} \quad \beta_i > \alpha_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

conviennent.

Cette preuve est parachutée. Voici le procédé qui nous permet de la trouver :
Comme $a' \mid a$, pour tout i, $\gamma_i \leqslant \alpha_i$. De même $\delta_i \leqslant \beta_i$. Comme $a'b' = \operatorname{ppcm}(a,b)$ on a pour tout i, $\gamma_i + \delta_i = \max(\alpha_i, \beta_i)$. Comme a' et b' sont premiers entre eux, pour tout i, soit $\gamma_i = 0$, soit $\delta_i = 0$ et ainsi $\gamma_i + \delta_i = \max(\gamma_i, \delta_i)$. Si $\alpha_i > \beta_i$ on a alors $\delta_i = 0$ et $\gamma_i = \alpha_i$ (l'autre cas, $\delta_i = \alpha_i, \gamma_i = 0$ donnerait $\delta_i > \beta_i$), et symétriquement quand $\beta_i > \alpha_i$. Quand $\alpha_i = \beta_i$ on peut choisir comme on veut lequel de γ_i ou δ_i est nul (a' et b' ne sont donc pas uniques en général).

Solution de l'exercice 16
Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $p + q^2 = m^2$. Par manipulation algébrique, $p = (m-q)(m+q)$ et comme $m + q > m - q$ on a nécessairement $p = m + q$ et $m - q = 1$, *ie* $m = q + 1$ et $p = 2q + 1$. Par l'absurde supposons que $p^2 + q^n = a^2$ alors $q^n = (a-p)(a+p)$ donc il existe k tel que $q^k = a - q$ et $q^{n-k} = a + p$ mais $\operatorname{pgcd}(a+p, a-p) = \operatorname{pgcd}(a+p, 2p)$ or $\operatorname{pgcd}(q,p) = 1$. Si $q \neq 2$, on a alors $\operatorname{pgcd}(a+p, a-p) = 1$ et donc $a - p = 1$ *i.e* $a = 2q + 2$ et $q^n = 4q + 3$ donc $q \leqslant 5$ et $n \leqslant 3$, et on peut facilement vérifier que ceci ne donne pas de solutions. Si $q = 2$ alors $p = 5$ et $a + p - (a - p) = 10$, ce qui n'est jamais le cas pour la différence de puissances de 2.

Solution de l'exercice 17
On raisonnera par l'absurde. Une seule difficulté s'ajoute à l'exercice 14 : Q peut prendre la valeur 1 (ou -1) de façon non-triviale. Disons que $Q(n) = \sum_{k=0}^{\deg Q} a_k n^k = a_0 + n\left(\sum_{k=1}^{\deg Q} a_k n^{k-1}\right) = a_0 + nf(n)$. Je vous laisse vérifier qu'on peut se ramener au cas $a_0 = 1$, comme dans l'exercice 14. Supposons que $\mathcal{P}(Q) = \{p_1, p_2, \ldots, p_m\}$, et notons $k = p_1 p_2 \cdots p_m$. Si $|Q(k)| \neq 1$ on a gagné, mais comment assurer ceci ? En fait plutôt que de considérer k, on peut prendre αk avec α un entier suffisamment grand pour que $|f(\alpha k)| \geqslant 3$ (comme f est un polynôme, elle admet au plus $\deg f$ antécédents pour les nombres entiers dans $[-2, 2]$). Dans ce cas on a $|Q(\alpha k)| = |1 + \alpha k f(\alpha k)| \geqslant 2$ et et pour tout i, $\operatorname{pgcd}(p_i, Q(\alpha k)) = 1$, ce qui est absurde.
C'est un résultat qu'il est utile de connaître. Il existe de mutilples preuves, souvent très intéressantes ! Je vous conseille d'y jeter un coup d'oeil si vous avez le temps.

Solution de l'exercice 18
Concrètement, on se limite aux opérations suivantes : multiplications, divisions, et pgcd.
Soit $g = \operatorname{pgcd}(a,b)$. Voici un algo donnant un a' possible (une fois celui-ci calculé $b' = \operatorname{ppcm}(a,b)/a'$) :

- On part de $a_0 = a$.
- Tant que $\operatorname{pgcd}(a_n, \frac{b}{g}) \neq 1$, on définit $a_{n+1} = \dfrac{a_n}{\operatorname{pgcd}(a_n, \frac{b}{g})}$.
- a' sera le dernier nombre de la suite obtenue.

Quand on fait une preuve par algorithme, il faut montrer que le procédé se finit (terminaison) et qu'il donne le bon résultat (correction).
Montrons la **terminaison** de l'algorithme : on travaille dans $\mathbb{N}^*$ et on a $a_{n+1} < a_n$, ce qui assure que le nombre de termes est fini.
Montrons la **correction** de l'algorithme : soit p premier, et α et β les exposants de p dans

les décompositions de a_n et b, avec $\alpha \geqslant \beta$. Ainsi p ne divise alors pas $\frac{b}{g}$ et donc p^α divise $\dfrac{a_n}{\mathrm{pgcd}(a_n, \frac{b}{g})} = a_{n+1}$. Ainsi on obtient que l'exposant de p dans la décomposition de a' est le même que celui de a. Par ailleurs le fait que l'algo termine assure que $\mathrm{pgcd}(a', \frac{b}{g}) = 1$: on retrouve la définition de a' trouvé à l'exercice 15.

4 Inégalités (Anna)

Un carré est toujours positif

Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $x^2 \geqslant 0$, avec égalité si et seulement si $x = 0$. Ce fait basique est déjà extrêmement utile en soi et permet de montrer de nombreuses inégalités.

Exercice 1
Soient a, b deux réels. Montrer que $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$ et $2(a^2 + b^2) \geqslant (a + b)^2 \geqslant 4ab$.

Exercice 2
Montrer que pour tout $a, b, c \in \mathbb{R}$, on a $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

Exercice 3
Montrer que pour tout $a, b \geqslant 0$, on a $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$.

L'inégalité arithmético-géométriques

L'exercice 3 se généralise à tout $n \in \mathbb{N}$.

Théorème 1 (Inégalité arithmético-géométriques)**.**
Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n \geqslant 0$. Alors

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \ldots a_n},$$

avec égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = \cdots = a_n$.

Exercice 4
Montrer que pour tout $x, y \geqslant 0$, on a $2x^3 + y^3 \geqslant 3x^2 y$.

Exercice 5
Soient $a, b > 0$. Montrer que $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.

Exercice 6
Soient $x, z, y \geqslant 0$. Montrer que $(x + y)(y + z)(z + x) \geqslant 8xyz$.

Exercice 7
Soient $x, z, y \geqslant 0$. Montrer que $x^2 + y^2 + z^2 \geqslant \sqrt{x^2(y^2 + z^2)} + \sqrt{y^2(x^2 + z^2)}$.

Exercice 8
Soient $a, b, c \geqslant 0$. Montrer que $a^3+b^3+c^3 \geqslant a^2b+b^2c+c^2a$ et que $a^4+b^4+c^4 \geqslant a^2bc+ab^2c+abc^2$.

Exercice 9
Soient $a, b, c \geqslant 0$. Montrer que si $(1 + a)(1 + b)(1 + c) = 8$, alors $abc \leqslant 1$.

Exercice 10
Montrer que pour $x_1, x_2, \ldots, x_n > 0$, on a $(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right) \geqslant n^2$.

Exercice 11
Soit $a > 1$. Montrer que $a^n - 1 > n\left(a^{\frac{n+1}{2}} - a^{\frac{n-1}{2}}\right)$.

Inégalité de Cauchy-Schwarz.

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz).
Soient $x_1, x_2, \dots x_n,\ y_1, y_2, \dots y_n \in \mathbb{R}$. Alors

$$(x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n) \leqslant \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + \cdots + x_n^2}\sqrt{y_1^2 + y_2^2 + \cdots + y_n^2}.$$

L'égalité est atteinte si et seulement si les vecteurs $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ et $(y_1, y_2, \dots, y_n)$ sont colinéaires.

Comment retenir dans quel sens vont les inégalité ? On se souviens que si $x = (x_1, x_2)$, $y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$, et θ désigne l'angle entre les vecteurs x et y, alors

$$x_1y_1 + x_2y_2 = \langle x, y\rangle = \cos\theta \cdot |x| \cdot |y| \leqslant |x| \cdot |y| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2} \cdot \sqrt{y_1^2 + y_2^2}.$$

Théorème 3 (Inégalité des mauvaises élèves.).

Soient $a_1, a_2, \dots, a_n \in \mathbb{R}$ et , $b_1, b_2 \dots, b_n > 0$. Alors

$$\frac{a_1^2}{b_1} + \frac{a_2^2}{b_2} + \cdots + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + a_2 + \cdots + a_n)^2}{b_1 + b_2 + \cdots + b_n}$$

Démonstration. Par l'inégalité de Cauchy-Schwarz

$$\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2 + \left(\frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\right)^2 + \cdots + \left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\right)\left(\left(\sqrt{b_1}\right)^2 + \left(\sqrt{b_2}\right)^2 + \cdots + \left(\sqrt{b_n}\right)^2\right)$$

$$\geqslant \left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\sqrt{b_1} + \frac{a_2}{\sqrt{b_2}}\sqrt{b_2} + \cdots + \frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\sqrt{b_n}\right)^2 = (a_1 + a_2 \dots a_n)^2.$$

En divisant les deux côtés de l'inégalité par $b_1 + b_2 + \cdots + b_n$, on obtient le résultat voulu. □

Exercice 12
Soient $a^2 + b^2 + c^2 = 1$. Quelle est la valeur maximal $3a + 4b + 5c$?

Exercice 13
Montrer que pour $a, b, c > 0$,

$$\frac{a^2}{a^2 + 2bc} + \frac{b^2}{b^2 + 2ca} + \frac{c^2}{c^2 + 2ab} \geqslant 1.$$

Exercices en plus

Exercice 14
Soient $x_1, x_2, \dots x_n > 0$ tels que $\frac{1}{1+x_1} + \frac{1}{1+x_2} + \cdots + \frac{1}{1+x_n} = 1$. Montrer que $x_1x_2 \dots x_n \geqslant (n-1)^n$.

Exercice 15
Soit a, b, c, d des nombres positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que

$$\sqrt{\frac{a}{b + c + d^2 + a^3}} + \sqrt{\frac{b}{c + d + a^2 + b^3}} + \sqrt{\frac{c}{d + a + b^2 + c^3}} + \sqrt{\frac{d}{a + b + c^2 + d^3}} \leqslant 2.$$

Solutions.

Solution de l'exercice 1
On a

$$a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0,$$

$$2(a^2 + b^2) - (a+b)^2 = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0,$$

$$(a+b)^2 - 4ab = a^2 + b^2 - 2ab = (a-b)^2 \geqslant 0,$$

ce qui prouvent les inégalités voulus.

Solution de l'exercice 2
On a

$$a^2 + b^2 + c^2 = \frac{a^2 + b^2}{2} + \frac{b^2 + c^2}{2} + \frac{c^2 + a^2}{2} \geqslant ab + bc + ca.$$

Solution de l'exercice 3
Comme toutes les quantités impliquées sont non-négatives, il suffit de montrer que

$$\left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \geqslant \left(\sqrt{ab}\right)^2,$$

ce qui est vrai par les exercices précédents.

Solution de l'exercice 4
On a

$$\frac{2x^3 + y^3}{3} = \frac{x^3 + x^3 + y^3}{3} \geqslant \sqrt[3]{x^3 x^3 y^3} = x^2 y.$$

Solution de l'exercice 5
On a

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2\sqrt{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{a}} = 2.$$

Solution de l'exercice 6
On a

$$(x+y)(y+z)(z+x) \geqslant 2\sqrt{xy} \cdot 2\sqrt{yz} \cdot 2\sqrt{zx} \geqslant 8xyz.$$

Solution de l'exercice 7
On a

$$x^2 + y^2 + z^2 = \frac{x^2 + (y^2 + z^2)}{2} + \frac{y^2 + x^2 + z^2}{2} \geqslant \sqrt{x^2(y^2 + z^2)} + \sqrt{y^2(x^2 + z^2)}.$$

Solution de l'exercice 8
On a

$$a^3 + b^3 + c^3 = \frac{2a^3 + b^3}{3} + \frac{2b^3 + c^3}{3} + \frac{2c^3 + a^3}{3} \geqslant a^2 b + b^2 c + c^2 a,$$

et

$$a^4 + b^4 + c^4 = \frac{2a^4 + b^4 + c^4}{4} + \frac{2b^4 + c^4 + a^4}{4} + \frac{2c^4 + a^4 + b^4}{4} \geqslant a^2 bc + b^2 ca + c^2 ab.$$

Solution de l'exercice 9
On a
$$8=(1+a)(1+b)(1+c)\geqslant 2\sqrt{a}\cdot 2\sqrt{b}\cdot 2\sqrt{c}=8\sqrt{abc}.$$
Donc $1\geqslant abc$.

Solution de l'exercice 10
On a
$$(x_1+x_2+\dots x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\dots\frac{1}{x_n}\right)\geqslant n\sqrt[n]{x_1\dots x_n}\cdot n\sqrt[n]{\frac{1}{x_1\dots x_n}}=n^2.$$

Solution de l'exercice 11
Par l'IAG, on a
$$a^n-1=(a-1)(1+a+\dots+a^{n-1})\geqslant(a-1)\cdot n\cdot\sqrt[n]{a^{0+1+\dots+(n-1)}}=(a-1)\cdot n\cdot\sqrt[n]{a^{\frac{n(n-1)}{2}}}=n\left(a^{\frac{n+1}{2}}-a^{\frac{n-1}{2}}\right),$$
avec égalité si et seulement $1=a$. Comme $a>1$, l'inégalité est stricte.

Solution de l'exercice 12
Nous avons
$$3a+4b+5c\leqslant\sqrt{3^2+4^2+5^2}\sqrt{a^2+b^2+c^2}=\sqrt{50}\cdot 1.$$
L'égalité est atteinte pour $(a,b,c)=(\frac{3}{\sqrt{50}},\frac{4}{\sqrt{50}},\frac{5}{\sqrt{50}})$.

Solution de l'exercice 13
On a par, l'inégalité des mauvaises élèves,
$$\frac{a^2}{a^2+2bc}+\frac{b^2}{b^2+2ca}+\frac{c^2}{c^2+2ab}\geqslant\frac{(a+b+c)^2}{a^2+2bc+b^2+2ac+c^2+2ab}=1.$$

Solution de l'exercice 14
Pour rendre la condition sur les x_i moins pénible, on change de variables et onpose $y_i=\frac{1}{1+x_i}$ pour $i=1,2,\dots,n$. La condition devient alors $y_1+\dots+y_n=1$ et l'inégalité que l'on veut montrer de devient
$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-y_i}{y_i}\geqslant(n-1)^n.$$
Or, par l'IAG, on note que
$$\prod_{i=1}^{n}\frac{1-y_i}{y_i}=\prod_{i=1}^{n}\frac{\sum_{j\neq i}y_j}{y_i}\geqslant\prod_{i=1}^{n}\frac{(n-1)\sqrt[n-1]{\prod_{j\neq i}y_j}}{y_i}=(n-1)^n.$$

Solution de l'exercice 15
On commence par se débarasser des racines carrés en utilisant Cauchy-Schwartz :
$$\sum_{cyc}\sqrt{\frac{a}{b+c+d^2+a^3}}\leqslant\sqrt{1+1+1+1}\cdot\sqrt{\sum_{cyc}\frac{a}{b+c+d^2+a^3}}=2\sqrt{\sum_{cyc}\frac{a}{b+c+d^2+a^3}}.$$

Donc, il suffit de montrer que

$$\sqrt{\sum_{cyc} \frac{a}{b+c+d^2+a^3}} \leqslant 1.$$

Puis, par Cauchy-Schwartz,

$$\left(b+c+d^2+a^3\right)\left(b+c+1+\frac{1}{a}\right) \leqslant (a+b+c+d)^2.$$

et donc

$$\sum_{cyc} \frac{a}{b+c+d^2+a^3} \leqslant \sum_{cyc} \frac{a(b+c+1+\frac{1}{a})}{(a+b+c+d)^2}.$$

On veut montrer que $\sum_{cyc} a\left(b+c+1+\frac{1}{a}\right) \leqslant (a+b+c+a)^2$, ce qui, en développant, est équivalent à prouver

$$a+b+c+d+4 \leqslant a^2+b^2+c^2+d^2+(ab+bc+ca+ad) = a^2+b^2++c^2+d^2+(a+c)(b+d).$$

Or, nous avons

$$(a+c)(b+d) \geqslant 4\sqrt{abcd} = 4,$$

et

$$a^2+b^2+c^2+d^2 = \sum_{cyc}\left(\frac{5a^2}{8}+\frac{b^2}{8}+\frac{c^2}{8}+\frac{d^2}{8}.\right) \geqslant \sum_{cyc} \sqrt[8]{a^{10}b^2c^2d^2} = a+b+c+d.$$

5 Modulos et petit théorème de Fermat (Aline)

Arithmétique dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$: introduction

L'arithmétique manipule des entiers (éléments de $\mathbb{N}$ pour les entiers positifs dont 0, ou $\mathbb{Z}$ pour les entiers relatifs) que l'on peut additionner, soustraire, multiplier. En arithmétique modulaire, on fait la même chose, mais au lieu de regarder les nombres eux-mêmes, on choisit un entier $n > 0$ et on considère uniquement les restes des divisions euclidiennes par n.

On se donne pour la suite du cours un entier $n > 0$ de référence.

Rappel 1 (Division Euclidienne)**.**
Soit $a \in \mathbb{Z}$. Il existe un unique couple d'entiers $(q, r) \in \mathbb{Z}^2$ avec $r \in \{0, \dots, n-1\}$ vérifiant l'égalité

$$a = qn + r$$

On appelle q le **quotient** et r le **reste** de la division euclidienne de a par n.

En arithmétique modulo n donc, tout se passe comme si au lieu d'une infinité d'entiers, il n'y en avait que n : les n restes possibles **modulo** n, que l'on appelle classes d'équivalence.

Définition 2 (Classes d'équivalence modulo n)**.**

Soit $n \in \mathbb{Z}^*$. On note $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ l'ensemble des **classes d'équivalence modulo** n, autrement dit l'ensemble des restes possibles de division euclidienne modulo n. On note aussi $\overline{a}$ la classe de l'entier a (lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté).

Exemple 3.
On a ainsi, toujours modulo n :

(i) Il y a n classes d'équivalence : $\mid \mathbb{Z}/n\mathbb{Z} \mid = n$

(ii) La classe de 0 est constituée des multiples de n : $\overline{0} = \{\dots, -2n, -n, 0, n, 2n, 3n, \dots\}$

(iii) La classe de a quelconque est constituée des nombres de la forme $a + nk$ avec $k \in \mathbb{Z}$: $\overline{a} = \{a + nk \mid k \in \mathbb{Z}\}$. Comme toute classe d'équivalence, elle contient un nombre infini d'entiers de $\mathbb{Z}$.

(iv) Si l'on prend $n = 5$ juste pour cet exemple, la classe de 1 est ainsi

$$\overline{1} = \{\dots, -9, -4, 1, 6, \dots\} = \{1 + 5k \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Les exercices portent toujours sur des entiers de $\mathbb{N}$ ou $\mathbb{Z}$, et pas sur des classes d'équivalence de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour raisonner sur les classes sans perdre de vue les entiers et éviter les confusions, il nous faut une notation pour dire que deux entiers sont de la même classe d'équivalence : c'est la notion de congruence.

Définition 4 (Congruence modulo n)**.**

Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On dit que a et b sont **congrus modulo** n lorsque (conditions équivalentes) :

(i) a et b ont le même reste modulo n

(ii) $\overline{a} = \overline{b}$ modulo n

(iii) n divise $a - b$, autrement dit il existe un entier k tel que $a - b = kn$

On note dans ce cas

$$a \equiv b\,[n]$$

Ainsi, la notation modulaire apparaît comme un bon moyen de représenter des relations de divisibilité : la congruence modulo n exprime la divisibilité d'une différence par n.

Remarque 5.

Avant de raisonner modulo n, il faut choisir n et bien préciser qui est n, et quand on raisonne modulo n. Cela n'a aucun sens de dire "a est congru à b" sans rien préciser par exemple.

On verra que selon les énoncés et les situations, certains choix de n s'imposent plus ou moins naturellement comme de judicieux candidats.

Exemple 6.
Regardons les petits cas de n :

(i) $n = 1$ n'est pas très intéressant puisqu'il n'y a qu'un reste possible, 0 (tous les entiers sont divisibles par 1).

(ii) On utilise tout le temps le cas $n = 2$ sans y penser : la classe de 0 sont les nombres pairs, la classe de 1 les nombres impairs.

(iii) Le cas $n = 3$ est déjà plus intéressant puisqu'il y a 3 catégories possibles $0, 1, 2$.

Opérations dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

On conserve notre entier de référence $n > 0$ dans cette partie. On a donc vu que l'on pouvait ramener un problème sur des entiers, dans $\mathbb{Z}$, à un problème sur des classes d'équivalence, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, ce qui permet de représenter ce qui est divisible par n. À première vue, il n'y a pas un énorme gain de praticité à noter $a \equiv b\,[n]$ plutôt que $n \mid a-b$.

Le véritable intérêt est celui de pouvoir faire de l'**arithmétique modulaire**, c'est-à-dire des opérations directement sur les classes d'équivalence.

Théorème 7 (Structure d'anneau de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$)**.**

Soit $a, b, c \in \mathbb{Z}$. On définit les opérations suivantes dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

(i) Addition : $\overline{a} + \overline{b} = \overline{a+b}$

(ii) Multiplication : $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{ab}$

Ces opérations vérifient, comme dans $\mathbb{Z}$, les propriétés suivantes :

Symétrie : $\overline{a} + \overline{b} = \overline{b} + \overline{a}$ et $\overline{a} \times \overline{b} = \overline{b} \times \overline{a}$

$\overline{0}$ **neutre (+) et absorbant** $(\times)$ **:** $\overline{0} + \overline{a} = \overline{0}$, $\overline{a} \times \overline{0} = \overline{0}$

$\overline{1}$ **neutre** $(\times)$ **:** $\overline{1} \times \overline{a} = \overline{1 \times a} = \overline{a}$

Opposé pour + : $\overline{a} + \overline{-a} = \overline{0}$

Distributivité : $\overline{a} \times (\overline{b} + \overline{c}) = \overline{a} \times \overline{b} + \overline{a} \times \overline{c}$

Remarque 8.
Il en découle que l'on peut aussi considérer la soustraction comme une opération naturelle dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$:

$$\overline{a} - \overline{b} = \overline{a} + (-\overline{b}) = \overline{a} + \overline{-b} = \overline{a-b}$$

Toutes ces propriétés confèrent à $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}, +, \times)$ une structure d'**anneau**, autrement dit, on peut y faire les calculs avec $+$, $-$, $\times$ exactement comme dans (l'anneau) $(\mathbb{Z}, +, \times)$.

Remarque 9.
Comme dans $\mathbb{Z}$, on notera aussi parfois $\cdot$ au lieu de $\times$, voire on omettra le signe de multiplication lorsqu'il n'y a pas d'ambiguïté.

Exemple 10.
Regardons quelques cas pour se convaincre du bon sens de toutes ces définitions :

(i) On sait déjà que si on ajoute ou soustrait un multiple de n à n'importe quel nombre, on ne change pas son reste dans sa division euclidienne par n : $\overline{0} + \overline{a} = \overline{a}$.

(ii) Si on multiplie n'importe quoi par un multiple de n, on obtient un multiple de n : $\overline{0} \times \overline{a} = \overline{0}$.

(iii) Prenons un élément de la classe de 1 et un élément de la classe de 2 : ils s'écrivent $1 + kn$, $2 + ln$ pour des entiers k et l. Alors leur somme vaut

$$(1 + kn) + (2 + ln) = 3 + (k + l)n$$

dont le reste de la division euclidienne par n est bien $3 = 2 + 1$. Donc on vérifie ainsi $\overline{1} + \overline{2} = \overline{3}$.

(iv) On vérifie de même avec un élément de $\overline{2}$ et un de $\overline{3}$:

$$(2 + kn) \times (3 + ln) = 6 + [3k + 2l + (k + l)n]\, n$$

Qui est bien dans la classe de $2 \times 3 = 6$.

Qu'en est-il de l'opération de division ? Dans $\mathbb{Z}$, on ne peut pas toujours effectuer de division au sens où, en règle générale, le diviseur que l'on se donne ne divise pas le dividende. Ceci nous laisse penser que la division n'est pas une vraie "opération de $\mathbb{Z}$".

Exercice 1 (Critère de divisibilité)
Démontrer les affirmations suivantes, n étant un entier naturel :

(a) n est divisible par 9 si et seulement si la somme de ses chiffres (en base 10) l'est.

(b) n est divisible par 11 si et seulement si la somme alternée de ses chiffres l'est (par exemple, la somme alternée des chiffres de 123456 est $1 - 2 + 3 - 4 + 5 - 6$).

(c) On note $n = 10q + r$ la division euclidienne de n par 10. n est divisible par 7 si et seulement si $q - 2r$ est divisible par 7.

Solution de l'exercice 1
Pour (a) et (b) : Il suffit d'écrire les chiffres de n en base 10 et de regarder la congruence des puissances de 10 modulo 9 ou 11. Pour (c), on écrit $2n = 20q + 2r \equiv -q + 2r\ [7]$ et on utilise lemme de Gauss (2 et 7 sont premiers entre eux).

Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pourrait être tenté d'appliquer la division dans les cas où elle semble permise dans $\mathbb{Z}$. C'est dans la majorité des cas **une erreur à éviter absolument**.

Exemple 11.
Supposons par exemple que l'on écrive $12 \equiv 4\ [8]$. Si l'on essaie de "diviser" par la relation $2 \equiv 2\ [8]$, on obtiendrait quelque chose comme "$6 \equiv 2\ [8]$" qui est bien-sûr faux.

Ce qui est vrai, en revanche, est un énoncé de la forme suivante, dont on peut facilement se convaincre en écrivant les nombres sous la forme $a + kn$:

Proposition 12.
Soit a, b, d des entiers, avec $d \neq 0$. On a l'équivalence

$$a \equiv b\ [n] \quad \Leftrightarrow \quad ad \equiv bd\ [nd]$$

On ne reste alors plus dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. Pour y rester, on retiendra que l'on ne fait **jamais de division en arithmétique modulaire**.

Inversion et ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$

Si la division n'est pas une bonne opération de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on pourrait pourtant chercher une autre façon d'"inverser la multiplication". Si tout élément de $\mathbb{Z}$ ou de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ a un opposé par $+$ (la somme d'un nombre et de son opposé donne l'élément neutre de $+$, qui est le 0), certains éléments peuvent avoir un **inverse** par $\times$, tel que le produit d'un nombre et son inverse donne l'élément neutre pour $\times$, qui est 1.

Dans $\mathbb{Z}$, il n'y a pas beaucoup de tels éléments : on vérifie aisément que les seuls inversibles de $\mathbb{Z}$ sont ± 1. Mais dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, que se passe-t-il ? Regardons déjà ce que cela signifierait d'avoir $\overline{a}$ inversible :

$$\begin{aligned} \overline{a} \text{ inversible } &\Leftrightarrow \exists\, u, \quad \overline{a} \times \overline{u} = \overline{1} \\ &\Leftrightarrow \exists\, u, \quad a \times u \equiv 1\ [n] \\ &\Leftrightarrow \exists\, (u, v), \quad au - 1 = nv \\ &\Leftrightarrow \exists\, (u, v), \quad au - nv = 1 \end{aligned}$$

Ceci nous rappelle fort le **théorème de Bézout** :

Rappel 13 (Théorème de Bézout)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors

$$a \wedge b = 1 \quad \text{(i.e. } a \text{ et } b \text{ sont premiers entre eux)} \quad \Leftrightarrow \quad \exists\, (u, v) \in \mathbb{Z}^2, \quad au + bv = 1$$

Ainsi, on aboutit au théorème suivant :

Théorème 14 (Inversibles modulo n)**.**
Soit $a \in \mathbb{Z}$. On a l'équivalence

$$a \text{ inversible modulo } n \quad \Leftrightarrow \quad a \wedge n = 1$$

Dans ce cas, c'est en fait toute la classe d'équivalence $\overline{a}$ qui est inversible, et son **unique inverse** est une autre classe d'équivalence modulo n, notée $\overline{a}^{-1}$. Pour tous éléments x de $\overline{a}$ et y de $\overline{a}^{-1}$, on a alors

$$xy \equiv 1\ [n]$$

L'ensemble des inversibles modulo n est noté $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$.

Exemple 15.
Prenons pour un petit cas non trivial, $n = 8$. On peut alors calculer les classes inversibles et leurs inverses :

(i) $\overline{0}$ n'est pas inversible (ce n'est jamais le cas puisque 0 n'est premier avec personne).
(ii) $\overline{1}$ est son propre inverse (c'est toujours le cas puisque c'est l'élement neutre). De même, $\overline{-1} = \overline{n-1}$ (ici, $\overline{7}$) est toujours son propre inverse.
(iii) $\overline{2}$, $\overline{4}$, $\overline{6}$ n'ont pas d'inverse puisque $2, 4$ et 6 ne sont pas premiers avec 8.
(iv) $\overline{3}$ est inversible et son inverse peut être $\overline{3}$ ou $\overline{5}$, on calcule que c'est $\overline{3}$. De même, $\overline{5}^{-1} = \overline{5}$

Comment calculer l'inverse ? Mauvaise nouvelle, il n'y a pas de méthode algorithmique qui marcherait à tous les coups. C'est d'ailleurs une propriété très utile en cryptographie. Cependant, on remarque vite des propriétés commodes dans les calculs :

(a) L'inverse d'une classe inversible est à chercher parmi les autres classes inversibles.
(b) L'inverse est unique et on peut rapidement former des paires $(\overline{a}, \overline{a}^{-1})$: $(\overline{a}^{-1})^{-1} = \overline{a}$.
(c) L'inverse de $\overline{-a}$ est $-(\overline{a}^{-1})$
(d) Plus généralement, l'inverse de $\overline{a} \times \overline{b}$ est $\overline{a}^{-1} \times \overline{b}^{-1}$

L'ensemble des inversibles est stable par multiplication, autrement dit le produit de deux inversibles est inversible. La somme de deux inversibles en revanche n'est en général pas un inversible.

Cas particulier de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et première version du Petit Théorème de Fermat

On abandonne dans ce paragraphe notre entier n quelconque pour se placer modulo p premier, donc dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. D'après ce que l'on a vu précédemment, l'inversion se passe beaucoup mieux puisqu'à part la classe de 0 (multiples de p), toutes les classes d'équivalence sont inversibles. Trouver l'inverse d'une classe donnée est toujours aussi hasardeux, mais il n'y a pas d'exceptions à éviter.

Remarque 16.
$\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ se comporte donc davantage comme $\mathbb{R}$ (l'ensemble des réels) que comme $\mathbb{Z}$: tous les éléments possèdent un opposé par $+$, et tous possèdent un inverse par $\times$ à l'unique exception de la classe de $\overline{0}$. C'est ainsi non seulement un anneau, mais même un **corps de nombres**.

Puisque l'on peut faire des additions et des multiplications dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on en déduit immédiatement que l'on peut faire des **puissances** d'éléments. Profitons-en pour mentionner une propriété très utile dans beaucoup d'exercices :

Lemme 17 (Quelques modulos à connaître pour les carrés)**.**

(i) Un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 4.
(ii) Un carré est toujours congru à 0 ou 1 modulo 3.
(iii)

Exercice 2 (Équations diophantiennes)
Trouver les entiers $a \in \mathbb{N}$ ou les couples $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ vérifiant :

(a) $5 \mid a^3 + 3a + 1$

(b) $4 \mid a^2 + b^2 + 1$

(c) $a^4 + 6 = b^3$

Solution de l'exercice 2

(a) On regarde les congruences possibles pour a $[5]$ et on constate que les solutions sont exactement les classes d'équivalence de 1 et 2 modulo 5.

(b) Un carré peut valoir uniquement 0 ou 1 modulo 4, donc il n'y a pas de solution.

(c) Comme 3 et 4 divisent $12 = 13 - 1 = \varphi(13)$, on va regarder l'équation modulo 13. En effet, a^4 et b^3 peuvent alors seulement prendre quelques valeurs : a^4 peut valoir $0, 1, 3, 9$ et b^3 peut valoir $0, \pm 1, \pm 5$. En testant toutes les combinaisons, on tombe sur une absence de solution.

Quand on prend un entier a quelconque, la suite des puissances $1, a, a^2, \ldots$, regardée modulo p, a immédiatement une propriété remarquable : elle est **périodique** à partir d'un certain rang. En effet, puisqu'elle ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on trouve fatalement deux indices $k < \ell$ tels que $a^k \equiv a^\ell$ $[p]$. Dans ce cas, on a aussi $a^{k+1} \equiv a^{\ell+1}$ $[p]$, et ainsi de suite.

Au bout de combien de temps la suite se répète-t-elle ? Peut-on savoir quel ensemble de valeurs elle prend entre temps ?

Une façon de répondre (partiellement) à cette question est le théorème suivant :

Proposition 18 (Petit Théorème de Fermat, cas premier)**.**
Soit p un nombre premier, $a \in \mathbb{Z}$. Alors :

(i) $a^p \equiv a$ $[p]$

(ii) lorsque p ne divise pas a, $a^{p-1} \equiv 1$ $[p]$

Exercice 3
Montrer que $n^7 \equiv n$ $[42]$.

Solution de l'exercice 3
Plutôt que de tester tous les cas possibles modulo 42, on va utiliser le théorème des restes chinois : $42 = 2 \times 3 \times 7$. Or pour tour n, on a bien $n^7 \equiv n$ $[2]$, $[3]$ et $[7]$ (Petit Théorème de Fermat). D'où la conclusion.

En fait, la périodicité des puissances d'éléments est aussi vraie, pour les mêmes raisons, dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sans hypothèse de primalité sur n. En revanche, si le Petit Théorème de Fermat donne immédiatement une des périodes de la suite $(p-1)$ pour p premier, pour n quelconque ce n'est pas aussi immédiat. C'est l'objet de la partie qui suit.

Fonction indicatrice d'Euler et cas général du Petit Théorème de Fermat

Une propriété intéressante de l'ensemble des inversibles est son cardinal, autrement dit, le nombre d'éléments de $\{0, \ldots, n-1\}$ qui sont premiers avec n.

Définition 19 (Fonction indicatrice d'Euler φ).
On note $\varphi(n)$ et on appelle fonction indicatrice d'Euler (de n) le nombre entier

$$\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = |\{k \in \{0, \ldots, n-1\} \ \mid \ k \wedge n = 1\}|$$

Comment calculer $\varphi(n)$? Commençons par regarder des cas simples :

(a) Pour p premier, on a vu que $\varphi(p) = p - 1$ (les inversibles sont $1, \ldots, p-1$).

(b) Pour $n = p^k$ une puissance de p, on peut procéder par élimination : parmi les éléments de $\{0, \ldots, p^k - 1\}$, les seuls qui ne sont pas premiers avec p^k sont les multiples de p. On compte donc tous les multiples de p dans cet intervalle, on en trouve exactement $p^k/p = p^{k-1}$. Ce qui donne :

$$\varphi(p^k) = p^k - p^{k-1} = p^k\left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

Pour aller plus loin, il faudrait pouvoir maintenant traiter le cas de $\varphi(n)$ avec n composé de plusieurs facteurs premiers différents. C'est là que l'on va faire appel à un autre résultat utile :

Proposition 20 (Multiplicativité de φ).

φ est multiplicative au sens arithmétique du terme, c'est-à-dire que pour tous entiers n, m **premiers entre eux**,

$$\varphi(nm) = \varphi(n)\varphi(m)$$

Démonstration. L'idée est de compter les éléments de $(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^*$ en les écrivant sous la forme $\overline{an + bm}\ [nm]$:

On remarque d'abord le fait suivant puisque $n \wedge m = 1$:

$$\begin{aligned} an + bm \equiv a'n + b'n\ [nm] \quad &\Leftrightarrow \quad (a - a')n \equiv (b' - b)m\ [nm] \\ &\Leftrightarrow \quad nm \mid (a - a')n + (b - b')n \\ &\Leftrightarrow \quad a \equiv a'\ [m] \text{ et } b \equiv b'\ [n] \end{aligned}$$

Ainsi, à deux classes d'équivalence $\overline{a}[m]$ et $\overline{b}[n]$ correspond une unique classe d'équivalence modulo nm sous la forme $\overline{an + bm}[nm]$.

Mais comme on peut former ainsi exactement

$$|\mathbb{Z}/m\mathbb{Z}| \times |\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}| = mn = |\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}|$$

combinaisons, c'est que toutes les classes d'équivalence modulo nm peuvent être ainsi obtenues par un choix judicieux de $\overline{a}[m]$ et $\overline{b}[n]$.

On n'a pour le moment pas parlé de l'inversibilité de $\overline{a}\ [m]$, $\overline{b}\ [n]$ ou $\overline{an = bm}\ [nm]$. Si l'on veut donc que $an + bm$ soit inversible modulo $[nm]$ (i.e. premier avec nm), il faut (et il suffit) que a soit premier avec m et b premier avec n. Autrement dit, il faut et il suffit que l'on choisisse $\overline{a}\ [m]$ dans $(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*$ et $\overline{b}\ [n]$ dans $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. Cela donne le comptage suivant :

$$|(\mathbb{Z}/m\mathbb{Z})^*| \times |(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*| = \varphi(m)\varphi(n) = |(\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z})^*| = \varphi(nm)$$

□

On a ainsi au passage prouvé le théorème suivant :

Théorème 21 (Théorème des restes chinois)**.**
Soit n, m premiers entre eux, $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors le système d'équations (d'inconnue x) suivant

$$\begin{cases} x \equiv a\ [n] \\ x \equiv b\ [m] \end{cases}$$

possède une unique solution modulo $[nm]$, autrement dit, l'ensemble des solutions est non vide et égal à exactement l'une des classes d'équivalence dans $\mathbb{Z}/nm\mathbb{Z}$.

Reprenant notre calcul de $\varphi(n)$ pour n quelconque, en utilisant les résultats précédemment trouvés et la multiplicativité de φ, on trouve la formule suivante :

Proposition 22.
Expression de $\varphi(n)$ Pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\varphi(n) = n \prod_{\substack{p \text{ premier} \\ p|n}} \left(1 - \frac{1}{p}\right)$$

La démonstration précise de la formule est laissée au lecteur, tous les ingrédients de la preuve étant cités plus haut.

Revenons au Petit Théorème de Fermat, énoncé ici dans sa version la plus générale :

Théorème 23.
Petit Théorème de Fermat Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $a \in \mathbb{Z}$ inversible modulo n. Alors

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$$

Démonstration.
Déjà, on constate que le point (i) de la proposition 18 est une conséquence immédiate du théorème, que l'on obtient en multipliant l'égalité $\overline{a}^{p-1} = \overline{1}$ par $\overline{a}$ des deux côtés.

Passons au théorème général. On commence par remarquer que l'application (fonction)

$$\begin{aligned} f\colon (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* &\to (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^* \\ \overline{k} &\mapsto f(k) = \overline{a} \cdot \overline{k} \end{aligned}$$

est une bijection (c'est une opération inversible), qui opère en fait une permutation de l'ensemble $(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*$. On peut alors écrire :

$$\overline{K} = \prod_{\overline{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} \overline{k} = \prod_{\overline{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} (\overline{a} \cdot \overline{k}) = \overline{a}^{|(\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*|} \times \prod_{\overline{k} \in (\mathbb{Z}/n\mathbb{Z})^*} \overline{k} = \overline{a}^{\varphi(n)} \overline{K}$$

Mais comme $\overline{K}$ est inversible (produit d'inversibles), on peut simplifier par $\overline{K}^{-1}$ aux deux extrémités de la chaîne et on obtient

$$a^{\varphi(n)} \equiv 1\ [n]$$

$\square$

Exercice 4 (Qui a peur des grands nombres ?)
Calculer le reste de la division euclidienne par 19 de

$$2024^{2023^{2024}}$$

Solution de l'exercice 4
Regardons déjà ce que vaut 2024 modulo 19 :

$$2024 = 1900 + 124 = 19 \times 100 + 19 \times 6 + 10$$

donc $2024 \equiv 10\ [19]$. Ensuite, on constate que 19 est un nombre premier et que l'on aimerait donc bien utilise le Petit Théorème de Fermat : si on note $2023^{2024} = (19-1)q + r$ la division euclidienne de l'exposant par $18 = 19 - 1 = \varphi(19)$, on sait en effet que

$$2024^{2023^{2024}} \equiv 10^{18q+r} \equiv (10^{18})^q \times 10^r \equiv 1^q \times 10^r\ [19]$$

Pour réduire 2023^{2024} modulo 18, réduisons d'abord 2023 :

$$2023 = 1800 + 180 + 43 = 18 \times (100 + 10 + 2) + 7 \equiv 7\ [18]$$

On donc encore la possibilité d'appliquer le Petit Théorème de Fermat mais il faut calculer $\varphi(18)$:

$$\varphi(18) = 18\left(1 - \frac{1}{3}\right)\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \frac{18 \times 2}{3 \times 2} = 6$$

Il reste à réduire 2024 modulo 6 : $2024 \equiv 2\ [6]$. Donc

$$2023^{2024} \equiv 7^2 \equiv 49 \equiv 13\ [18]$$

D'où il vient

$$2024^{2023^{2024}} \equiv 10^1 3\ [19]$$

Il faut ensuite calculer la liste des puissances de 10 modulo 19 jusqu'au rang 13... $1, 10, 5, 12, 6, 3, 11, 15, 17, 18, 9, 14, 7, 13, 16, 8, 4, 2, 1, \ldots$

Finalement, on trouve

$$2024^{2023^{2024}} \equiv 13\ [19]$$

Exercices

Exercice 5 (EMC 2018)
Trouver tous les couples d'entiers $(x, y) \in \mathbb{N}^2$ tels que

$$xy \mid x^2 + 2y - 1$$

Solution de l'exercice 5
Regardons l'équation modulo x et modulo y :

$$x^2 + 2y - 1 \equiv 0\ [x] \quad \Rightarrow \quad 2y \equiv 1\ [x]$$

donc x, y sont premiers entre eux et on peut écrire $2y - 1 = zx$ pour un certain entier z. On remarque que cela impose x et z impair. Ensuite,

$$x^2 + 2y - 1 \equiv 0 \, [x] \quad \Leftrightarrow \quad x(x+z) \equiv 0 \, [y] \quad \Rightarrow \quad y \mid x+z$$

puisque x et y sont premiers entre eux. En utilisant $2y - 1 = zx$, on peut ensuite écrire :

$$\frac{zx+1}{2} \mid x+z$$

Si $x = 1$, on constate que tout z impair est solution. Symétriquement, pour $z = 1$, tout x impair est solution.

Si $x \geqslant 3$, on utilise l'équation ci-dessus pour obtenir l'inégalité $zx + 1 \leqslant 2(x+1)$ puis

$$(x-2)(z-2) \leqslant 3$$

Pour $x = 3$, cela donne $z \leqslant 5$ et on vérifie que $x = 1$ et $x = 5$ sont les seules solutions. Pour $x = 5$, on sait déjà que $z = 1$ fonctionne et on trouve la solution additionnelle $z = 3$.

En triturant tout ceci pour retrouver x et y correspondant à chaque solution en x et z, on obtient les solutions :

$$(x, y) \in \{(3,2), (3,8), (5,8)\} \cup \bigcup_{k \in \mathbb{N}^*} \{(1,k), (2k-1,k)\}$$

Exercice 6 (Théorème de Wilson)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $(n-1)! \equiv -1 \, [n]$ si et seulement si n est un nombre premier.

Solution de l'exercice 6

Si n est composé, un de ses facteurs apparaît dans l'écriture de $(n-1)!$. Donc $(n-1)!$ n'est pas premier avec n et en particulier, ne peut pas être congru à -1 modulo n. Ainsi, pour avoir $(n-1)! \equiv -1 \, [n]$, il faut que n soit premier. Vérifions que cela suffit.

Considérons donc n premier. Tous les entiers de 1 à $(n-1)$ sont alors inversibles modulo n. En outre, à part 1 et $n-1$, aucun n'est dans la même classe d'équivalence que son inverse : pour s'en rendre compte, on peut écrire l'équation

$$\begin{aligned} x^2 \equiv 1 \, [n] \quad & \Leftrightarrow \quad n \mid x^1 - 1 \\ & \Leftrightarrow \quad n \mid (x-1)(x+1) \\ & \Leftrightarrow \quad n \mid x-1 \text{ ou } n \mid x+1 \qquad \text{(lemme de Gauss car } n \text{ premier)} \\ & \Leftrightarrow \quad x \equiv 1 \, [n] \text{ ou } x \equiv -1 \, [n] \end{aligned}$$

dont les seules solutions modulo n sont bien ± 1.

Ainsi, dans le produit des entiers de 2 à $n-2$, on peut tout regrouper par paires d'inverses :

$$\begin{aligned} (n-1)! &= 1 \times 2 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) = 2 \times \cdots \times (n-2) \times (n-1) \\ \overline{(n-1)!} &= (\overline{2} \cdot \overline{2}^{-1}) \ldots (\overline{-2} \cdot \overline{-2})^{-1} \cdot \overline{-1} \\ &= \overline{-1} \end{aligned}$$

ce qui se réécrit comme l'énoncé du théorème :

$$(n-1)! \equiv -1\ [n]$$

Exercice 7
Soit p, q premiers et $a \in \mathbb{N}$ tel que $a \equiv 1\ [(p-1)(q-1)]$. Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $n^a \equiv n\ [pq]$

Solution de l'exercice 7
L'énoncé dit en fait que $a \equiv 1\ [\varphi(pq)]$. C'est donc une application du Petit Théorème de Fermat dans sa formulation générale.

Exercice 8 (Énigme)
Gargamel a capturé N Schtroumpfs pour faire une bonne soupe et leur propose un jeu le temps que l'eau chauffe : il fait apparaître sur le chapeau de chacun un entier, compris entre 1 et N, un même nombre pouvant apparaître plusieurs fois (ou jamais). Les Schtroumpfs peuvent alors se regarder mais pas communiquer entre eux. Gargamel les interroge ensuite un par un (ils ne peuvent pas entendre les réponses des autres) en leur demandant un nombre entre 1 et N. Si au moins l'un des Schtroumpfs lui donne exactement le nombre écrit sur son bonnet, ils sont tous libérés (sinon, la soupe). Ayant expliqué les règles, Gargamel s'en va quelques minutes pour aller nourrir son chat. Le Grand Schtroumpf en profite pour glisser à tous une stratégie pour éviter la soupe à coup sûr.

Quelle peut être cette stratégie ?

Solution de l'exercice 8
Chaque Schtroumpf peut répondre en faisant une sorte de pari sur une valeur commune à tous : par exemple, la somme S des bonnets modulo N. Il y a N classes d'équivalence possible pour S. Si le premier Schtroumpf parie sur “$S \equiv 1\ [N]$”, alors en regardant les bonnets des autres, il sait quel soit être son nombre (entre 1 et N) pour que cette congruence soit vérifiée. Il donne alors cette réponse. Le suivant parie sur “$S \equiv 2\ [N]$”, et ainsi de suite. Si on note $\overline{k}$, $1 \leqslant k \leqslant N$ la classe d'équivalence de S modulo N avec les nombres écrits par Gargamel, alors le $k^{\text{ème}}$ Schtroumpf arrivera à deviner exactement ce qu'il y a sur son chapeau.

Exercice 9 (Shortlist JBMO 2014)

Trouver tous les triplets de nombres premiers (p, q, r) vérifiant

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26$$

Solution de l'exercice 9

On raisonne modulo 3 ce qui donne $q^4 + 2r^2 \equiv 2\ [3]$. Si $q \neq 3$, le membre de gauche vaut 1 ou 0 mais pas 2 modulo 3 donc il n'y a pas de solution. Donc $q = 3$.

Ensuite on regarde modulo 5 pour avoir $3p^4 + r^2 \equiv 1\ [5]$. D'après le Petit Théorème de Fermat, si $p \neq 5$, le premier terme vaut 3 modulo 5 et le deuxième ne peut pas valoir -2 qui n'est pas un carré modulo 5. Donc $p = 5$.

Enfin, il ne reste plus qu'à chercher r tel que

$$4r^2 = 3 \cdot 5^4 - 5 \cdot 3^4 - 26 = 15 \cdot (125 - 27) - 26 = 15 \cdot 98 - 26 = 1444 = 4 \cdot 361 = 4 \cdot 19^2$$

ce qui donne $r = 19$.
Finalement, $(p, q, r) = (5, 3, 19)$.

Exercice 10 (Shortlist JBMO 2018)

Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (n, m) tel que

$$125 \cdot 2^n - 3^m = 271$$

Solution de l'exercice 10

Notons d'abord que $125 = 5^3$ et que 271 est premier. Regardons l'équation sous des modulos intéressants :

Modulo 9 **:** L'équation devient $-1 \cdot 2^n - 3^m \equiv 1\ [9]$. Si $m = 1$, on trouve qu'il faut $2^n \equiv 4\ [9]$, ce qui implique $n \equiv 2\ [6]$ (puisque la suite des puissances de 2 modulo 9 est 6-périodique). On vérifie rapidement qu'il n'y a pas de solution. Donc on cherche $m \geqslant 2$, auquel cas l'équation est $\cdot 2^n \equiv -1\ [9]$, ce qui impose $n \equiv 3\ [6]$ donc en particulier $3 \mid n$ et s'écrit $n = 3k$.

Modulo 10 **:** L'équation devient (puisque $n \geqslant 1$) $-3^m \equiv 1\ [10]$ d'où l'on tire $m \equiv 2\ [4]$. On écrit donc $m = 4\ell + 2$.

Modulo 16 **:** On obtient $9 \cdot 2^{3k} - 9 \equiv -1\ [16]$. Si $k \geqslant 2$, on est sans solution possible donc $k = 1$ et $n = 3$. Une fois que $n = 3$ est fixé, on trouve rapidement l'unique solution pour m valant 6.

Finalement, $(n, m) = (3, 6)$.

Exercice 11
Trouver tous les entiers $(n, m) \in \mathbb{N}^2$ tels que $m^{20} + 11^n$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 11
On écrit $m^{20} + 11^n = a^2$, et on réorganise pour obtenir

$$11^n = (a + m^{10})(a - m^{10})$$

La différence des deux facteurs vaut :

$$2m^{10} = 11^\alpha - 11^\beta = 11^\beta(11^{\alpha-\beta} - 1)$$

Pour certains entiers α et β de somme n. On distingue alors deux cas :

$\beta = 0$ Dans ce cas, on se retrouve plus simplement avec $2m^{10} = 11^\alpha - 1$. D'après le Petit Théorème de Fermat, m^{10} est congru à 0 ou 1 modulo 11. Le seul cas possible est $\alpha = 0$, d'où il vient $n = 0$, et c'est alors une impasse sans solution.

$\beta > 0$ Dans ce cas, m s'écrit $11^u \ell$ avec u, ℓ entiers tel que $\ell \wedge 11 = 1$. Nécessairement, $\beta = u$ et $2\ell^{10} = 11^{\alpha-\beta} - 1$. Mais $\ell^{10} \equiv 1\ [11]$ (Petit Théorème de Fermat) donc encore une fois, il ne peut y avoir d'autre solution que $\ell = \alpha - \beta = 0$.

Les solutions sont donc les couples de la forme $(2n, 0)$ avec $n \in \mathbb{N}$ quelconque (on vérifie qu'ils fonctionnent bien).

Exercice 12 (BxMO 2026)
Trouver le plus grand entier $n \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe des entiers $x_1, \dots, x_n \in \mathbb{Z}$ tel que $x_i^2 - x_i x_j$ n'est pas divisible par 1111 pour tout $i \neq j$.

Solution de l'exercice 12

Notons déjà que $x_i^2 - x_i x_j = x_i(x_i - x_j)$ et que $1111 = 11 \times 101$, où 11 et 101 sont premiers.

On note que si l'on a pour $i \neq j$ la congruence $x_i \equiv x_j$ $[1111]$, c'est raté, donc comme il n'y a que 1111 classes d'équivalence accessibles, il faut que $n \leqslant 1111$.

De plus, c'est aussi raté si $x_i \equiv x_j[101]$ et que x_i est divisible par 11. Si on prend un des x_i divisible par 11, on ne peut pas choisir d'autre x_j dans une classe d'équivalence modulo 1111 telle que $x_i \equiv x_j[101]$: cela élimine 10 classes d'équivalence (dont aucune n'est divisible par 11). Ainsi, il vaut mieux éviter directement de prendre les x_i divisibles par 11.

Pour la même raison, il est avantageux d'éviter de prendre les x_i divisibles par 101.

Il nous reste les classes d'équivalence inversibles modulo 1111, qui conviennent. Ainsi,

$$n = \varphi(1111) = 1111\left(1 - \frac{1}{11}\right)\left(1 - \frac{1}{101}\right) = \frac{1111 \times 100 \times 10}{1111} = 1000$$

Exercice 13 (Shortlist JBMO 2010)
Trouver tous les entiers n tels que $36^n - 6$ est le produit de trois entiers consécutifs.

Solution de l'exercice 13

Regardons modulo 7 :

$$36^n - 6 \equiv 1 - 6 \equiv 5\ [7]$$

Mais pour $a \in \mathbb{N}$, $(a-1)a(a+1) = a^3 - a$ peut valoir $0, 4, 6$ modulo 7, donc c'est impossible.

Exercice 14 (Shortlist JBMO 2011)
Trouver tous les entiers x, y, z positifs tels que

$$1005^x + 2011^y = 1006^z$$

Solution de l'exercice 14
On remarque que $2011 = 1006 + 1005$. Regardons modulo 1006 :

$$1005^x + (2011)^y \equiv 1005^x + 1005^y \equiv (-1)^x + (-1)^y\ [1006]$$

On en déduit que pour que l'équation soit vérifiée, il faut que x et y soient de parités opposées.

Si $z \geqslant 3$, 1006^z est divisible par 8 donc on peut regarder le membre de gauche modulo 8 :

$$1005^x + 2011^y \equiv 5^x + 3^y \neq 0\ [8]$$

pour x, y de parités opposées. Ainsi, $z \leqslant 3$. De plus, $z \geqslant x$ et $z > y$. On a donc assez peu de possibilités à tester :

(a) Si $z = 0$, x et y doivent valoir 0 mais ce n'est pas une solution.

(b) Si $z = 1$, on trouve pour seule solution $x = 1$ et $y = 0$.

(c) Si $z = 2$, on trouve la seule solution $x = 2$ et $y = 1$.

Les triplets solution pour (x, y, z) sont donc $(1, 0, 1)$ et $(2, 1, 2)$.

Exercice 15 (BxMO 2015)
Existe-t-il un premier $p \geqslant 100$ dont l'écriture en base 10 commence par les chiffres 38 et dont tous les autres chiffres sont égaux à 1 ensuite ?

Solution de l'exercice 15
Notons a_n le nombre à $n + 2$ chiffres dont les deux premiers sont 38 et les suivants égaux à 1. On peut déjà éliminer facilement certains a_n qui sont manifestement composés (non premiers donc), en regardant modulo 3 par exemple. Ceci conduit à distinguer les cas selon la congruence de n modulo 3 :

(a) $n \equiv 1\ [3]$: On voit par la somme des chiffres de a_n que $3 \mid a_n$.

(b) $n \equiv 2\ [3]$: On va cette fois chercher un peu plus loin, en remarquant que 37 (qui n'est pas très loin de 38) est un diviseur de 111. Ceci conduit à écrire :

$$a_n = 37 \cdot 10^n + \sum_{k=0}^{(n-2)/3} 111 \cdot 10^{3k}$$

Dont on voit bien qu'il s'agit d'un multiple de 11.

(c) $n \equiv 0\ [3]$: Notons $m = n/3$ et supposons $a_n = p$ premier. On manipule ensuite un peu l'expression de a_n.

$$\begin{aligned} a_n &= 3 \cdot 10^{3m+1} + 8 \cdot 10^{3m} + \frac{10^{3m} - 1}{10 - 1} \\ 9p &= 343 \cdot 10^{3m} - 1 && \text{où l'on reconnaît } 343 = 7^3 \\ 9p &= (7 \cdot 10^m)(49 \cdot 10^{2m} + 7 \cdot 10^m + 1) \end{aligned}$$

Sous cette forme, on applique le lemme d'Euclide : p divise soit le premier facteur, soit le second. Détaillons :

— Si $p \mid 7 \cdot 10^m - 1$, il faudrait que le second facteur soit un diviseur de 9. Il est manifestement plus grand que 9, donc c'est impossible.

— Si $p \mid 49 \cdot 10^{2m} + 7 \cdot 10^m + 1$, de même $7 \cdot 10^m - 1$ doit être un diviseur de 9, ce qui n'est pas possible.

On en conclut que a_n n'est jamais premier, quelque soit n.

Exercice 16 (Shortlist JBMO 2019)

Trouver tous les carrés parfaits n tel que si un entier $a \geqslant 15$ est un diviseur de n, alors $a + 15$ est une puissance d'un nombre premier.

Solution de l'exercice 16

En testant des petits carrés, on trouve que 1, 4, 9 conviennent. Supposons $n = t^2 \geqslant 16$ convenable. On distingue deux cas :

(a) Si n est une puissance de 2, ses diviseurs sont de la forme 2^k. On constate que 2^k est plus grand que 15 à partir de $k = 4$ et que $2^k + 15$ est premier jusqu'à $k = 6$, donc la plus grande puissance de 2 convenable est 2^6. $n = 16, n = 64$ conviennent. On en déduit en outre que la plus grande puissance de 2 qui peut diviser n est 2^6.

(b) Si n a un diviseur premier impair $p > 3$, alors $p^2 > 15$ donc il faut que $p^2 + 15$ soit égal à q^m une certaine puissance d'un nombre premier q. Comme p est impair, q est pair et on cherche une puissance de 2. Or $p^2 + 15 \equiv 1\ [3]$ et $2^m \equiv -1\ [3]$ (si m impair) et $1\ [3]$ (si m pair). On en déduit que m est pair et on note $m = 2k$.

Il vient alors $(2^k - p)(2^k + p) = 15$, et $(2^k + p) - (2^k - p) = 2p \geqslant 10$. La seule factorisation de 15 convenable est $2^k - p = 1$ et $2^k + p = 15$, ce qui retreint fortement les choix. En fait, on trouve que $p = 7$ (et $k = 3$) est l'unique solution.

On sait donc que n a pour facteurs premiers possibles uniquement 2 (avec une puissance inférieure ou égale à 6), 3 et 7. Comme c'est un carré, on écrit donc $n = 4^x \cdot 9^y \cdot 49^z$ avec x, y, z entiers positifs.

On cherche ensuite parmi les multiples de n des conditions supplémentaires : on remarque ainsi que $3^3 = 27$ n'est pas convenable, ce qui signifie que $y \leqslant 1$. De même, $7^3 = 73$ est exclu donc $z \leqslant 1$. De plus 18 et 21 ne sont pas admissibles, ce qui signifie que x, y ne peuvent pas être tous deux non nuls en même temps, de même que y, z.

Si on écarte les solution déjà trouvées $1, 4, 9, 16, 64$, il nous reste des solutions de la forme $n = 4^x \cdot 49$ avec $x \leqslant 4$. On teste les diviseurs de la forme $2^k \cdot 49$ et on trouve qu'ils ne fonctionnent plus à partir de $k = 3$, ce qui élimine les solutions $x \geqslant 2$.

Finalement, on trouve les solutions suivantes pour n :

$$n \in \{1, 4, 9, 49, 64, 196\}$$

Exercice 17 (Shortlist JBMO 2007)

Soit p un nombre premier. Démontrer que $N(p) = 7p + 3^p - 4$ n'est pas un carré.
Indice : on pourra utiliser (après l'avoir démontré) le lemme ci-dessous.

Lemme 24 (-1 carré modulo p)**.**
Soit p un nombre premier impair. Alors -1 est un carré modulo p si et seulement si $p \equiv 1\ [4]$.

<u>*Solution de l'exercice 17*</u>

On vérifie que $N(p = 2)$ ne donne pas un carré.

Si $p \neq 2$, on applique le Petit Théorème de Fermat : $N(p) \equiv 3 - 4 \equiv -1\ [p]$. Donc pour que $N(p)$ soit un carré, il faudrait que -1 soit un carré modulo p. D'après le lemme ci-dessous, c'est le cas si et seulement si $p \equiv 1\ [4]$. Mais alors $N(p) \equiv -1 + (-1) \equiv -2\ [4]$ et -2 n'est pas un carré modulo 4.

Il reste à prouver le lemme : on suppose pour cela qu'il existe un entier a tel que pour un nombre premier impair p, $a^2 \equiv -1\ [p]$. On utilise alors le fait qu'un tel a soit nécessairement premier avec p et le Petit Théorème de Fermat pour écrire :

$$1 \equiv a^{p-1} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}}\ [p]$$

Si $\frac{p-1}{2}$ est pair, c'est bon. Sinon, $\frac{p-1}{2} - 1 = \frac{p-3}{2}$ est pair et on calcule

$$(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1) \cdot (-1)^{\frac{p-3}{2}} \equiv -1 \ [p]$$

qui n'est en particulier pas congru à 1 modulo p.

6 Equations fonctionnelles 1 (Paul LL)

Substitutions

Les équations fonctionnelles sont un nouveau type d'équation : au lieu de chercher une ou plusieurs variable(s) solutions de l'équation, l'objectif est désormais de trouver les fonctions qui respectent l'équation.

En général, l'équation se présente sous la forme d'un problème qui demande de trouver toutes les fonctions $f : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$, telles que pour n'importe quelles variables (le plus généralement deux variables, mais parfois plus ou moins) de $\mathcal{A}$, une égalité entre deux membres en fonction de f et des variables tient.

Pour comprendre, rien de mieux qu'un exemple, en voici donc un :

Exemple 1.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout réel x et y, on ait

$$f(x+y) = f(x) + y$$

Pour résoudre ce problème, on va prendre des valeurs particulières de x et y qui nous donnent des informations sur f, pour obtenir un certain nombre d'équations entre nombres. Petit à petit nous allons pouvoir dresser le "portrait-robot" des fonctions f potentiellement solutions.

En fait nous raisonnons par *analyse-synthèse* :
Dans la partie *analyse*, nous supposons l'existence d'une solution f à l'équation, et en prenant des valeurs particulières des variables, nous obtenons des informations que les éventuelles solutions f **doivent** respecter si elles existent. Nous pouvons alors trouver un certain nombre de fonctions f qui respectent ces conditions, et sont donc les seules solutions **possibles**.

Dans la partie *synthèse*, nous vérifions si les solutions possibles respectent l'équation initiale. Nous pouvons donc déterminer quel est l'ensemble des fonctions solutions de l'équation. Reprenons notre exemple pour voir comment utiliser l'analyse-synthèse.

Démonstration. ***Analyse*** : On prend $x = 0$, ce qui donne :

$$f(y) = y + f(0)$$

Toutes les fonctions solutions sont donc des fonctions affines de la forme $f(x) = x + a$, avec a un réel. ***Synthèse*** : On vérifie que toutes ces fonctions sont bien solutions de l'équation :

$$f(x+y) = (x+y) + a = x + y + a$$

et

$$f(x) + y = x + a + y = x + y + a$$

Donc, pour tous réels x et y, on a bien $f(x+y) = f(x) + y$. Les solutions de l'équation sont bien les fonctions de la forme $f(x) = x + a$. $\square$

Remarque 2.
Les subsitutions les plus classiques sont $x = 0, 1$ ou -1, ainsi que $x = y$ ou $x = -y$. Mais cela dépend évidemment de l'équation qu'on nous donne. Par exemple, s'il y a un terme de la forme $f(x - g(y))$ (par exemple $f(x - y^2)$), il peut être intéressant de remplacer x par $g(y)$ pour obtenir $f(0)$. Ou alors une substitution qui permet de rendre égaux deux termes de l'égalité.
L'objectif est de s'adapter au problème pour trouver les meilleures substitutions possibles.

L'équation de Cauchy

L'équation de Cauchy est une équation fonctionnelle classique, qui peut revenir sous différentes formes dans des problèmes. Voici sa forme la plus simple :

Exemple 3.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{N}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Démonstration. On peut remarquer que toutes les fonction linéaires sont solution de l'équation, c'est ce que nous allons tenter de montrer.
En posant $x = y = 0$, on trouve :

$$f(0) = f(0) + f(0) \implies f(0) = 0$$

Nous avons donc cette première information importante.
Ensuite, on posant $y = 1$, on trouve :

$$f(x+1) = f(x) + f(1)$$

Comme nous avons trouvé que les solutions probables sont les fonctions linéaires, on pose $f(1) = a$, et en utilisant la relation précédente, on trouve :
$f(2) = a + a = 2a$, et $f(3) = f(2) + f(1) = 3a$.
Avec un raisonnement par récurrence, on trouve donc que pour tout entier naturel n,
$f(n) = an$, où $a = f(1)$ (avec $n = 0$ comme initialisation).
Nous ne pouvons cependant pas nous arrêter là : il faut encore vérifier que toutes les fonctions obtenues sont bien solution.
On a bien $f(x+y) = a(x+y) = ax + ay = f(x) + f(y)$, donc les fonctions solutions sont les fonction linéaires. $\square$

Exemple 4.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Démonstration. On remarque d'abord qu'on peut reprendre nos résultats sur les entiers naturels, pour retrouver $f(n) = an$ pour tout entier naturel n. On essaie alors d'étendre le résultat aux relatifs. Pour cela on pose $y = -f(x)$:

$$f(x-x) = f(x) + f(-x) \implies f(x) = f(0) - f(-x) = -f(-x)$$

Comme la fonction est impaire, pour tout entier négatif z, on a $f(z) = -f(-z) = -a(-z) = az$ comme voulu.
Maintenant, il s'agit d'étendre nos résultats aux rationnels (il suffit des rationnels positifs, comme f est impaire). Pour cela, nous montrons une propriété qui peut être déduite de la forme linéaire des solutions : pour tout entier naturel n et tout nombre rationnel q, on a $f(nq) = nf(q)$. Nous pouvons montrer cela par récurrence, en posant $x = nq$, et $y = q$.
De cette propriété nous pouvons déduire la forme de $f\left(\frac{1}{n}\right)$, en prenant $q = \frac{1}{n}$:

$$f(1) = nf\left(\frac{1}{n}\right) \implies f\left(\frac{1}{n}\right) = a\frac{1}{n}$$

Comme nous pouvons écrire tout rationnel positif r sous la forme $r = \frac{p}{q}$ avec p et q des entiers naturels, on trouve :

$$f(r) = pf\left(\frac{1}{q}\right) = a\frac{p}{q}$$

Et on en déduit la formule pour les rationnels négatifs par imparité de f.
Il reste à vérifier que toutes les fonctions linéaires sont bien solution de cette équation, la vérification se fait de manière analogue au précédent exercice. $\square$

Remarque 5.
Etant donné uniquement cette équation, il n'est pas possible d'étendre la résolution à $\mathbb{R}$: il existe des solutions à cette équation lorsque le domaine de définition et d'arrivée de la fonction sont $\mathbb{R}$ qui sont assez horribles à étudier, discontinues en tout point (sur Wikipédia vous trouverez que ces solutions sont dites "pathologiques"). Toutefois, si l'on dispose de certaines informations supplémentaires sur la fonction solution, nous pouvons en déduire que toutes les fonctions solutions sont linéaires. C'est notamment le cas si on sait que :

— la fonction f est monotone (croissante ou décroissante)

— la fonction f est continue

(Pourquoi peut-on déduire que la fonction est linéaire à partir de ces propriétés ?)
L'équation de Cauchy est un classique des équations fonctionnelles, et le résultat peut être librement réutilisé en exercice : si on trouve qu'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$, $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ ou $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ respecte l'équation de Cauchy, alors on peut directement en déduire que f est linéaire. De même, si on a une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui est solution de l'équation de Cauchy, et qui est continue ou monotone, alors on peut aussi en déduire que f est linéaire. Cependant, si on procède ainsi, il faut penser à vérifier que les fonctions linéaires sont bien toutes solutions de l'équation initiale, il se peut que seulement certaines (ou aucunes) d'entre elles ne soient solution.

Exercices

Premières substitutions

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(ab) = f(a+b)$$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = f(x) - f(y)$$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$xf(y) + yf(x) = (x+y)f(x)f(y)$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^* \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = f(xy) + x + y$$

Exercice 6 (IMO Longlist 1979, Exercice 65)
Soit f une fonction telle que $f(x) \leqslant x$ pour tout réel x, et $f(x+y) \leqslant f(x) + f(y)$ pour toute paire de réels x et y. Montrer que f est la fonction identité.

Astuces classiques

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(f(n)) = n + 1$$

Indice disponible

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^{666} + y) = f(x^{2023} + 2y) + f(x^{42})$$

Exercice 9 (Kirghizistan 2012)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Indice disponible montrer qu'il existe $k \in \mathbb{R}$ tel que $f(k) = 0$.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(f(x) + f(y)) = x + y \quad \text{et} \quad f(0) = 0$$

Exercices plus poussés

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y) - 2023$$

Indice disponible, ne pas refaire la démonstration de Cauchy sur $\mathbb{Z}$.

Exercice 12 (Test iranien 1996)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4f(x)y$$

Exercice 13 (IMO Longlist 1967, Exercice 50)
Soient $\varphi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $g : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ trois fonctions (des fonctions qui prennent en paramètre un triplet de réels, ou un couple de réels respectivement, qui ont pour image un réel), telles que $\forall(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$,

$$\varphi(x, y, z) = f(x + y, z) = g(x, y + z)$$

Montrer qu'il existe une fonction $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle que

$$\varphi(x, y, z) = h(x + y + z)$$

.

Indices

Indice de l'exercice 7 : calculer $f(f(f(n)))$ de deux manières différentes.
Indice de l'exercice 9 : Montrer qu'il existe un réel k tel que $f(k) = 0$.
Indice de l'exercice 10 : Parfois, changer de fonction est aussi utile que de changer de variable.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Il y a un produit dans le membre de gauche, c'est donc une bonne idée d'essayer de prendre $a = 0$ pour le rendre constant. En faisant cela, on trouve :

$$f(b) = f(0), \quad \forall b \in \mathbb{R}$$

On en déduit que toutes les fonctions solutions sont constantes.
Soit $f(x) = c$ une fonction constante : $f(ab) = c = f(a+b)$, donc toutes les fonctions constantes sont solutions de l'équation.
L'ensemble des solutions de l'équation est donc exactement l'ensemble des fonctions constantes.

Solution de l'exercice 2
Pour que la différence dans le membre de droite soit nulle, on prend $y = x$, ce qui nous donne :

$$f(2x) = 0, \quad \forall x \in \mathbb{R}$$

Or, tout réel z est atteint par la fonction $x \mapsto 2x$ (en prenant $x = \frac{z}{2}$), donc la seule solution possible est la fonction nulle.
Réciproquement, on vérifie que cette fonction est bien solution de l'équation.
La seule fonction solution de l'équation est donc la fonction nulle.

Solution de l'exercice 3
Analyse
On commence par prendre $y = x$, ce qui donne :

$$2xf(x) = 2xf(x)^2$$

D'où pour tout x non-nul, $f(x) = 1$ ou $f(x) = 0$. Ici, on est tenté de conclure qu'il y a deux possibles solutions pour les réels non-nuls : soit $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, soit $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$. Mais cela ne tient pas compte des multigraphes : on n'a pas encore montré qu'une fonction telle que $f(x) = 0$ pour certains réels (non-nuls) et $f(y) = 1$ pour d'autres n'était pas solution.
Pour les écarter, supposons par l'absurde qu'il existe $x, y \in \mathbb{R}^*$ tels que $f(x) = 0$ et $f(y) = 1$, on trouve à partir de l'équation initiale :

$$x = (x + y)f(x)f(y) = 0$$

ce qui est absurde comme on a supposé $x \neq 0$. Donc c'est impossible qu'il y ait de fonction solution qui prenne pour valeur 0 pour un certain antécédent non-nul, et 1 pour un autre antécédent non-nul.
Trouvons maintenant la valeur de $f(0)$ selon le cas. En prenant x non-nul et $y = 0$ on obtient :

$$xf(0) = xf(0)f(x)$$

Donc si $f(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on doit avoir $f(0) = 0$. Sinon, si $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$, on trouve $xf(0) = xf(0)$, donc $f(0)$ peut prendre n'importe quelle valeur réelle.
Synthèse
On vérifie aisément que la fonction nulle est bien solution.

Vérifions maintenant que toutes les fonctions de la forme $f(0) = C$ et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ sont également solution. Comme x et y jouent des rôles symétriques dans l'équation, il y a trois cas à vérifier :

— **Cas 1 :** $x = y = 0$. On a alors $xf(y) + yf(x) = 0 + 0 = 0$ et $(x + y)f(x)f(y) = 0 \cdot C^2 = 0$, donc on a bien $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.

— **Cas 2 :** $x = 0$ et $y \in \mathbb{R}^*$. Alors $xf(y) + yf(x) = 0 + yC$, et $(x + y)f(x)f(y) = y \cdot C \cdot 1 = yC$, donc on a également $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.

— **Cas 3 :** $x, y \in \mathbb{R}^*$, alors $xf(y) + yf(x) = x + y$ et $(x + y)f(x)f(y) = (x + y) \cdot 1^2 = x + y$, on a bien $xf(y) + yf(x) = (x + y)f(x)f(y)$.

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc la fonction nulle, et toutes les fonctions de la forme $f(0) = C$ (avec $C \in \mathbb{R}$) et $f(x) = 1$ pour tout $x \in \mathbb{R}^*$.

Remarque 6.
On appelle multigraphe une fonction telle que $f(x)$ prend plusieurs expressions/valeurs constantes selon la valeur de x. En général, celles-ci ne sont pas solution de l'équation fonctionnelle, mais les éliminer peut être plus ou moins compliqué selon l'équation.

Solution de l'exercice 4
Remplaçons x par $f(y)$, on trouve alors :

$$f(0) = 1 - f(y) - y \iff f(y) = -y + (1 - f(0))$$

En prenant $y = 0$ dans cette équation, on trouve $f(0) = 1 - f(0) \iff f(0) = \frac{1}{2}$.
Donc la seule solution possible f la fonction affine $f(x) = -x + \frac{1}{2}$.
On vérifie que la fonction est bien solution :
$f(x - f(y)) = f(x - (-y + \frac{1}{2})) = f(x + y - \frac{1}{2}) = (-x - y + \frac{1}{2}) + \frac{1}{2} = 1 - x - y$. La fonction $f(x) = -x + \frac{1}{2}$ est donc l'unique solution de l'équation.

Remarque 7.
Ici, on peut remplacer x par $f(y)$, parce que $f(y)$ est un nombre, donc x peut prendre cette valeur. Par contre, on ne peut pas remplacer $f(y)$ par x. On n'a aucune garantie que $f(y)$ peut atteindre n'importe quel nombre dans l'ensemble de définition de la fonction, donc si on opère ce changement de variable, les équations obtenues ne seraient plus forcément vraies pour tout nombre x de l'ensemble de définition de la fonction.

Solution de l'exercice 5
En prenant $y = 1$ on trouve :

$$f(x)f(1) = f(x) + x + 1 \iff f(x)(f(1) - 1) = x + 1, \quad \forall x \in \mathbb{R}^*$$

Si $f(1) = 1$, cela implique $x + 1 = 0$ pour tout x non-nul, ce qui est évidemment faux, donc $f(1) \neq 1 \implies f(1) - 1 \neq 0$.
Donc on trouve $f(x) = \frac{x}{f(1)-1} + \frac{1}{f(1)-1}$, et en prenant $x = 1$, on trouve :

$$f(1) = \frac{2}{f(1) - 1} \iff f(1)^2 - f(1) - 2 = 0 \iff (f(1) + 1)(f(1) - 2) = 0$$

Si $f(1) = -1$, on trouve $f(x) = \frac{x+1}{-2}$, et si $f(1) = 2$, on trouve $f(x) = x + 1$.
En vérifiant d'abord $f(x) = \frac{x+1}{-2}$, on trouve $f(1) = \frac{2}{-2} = -1$ et $f(-1) = 0$. Donc en utilisant cela dans l'équation initiale avec $(x, y) = (-1, -1)$, on trouve :
$f(x)f(y) = f(-1)^2 = 0$, et $f(xy) + x + y = f(1) - 1 - 1 = -3 \neq 0$, absurde ! Donc la fonction $f : x \mapsto \frac{x+1}{-2}$ n'est pas solution.
Par ailleurs, si $f(x) = x+1$, on trouve $f(x)f(y) = (x+1)(y+1) = xy+x+y+1 = (xy+1)+x+y = f(xy) + x + y$ donc cette fonction est solution de l'équation.
L'unique solution de l'équation est donc la fonction $f : x \mapsto x + 1$.

Remarque 8.
Il faut faire attention à l'ensemble de définition indiquée dans l'énoncé. Ici, il était tentant de commencer par prendre $y = 0$, mais cela était interdit par l'énoncé, et aurait donc résulté en une perte de points en compétition (ce n'est pas le cas dans cet exercice, mais exclure 0 ou un autre nombre de l'ensemble de définition de l'équation complique parfois grandement le problème).

Solution de l'exercice 6
En posant $(x, y) = (0, 0)$, on trouve $f(0) \leqslant f(0) + f(0) \iff f(0) \geqslant 0$. Donc $f(0)$ est positif.
De plus, en posant $(x, y) = (x, -x)$, on trouve :

$$f(0) \leqslant f(x) + f(-x) \implies f(x) \geqslant -f(-x)$$

Or, avec la première condition, trouve que pour tout réel x, $f(-x) \leqslant -x \iff x \leqslant -f(-x)$.
Donc en combinant les deux inégalités, on trouve

$$x \leqslant -f(-x) \leqslant f(x) \implies x \leqslant f(x) \leqslant x$$

Donc pour tout réel x, $f(x) = x$.

Remarque 9.
Il ne faut pas se laisser troubler par l'inégalité qui remplace l'égalité dans ce problème. De nombreux problèmes en compétition et en test sont désormais plutôt des "inéquations fonctionelles".

Solution de l'exercice 7
On cherche à calculer $f(f(f(n)))$ de deux manières :

— La première consiste à appliquer f aux deux membres de l'égalité : on obtient

$$f(f(f(n))) = f(n + 1)$$

— La seconde consiste à remplacer n par $f(n)$. On trouve alors :

$$f(f(f(n))) = f(n) + 1$$

Donc, pour tout entier naturel n, $f(n + 1) = f(n) + 1$. Ainsi, en posant $f(0) = m$, on peut montrer par une récurrence (immédiate) que $f(n) = n + m$.
En réinjectant cela dans l'équation initiale, on a :

$$f(f(n)) = n + 1 \implies f(n + m) = n + 1 \implies n + 2m = n + 1 \implies m = \frac{1}{2} \implies f(0) = m \notin \mathbb{N}$$

Absurde ! Donc il n'y a aucune solution à cette équation fonctionnelle. Cette astuce d'appliquer la fonction aux deux membres de l'égalité, et à remplacer une des variables par son image est utilisée assez souvent, notamment lorsqu'il y a une expression faisant intervenir $f(f(x))$.

Solution de l'exercice 8

Ici, on a deux termes ($f(x^{666}+y)$ et $f(x^{2023}+2y)$) qui font intervenir les mêmes variables dans des proportions différentes. On va donc essayer d'ajuster une des variables (ici plutôt y comme elle n'intervient pas dans des énormes puissances) pour que les deux termes soient égaux.
On cherche à avoir $x^{666}+y=x^{2023}+2y \iff y=x^{666}-x^{2023}$. On pose donc $y=x^{666}-x^{2023}$, et on trouve :

$$f(2x^{666}-x^{2023})=f(2x^{666}-x^{2023})+f(x^{42}) \implies f(x^{42})=0 \quad \forall x\in\mathbb{R}$$

Or, tout nombre réel positif a un antécédent par la fonction $x\mapsto x^{42}$ (comme pour toutes les puissances paires), donc $f(x)=0$ pour tout réel positif.
En posant désormais $y=0$, on trouve :

$$f(x^{666})=f(x^{2023})+f(x^{42})$$

Or $x^{666},x^{42}\geqslant 0$ (car ce sont des puissances paires), donc $f(x^{666})=f(x^{2023})=0$, et on trouve que pour tout réel x, $f(x^{2023})=0$. Or, comme tout réel négatif a un antécédent par la fonction $x\mapsto x^{2023}$ (comme pour toute puissance impaire), pour tout réel négatif x, $f(x)=0$.
La seule fonction possible est donc la fonction nulle. Réciproquement, on vérifie aisément que la fonction nulle est effectivement solution.

Solution de l'exercice 9

En posant $x=y=0$, on trouve $f(f(0)^2+f(0))=0$, donc 0 possède un antécédent par f, notons-le k (c'est-à-dire qu'il existe un réel k tel que $f(k)=0$).
Posons désormais $x=k$, cela donne, pour tout réel y :

$$f(f(y))=y$$

Ainsi, on peut appliquer f aux deux membres de l'équation :

$$f(f(f(x)^2+f(y)))=f(xf(x)+y) \iff f(x)^2+f(y)=f(xf(x)+y)$$

De plus, en remplaçant x par $f(x)$, le membre de gauche devient $f(f(x))^2+f(y)=x^2+f(y)$, et le membre de gauche reste inchangé ($f(x)f(f(x))=f(x)x=xf(x)$).
Donc $f(x)^2+f(y)=x^2+f(y) \implies f(x)^2=x^2$ pour tout réel x. Il serait une nouvelle fois tentant de conclure que les deux fonctions potentiellement solutions sont l'identité et son opposée. Fichtre ! C'est un nouveau multigraphe !
Suppsosons donc qu'il existe $x,y\neq 0$, tels que $f(x)=x$, et $f(y)=-y$. En reprenant l'équation initiale, on trouve :

$$f(x^2-y)=x^2+y$$

Si $f(x^2-y)=x^2-y$, alors on trouve $y=0$, ce qui est impossible comme on a supposé $y\neq 0$.
Donc $f(x^2-y)=-x^2+y$, et donc $x=0$, également impossible.
Il est donc impossible qu'il existe deux réels non-nuls x et y tels que $f(x)=x$ et $f(y)=-y$.

Les deux seules solutions possibles sont donc $x \mapsto x$, et $x \mapsto -x$.
Dans le premier cas, $f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + y) = x^2 + y = xf(x) + y$, donc la fonction est solution.
Dans le second cas, $f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 - y) - x^2 + y = xf(x) + y$, donc la fonction est également solution.
Les deux solutions de l'équation sont donc $x \mapsto x$ et $x \mapsto -x$.

Solution de l'exercice 10
On pose $y = 0$ pour utiliser la 2nde condition, et on trouve à nouveau $f(f(x)) = x$. Donc pour l'utiliser, on applique f aux deux membres, ce qui donne :

$$f(f(f(x) + f(y))) = f(x + y) \implies f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Donc toute fonction solution de l'équation initiale est solution de l'équation de Cauchy. De plus, cette fonction a pour domaine de définition $\mathbb{Q}$, donc elle doit être linéaire, c'est-à-dire de la forme $f(x) = ax$ pour un certain réel. On voit que toutes ces fonctions respectent la condition $f(0) = 0$, et en réinjectant cela dans l'équation intiale :

$$f(f(x) + f(y)) = f(ax + ay) = a^2(x + y) = x + y$$

Donc $a^2 = 1 \implies a = 1$ ou -1.
Les solutions de l'équation sont donc les fonctions $f(x) = x$ et $f(x) = -x$ (les calcus pour déterminer a font office de vérification, mais dans le doute ça ne fait jamais de mal de revérifier que les fonctions obtenues sont bien des solutions, on ne sait jamais).

Solution de l'exercice 11
Créons une fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ en posant $g(x) = f(x) - 2023 \iff f(x) = g(x) + 2023$ pour tout entier relatif x. Donc :

$$g(x + y) + 2023 = g(x) + g(y) + 2023 + 2023 - 2023 \iff g(x + y) = g(x) + g(y)$$

Donc g est solution de l'équation de Cauchy, et est donc de la forme $g(x) = ax$ avec $a \in \mathbb{Z}$, d'où $f(x) = ax + 2023$.
Vérifions que toutes ces fonctions sont bien solution de l'équation :

$$f(x+y) = a(x+y)+2023 = ax+ay+2023 = ax+2023+ay+2023-2023 = f(x)+f(y)-2023$$

Les solutions de l'équation sont donc toutes les fonctions de la forme $f(x) = ax + 2023$ avec a un entier relatif.

Solution de l'exercice 12
On cherche à trouver une expression de $f(0)$, pour cela il y a deux substitutions possibles.

— Pour la première, on pose $y = -f(x)$, et on obtient

$$f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2$$

— Pour la seconde, on pose $y = x^2$, et on obtient

$$f(f(x) + x^2) = f(0) + 4f(x)x^2 \iff f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4x^2 f(x)$$

En combinant les deux égalités, on a, pour tout réel x :

$$4x^2f(x) = 4f(x)^2 \iff x^2f(x) = f(x)^2$$

Donc pour tout réel x, soit $f(x) = 0$, soit $f(x) = x^2$, encore un multigraphe (c'est presque comme si quelqu'un avait fait exprès de chercher des exercices de multigraphe).
Notons A l'ensemble des réels non-nuls (parce que pour $x = 0$, $x^2 = 0$, donc ça ne nous apprend rien) dont l'image par f est 0, et B l'ensemble des réels non-nuls dont l'image par f est leur carré. Supposons par l'absurde que $A, B \neq \emptyset$. Comme $A \cup B = \mathbb{R}^*$, donc A ou B est un ensemble infini (ou éventuellement les deux).
On prend $a \in A$ et $b \in B$, comme au moins un des deux ensembles est infini, on peut supposer $a^2 \neq 2b$ (quitte à changer l'élément de l'ensemble infini pour ne plus avoir $a^2 = 2b$) (on verra par la suite pourquoi on suppose cela).
En prenant $(x, y) = (a, b)$ dans l'équation initiale, on trouve :

$$f(b) = f(a^2 - b) \iff b^2 = f(a^2 - b)$$

Comme $b^2 \neq 0$, on doit avoir $f(a^2 - b) \neq 0$, donc $f(a^2 - b) = (a^2 - b)^2$. D'où :

$$b^2 = (a^2 - b)^2 \iff b^2 - (a^2 - b)^2 = 0 \iff a^2(2b - a^2) = 0$$

Or, on a $a^2 \neq 2b$, et $a^2 \neq 0$, donc le produit ne peut être nul, contradiction. Ainsi, soit $f(x) = x^2$ pour tout réel x, soit $f(x) = 0$ pour tout réel x.
Il reste à vérifier ces deux solutions : pour la fonction nulle on voit immédiatement que c'est une solution. Pour la fonction carré on a :

$$f(f(x)+y) = f(x^2+y) = x^4+2x^2y+y^2 = x^4-2x^2y+y^2+4x^2y = (x^2-y)^2+4x^2y = f(x^2-y)+4f(x)y$$

Donc la fonction carré est également solution de l'équation. Les deux solutions sont donc la fonction nulle, et la fonction carré.

Solution de l'exercice 13
On commence par poser $y = 0$, et on trouve que pour tous réels x, y,

$$f(x, z) = g(x, z)$$

On en déduit que les fonctions f et g sont égales. On peut donc réécrire l'énoncé :

$$\varphi(x, y, z) = f(x + y, z) = f(x, y + z)$$

Or, $f(x, y + z) = f(0 + x, (y + z)) = \varphi(0, x, y + z) = f(0, x + (y + z))$ (en remplaçant (x, y, z) par $(0, x, y + z)$). D'où :

$$\varphi(x, y, z) = f(x, y + z) = \varphi(0, x, y + z) = f(0, x + y + z)$$

On peut donc poser $h(x) = f(0, x)$ pour tout réel x. Cette fonction remplit la condition de l'énoncé, en effet pour tous réels x, y et z :

$$\varphi(x, y, z) = f(0, x + y + z) = h(x + y + z)$$

Solution alternative : On commence, comme dans l'autre solution, par montrer que $f = g$.

Ensuite, en s'attardant sur la relation $f(x+y,z) = f(x,y+z)$, on se rend compte qu'on peut la réécrire $f((x+y),z) = f((x+y)-y,z+y)$ c'est-à-dire

$f(a,c) = f(a-b,c+b)$ (en prenant les $y = b$ et $z = c$ que l'on souhaite, et en posant $x = a - b$)

Et donc

$$\varphi(x,y,z) = f(x+y,z) = f(0,x+y+z)$$

Et on peut à nouveau poser $h(x) = f(0,x)$.

7 Equations fonctionnelles 2 (Clémentine et Eva)

Définition 1 (Injectivité)**.**
Soit $f : E \to F$, on dit que f est injective sur E si pour tout x, y de E tels que $x \neq y$, $f(x) \neq f(y)$, c'est-à-dire $f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$
Ainsi, l'injectivité permet de "simplifier" par f.

Exemple 2.
$f : x \mapsto x^2$ est injective sur $\mathbb{R}^+$ mais pas sur $\mathbb{R}$
Ainsi dans $\mathbb{R}^+$, si on a $f(a + b) = f(c)$ on sait que $a + b = c$ mais pas dans $\mathbb{R}$, (on sait ici cependant que $a + b = \pm c$)

Exercice 1
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ telles que pour tout $(x, y) \in (\mathbb{R}^+)^2$:

$$f(f(x) + y) = 2x + f(-f(f(x)) + f(y))$$

Remarque 3.
Pour prouver l'injectivité :
En général, on essaie de prouver que pour tout x, y, $f(x) = f(y) \implies x = y$.
Pour cela, on pose a, b deux éléments de l'ensemble de définition et en supposant que $f(a) = f(b)$, et de là on essaie de prouver que à $a = b$.

Exemple 4.
On regarde la fonction cube $f(x) = x^3$:
Pour prouver que cette fonction est injective sur $\mathbb{R}$, on prend deux réels a, b tels que $f(a) = f(b)$.

$$\begin{aligned} &f(a) = f(b) \\ &\implies a^3 = b^3 \\ &\implies a = b \end{aligned}$$

Donc f est injective (car $f(a) = f(b) \implies a = b$).

Définition 5 (Surjectivité)**.**
Soit $f : E \to F$, on dit que f est surjective sur F si pour tout $x \in F$ il existe $y \in E$, $f(y) = x$. C'est-à-dire que l'on "atteint" F en entier.
Ainsi on peut poser $z = f(x)$ sans perte d'information dans une equation fonctionnelle.

Exemple 6.
$f : x \mapsto \frac{1}{x}$ est surjective sur $\mathbb{R}^*$ mais pas sur $\mathbb{R}$

Remarque 7.
Pour prouver la surjectivité :
On essaie d'arriver à une équation de la forme $f(X) = Z$, où Z prend toutes les valeurs de l'ensemble d'arrivée de la fonction. Ceci prouve que f peut aussi prendre toutes la valeurs de l'ensemble d'arrivée.

Exercice 2
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout couple de réels (x, y) :

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y)$$

Exemple 8.
On reprend l'exemple précédent :
Ici, notre équation est déjà dans la forme que l'on souhaite : $f(x) = x^3$. Or x^3 parcourt $\mathbb{R}$, donc f parcourt $\mathbb{R}$. Ainsi, f est surjective dans $\mathbb{R}$.
f est donc bijective dans $\mathbb{R}$.

Remarque 9.
Certains ensembles de points particuliers peuvent s'avérer très utile dans certains problèmes. Par points particuliers, il faut comprendre les racines de f (c'est-à-dire les x tels que $f(x) = 0$), ou ses points fixes (c'est-à-dire les k tels que $f(k) = k$), ou d'autres points respectant une propriété commune.

Définition 10 (Point fixe)**.**
Pour une fonction f, un point fixe est un élément x de l'ensemble de départ tel que $f(x) = x$.

Définition 11 (Racine)**.**
Pour f une fonction, et x un element de l'ensemble de départ, on dit que x est une racine de f si $f(x) = 0$.

Remarque 12.
Remarquons que, en général, quand on étudie les points fixes (ou les racines), rien ne nous garantit qu'il en existe. Nous disons juste : si k est un hypothétique point fixe, alors il respecte telle ou telle condition (dans notre exemple $k = 0$). Il se pourrait même qu'on arrive à des conditions contradictoires pour k. On aurait dès lors prouvé qu'il n'existe aucun point fixe, ce qui peut toujours se révéler utile par la suite.

Exercices

Exercice 3
Parmi les équations fonctionnelles suivantes, déterminer lesquelles n'admettent que des solutions injectives, surjectives ou bijectives (à chaque fois, $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$) :

1. $f(x + f(y)) = 2f(x) + y$
2. $f(f(x)) = 0$
3. $f(f(x)) = sin(x)$
4. $f(x + y) = f(x)f(y)$

Exercice 4
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que :

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x$$

Exercice 5 (mathraining)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} f(f(x)+x) &= f(x)+x \\ f(f(2x)-x) &= x-2f(x) \end{aligned}$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tout couple d'entier (x, y) :

$$f(x+f(y)) = f(x) - y$$

Exercice 7
Existe-t'il des fonctions f et g de $\mathbb{R}$ tq pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$g(f(x)) = x^3 \tag{IV.1}$$
$$f(g(x)) = x^2 \tag{IV.2}$$

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que pour tous naturels a et b :

$$f(f(a)+f(b)) = a+b$$

Exercice 9
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que, pour tout reel x :

$$f(x^3+x) \leq x \leq (f(x))^3 + f(x)$$

Exercice 10 (OIM 1983 P1 - modifié)
Déterminer les fonctions $f : \mathbb{R}^{+*} \to \mathbb{R}^{+*}$ vérifiant les deux conditions suivantes :

a) pour tous réels x, y, $f(xf(y)) = yf(x)$,
b) quel que soit $x > 1$, $f(x) \leqslant 1$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Analyse
Soit f une potentielle solution.
On applique la substitution $(x, f(x))$: $f(2f(x)) = 2x + f(0)$
Ainsi, soit $a, b \in \mathbb{R}^+$, si $f(a) = f(b)$ alors $2a = f(2f(a)) - f(0) = f(2f(b)) - f(0) = 2b$ donc $a = b$.
Donc f est injective.
On applique la substitution $(0, y)$: $f(f(0)+y) = f(-f(f(0)) + f(y))$

Or on peut "simplifier" par f comme elle est injective donc : $f(0) + y = -f(f(0)) + f(y)$. (1)
Ainsi f est une fonction affine : ie il existe c un réel constant tq $f : x \mapsto x + c$
Vérification
Notre équation devient :

$$\begin{aligned}
& f(x)+y+c && = 2x - f(f(x)) + f(y) + c \\
\iff \quad & x+y+c && = 2x - f(x) + y \\
\iff \quad & x+c && = x - c \\
\iff \quad & c && = 0
\end{aligned}$$

La seule fonction solution est donc l'identité

Solution de l'exercice 2
Soit f une potentielle solution.
Pour $(\frac{y+f(0)}{2}, 0)$ on a $f((\frac{y+f(0)}{2})^2 + f(0)) = y$ donc f est surjective.
Ainsi on peut pour tout $x \in \mathbb{R}$ prendre y tel que $f(y) = -x^2$. On a alors, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(0) = 2x + x^2$. Ce qui est absurde, il n'y a donc pas de solution.

Solution de l'exercice 3
1. En posant $x = 0$, on obtient $f(f(y)) = 2f(0) + y$.
Si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$, donc $2f(0) + a = 2f(0) + b$, d'où $a = b$. Ainsi, f est injective.
De plus, l'expression $2f(0) + y$ parcourt $\mathbb{R}$ quand y parcourt $\mathbb{R}$, donc f est surjective. Donc, f est bijective.

2. Supposons par l'absurde que f soit surjective. Alors, pour $y \in \mathbb{R}$, il existe x tel que $f(x) = y$. Ainsi $f(y) = f(f(x)) = 0$. Autrement dit, l'image de tout élément par f est 0, donc f n'est pas surjective, absurde.
Supposons par l'absurde que f soit injective. Alors si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$. Mais alors $f(f(x)) = f(f(y)) = 0$, donc $f(x)$ et $f(y)$ ont la même image par f, absurde.
Par conséquent, f n'est ni injective, ni surjective.
On peut aussi remarquer que $f(x) = 0$ est solution et donc que f n'est ni surjective, ni injective.

3. Injectivité :
On fait une disjonction de cas : soit $f(0) = f(\pi)$, soit $f(0) \neq f(\pi)$.
- Si $f(0) = f(\pi)$, alors f n'est pas injective.
- Si $f(0) \neq f(\pi)$, $f(f(0)) = sin(0) = sin(\pi) = f(f(\pi))$, donc f n'est pas injective.

Surjectivité :
$f \circ f$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, donc n'est pas surjective. Si f était surjective alors $f \circ f$ le serait aussi, donc f n'est pas surjective.

4. La fonction nulle est solution, donc f n'est ni injective, ni surjective.

Solution de l'exercice 4
Soit f une potentielle solution.
En prenant $y = 0$, on obtient :

$$f(f(f(x))) = x + f(0) - f(f(0))$$

Donc f est surjective.
Par conséquent, on peut remplacer $f(y)$ par t qui peut prendre n'importe quelle valeur dans $\mathbb{R}$. En prenant $x = 0$, on obtient, pour tout réel t :

$$f(t) = t - f(f(f(0)))$$

Donc f est de la forme $f(x) = x + a$, , en injectant dans l'équation initiale, on trouve que la seule solution est $f(x) = x$.

Solution de l'exercice 5
Soit f une potentielle solution.
La première condition nous incite à étudier les points fixes. Supposons que $k \in \mathbb{R}$ soit tel que $f(k) = k$. Alors, par la première condition, $f(f(k)+k) = f(k)+k$, ce qui implique $f(2k) = 2k$. La deuxième condition nous donne alors $f(f(2k)-k) = k-2f(k)$, ce qui implique $f(k) = -k$. On a donc $k = f(k) = -k$ d'où $k = 0$, et nous venons de montrer que si k est un point fixe, alors $k = 0$. Autrement dit, l'unique point fixe éventuel de f est 0 :

$$\{k \in \mathbb{R} | f(k) = k\} \subseteq \{0\}$$

Or, la première condition nous dit justement que $f(x) + x$ est un point fixe pour tout $x \in \mathbb{R}$. Cela signifie donc que $f(x) + x = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$, c'est-à-dire que $f(x) = -x$. La seule solution possible est donc $f(x) = -x$. N'oublions pas de vérifier qu'il s'agit bien d'une solution :

$$f(f(x) + x) = f(0) = 0 = f(x) + x \qquad \text{et} \qquad f(f(2x) - x) = f(-3x) = 3x = x - 2f(x)$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$.
L'unique solution est donc $f(x) = -x$.

Solution de l'exercice 6
Soit f une potentielle solution.
Pour $(0, f(0) - y)$ on obtient $f(f(f(0) - y)) = y$. Ainsi f est surjective.
De plus on a avec $(0, y)$: $f(f(y)) = f(0) - y$. Supposons alors qu'il existe (a, b) des entiers relatifs tels que $f(a) = f(b)$. Alors $a = f(0) - f(f(a)) = f(0) - f(f(b)) = b$. Ainsi on a montré que f était injective.
Pour $(x, 0)$ on a $f(x + f(0)) = f(x)$ donc par injectivité de f on a $x = x + f(0)$ donc $f(0) = 0$.
Ainsi avec $(0, y)$ on obtient $f(f(y)) = -y$.
Il apparait donc que $f(x + f(y)) = f(x) + f(f(y))$, or f est surjective on peut donc noter $z = f(y)$ sans perte aucune de généralité !
On est donc réduit à $f(x+z) = f(x)+f(z)$. Ainsi en posant $a = f(1)$, on montre par reccurence que $f(n) = an$ pour tout $n \in \mathbb{N}$, puis comme $0 = f(n - n) = f(n) + f(-n)$ on généralise facilement sur $\mathbb{Z}$. Donc f est linéaire.
Cependant à la vérification, en notant $f : x \mapsto ax$ on obtient $ax + a^2y = ax - y$ *ie* $a^2 = -1$. Or on est dans $\mathbb{Z}$, c'est donc impossible et conclut l'exercice : il n'y a pas de fonction solution.

Solution de l'exercice 7
Soit f une potentielle solution.
Soient a, b des réels tels que $f(a) = f(b)$, alors $a^3 = g(f(a)) = g(f(b)) = b^3$ donc $a = b$.
Ainsi f est injective.
Or en substituant $f(y)$ à x dans (2) on obtient $f(g(f(y))) = f(y)^2$. Ce qui nous donne par (1) :

$f(y^3) = f(y)^2$.
Ainsi on a $f(0) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right.$ et de même, $f(1) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right.$ et $f(-1) = \left\{ \begin{array}{l} 0 \\ 1 \end{array} \right.$
Donc par le principe des tiroirs, il existe $(a, b) \in \{-1, 1, 0\}$ tq $f(a) = f(b)$ et $a \neq b$. Ce qui est absurde car f est injective.
Il n'existe donc pas de fonctions convenant.

Solution de l'exercice 8
Pour $b = 0$, $f(f(a) + f(0)) = a$, on a alors f injective (car si $f(n) = f(m)$, $f(f(n) + f(0)) = f(f(m) + f(0))$) et surjective.
Soit n un entier naturel, on prend $a = n$ et $b = 1$ puis $a = n + 1$ et $b = 0$, on a alors $f(f(n) + f(1)) = n + 1 = f(f(n + 1) + f(0))$
Ainsi par injectivité : $f(n + 1) = f(n) + f(1) - f(0)$, on note $f(0) = a$ et $f(1) = b$, on a alors : $f(n + 1) = f(n) + b - a$ Par récurrence facile $f(n) = a + n(b - a)$, on peut alors conclure en réinjectant dans l'équation initiale pour avoir a = 0 et b = 1

Solution de l'exercice 9
Soit f une potentielle solution.
On pose $g : x \mapsto x^3 + x$, alors notre inéquation devient $f(g(x)) \leq x \leq g(f(x))$. g est bijective, et on va essayer de prouver que $f = g^{-1}$ qui vérifie bien l'inéquation.
g est strictement croissante donc g^{-1} est strictement croissante aussi, ainsi on peut composer par g^{-1} : $g^{-1}(f(g(x))) \leq g^{-1}(x) \leq f(x)$ et de même : $f(x) \leq g^{-1}(x) \leq g(f(g^{-1}(x)))$. On a donc $f(x) \leq g^{-1}(x) \leq f(x)$ donc $f(x) = g^{-1}(x)$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10
source : cours EF de la POFM
En cherchant un peu, on peut trouver que la fonction $x \to \frac{1}{x}$ est une solution du problème. On va prouver que c'est la seule. La forme de l'équatoin fonctionelle et de la solution envisagée laisse prévoir que l'on va s'intéresser à des expressions du type $xf(x)$.

Soit f une solution éventuelle.
- Commençons par prouver que f est bijective. Pour $x = 1$, on a $f(f(y)) = yf(1)$ pour tout $y > 0$, et on sait que $f(1) > 0$. On en déduit que si $a, b > 0$ vérifient $f(a) = f(b)$, alors $af(1) = f(f(a)) = f(f(b)) = bf(1)$, et donc que $a = b$, ce que assure que y asmet un antécédant par f et qu'ainsi f est injective.
De plus, $f(1)$ est un réel strictement positif donné, donc $yf(1)$ peut être égal à tout réel strictement positif. On en déduit que f est surjective.

-On étudie maintenant l'ensemble F des points fixes de f. Cette idée vient du choix $x = y$ dans l'équation fonctionelle puisqu'alors, pour tout $x > 0$, on a $f(xf(x)) = xf(x)$. Ainsi, pour tout $x > 0$, on a $xf(x) \in F$.
On remarque que $1 \in F$. En effet, puisque f est bijective, on note c l'unique antécédant de 1 par f. Alors, d'après ci-dessus, on a $f(1) = f(1 \times f(c)) = cf(1)$. Comme $f(1) > 0$, on a alors $c = 1$, et donc $f(1) = f(c) = 1$.
Il ne reste qu'à prouver que 1 est en fait le seul point fixe de f, puiqu'alors, pour tout $x > 0$, on devra avoir nécessairement $xf(x) = 1$. Pour cela, on va regarder de plus près l'ensemble F.

-On commence par prouver que F est stable par passage à l'inverse, c'est-à-dire que si $a \in \mathbb{R}^{+*}$ appartient à F, alors $\frac{1}{a}$ appartient à F.

Soient $x \in F$. Puisque $1 \in F$, on a aussi, pour $x \in F$:

$$1 = f\Big(\frac{1}{x} \times x\Big) = f\Big(\frac{1}{x} f(x)\Big) = x f\Big(\frac{1}{x}\Big)$$

ce qui assure que$f(\frac{1}{x}) = \frac{1}{x}$, et qu'ainsi $\frac{1}{x} \in F$.

On est maintenant en mesure d'atteindre notre objectif. On suppose qu'il existe un point fixe $a \neq 1$. Si $a > 1$, $f(a) \leqslant 1$, donc $f(a) \neq a$, et ainsi a n'est pas un point fixe de f.
Et, si $0 < a < 1$, puisque F est stable par passage à l'inverse, le réel $b = \frac{1}{a}$ est aussi un point fixe, avec $b > 1$, ce qui est impossible d'après ce que l'on vient de voir.

8 Equations diophantiennes (Lucile)

Exercice 1
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers positifs tels que $2^m + 1 = n^2$

Exercice 2
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers positifs tels que $2^m - 1 = 3^n$

Exercice 3
Déterminer tous les couples (a, n) d'entiers positifs tels que $3^n = a^2 - 16$

Exercice 4
Montrer que $x^2 + y^2 = x^2y^2$ n'a pas de solutions entières à part $x = y = 0$

Exercice 5
Trouver les entiers positifs n tels que $3|n \cdot 2^n - 1$

Exercice 6
Montrer que la somme de 5 carrés consécutifs n'est jamais un carré.

Exercice 7
Trouver tous les a, b, c entiers tels que

$$a! + 5^b = 7^c$$

Exercice 8
Trouver tous les entiers positifs a, b, c tels que $2^a3^b + 9 = c^2$

Exercice 9
Pour quels entiers n existe-t-il des entiers a, b tels que $n + a^2 = b^2$?

Exercice 10
Trouver toutes les solutions entières et positives de $x^2 + xy + y^2 = x^2y^2$

Exercice 11
Soit n un entier strictement supérieur à 11. Montrer que $n^2 - 19n + 89$ n'est pas un carré parfait

Exercice 12
Pour tout entier positif p, on considère l'équation

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$$

Montrer que si p premier, alors il y a 3 solutions, sinon il y en a strictement plus (x et y sont strictement positifs)
On considère (x, y)et (y, x) comme des solutions différentes

Exercice 13
Montrer que l'équation $x^3 + 3 = 4y(y + 1)$ n'a pas de solutions entières

Exercice 14
Soient a et b des entiers positifs avec $b > 2$. Montrer que $2^b - 1$ ne divise pas $2^a + 1$

Exercice 15
Déterminer tous les nombres premiers pour lesquels il existe des entiers strictement positifs x, y tels que
$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Les exos de ce td sont tirés du cours de Gaspard et Théo au grp A, de éva et Augustin au grp B et de celui d'antoine au grp C du stage de l'année dernière et du livres solutions d'expert d'Arthur Engel

Solution de l'exercice 1
L On réécrit l'équation en
$$2^m = n^2 - 1 = (n-1)(n+1)$$
Donc $n-1$ et $n+1$, sont 2 puissances de 2, hors il n'y que 2 et 4 comme puissances de 2, écartées de 2. Donc $n-1 = 2$ et $n+1 = 4$. Ce qui donne comme solution $n = m = 3$.

Solution de l'exercice 2
On remarque la solution $n = 0, m = 1$, on traite ensuite le cas $n > 0$

1. On commence par regarder modulo 3, cela donne que m est pair sinon $2^m - 1 \equiv 2 - 1 \neq 0 \mod 3$
2. On pose donc $m = 2m'$, ce qui donne
$$(2^{m'} - 1)(2^{m'} + 1) = 3^n,$$
les 2 seules puissances de 3, espacées de 2 sont 1 et 3. Donc $n = 1$ et $m = 2$

Solution de l'exercice 3
On remarque que $a > 4$ car sinon on a une puissance de 3 négative,donc On a $3^n = a^2 - 16 = (a-4)(a+4)$,les 2 seules puissances de 3, espacées de 8 sont 1 et 9,ce qui donne $n = 2$ et 5.

Solution de l'exercice 4

1. On peut procéder par descente infini
2. On peut aussi remarquer que $x^2|y^2$ et $y^2|x^2$. Donc $x^2 = y^2$, car ils sont tous deux positifs donc on ne peux pas avoir $x^2 = -y^2$ (sauf si x=y=0) On a alors $2x^2 = x^4$ soit
$$x^2(x^2 - 2) = 0$$
donc soit $x = 0$ et donc $y = 0$ soit $x^2 = 2$ ce qui est impossible pour x entier
3. On peut également réécrire l'équation en
$$y^2 = x^2(y-1)(y+1)$$
Or $y - 1|y^2$ et $y + 1|y^2$ et $y - 1, y + 1$ sont premiers avec y^2 donc $y - 1 = -1$ et $y + 1 = 1$ et $y = 0$, ce qui donne $x = 0$

Solution de l'exercice 5
On regarde modulo 3 et le théorème de Fermat nous dit de regarder modulo 2. Donc on regarde modulo 6

— On commence par remarquer que $n \neq 0 \mod 3$

— Si $n \equiv 1[6]$, alors $2^n \equiv 2[3]$, donc $n \cdot 2^n \equiv 2 \neq 1[3]$

— Si $n \equiv 2[6]$, alors $2^n \equiv 1[3]$, donc $n \cdot 2^n \equiv 2 \cdot 1 \neq 1[3]$

— Si $n \equiv 4[6]$, alors $2^n \equiv 1[3]$, donc $n \cdot 2^n \equiv 1 \cdot 1[3]$

— Si $n \equiv 5[6]$, alors $2^n \equiv 2[3]$, donc $n \cdot 2^n \equiv 2 \cdot 2 \equiv 1[6]$

Donc les seules solutions sont $n \equiv 4$ ou $5 \mod 6$

Solution de l'exercice 6

On écrit 5 carrés consécutifs comme ceci

$$(x-2)^2 + (x-1)^2 + x^2 + (x+1)^2 + (x+2)^2 = 5x^2 + 4 + 1 + 1 + 4 = 5(x^2+2)$$

Or un carré n'est jamais congru à 3 modulo 5. On a alors un nombre divisible par 5 et pas par 25 qui ne peut pas être un carré.

Solution de l'exercice 7

Si $a \geqslant 5$ alors $5|7^c$ ce qui n'est pas possible, donc $a < 5$

— si $a = 1$, on a $1 + 5^b = 7^c$ par parité ce n'est pas possible.

— si $a = 2$, on a $2 + 5^b = 7^c$, on remarque que la solution $b = c = 1$ fonctionne. Si $b \geqslant 2$ on regarde $7^c[25]$ qui prends périodiquement les valeurs de $7, -1, -7, 1$ donc $7^c - 2$ ne vaut jamais 0 modulo 25 et n'y a pas de solution

— si $a = 3$ on a $6 + 5^b = 7^c$ on a $5^b \equiv 1[7]$ on a la solution $b = 0$,$c = 1$, $b = 1$ ne donne pas de solution et on regarde $7^c - 6[25]$ qui ne s'annule jamais

— si $a = 4$, on a $24 + 5^b = 7^c$, on a alors $24 \equiv 3[7]$ or les puissances de 5 valent périodiquement $-2, 4, -1, 2, -4, 1$ donc on a $b \equiv 2[6]$et en regardant modulo 25,on a $c \equiv 2[4]$

Donc b et c sont pairs, on pose $c = 2c'$ et $b = 2b'$ on a

$$24 = 7^{2c'} - 5^{2b'} = (7^{c'} - 5^{b'})(7^{c'} + 5^{b'})$$

On regarde la liste des couples qui divisent 24, et il y en a que un dont la somme est de la forme $2 \cdot 7^{c'}$ soit $(2, 12)$ qui donne $c' = b' = 1$ et donc $b = c = 2$

On a donc les solutions (a, b, c) égales à $(2, 1, 1)$, $(4, 2, 2)$

Solution de l'exercice 8

$$2^a 3^b = (c+3)(c-3)$$

On pose $a = x + u$, et $b = y + v$, et
$c + 3 = 2^x 3^y$ et $c - 3 = 2^u 3^v$

On a alors $2^u 3^v + 6 = 2^x 3^y$, on a $u \leqslant 1$ ou $x \leqslant 1$et v ou $y \leqslant 1$

— Si $x = 0$, alors $u = 0$, et $v = 1, y = 2$, donc $a = 0$ et $b = 3$, $c = 6$

— Si $y = 0$, alors de même $b = 0$ et $a = 4$, $c = 5$

— on traite ensuite les cas u, v, x, y strictement positifs donc on peut diviser par 6 et avoir
$$2^{u'} 3^{v'} + 1 = 2^{x'} 3^{y'}$$

Ce qui donne 2 cas à traiter

— $2^{u'}+1=3^{y'}$ Si $u'=1$ alors $y'=1$ et $a=3, b=3, c=15$ Sinon on a $u'>1$, et modulo 4, on a que y' pair donc on factorise et on a $u'=3$ et $y'=2$ donc $a=5, b=4, c=51$

— $3^{v'}+1=2^{x'}$, l'exo 2 donne $v'=0, x'=1$ (soit $a=3, b=2, c=9$) et $v'=1, x'=2$ (soit$a=4, b=3, c=21$

Donc $(a,b,c)\in\{(0,3,6),(4,0,5),(3,3,15),(5,4,51),(2,3,9),(4,3,21)\}$

Solution de l'exercice 9
On a $n=b^2-a^2=(b-a)(b+a)$, On remarque que $b+a=b-a+2a\equiv b-a \mod 2$. Donc $b-a$ et $b+a$ ont la même parité. Donc si n a un diviseur d tel que d et $\frac{n}{d}$ ont la même parité, alors on trouve a et b en prenant la moyenne et la moitié de la différence de n et $\frac{n}{d}$.
les seuls n n'admettant pas de tel diviseur d sont les n tel que $n\equiv 2 \mod 4$.

Solution de l'exercice 10
On a très envie de rajouter xy, pour reconnaitre une identité remarquable connu, ce qui donne

$$(x+y)^2=xy(xy+1)$$

, comme $xy\wedge xy+1=1$ alors ce sont tous les deux des carrés.
Or les seuls carrés espacés de 1, sont 0 et 1, donc $xy=0$, ce qui donne $x=y=0$.

Solution de l'exercice 11
On utilise ici une idée très classique.
Si on veut montrer qu'un nombre n'est pas un carré, on l'encadre par 2 carrés consécutifs connus
On pose $N=n^2-19n+89$

— $(n-9)^2-N=n^2-18n+81-n^2+19n-89=n-8>0$

— $N-(n-10)^2=n^2-19n+89-n^2+20n-100=n-11>0$

— $(n-9)^2>N>(n-10)^2$

Donc N n'est pas un carré.

Solution de l'exercice 12
On commence par remarquer que $x>p$et $y>p$
Donc on pose $x=p+r$ et $y=p+q$, ce qui donne

$$\frac{1}{p+r}+\frac{1}{p+q}=\frac{1}{p}$$

soit

$$p(p+q)+p(p+r)=(p+q)(p+r)$$

, soit $p^2=qr$, donc $q=1,p$ ou p^2 ce qui donne alors les solutions $(p+1,p(p+1)),(2p,2p),(p(p+1),p+1)$

Si p n'est pas premiers alors il y a strictement plus que 3 possiblités pour la valeur de q, donc strictement plus que 3 solutions .

Solution de l'exercice 13
Le terme de droite donne très envie de rajouter 1, pour obtenir une identité remarquable, on obtient

$$x^3+4=(2y+1)^2$$

$$x^3=(2y+1)^2-4=(2y-1)(2y+3)$$

Or $2y+3 \wedge 2y-1 = 2y-1 \wedge 4 = 1$, donc $2y-1$ et $2y+3$, sont 2 cubes, or il n'y a pas de cubes espacés de 4, donc il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 14

On veut que la fraction $\dfrac{2^a+1}{2^b-1}$ soit entière, donc on a nécessairement $a \geqslant b$, et on effectue une division euclidienne et on a $a = b \cdot q + r$, et de plus on remarque que $\dfrac{2^a+1}{2^b-1} = 2^{a-b} + \dfrac{2^{a-b}+1}{2^b-1}$, et donc

$$\frac{2^a+1}{2^b-1} = 2^{a-b} + \cdots + 2^{a-b\cdot q} + \frac{2^r+1}{2^b-1},$$

or $r < b$ donc $\frac{2^r+1}{2^b-1}$ n'est pas entière.

Solution de l'exercice 15

On factorise par $x+y$, on obtient alors

$$(x+y)(xy-p) = 5p,$$

il y a peu de valeurs possibles pour $x+y$

— $x+y = 5p$, et $xy = p+1 < 5p = x+y$
Donc $xy - x - y + 1 = (x-1)(y-1) < 1$, donc $(x-1)(y-1) = 0$, car x, y strictements positifs. Si $x = 1$, alors $y = p+1$ et $x+y = p+2 = 5p$, ce qui n'admet pas de solution (le raisonnement est le même si $y = 1$.)

— $x+y = p$, et $xy = p+5$ et $(x-1)(y-1) = 6$, ce qui donne $(x-1, y-1) \in \{(1,6),(2,3),(3,2),(6,1)\}$, donc
$(x,y) \in \{(2,7),(3,4),(4,3),(7,2)\}$, 9 n'est pas premier donc $p = 7$

— $x+y = 5$, ce qui donne $(x,y) \in \{(1,4),(2,3),(3,2),(4,1)\}$, et $xy = 2p$
On a alors $4 = 2p$ ou $6 = 2p$, donc $p = 2$ ou 3

On a donc $p \in \{2,3,7\}$

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 1
Trouver toutes les paires de nombres premiers (p, q) tels que :

$$pq = 2^{p^2} + 7$$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y :

$$f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y)$$

Exercice 3
Trouver tous les triplets d'entiers naturels (n, m, k) tels que :

$$3^n + 4^m = 5^k$$

Exercice 4
Soient a, b, c des réels positifs tels que $a + b + c + ab + bc + ca + abc = 7$.
Montrer que :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geqslant 6$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

Comme le membre de droite est impair, on doit avoir $p \neq 2$.
On regarde modulo p en écrivant :

$$p^2 = (p-1)(p+1) + 1$$

D'après le petit théorème de Fermat, on a donc

$$7 + 2^{p^2} \equiv 7 + (2^{p-1})^{p+1} \cdot 2 \equiv 7 + 1^{p+1} \cdot +2 \equiv 7 + 2 \equiv 9\ [p]$$

On en déduit que $9 \equiv 0\ [p]$, c'est-à-dire que p divise 9. Le seul diviseur premier de 9 étant 3, il vient $p = 3$. Le membre de droite vaut donc $2^{3^2} + 7 = 2^9 + 7 = 512 + 7 = 519 = 3 \times 173$.

Dernière étape, il faut vérifier que 173 est premier : on teste les diviseurs premiers possibles jusqu'à 13 (puisque $13^2 < 173 < 17^2$) et on en conclut que c'est bien un nombre premier.

La seule solution est donc $(p, q) = (3, 173)$.

Solution de l'exercice 2
Soit f une potentielle solution.
On pose $y = 0$ et on a alors $f(2f(x) + f(0)) = 2x + f(0)$. Supposons qu'il existe

a, b tels que $f(a) = f(b)$. Alors toujours avec l'équation obtenue avec $y = 0$, on a $2a = f(2f(a) + f(0)) - f(0) = f(2f(b) + f(0)) - f(0) = 2b$ donc $a = b$. On en déduit que f est injective.
Avec $x = 0$ on obtient $f(2f(0) + f(y)) = f(y)$, or on sait que f est injective donc $y = f(y) + 2f(0)$, on a donc que f est affine.
On pose $f : x \mapsto x + b$, on vérifie avec l'équation originelle :$2x + y + 4b = 2x + y + b$ donc $b = 0$ et la seule solution est l'identité.

<u>Solution alternative</u>
Soit f une potentielle solution.
On pose $y = 0$ et on a alors $f(2f(x) + f(0)) = 2x + f(0)$ Or $x \mapsto 2x + f(0)$ est une fonction affine qui est donc surjective. Donc f est surjective.
On pose alors $x = 0$ et $f(y) = t - 2f(0)$ avec t réel ce que l'on peut faire sans perte de généralité car f est surjective. On obtient :

$$f(t) = t - 2f(0)$$

f est donc affine, on pose $f : x \mapsto x + b$, on vérifie avec l'équation originelle :$2x + y + 4b = 2x + y + b$ donc $b = 0$ et la seule solution est l'identité.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Il est clair que $k > 0$.
· Si $n = 0$, alors $1 + 4^m = 5^k$. Si $k = 1$, $m = 1$ est la seule solution. Sinon, $1 + 1^m \equiv (-1)^k (\mod 3)$. Donc k est impair, $k = 2k' + 1$ avec $k' \geqslant 1$. Donc $4^m - 4 = 5(25^{k'} - 1)$.
On a $m > 0$ donc 8 ne divise pas $4^m - 4$ or $25^{k'} - 1$ est divisible par $25 - 1 = 3 \times 8$. Donc pas de solution.
· Si $m = 0$, $3^n + 1 = 5^k$, soit $3^n = 5^k - 1$. Donc 3^n est multiple de $5 - 1 = 4$, impossible.
· Si $m, n, k > 0$, on a $(-1)^n \equiv 1 (\mod 4)$ donc $n = 2n'$, $n' \geqslant 1$. Et $1 \equiv (-1)^k (\mod 3)$ donc $k = 2k'$, $k' \geqslant 1$. Donc $4^m = (5^{k'})^2 - (3^{n'})^2 = (5^{k'} + 3^{n'})(5^{k'} - 3^{n'})$. Donc $5^{k'} + 3^{n'}$ et $5^{k'} - 3^{n'}$ sont des puissances de 2. Et $5^{k'} + 3^{n'} > 5^{k'} - 3^{n'} > 1$ d'après le paragraphe précédent. Si $5^{k'} - 3^{n'} \geqslant 4$, les deux facteurs sont multiples de 4 donc $2 \times 3^{n'}$ est multiple de 4, impossible. Donc $5^{k'} - 3^{n'} = 2$, et $3^{n'} = 2^{2m-2} - 1 = (2^{m-1} + 1)(2^{m-1} - 1)$. Donc $(2^{m-1} + 1)$ et $(2^{m-1} - 1)$ sont des puissances de 3, or leur différence vaut 2. La seule solution est alors $2^{m-1} + 1 = 3$ donc $m = 2$ et $n' = 1$ donc $n = 2$, on a alors $k = 2$, on retrouve le triplet pythagoricien bien connu.
Conclusion : les seules solutions sont $k = m = 1$ et $n = 0$, et $k = m = n = 2$.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
La contrainte étant assez moche, on essaie de la simplifier. On a quasiment le produit $(1 + a)(1 + b)(1 + c)$. Calculons donc ce produit : $(1+a)(1+b)(1+c) = 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc = 1 + 7 = 8$ par hypothèse. Il faut donc essayer de faire apparaître $1 + a, 1 + b, 1 + c$ dans les inégalités. Notons que par IAQ, $a^2 + b^2 + 2 = (a^2 + 1) + (b^2 + 1) \geqslant \frac{(a+1)^2+(b+1)^2}{2}$, ainsi par IAQ :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2} \geqslant \sqrt{\frac{(a + 1)^2 + (b + 1)^2}{2}} \geqslant \frac{(a + 1) + (b + 1)}{2}$$

On obtient ainsi par IAG

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2}+\sqrt{b^2 + c^2 + 2}+\sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geqslant \frac{(a + 1) + (b + 1) + (b + 1) + (c + 1) + (c + 1) + (a + 1)}{2}$$

donc

$$\sqrt{a^2+b^2+2}+\sqrt{b^2+c^2+2}+\sqrt{c^2+a^2+2} \geqslant (a+1)+(b+1)+(c+1) \geqslant 3\sqrt[3]{8}=6$$

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Combinatoire et Géométrie

1 Double comptage (Mano)

En stand-by...

2 Triangles semblables et puissance d'un point (Amélie et Paul)

Les exercices sont donnés ici dans l'ordre dans lequel ils ont été corrigés (pour ceux qui l'ont été), et ils ne sont donc pas forcément triés par difficulté.

Ce cours est principalement inspiré de celui de Martin Rakovsky et Benoit Fanton de Valbonne 2023, de celui de Mathieu Barré de Valbonne 2021 ainsi que du cours du groupe C du stage de Montpellier 2014.

Triangles semblables

Définition 1 (Triangles semblables)**.**
On dit que deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables lorsqu'il existe une similitude directe ou indirecte envoyant l'un sur l'autre. Autrement dit, les triangles sont identiques à rotation, symétrie et/ou agrandissement près. On note alors $ABC \sim A'B'C'$

Proposition 2.
Soient ABC et $A'B'C'$ deux triangles. Les propositions suivantes sont équivalentes :

1. ABC et $A'B'C'$ sont semblables
2. Ils ont les mêmes angles : $\widehat{A} = \widehat{A'}$, $\widehat{B} = \widehat{B'}$, $\widehat{C} = \widehat{C'}$
3. Les rapports de longueur des côtés sont égaux :
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'} = \frac{BC}{B'C'}$$
4. On a les égalités :
$$\widehat{A} = \widehat{A'}$$
$$\frac{AB}{A'B'} = \frac{AC}{A'C'}$$

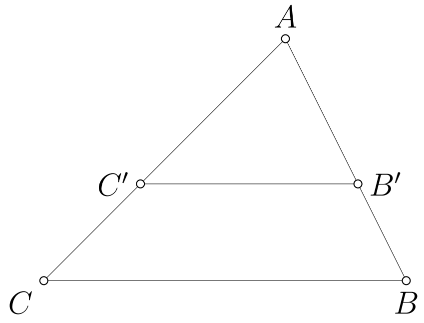
Remarque 3.
Il est très important pour la dernière équivalence de prendre les longueurs adjacentes à l'angle considéré !

Trouver des triangles semblables peut souvent se révéler très utile ! Ca permet en particulier de faire le lien entre angles et longueurs, et donc entre chasse aux angles et chasse aux rapports.

Définition 4 (Triangles isométriques)**.**
On dit que deux triangles sont isométriques lorsqu'ils ont les mêmes longueurs (autrement dit, ils sont semblables et le rapport mentionné plus haut vaut 1).

Exercice 1 (Théorème de Thalès)
Soient d et d' deux droites parallèles. Soit A un point du plan exterieur à d et d'. Soient B et C deux points distincts de d. On note B' et C' les points d'intersection respectifs de (AB) et (AC) avec d'. Montrer que
$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Solution de l'exercice 1

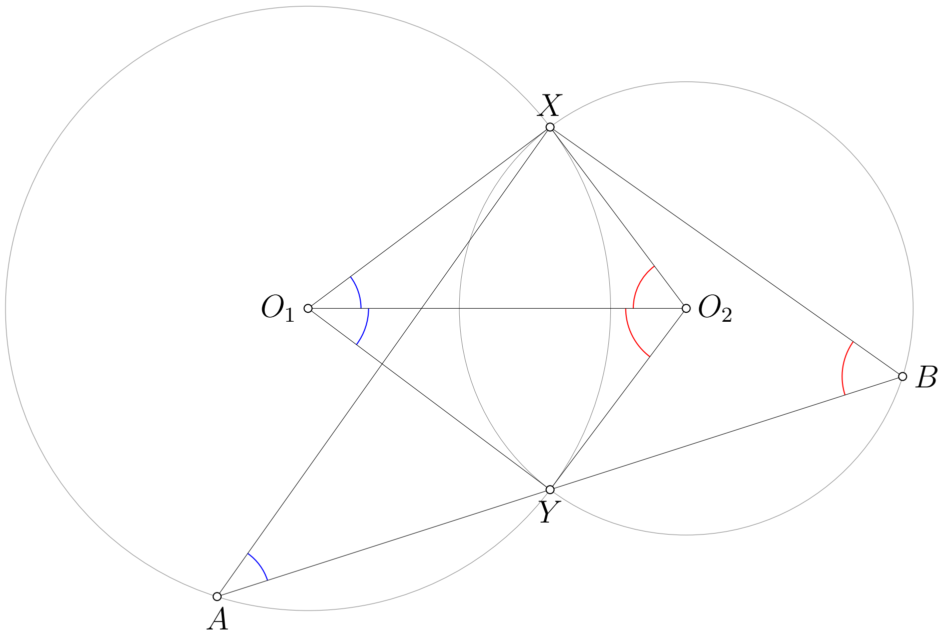


On remarque que les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{AB'C'}$ sont égaux par angles correspondants. De la même manière, les angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{AC'B'}$ sont égaux. Les triangles ABC et $AB'C'$ sont alors semblables, ce qui donne la relation voulue, c'est-à-dire :

$$\frac{AB}{AB'} = \frac{AC}{AC'} = \frac{BC}{B'C'}$$

Exercice 2 (Premier théorème de Miquel)
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles de centres respectifs O_1 et O_2 s'intersectant en X et Y. Soit A un point de Γ_1 et B le point d'intersection de (AY) avec Γ_2. Montrer que XO_1O_2 et XAB sont semblables.

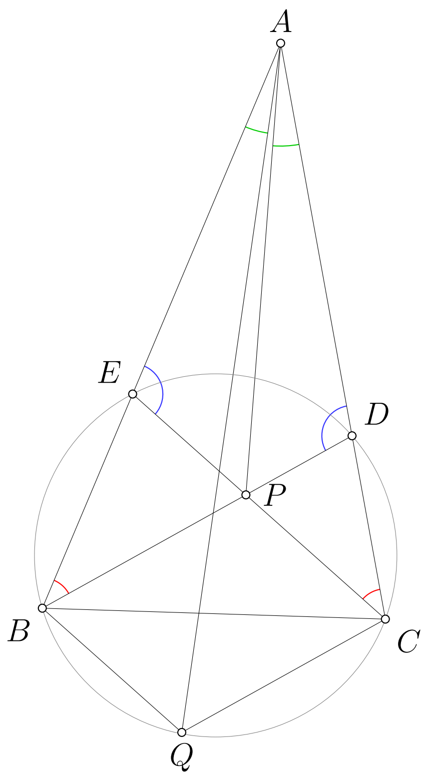
Solution de l'exercice 2



D'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{XO_1Y} = 2\widehat{XAY}$. Or, comme X et Y sont à la fois sur Γ_1 et Γ_2, on a $O_1X = O_1Y$ et $O_2X = O_2Y$. On en déduit donc que (O_1O_2) est la médiatrice du segment $[XY]$, et donc la hauteur du triangle XO_1Y, qui est confondue avec la bissectrice puisque le triangle est isocèle. En définitive, on a $\widehat{XO_1O_2} = \widehat{XAB}$, et de la même manière, on a $\widehat{XO_2O_1} = \widehat{XBA}$. Ainsi, les triangles XAB et XO_1O_2 sont bien semblables.

Exercice 3
Soit ABC un triangle, P un point à l'intérieur du triangle tel que $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Soit Q tel que $PBQC$ est un parallélogramme. Montrer que $\widehat{CAQ} = \widehat{PAB}$.

Solution de l'exercice 3



Soit D le point d'intersection de (BP) avec $[AC]$ et E le point d'intersection de (CP) avec $[AB]$. Le quadrilatère $DCBE$ est cyclique par hypothèse. On a va montrer que PEA et QCA sont des triangles semblables. On a déjà $\widehat{PEA} = 180 - \widehat{PEB} = 180 - \widehat{PDC} = \widehat{PDA}$ par cocyclicité de $DCBE$ et $\widehat{PDA} = \widehat{QCA}$ par parallélisme donc $\widehat{QCA} = \widehat{PEA}$. On note que par cocyclicité de $DCBE$, les triangles PDE et PCB sont semblables et de même les triangles ADE et ABC sont semblables. D'où

$$\frac{PE}{QC} = \frac{PE}{PB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

Donc les triangles PEA et QCA sont semblables d'où $\widehat{CAQ} = \widehat{PAB}$.

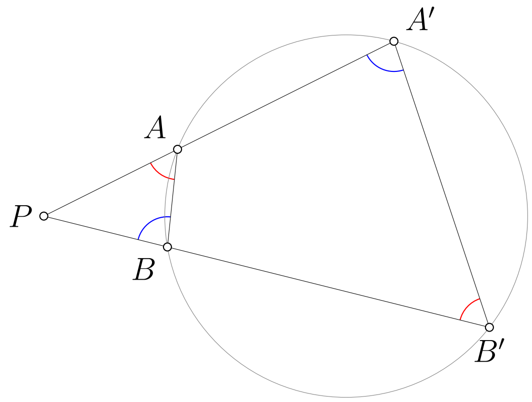
Puissance d'un point

Les triangles semblables sont également à l'origine d'un outil puissant de géométrie : la puissance d'un point.

Exercice 4
Soit Γ un cercle, P un point exterieur à Γ. On prend d et d' deux droites passant par P coupant Γ en A et A' et B et B' respectivement. Montrer que

$$PA \times PA' = PB \times PB'$$

Solution de l'exercice 4



Par cocyclicité, on a $\widehat{PA'B'} = 180 - \widehat{ABB'}$, d'où par angle complémentaire, $\widehat{ABP} = \widehat{PA'B'}$. Comme on a déjà $\widehat{BPA} = \widehat{A'PB'}$, alors les triangles ABP et $B'A'P$ sont semblables, ce qui donne $\dfrac{PA}{PB} = \dfrac{PB'}{PA'}$ ou encore en réarrangeant :

$$PA \times PA' = PB \times PB'$$

Définition 5.
Soit ω un cercle de centre O et de rayon r, et P un point du plan. On appelle **puissance de P par rapport à ω** notée $\mathcal{P}_\omega(P)$ la quantité

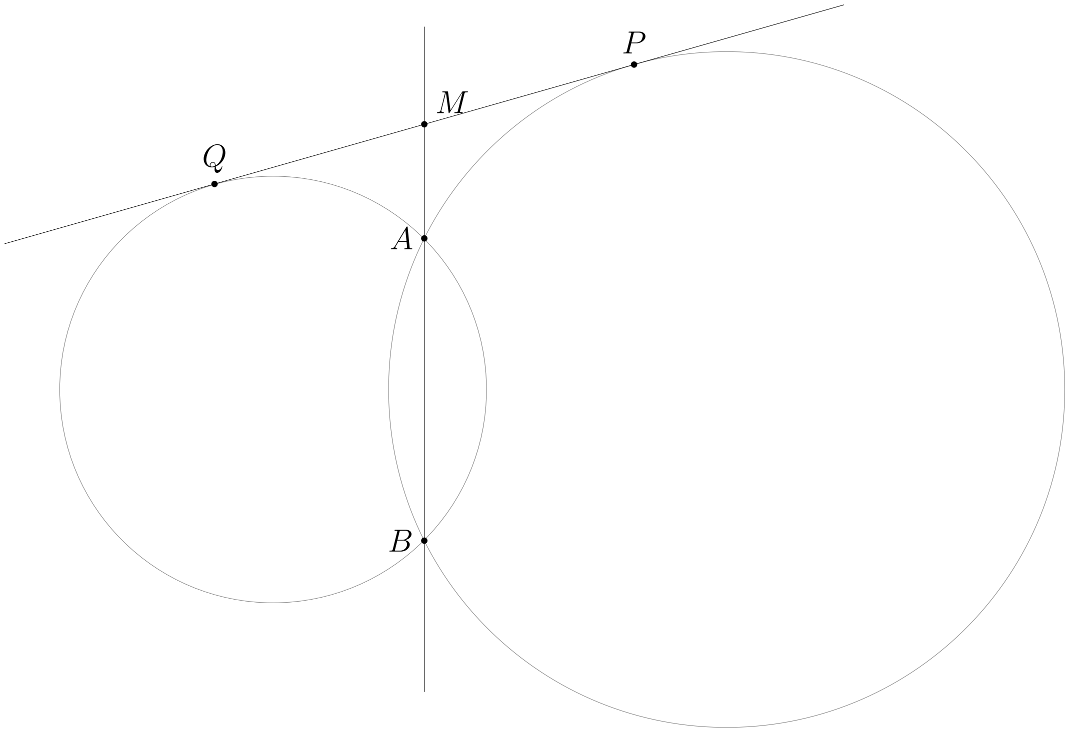
$$\mathcal{P}_\omega(P) = OP^2 - r^2$$

Proposition 6.
Soit ω un cercle, et P un point du plan exterieur cercle. On prend d une droite passant par P coupant ω en A et en B. Alors $\mathcal{P}_\omega(P) = PA \times PB$.
Si le point est à l'intérieur du cercle, alors $\mathcal{P}_\omega(P) = -PA \times PB$

Théorème 7.
Soient A, B, C et D quatre points du plan. On note P l'intersection de (AB) et (CD). Si le produit **algébrique** $PA \times PB = PC \times PD$, alors le quadrilatère $ABCD$ est inscriptible.

Exercice 5 (Lemme préféré de Martin)
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en A et B. On note t une tangente commune à Γ_1 et Γ_2 et P et Q les points de tangence respectifs. On note M le point d'intersection de (AB) avec t. Montrer que M est le milieu du segment $[PQ]$

Solution de l'exercice 5



L'idée de cet exercice est de calculer la puissance de M par rapport à chacun des cercles :

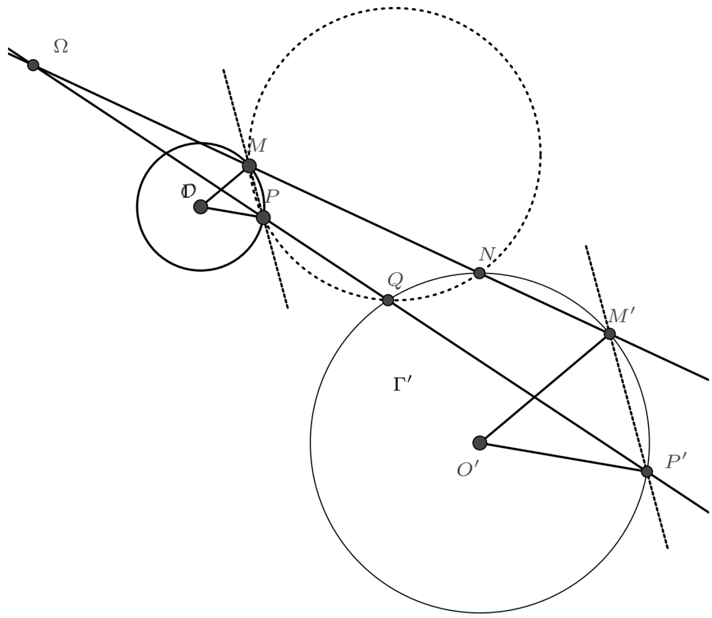
— Par rapport à Γ_1, la puissance de M vaut MP^2, mais aussi $MA \times MB$

— Par rapport à à Γ_2, la puissance de M vaut MQ^2, mais aussi $MA \times MB$

Ainsi, $MP = MQ$, donc M est bien le milieu du segment $[PQ]$

Exercice 6
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles disjoints (ne s'intersectant pas et non inclus l'un dans l'autre), de centres O_1 et O_2. Soient M_1 et P_1 des points de Γ_1, et M_2 et P_2 des points de Γ_2 tels que $(O_1M_1) \parallel (O_2M_2)$ et $(O_1P_1) \parallel (O_2P_2)$. On note enfin N (resp. Q) les points d'intersection de (M_1M_2) (resp. (P_1P_2)) avec Γ_2.
Montrer que les points M_1, N, P_1, Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6



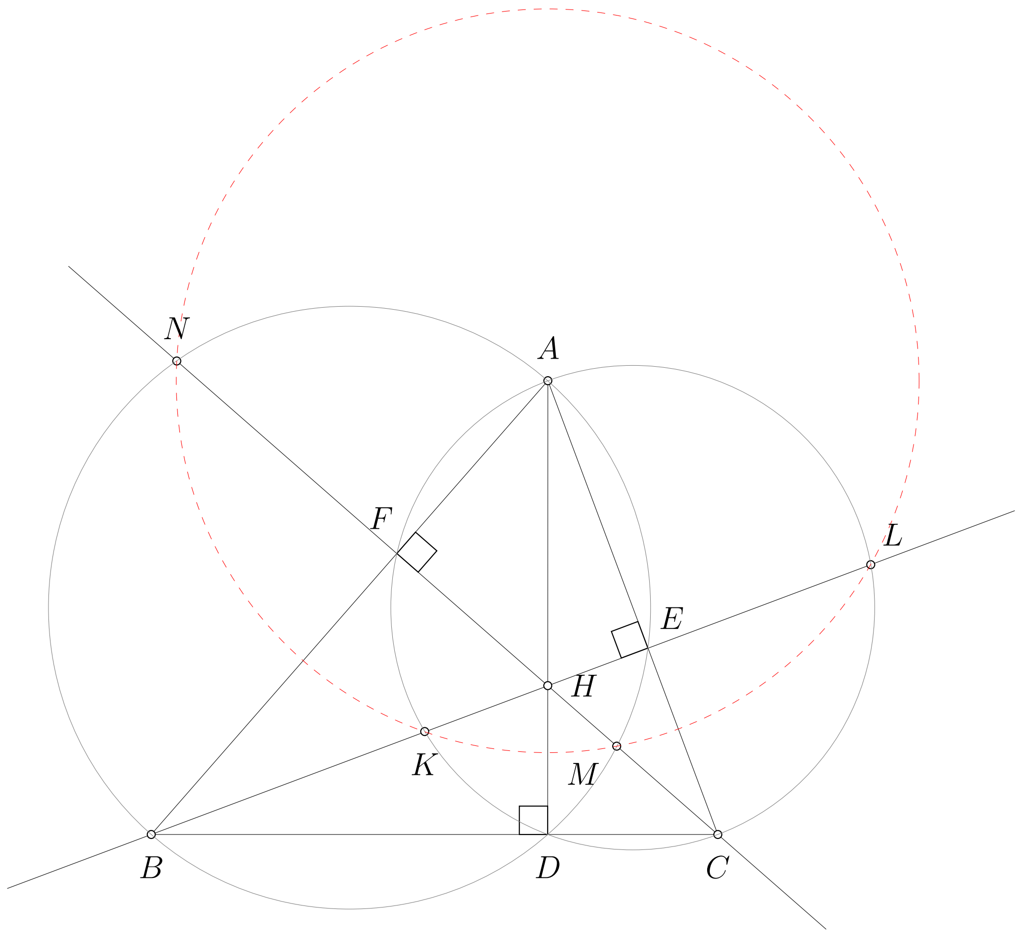
Les triangles OMP et $O'M'P'$ sont isocèles en O et O' respectivement. De plus, les les angles $(\overrightarrow{OM}, \overrightarrow{OP})$ et $(\overrightarrow{O'M'}, \overrightarrow{O'P'})$ sont égaux, donc ces deux triangles sont directement semblables. Comme de plus (OM) et $(O'M')$ sont parallèles, (MP) et $(M'P')$ le sont. On en déduit que $(\overrightarrow{MP}, \overrightarrow{MN}) = (\overrightarrow{M'P'}, \overrightarrow{M'N'}) = (\overrightarrow{QP'}, \overrightarrow{QN}) = (\overrightarrow{QP}, \overrightarrow{QN})$ donc le quadrilatère $MNPQ$ est circonscriptible.

Solution alternative :

Supposons que les cercles sont de rayons différents. Soit Ω le centre de l'homothétie h de rapport $\lambda > 0$ qui transforme le premier cercle en le deuxième. Le point $h(M)$ vérifie la même condition de l'énoncé que que le point M', donc $h(M) = M'$. De même, $h(P) = P'$. On a $\Omega N \times \Omega M' = \Omega Q \times \Omega P'$ (puissance d'un point par rapport à un cercle), donc $\lambda \Omega N \times \Omega M = \lambda Q \times \Omega P$. En simplifiant par λ et en utilisant encore la puissance d'un point par rapport à un cercle, on en déduit que M, N, P, Q sont cocycliques.
Si les cercles sont de même rayon, alors il existe une translation qui envoie M et P sur M' et P' respectivement, donc comme ci-dessus on a $(MP, MN) = (M'P', M'N) = (QP', QN) = (QP, QN)$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle. On note D, E et F les pieds des hauteurs issus de A, B et C. Le cercle de diamètre $[AC]$ coupe (BE) en K et L. Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe (CF) en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7



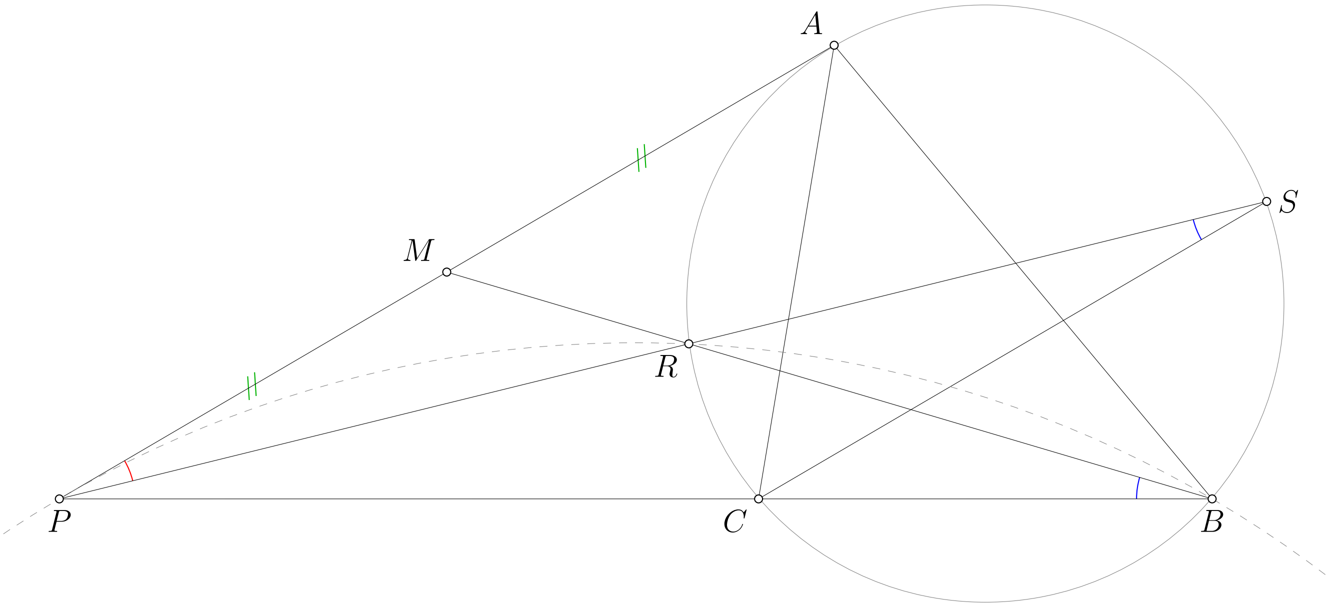
On voit rapidement que D est aussi sur les cercles de diamètre $[AB]$ et $[AC]$. Il nous suffit alors de calculer la puissance de H, l'orthocentre, par rapport à chacun des cercles. En effet, par la puissance du point H dans les deux cercles, on a :

$$HK \times HL = HA \times HD = HM \times HN$$

D'où N, K, M, L cyclique.

Exercice 8
Soit ABC un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit ω son cercle circonscrit. La tangente au cercle ω en A intersecte (BC) en un point P. Soit M le milieu d segment $[PA]$ et soit R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle ω. La droite (PR) recoupe ω en un point S. Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Solution de l'exercice 8



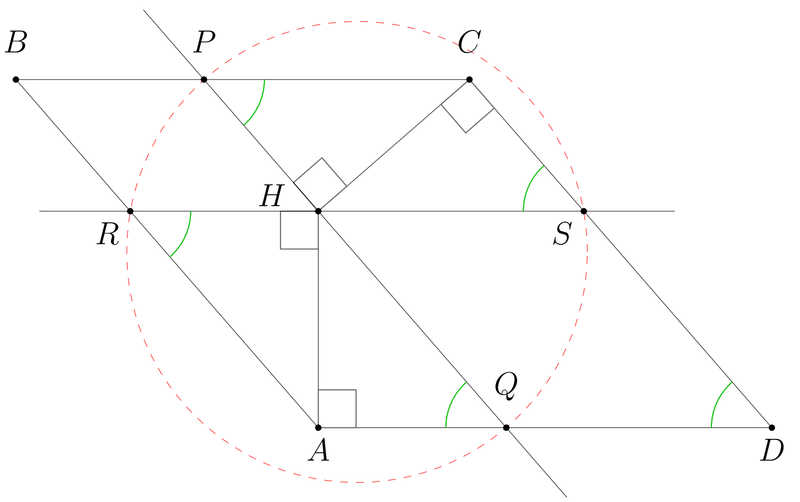
Par angles alternes-internes, l'énoncé est équivalent à montrer que $\widehat{RSC} = \widehat{RPA}$. Or par angles inscrits, on a $\widehat{RSC} = \widehat{RSB}$. On veut alors montrer que $\widehat{RPA} = \widehat{RBC} = \widehat{RBP}$, ou encore que la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle PRB. Mais par puissance d'un point, puisque M est le milieu de $[AP]$ et que (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC :

$$MP^2 = AM^2 = MR \times MB$$

d'où le résultat.

Exercice 9
Soit $ABCD$ un parallèlogramme. Soit H l'orthocentre de ABC. La parallèle à (AB) passant par H coupe (BC) en P et (AD) en Q. La parallèle à (BC) passant par H coupe (AB) en R et (CD) en S. Montrer que les points S, P, Q et R sont cocycliques.

Solution de l'exercice 9



Avec les droites parallèles qu'on a, les triangles HAQ, HAR, HPC et HCS sont semblables. Donc on a :

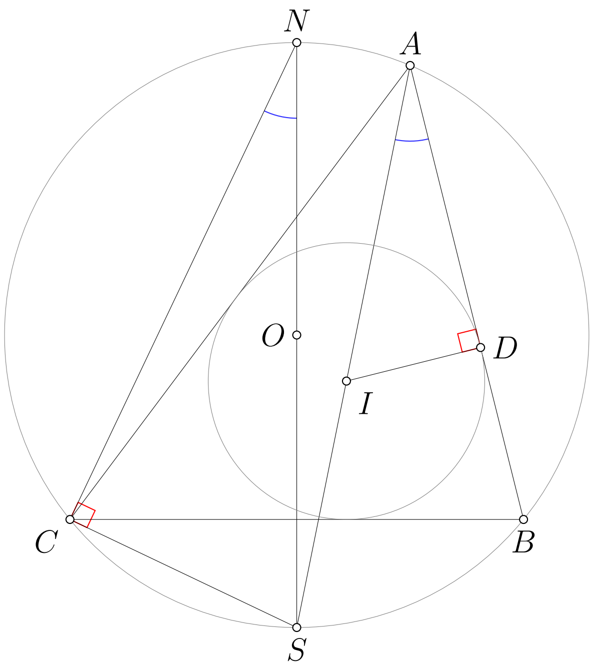
$$\begin{aligned}\frac{HQ}{HR} &= \frac{HQ}{HA}\cdot\frac{HA}{HR}\\ &= \frac{HS}{HC}\cdot\frac{HC}{HP}\\ &= \frac{HS}{HP}\end{aligned}$$

Ce qui fait $HQ \cdot HP = HS \cdot HR$ et donc P, Q, R et S sont cocycliques.

Exercice 10 (Relation d'Euler)
Soit ABC un triangle, R le rayon de son cercle circonscrit, r le rayon de son cercle inscrit. Enfin, soit d la distance entre le centre du cercle circonscrit et le centre su cercle inscrit. Démontrer que

$$d^2 = R(R-2r)$$

Solution de l'exercice 10



On introduit D le projeté orthogonal de I sur (AB), S le pôle sud de A et N le point diamétralement opposé à S. Comme (AS) est une bissectrice, $\widehat{BAS} = \widehat{SAC} = \widehat{SNC}$. Ainsi, comme $\widehat{NCS} = \widehat{IDA} = 90$, les triangles NCS et ADI sont semblables. Ainsi,

$$\frac{ID}{IA} = \frac{CS}{NS}$$

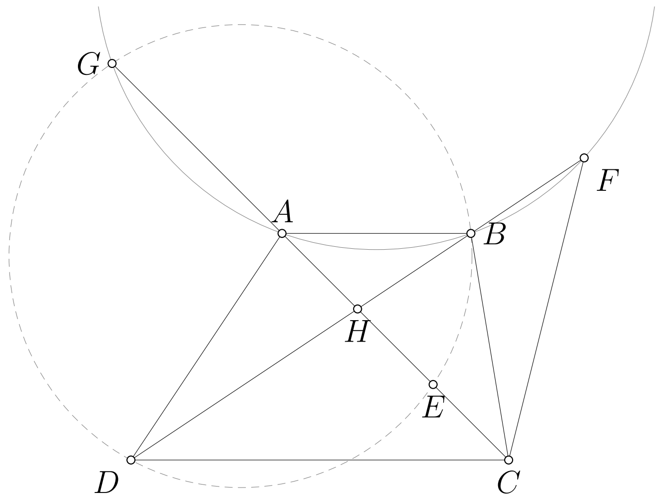
d'où $CS \times IA = 2rR$.
On calcule maintenant la puissance de I par rapport au cercle circonscrit à ABC, nommé Γ :

$$\mathcal{P}_\Gamma(I) = OI^2 - R^2 = IA \times IS$$

Il suffit alors de montrer que cette quantité vaut $-2rR$. Or, S est le pôle sud issu de A, donc $IS = CS$, ce qui conclut.

Exercice 11
(Iran MO 2015 Round 3) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Soit E un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite (BE) passant par C coupe la droite (BD) en F. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BED appartient à la droite (AC).

Solution de l'exercice 11



La présence de nombreuses droites parallèes nous encourage à essyaer une chasse aux rapports et donc à utiliser la puissance d'un point.

Soit G le second point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ABF. Plutôt que de montrer que deux cercles se coupent sur la droite (AC), nous aloons montrer que le point G appartient au cercle circonscrit au triangle BED.

Soit H le point d'intersection des droites (AC) et (BD). D'après la puissance du point H par rapport au cercle circonscrit au triangle ABF, $HG \cdot HA = HB \cdot HF$. De plus le fait que les droites (BE) et (CF) soient parallèles se traduit, d'après le théorème de Thalès, par $HE \cdot HF = HB \cdot HC$. N'oublions par que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc par le théorème de Thalès, on sait aussi que $\frac{HC}{HA} = \frac{HD}{HB}$. Nous avons désormais tous les outils pour démontrer que $HG \cdot HE = HB \cdot HD$:

$$HG \cdot HE = \frac{HB \cdot HF \cdot HE}{HA} = HB \cdot HB \cdot \frac{HC}{HA} = HB^2 \cdot \frac{HD}{HB} = HD \cdot HB$$

ce qui signifie, par la réciproque de la puissance d'un point, que les points G, B, E et F sont cocycliques.

3 Problèmes de grilles (Rémi)

Les exercices 1, 2, 4, 5, 8 et 9 proviennent du cours d'Emile et Maena (Groupe C 2023) ou d'un autre cours d'Emile (Groupe D 2022). Les autres viennent de tests de sélection français. Ils illustrent tous diverses idées utiles à considérer face à un exercice de grilles, le plus souvent quel coloriage utiliser et comment trouver ce coloriage.

Exercices

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un quadrillage $2^n \times 2^n$ et on enlève une case. Est-il toujours possible, quelque soit la case enlevée, de couvrir le nouveau quadrillage avec des L-triominos ?

Exercice 2
Soient k, m, n des entiers strictement positifs. A quelle condition peut-on paver le rectangle $m \times n$ avec des rectangles $1 \times k$ ou $k \times 1$?

Exercice 3
Considérons une grille $n \times n$. Un T-tetramino est un ensemble de quatre cases de la grille en "T". Trouver les valeurs de n telles que la grille $n \times n$ peut être recouverte par des T-tetramino sans chevauchement des pièces.

Exercice 4
(JBMO 2023, C1) On considère une grille de taille 2023×2023, dans laquelle chaque carré unité est colorié en rouge ou en bleu. On suppose qu'il existe exactement 1012 colonnes avec une majorité de cases rouges et exactement 1012 lignes avec une majorité de cases bleues. Quelle est la taille maximale d'un carré monochrome dans la grille ?

Exercice 5
(IMO 2017, C1) On considère un rectangle à côtés entiers impairs. On divise celui-ci en plus petits rectangles dont les côtés sont toujours entiers. Montrer qu'il existe un des petits rectangles dont les distances aux quatre côtés du grand sont toutes de même parité.

Exercice 6
Une grille de dimensions 20×20 est divisée en 400 cases unité de dimensions 1×1. Clara colorie chaque case en blanc ou en noir, puis Isabelle découpe la grille en rectangles dont les côtés sont contenus dans la grille. Chacun de ces rectangles doit contenir au plus 2 cases noires, et elle donne un chocolat à Clara à chaque fois qu'elle découpe un rectangle qui contient 0 ou 1 case noire.

Isabelle choisit son découpage de manière à donner le moins de chocolats possibles à Clara, et Clara choisit son coloriage initial de manière à obtenir le plus de chocolats possibles d'Isabelle. Combien de chocolats Isabelle donnera-t-elle à Clara ?

Exercice 7
Un jardinier et un pivert jouent au jeu suivant, dans leur jardin dont la forme est celle d'une grille 2022×2022 formée de 2022^2 cases. Deux cases sont considérées comme voisines si elles ont un sommet ou une arête en commun. Initialement, chaque case abrite un arbre de taille 0. Puis, à chaque tour de jeu,

— le jardinier choisit une case ; les arbres de cette case et des cases adjacentes (soit de quatre à neuf cases en tout) voient tous leur taille augmenter de 1 ;

— le pivert choisit alors quatre cases ; les arbres de ces cases voient tous leur taille diminuer de 1 (ou rester égale à 0 si le pivert a choisi une case avec un arbre de taille 0).

On dit qu'un arbre est *resplendissant* si sa taille vaut au moins 10^6. Trouver le plus grand entier A pour lequel le jardinier pourra s'assurer, en un nombre fini de tours de jeu, et quels que soient les choix du pivert, d'avoir fait pousser au moins A arbres resplendissants.

Exercice 8

(EGMO 2016, P5) Soient k, n des entiers tels que $2 \leq k \leq n \leq 2k-1$ et on considère une grille $n \times n$. Tant que possible, on rajoute des rectangles $1 \times k$ ou $k \times 1$ sur la grille afin que chaque rectangle couvre exactement k cases et que deux rectangles ne se superposent pas. On s'arrête lorsque cette opération n'est plus possible. Trouver, en fonction de n et de k, le nombre minimal de rectangles dans une configuration finale.

Exercice 9

(EGMO 2015, P2) Un domino est un rectangle 1×2 ou 2×1. Déterminer le nombre de manières de poser n^2 dominos sur une grille $2n \times 2n$ afin que tout carré 2×2 de la grille possède au moins deux cases non occupées sur la même ligne ou la même colonne.

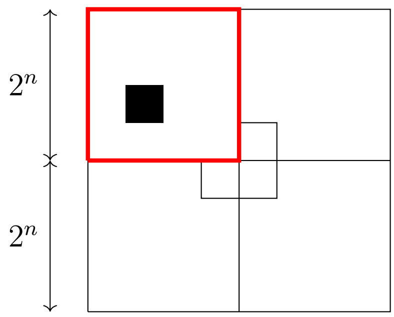
Solutions

Solution de l'exercice 1

On raisonne par récurrence pour montrer que l'on peut effectivement paver le quadrillage quelque soit la case retirée.

Si $n = 1$, on a un carré de côté 4×4. Quand on enlève une case, on peut bien placer un L-triominos sur les trois cases restantes.

On suppose que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$. On considère un carré $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ et on le divise en 4 grands carrés donc de taille $2^n \times 2^n$. Un de ces grands carrés possède la case retirée, par hypothèse de récurrence celui-ci peut être pavé par des L-triominos. On place ensuite un triomino au centre de la grille sur les trois grands carrés restants comme dans la figure suivante. Par hypothèse de récurrence, chacun de ces trois carrés restants privés de la case prise par le triomino déjà placé peut être pavé par des L-triominos. Ainsi, le quadrillage total peut effectivement être pavé par des L-triominos.



Solution de l'exercice 2

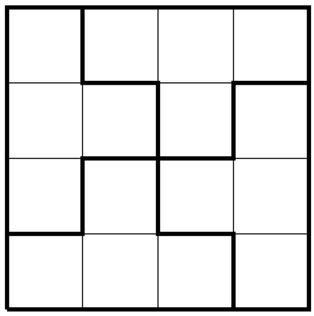
Supposons déjà que k divise m ou n. Dans ce cas, il y a un pavage donné par des rectangles tous verticaux ou tous horizontaux.

Réciproquement, colorions le rectangle $m \times n$ en k couleurs de cette façon : la couleur de la case (i, j) est donnée par la valeur de $i + j$ modulo k. Alors tout rectangle $1 \times k$ ou $k \times 1$ couvre une et exactement une case de chaque couleur. Alors s'il y a un pavage possible, chaque couleur apparaît le même nombre de fois dans le rectangle $m \times n$. On peut vérifier que ceci n'est possible que si k divise m ou k divise n.

En effet, écrivons les divisions euclidiennes $m = qk + r$ et $n = q'k + r'$, et supposons sans perte de généralité que $r \leqslant r'$. On peut alors retirer un rectangle $qk \times n$, dans lequel on sait qu'il y autant de cases de chaque couleur, puis un rectangle $q'k \times r$, dans lequel la même propriété est vérifiée. Il ne reste qu'un rectangle $r \times r'$, dans lequel la couleur en haut à gauche apparaît $\min(r, r') = r$ fois sur une diagonale. Si toutes les couleurs apparaissent autant que celle-ci, alors il faudrait au moins $k \cdot r$ cases, or $k \cdot r > r' \cdot r$, d'où la contradiction.

Solution de l'exercice 3

Si $4|n$, alors on peut couvrir chaque grille de côté 4 par le pavage suivant :



Montrons maintenant que pour que la grille soit pavable par des T, il est nécessaire que $4|n$. On colorie la grille en échéquier (donc il y a autant de cases blanches que de cases noires). Il y a deux types de T : ceux qui recouvrent trois cases blanches et une case noire, et ceux qui recouvrent trois cases noires et une case blanche. On note k le nombre de T de type 1. Comme il y a autant de cases blanches que de cases noires, il y doit y avoir autant de T de type 1 que de T de type 2. Il y a donc également k T de type 2, ce qui nous donne $3k + k$ cases blanches, de même pour les cases blanches. Il y a donc $4k + 4k = 8k$ cases au total. Donc $8|n^2$, ce qui implique que $4|n$.

Solution de l'exercice 4

Supposons qu'il existe un carré $n \times n$ monochrome dans la grille. Notons que $2023 = 1011 + 1012$. On commence par remarquer que si $n \geqslant 1012$, alors si le carré est bleu, on a 1012 colonnes où le bleu est majoritaire, s'il est rouge, on a 1012 lignes où le rouge est majoritaire, ce qui constitue une contradiction dans chaque cas. Ainsi, $n \geqslant 1011$.

Montrons qu'il est possible d'atteindre $n = 1011$ en construisant un exemple. On note (i, j) avec $i, j \in [\![1, 2023]\!]$ les 2023^2 cases de la grille. On colorie en rouge les cases (i, j) avec $i \leqslant 1011$ et $j \leqslant 1011$ (ce qui donne notre carré monochrome 1011×1011), puis la case $(1012, 1012)$, et enfin toutes les cases avec $i \geqslant 1013$. Cela nous garantit qu'exactement les lignes 1 à 1012 sont majoritairement bleues, et exactement les colonnes 1 à 1012 sont majoritairement rouges, ce que l'on voulait. La réponse est donc $n = 1011$.

Solution de l'exercice 5

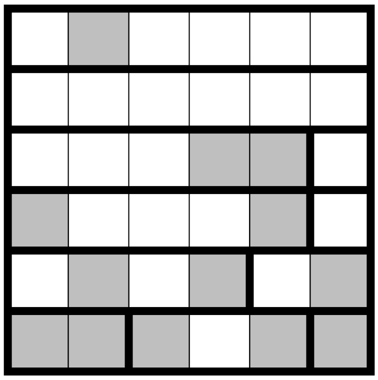
On pave le rectangle en damier, de façon à ce que les coins soient noirs. Alors un rectangle à l'intérieur a des distances aux quatre côtés du grand de même parité si et seulement si ses quatre coins sont noirs, ou encore si et seulement s'il possède strictement plus de cases noires que de cases blanches.

Mais le grand rectangle possède une case noire de plus que de cases blanches, donc un petit rectangle comme précédemment existe forcément.

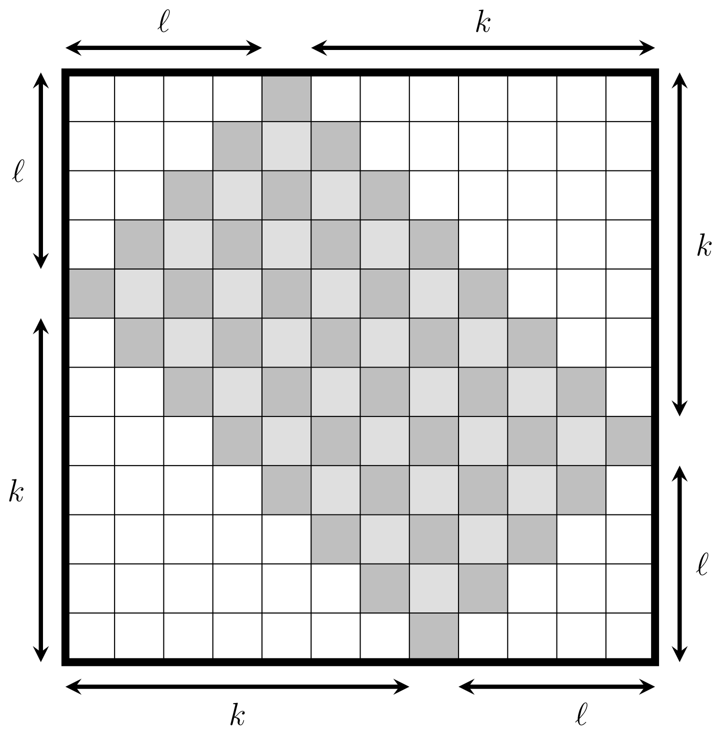
Solution de l'exercice 6

Nous allons démontrer pour tout entier $n \geqslant 3$ que, si Clara et Isabelle jouent sur une grille de dimensions $n \times n$, Isabelle donnera n chocolats à Clara.

Tout d'abord, pour limiter le nombre de chocolats qu'elle donnera à Clara, Isabelle peut procéder comme suit. Elle commence par découper le rectangle en n lignes, et s'apprête à subdiviser chaque ligne en rectangles. Pour ce faire, elle numérote les cases noires de la ligne de gauche à droite, puis elle donne un coup de ciseaux juste à droite de chacune des cases noires n°$2, 4, 6, \ldots$ Ce faisant, tous les rectangles obtenus, sauf éventuellement le dernier, comptent deux cases noires. Ainsi, Isabelle donne au plus n chocolats à Clara.



Réciproquement, supposons que Clara colorie sa grille $n \times n$ avec le coloriage suivant, où nous avons distingué avec deux niveaux de gris les cases que Clara colorie en noir, et où k et ℓ sont deux entiers naturels non nuls de somme $k + \ell = n - 1$.



Si un rectangle contient exactement deux cases noires, il s'agit de cases adjacentes : une gris foncé et une gris clair. Or, il y a $(k+1)(\ell+1)$ cases gris foncé et $k\,\ell$ cases gris clair. Isabelle dessine donc au plus $k\,\ell$ rectangles recouvrant exactement deux cases noires, et ces rectangles laissent de côté $k+\ell+1=n$ cases gris foncé. Cela force donc Isabelle à donner au moins $n=20$ chocolats à Clara.

Solution de l'exercice 7
Nous allons démontrer que l'entier recherché est $A=5n=2271380$, où l'on a posé $n=674^2=(2022/3)^2$.

Tout d'abord, voici une stratégie pour le pivert. Il numérote les lignes et les colonnes de 1 à 2022, puis colorie en noir chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour lesquelles 3 ne divise ni c, ni ℓ. Parmi les quatre à neuf cases sur lesquelles le jardinier agit à chaque tour, au plus quatre sont noires. Le pivert choisit alors les cases noires en question ; si cela fait moins de quatre cases, il choisit d'autres cases au hasard.

Ce faisant, il s'assure, à la fin du tour de jeu, qu'aucun arbre situé dans une case noire n'aura vu sa taille augmenter. Une récurrence immédiate indique donc que nul arbre situé dans une case noire ne verra sa hauteur dépasser 1, et puisqu'il y a $4n$ cases noires, on ne pourra jamais dépasser un total de $2022^2-4n=5n$ arbres resplendissants.

Réciproquement, voici une stratégie pour le jardinier ; on pose $m=10^6$. Faisant fi de la coloration imposée par le pivert, il colorie en rouge chaque case située dans une colonne c et une ligne ℓ pour lesquelles $c\equiv\ell\equiv 2 \pmod 3$. Il y a n cases rouges, et chaque case est soit rouge, soit adjacente à une case rouge. Le jardinier pose alors $k=(4n+1)m+1$ puis, au cours des kn premiers tours de jeu, il choisit chaque case rouge exactement k fois. Il a donc fait croître de k la hauteur de chaque arbre du jardin.

Soit a le nombre d'arbres qui ne sont *pas* resplendissants à l'issue de cette première partie du jeu : le pivert a dû choisir au moins $k-m$ fois chacun de ces a arbres. Puisqu'il a choisi $4kn$ arbres au cours des kn tours de jeu, en déduit que $a(k-m)\leqslant 4kn$, donc que

$$(k-m)(a-4n-1)\leqslant 4kn-(k-m)(4n+1)=(4n+1)m-k<0.$$

Puisque $k\geqslant m$, cela signifie que $a<4n+1$, donc que $a\leqslant 4n=9n-A$.

En conclusion, l'entier recherché est bien $A=5n$.

Solution de l'exercice 8
On va montrer que le résultat est :

$$\begin{cases} n \text{ si } k=n \text{ ou } 2k-1=n \\ 2(n-k+1) \text{ sinon} \end{cases}.$$

On appelle *bâton* un rectangle $1\times k$ ou $k\times 1$. Supposons que l'on ne dispose que des bâtons orientés dans le même sens, par exemple verticalement. Alors on peut toujours en poser au moins n, un sur chaque colonne. De plus, en les disposant en alternant un bâton touchant le côté bas et un bâton touchant le côté haut, la condition $2k-1\geq n$ donne une configuration où l'on ne peut plus rajouter de bâtons. Ainsi, on peut toujours trouver une configuration finale avec n bâtons, et si les bâtons sont tous dans le même sens, c'est le nombre minimal.

Supposons maintenant que l'on ait une configuration avec des bâtons verticaux et horizontaux. Si on a un bâton vertical sur une colonne, comme $n\leq 2k-1$, il est à distance strictement inférieure de k d'un des deux bords, par exemple le gauche. Alors entre le bâton et ce bord, on ne peut pas placer de bâton horizontal, mais on peut placer un bâton vertical sur chaque colonne. Alors toutes les colonnes depuis le bord gauche contiennent un bâton vertical.

En faisant de même avec le bord droit, les colonnes qui ne contiennent pas de bâton vertical sont côte-à-côte. S'il y en avait au moins k, on pourrait alors placer un bâton horizontal dans chaque ligne, entre les colonnes qui contiennent des bâtons verticaux, et la configuration finale contiendrait au moins n bâtons, alors cette configuration n'est pas optimale car on peut déjà trouver une configuration finale avec n bâtons dans le même sens. Ainsi, si la configuration finale possède des bâtons dans les deux sens, elle en possède au moins $n-k+1$ verticaux. De même, elle en possède au moins $n-k+1$ horizontaux, et donc $2(n-k+1)$ bâtons en tout.

Trouvons maintenant une configuration à $2(n-k+1)$ bâtons, pour $k<n$. Pour ceci, on considère un carré $(k+1)\times(k+1)$ en bas à gauche de la grille où l'on place 4 batôns en carré sur le bord. On place ensuite $n-k-1$ bâtons verticaux à droite de ce carré, et $n-k-1$ bâtons horizontaux en haut de ce carré.

Maintenant, si $k=n$, on ne peut pas placer deux bâtons dans des sens opposés, donc la réponse est n. Si $k<n$, c'est le minimum entre n et $2(n-k+1)$, c'est-à-dire n si $2k-1=n$ et $2(n-k+1)$ sinon.

Solution de l'exercice 9

Considérons une disposition des n^2 dominos. On commence par diviser la grille en n^2 carrés 2×2. Chacun ne peut contenir qu'au plus deux cases occupées, comme il y a n^2 dominos de deux cases, chacun des carrés a deux cases occupées qui partagent un côté. Supposons par l'absurde qu'il existe au moins un carré où ces deux cases appartiennent à deux dominos différents, et considérons parmi ceux-ci celui d'ordonnée minimale, puis d'abscisse minimale. Ainsi les carrés en bas et à gauche de celui-ci (s'ils existent) contiennent exactement un domino. Mais avec l'hypothèse de l'énoncé, la seule manière d'avoir deux dominos en contact est qu'ils forment quatre cases alignées, alors les deux dominos ayant une case dans le carré considéré doivent dépasser sur le carré à gauche ou celui du bas, absurde.

Ainsi, chaque carré possède exactement un domino, qui peut être positionné à gauche, en haut, à droite ou en bas du carré. On peut donc diviser les carrés en quatre catégories G, H, D, B respectivement, selon le positionnement du domino. L'hypothèse de l'énoncé implique alors que le carré à gauche d'un carré G est un carré G, celui en haut d'un carré H est un carré H, etc.

De cette manière, on en déduit que tous les carrés d'abscisse et d'ordonnée inférieures à celles d'un carré G ou B sont toujours des carrés G ou B, ainsi la ligne brisée partant du coin en haut à gauche et arrivant en bas à droite séparant les carrés G ou B des carrés D ou H n'est constituée que de segments de longueur 2 vers le bas et la droite. De la même manière, celle partant du coin en haut à droite et arrivant au coin en bas à gauche séparant les carrés G ou H des carrés D ou B n'est constituée que de segments de longueur 2 vers le bas et la gauche.

Réciproquement, étant donné deux telles lignes brisées, elles séparent la grille en quatre parties correspondant aux carrés G, H, B, D. Pour chaque ligne brisée, il y a $\binom{2n}{n}$ choix, donc le nombre total de configurations est

$$\binom{2n}{n}^2.$$

4 Pôle Sud (Antoine et Hadriel)

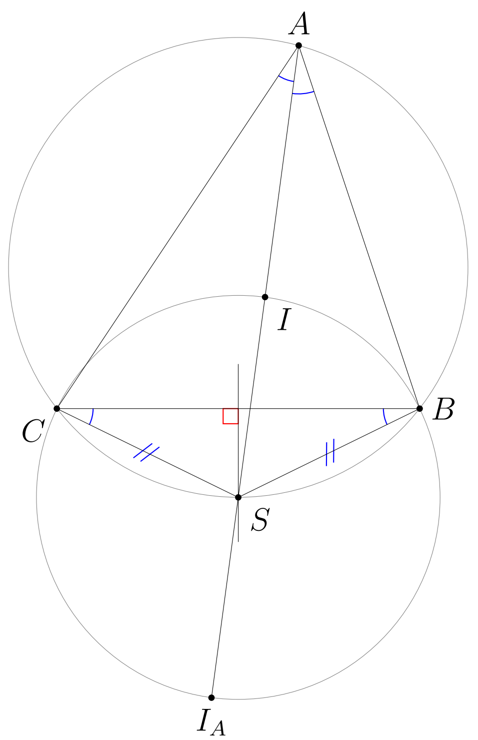
Dans un triangle ABC, le pôle Sud de A est l'intersection de la médiatrice de $[BC]$ avec la bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$. Une chasse aux angles rapide nous apprend que cette intersection est sur le cercle circonscrit d'ABC. Cette configuration apparaît fréquemment, et la reconnaître peut s'avérer très utile.

Exercice 1
Soit ABC un triangle. Tracer la bissectrice intérieure de $\widehat{ABC}$ à la règle et au compas. Et la bissectrice extérieure ? Et le centre du cercle inscrit ?

Solution de l'exercice 1
Une stratégie peut être d'utiliser le Pôle Sud pour tracer la bissectrice. En effet, comme normalement on commence par tracer un cercle et ensuite on met trois points dessus, le cercle circonscrit est déjà tracé, et tracer une médiatrice est plus facile que de tracer une bissectrice.
Pour la bissectrice extérieure, comme elle est perpendiculaire à la bissectrice intérieure, elle recoupe le cercle circonscrit à ABC en le point diamétralement opposé à S, appelé N pour pôle Nord. Il s'agit également de la seconde intersection de la médiatrice de $[BC]$ avec le cercle circonscrit à ABC.
Le centre du cercle inscrit est sur le *cercle antarctique*, qu'on va découvrir dans l'exercice suivant. Il s'agit donc de l'intersection du cercle antarctique avec la bissectrice de $\widehat{ABC}$.

Exercice 2
Soit ABC un triangle et S le pôle Sud de A. Montrer que S est le centre de (BIC).
Montrer que c'est également le milieu de $[II_A]$, où I_A est le centre du cercle A-exinscrit de ABC.

Solution de l'exercice 2



Il suffit de montrer que SIB est isocèle en S. Par symétrie des rôles de B et C on aura ainsi que $SI = SB = SC$ ce qui est équivalent au fait que S soit le centre de (BIC).
On a

$$\widehat{BIS} = 180 - \widehat{AIB} = \widehat{IAB} + \widehat{ABI}$$

.

Or d'après le théorème de l'angle inscrit couplé au théorème du pôle Sud,

$$\widehat{BAS} = \widehat{BCS} = \widehat{CBS}$$

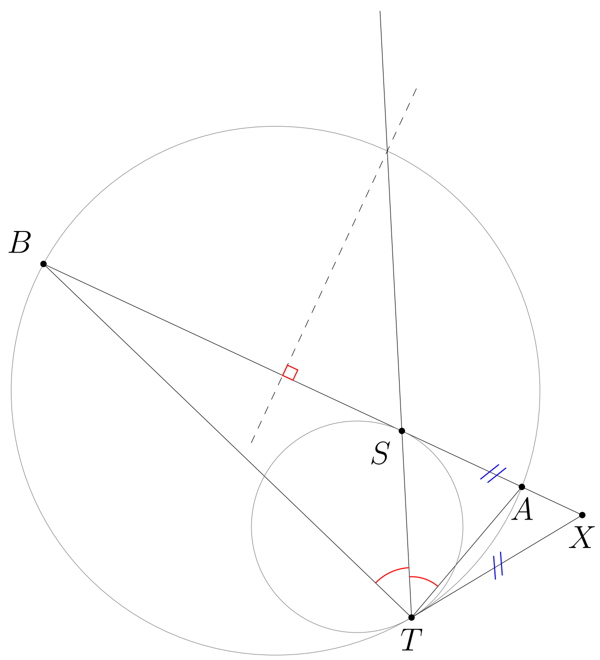
De plus, comme IB est une bissectrice, on a

$$\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$$

Ainsi, on a bien que $\widehat{BIS} = \widehat{CBI} + \widehat{CBS} = \widehat{IBS}$. Le triangle IBS est isocèle en S et S est bien le centre de (BIC). Ce cercle passant par B, C, I, I_A s'appelle le cercle antarctique du triangle ABC.

Exercice 3
(Lemme du bocal)
Soit Ω un cercle, et $[AB]$ une corde de ce cercle. Soit ω un cercle tangent à $[AB]$ en S et tangent intérieurement à Ω en T. Montrer que la droite (ST) et la médiatrice de $[AB]$ se rencontrent sur Ω.

Solution de l'exercice 3



On trace la tangente à ω et Ω en T. On note X le point d'intersection de cette tangente avec (AB).
On remarque que XTS est isocèle en X car c'est l intersection de deux tangentes à ω.

On a que $\widehat{XTA} = \widehat{TBA} = \widehat{TBS}$ par angle tangentiel.
On a :

$$\widehat{XTA} + \widehat{ATS} = \widehat{XST}$$

car XTS est isocèle. Or :

$$\widehat{XST} = \widehat{STB} + \widehat{TBS}$$

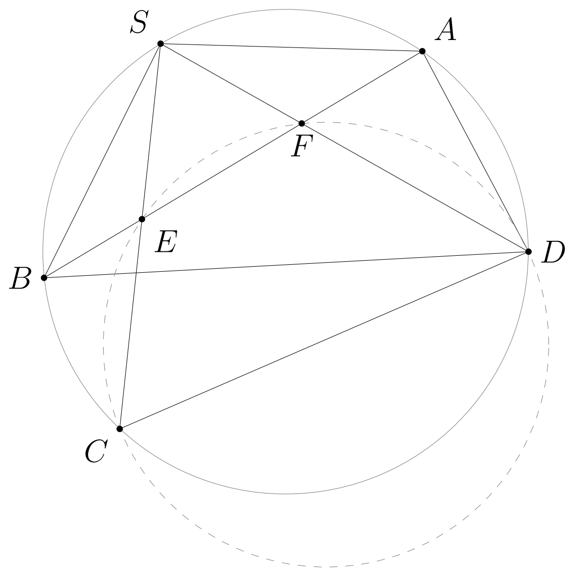
car la somme des angles d'un triangle fait 180. Or $\widehat{TBS} = \widehat{XTA}$, donc

$$\widehat{ATS} = \widehat{STB},$$

et (TS) est donc la bissectrice intérieure de $\widehat{ATB}$. Elle passe donc par le pole sud de ATB, ce qui conclut.

Exercice 4
Soient A, B, C, D quatre points dans cet ordre sur un cercle, et soit S le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne passant pas par C ou D. Les droites SC et SD coupent (AB) en E et F. Montrer que C, D, E, F sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Montrons que $\widehat{CDF} = \widehat{SEF}$.
Regardons $\widehat{SEF}$:

$$\widehat{SEF} = \widehat{SEA} = 180 - \widehat{ESA} - \widehat{SAE} = 180 - \widehat{CSA} - \widehat{SAB} = \widehat{CDA} - \widehat{BDS}.$$

Or on a que $\widehat{BDS} = \widehat{SDA}$ par le théorème du pôle sud. Donc

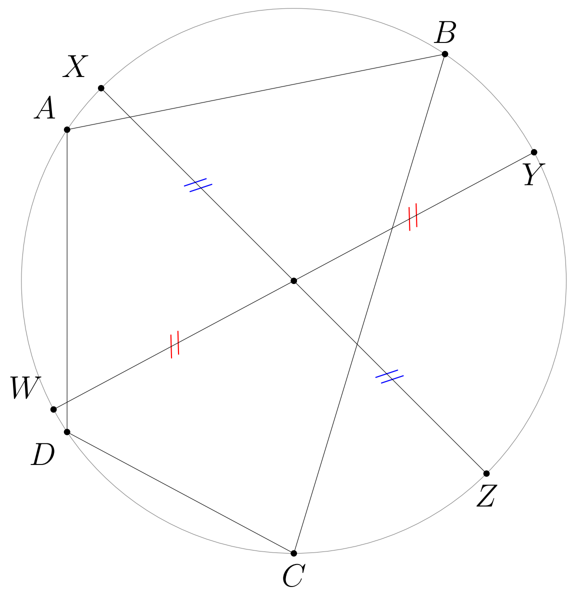
$$\widehat{SEF} = \widehat{CDA} - \widehat{SDA} = \widehat{CDS} = \widehat{CDF}$$

ce qui conclut.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique, et notons $(b_1), (b_2), (b_3), (b_4)$ les bissectrices respectives

de $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$.
Posons W, X, Y, Z les points d'intersections respectifs de (b_1), (b_2), (b_3) et (b_4) avec le cercle circonscrit à $ABCD$.
Montrer que WY et XZ se coupent en leur milieu.

Solution de l'exercice 5

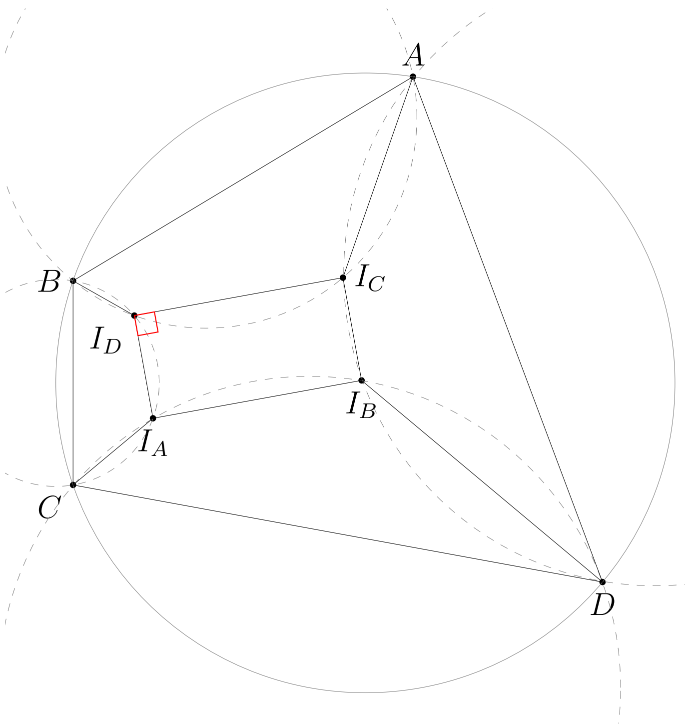


Montrons en fait que $[XZ]$ et $[WY]$ sont tout deux des diamètres du cercle circonscrit à $ABCD$. Cela permettra alors de conclure puisque les diamètres se coupent tous en leur milieu sur le centre du cercle.

Par le théorème du pôle Sud, X est sur la médiatrice de BD (c'est le pôle Sud de C dans le cercle $(ABCD)$), de la même manière Z est aussi sur la médiatrice de $[BD]$. Ainsi, la droite $[XZ]$ est la médiatrice de $[BD]$, et le centre O du cercle se trouve sur $[XZ]$ qui est donc bien un diamètre. De la même manière, on prouve que $[WY]$ est un diamètre du cercle ce qui nous permet de conclure.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On note I_A, I_B, I_C, I_D les centres des cercles inscrits des triangles BCD, ACD, ABD, ABC respectivement.
Quelle est la nature du quadrilatère $I_AI_BI_CI_D$?

Solution de l'exercice 6



Considérons les milieux des arcs AB, BC, CD, DA, qu'on nomme $S_{AB}, S_{BC}, S_{CD}, S_{DA}$ respectivement, et leurs cercles antarctiques correspondants (Voir la correction de l'exercice 2 pour la définition de cercle antarctique). Chaque cercle antarctique est partagé par deux triangles et pour chaque triangle on a tracé deux de ses cercles antarctiques. Chaque centre inscrit considéré se situe donc sur une intersection de deux cercles antarctiques adjacents.
Nous avons donc tracé notre figure comme cela. On voit que le quadrilatère $I_AI_BI_CI_D$ est un rectangle. On va le montrer :

$$\widehat{I_CI_DI_A} = 360 - \widehat{I_CI_DB} - \widehat{I_AI_DB} = \widehat{I_ACB} + \widehat{I_CAB}$$

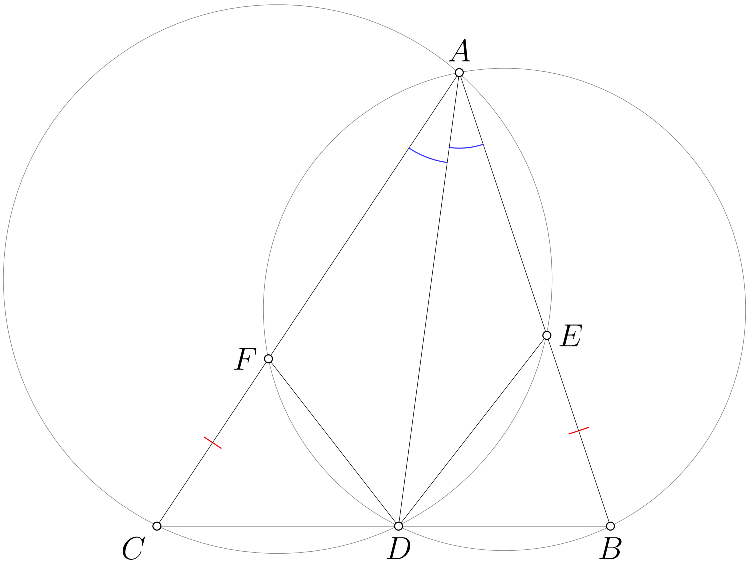
Or (I_AC) et (I_CA) sont les bissectrices intérieures de $\widehat{BCD}$ et $\widehat{DAB}$. Donc

$$\widehat{I_ACB} + \widehat{I_CAB} = \frac{\widehat{BCD} + \widehat{DAB}}{2} = 90$$

On fait la meme chose pour les autres angles du quadrilatère, ce qui montre bien que $I_AI_BI_CI_D$ est un rectangle.

Exercice 7
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. Les cercles circonscrits aux triangles ACD et ABD recoupent les côtés $[AB]$ et $[AC]$ en E et F respectivement. Montrer que $BE = CF$.

Solution de l'exercice 7

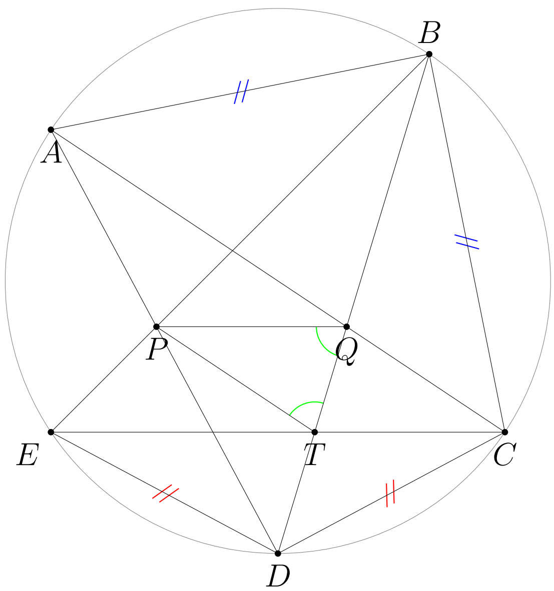


On veut montrer que BDE et DFC sont isométriques. Par le théorème du pôle Sud, comme AD est la bissectrice de $\widehat{EAC}$ et de $\widehat{BAF}$, on a $DE = DC$ et $DB = DF$. De plus par angle inscrit, $\widehat{BDE} = 180 - \widehat{EDC} = 180 - \widehat{EAC} = 180 - \widehat{BDF} = \widehat{FDC}$. Donc les triangles sont isométriques et la conclusion suit.

Exercice 8

Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle, vérifiant AB = BC et CD = DE. On appelle respectivement P, Q et T l'intersection des droites (AD) et (BE), (AC) et (BD), (BD) et (CE). Montrer que le triangle PQT est isocèle.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



Montrons dans un premier temps que les quadrilatères $ABQP$ et $PTED$ sont cycliques. Les égalités de longueur nous donnent que D est sur la médiatrice de $[EC]$. Par le théorème du pôle Sud, on en déduit que D est sur la bissectrice de $\widehat{EAC}$ ainsi que sur celle de $\widehat{EBC}$. De plus, le théorème de l'angle inscrit nous donne que

$$\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$$

En combinant tout cela on trouve que

$$\widehat{PAQ} = \widehat{DAC} = \widehat{EAD} = \widehat{EBD} = \widehat{PBQ}$$

ce qui signifie bien que le quadrilatère $ABQP$ est inscriptible. De la même manière, en remarquant que B est sur la médiatrice de $[AC]$ et donc sur la bissectrice de $\widehat{CDA}$, on prouve que $PTDE$ est inscriptible.

Nous allons maintenant effectuer une chasse aux angles qui nous permettra de conclure. Comme les quadrilatères $ABDE$, $ABQP$ et $PTDE$ sont cycliques, on a respectivement les trois égalités d'angles suivantes.

$$\widehat{DAB} = \widehat{DEB}$$

$$\widehat{PQT} = \widehat{PAB}$$

$$\widehat{PTQ} = \widehat{PED}$$

.

En combinant il vient enfin que

$$\widehat{PQT} = \widehat{PAB} = \widehat{DAB} = \widehat{DEB} = \widehat{DEP} = \widehat{PTQ}$$

ce qui signifie bien que PQT est isocèle en P comme voulu.

Exercice 9

Soit ABC un triangle, et D, E les milieux de $[AB]$ et $[AC]$ respectivement. Soit K l'intersection des droites (BC) et (OE), et L la deuxième intersection de (OD) avec le cercle circonscrit à BKO. On pose enfin F le projeté orthogonal de A sur (KL).
Montrer que D, E, F sont alignés.

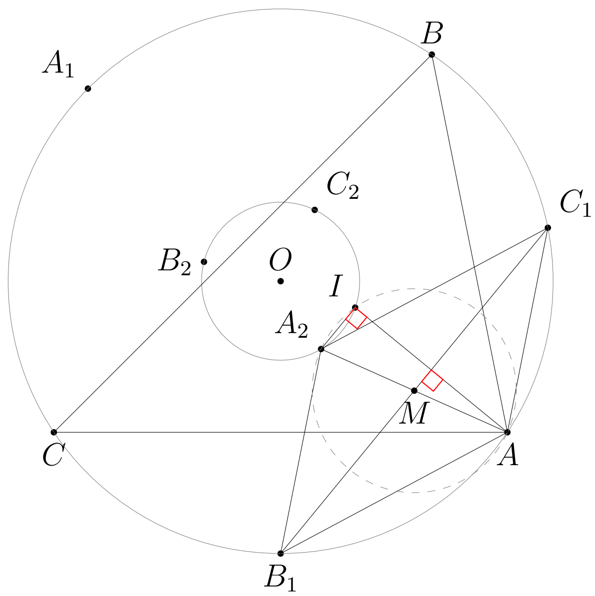
Solution de l'exercice 9

Cet exercice est le problème 7 de l'envoi de géométrie $2022 - 2023$.

Exercice 10

Soit ABC un triangle, et A_1, B_1, C_1 les pôles Sud de A, B, C dans ABC respectivement. Les points A_2, B_2, C_2 sont tels que $AB_1A_2C_1$, $BC_1B_2A_1$, $CA_1C_2B_1$ sont des parallélogrammes.
Montrer que les cercles circonscrits à ABC et $A_2B_2C_2$ sont concentriques.

Solution de l'exercice 10



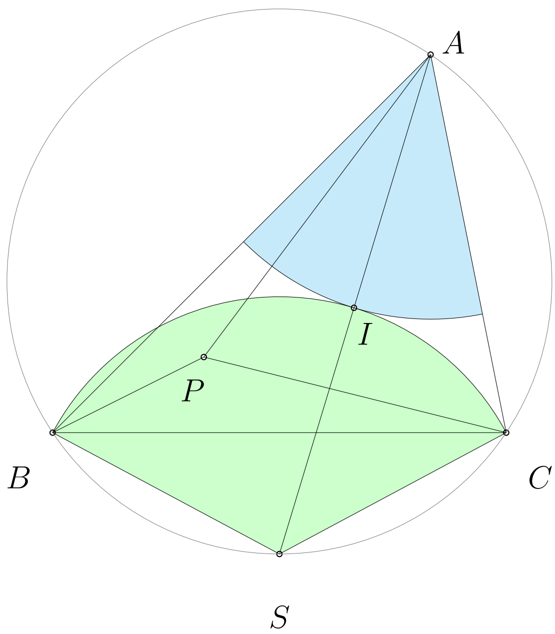
On a des parallélogrammes, on introduit donc leurs centres. Soit donc M le milieu de B_1C_1, I le centre du cercle inscrit à ABC, et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Puisque B_1 et C_1 sont des pôles sud de ABC, on sait que $B_1A = B_1I$ et $C_1A = C_1I$. Ainsi, (B_1C_1) est la médiatrice de $[AI]$.
On a donc $IM = AM = A_2M$. Ainsi M est le centre du cercle circonscrit à A_2IA. Donc $\widehat{AIA_2} = 90$ car AA_2 en est un diamètre. On a donc $IA_2 \parallel B_1C_1$.
Ainsi la médiatrice de $[B_1C_1]$ est perpendiculaire à IA_2. Or M appartient à la médiatrice de IA_2. Donc $[IA_2]$ et $[B_1C_1]$ ont la même médiatrice. Donc O appartient à la médiatrice de $[A_2I]$. Donc $OA_2 = OI$.
On fait la même chose pour B_2, C_2, et on trouve que A_2, B_2, C_2 appartiennent au cercle de centre O et de rayon OI, ce qui conclut. $\square$

Exercice 11
Soit ABC un triangle, et P un point dans le triangle ABC. On suppose que

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} \geqslant \widehat{PBC} + \widehat{PCB}.$$

Montrer que $AP \geqslant AI$, avec égalité si et seulement si $P = I$.

Solution de l'exercice 11



(Cet exercice ainsi que sa merveilleuse solution ont été volés à Aline de son cours de l'an dernier du même nom.)
Soit S le Pôle Sud de A dans ABC. On a

$$\widehat{PBA}+\widehat{PCA}+\widehat{PBC}+\widehat{PCB}=\widehat{ABC}+\widehat{ACB}=2\left(90-\frac{\widehat{BAC}}{2}\right)$$

La condition de l'énoncé revient donc à $\widehat{PBC}+\widehat{PCB}\leqslant 90-\frac{\widehat{BAC}}{2}$, ou encore à

$$\widehat{BPC}\geqslant 90+\frac{\widehat{BAC}}{2}=\widehat{BIC}.$$

On en déduit que P est entre l'arc de cercle BIC de centre S et la droite (BC) (zone verte). Or $AP\leqslant AI$ si et seulement si P est dans le cercle de centre A et de rayon I (zone bleue). Ces deux cercles sont tangents en I puisque A, I, S sont alignés. Ainsi, dans le cas général $AP\geqslant AI$ et le seul point appartenant aux deux zones est le point I, ce qui conclut le cas d'égalité.

5 Axes radicaux (Emile et Maena)

Ce cours est essentiellement repris du cours donné par Gaëtan Dautzenberg et Gaspard Causse au groupe C en 2023.

Exercice 1 (Réciproque de la concourrance des axes radicaux)
Soient A, B, C, D, E, F six points. On suppose que A, B, C, D sont cocyliques, et que C, D, E, F sont cocycliques. On suppose de plus que les droites $(AB), (CD)$ et (EF) sont concourantes. Montrer que les points E, F, A, B sont cocycliques.

Exercice 2
Soient ω_1 et ω_2 des cercles disjoints extérieurs l'un à l'autre. On trace les 4 tangentes communes à ces deux cercles. Montrer que les milieu des segments formés par les quatres tangentes sont alignés.

Exercice 3
Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en $U \neq V$. Soient A, X des points de C_1 et B, Y des points de C_2. On suppose que les angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$ sont droits. Montrer que $(AX), (BY), (UV)$ sont concourantes.

Exercice 4
Soient D, E, F les pieds des hauteurs dans un triangle non équilatéral ABC issues de A, B, C respectivement. Le centre du cercle circonscrit de ABC est noté O. Montrer que les cercles (AOD), (BOE) et (COF) s'intersectent en un point X autre que O.

Exercice 5
Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note O un point sur ω. Le projeté orthogonal de O sur $[AB]$ est H. Le cercle de centre O et de rayon OH recoupe ω en X et Y. Montrer que X, Y et le milieu de $[OH]$ sont alignés.

Exercice 6 (Orthogonalité de l'axe radical)
Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note M et N les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On note P l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (AD)$ et Q l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (BC)$. Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 7
Les points A, B, C et D se trouvent dans cet ordre sur une droite. Soit k_1 le cercle de diamètre $[AC]$ et k_2 le cercle de diamètre $[BD]$. Les deux cercles se coupent aux points E et F. Une tangente commune de k_1 et k_2 est tangente à k_1 en M et à k_2 en N. Montrer que les droites (AM), (EF) et (ND) sont concourantes.

Exercice 8
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[AC]$. Montrer que le cercle de diamètre $[CM]$ et le cercle de diamètre $[BN]$ s'intersectent sur la hauteur issue de A.

Exercice 9 (Cercle de Conway)
Soit ABC un triangle, on place les points A_1 et A_2 de telle sorte que $AA_1 = AA_2 = BC$, $A_1 \in (AB)$ et $A_2 \in (AC)$ du côté opposé de B et C par rapport à A, on définit B_1, B_2, C_1 et C_2 de manière similaire. Montrer que les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 sont sur un même cercle.

Exercice 10
Soit ABC un triangle et D, E des points sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, vérifiant $(DE)//(BC)$. Soit P un point intérieur à ADE tel que (DE) intersecte (PB) en U et (PC) en V. On note Q le point d'intersection autre que P des cercles circonscrits à PDV et PEU. Montrer que A, P et Q sont alignés.

Exercice 11
Soit ABC un triangle acutangle, L, M, N les milieux de $[BC], [AB], [AC]$ respectivement. (LM) recoupe le cercle Γ_1 de diamètre $[AB]$ au dessus de la droite (BC) en U et (LN) recoupe le cercle Γ_2 de diamètre $[AC]$ au dessus de la droite (BC) en V. On note X l'intersection des tangentes en U à Γ_1 et en V à Γ_2. Montrer que (XA) est perpendiculaire à (BC).

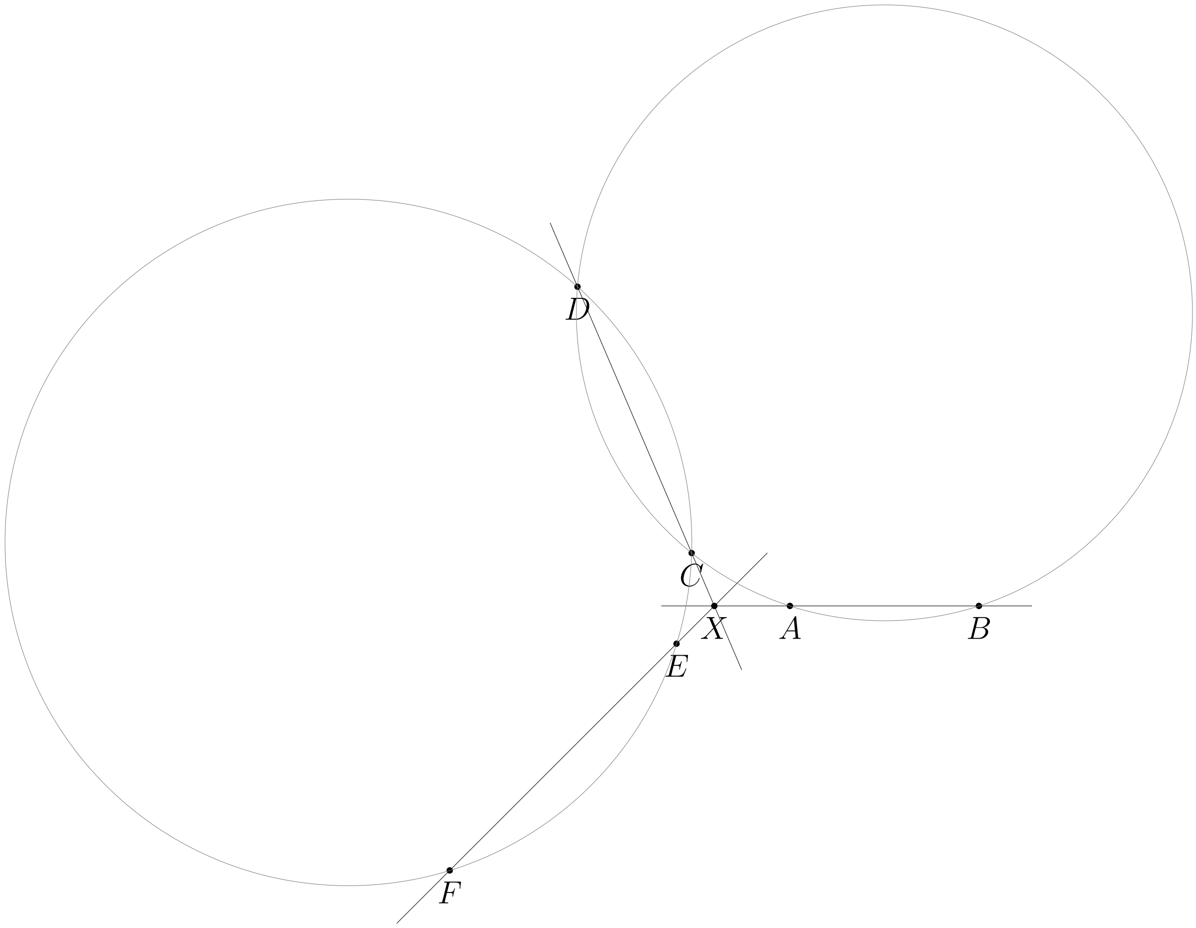
Exercice 12
Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H, ainsi que E, F les pieds de hauteur issus de B, C et M le milieu de $[BC]$. La droite (MH) recoupe le cercle circonscrit à ABC en un point Q au dessus de la droite (BC). Montrer que les droites (AQ) et (EF) se coupent sur (BC).

Exercice 13
Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) en un point P. Soient E et F les pieds des hauteurs issues des sommets B et C respectivement. Soit Q le point d'intersection de la droite (EF) avec la parallèle à la droite (BC) passant par le point A. Soit M le milieu du segment $[BC]$.
Montrer que les droites (AM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 14 (P2 BMO 2015)
Soit ABC un triangle de centre et soit I le centre de son cercle inscrit. Le cercle circonscrit à ABC est recoupé par (AI) en D, par (BI) en E et par (CI) en F. La droite passant par I parallèle à (BC) (resp $(AC), (AB)$) intersecte (EF) (resp $(DF), (DE)$) en un point K (resp L, M). Montrer que K, L, M sont alignés.

Exercice 15 (P1 Iran TST 2011)
Dans un triangle acutangle ABC où $AC > AB$, M est le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. K est le milieu de $[ME]$, L est le milieu de $[MF]$ et T est un point de la droite (KL) tel que $(TA)//(BC)$. Montrer que $TA = TM$.

Solution de l'exercice 1

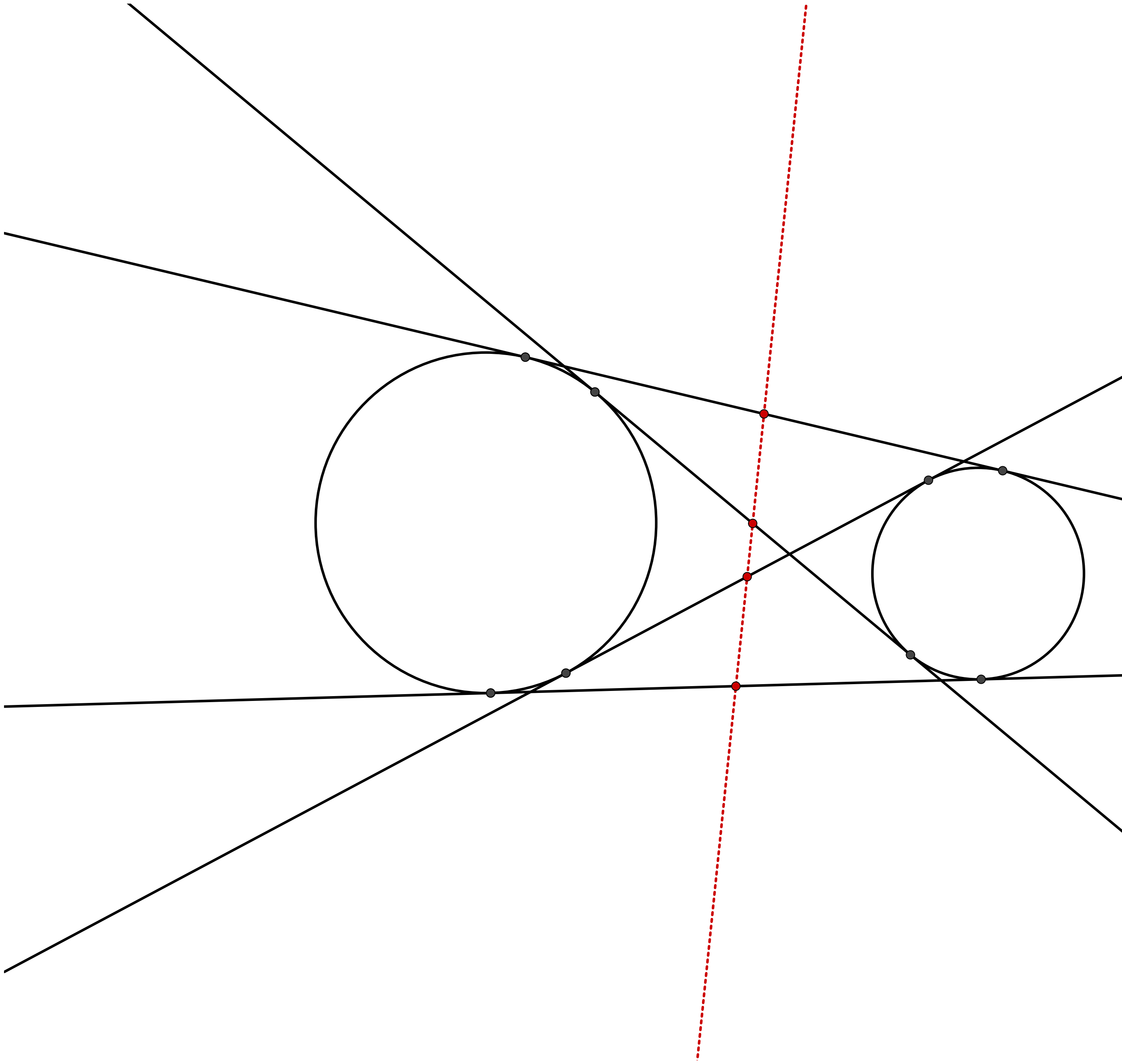


Appelons X le point d'intersection des droites $(AB), (CD)$ et (EF). On calcule les puissances de X par rapport aux cercles circonscrits à $ABCD$ et $CDEF$. On obtient respectivement les égalités

$$\begin{cases} XA \cdot XB = XC \cdot XD \\ XC \cdot XD = XE \cdot XF \end{cases} .$$

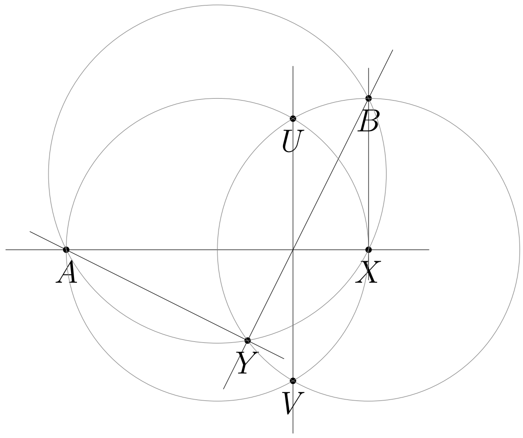
En combinant ces égalités, on trouve $XA \cdot XB = XE \cdot XF$, et donc par la réciproque de puissance d'un point, les points $ABEF$ sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2



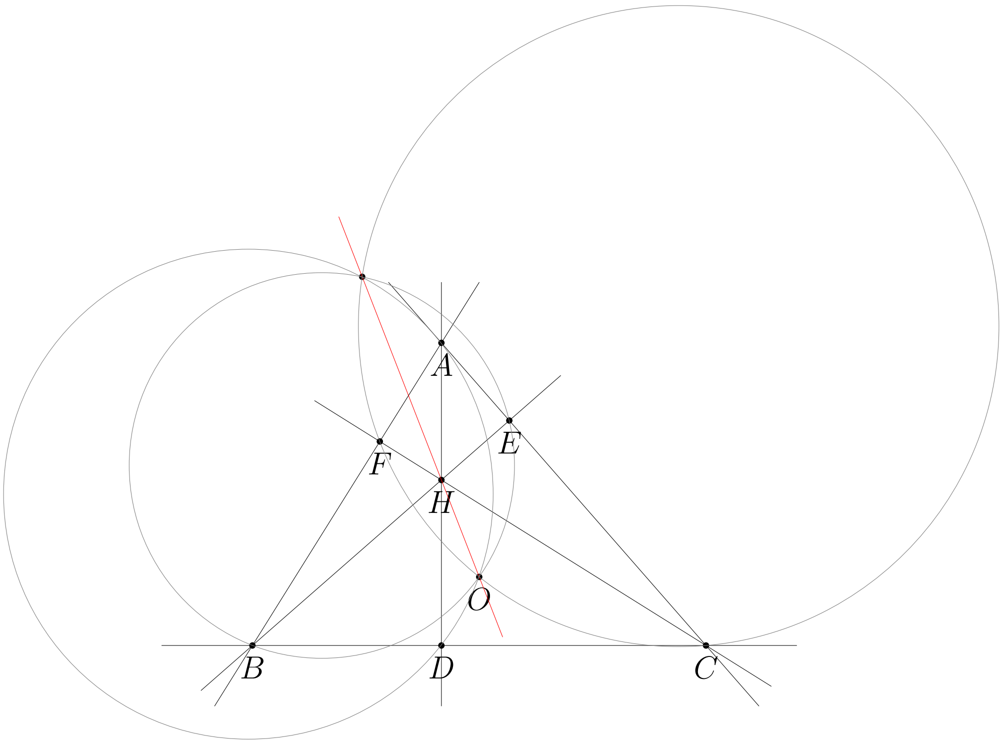
Tous les points ont la même puissance par rapport à chaque cercle. Ils sont donc tous sur l'axe radical des deux cercles et sont de la sorte alignés.

Solution de l'exercice 3



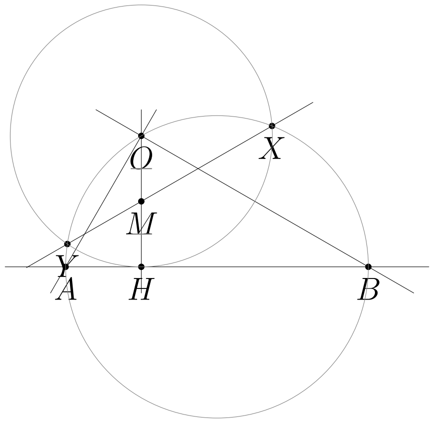
Comme $\widehat{AXB} = \widehat{AYB} = 90$, $AXYB$ est cyclique. Les trois droites mentionnées sont donc les axes radicaux des cercles $(AXYB), C_1, C_2$ et sont donc concourantes (ou parallèles, c'est-à-dire concourantes sur la droite à l'infini).

Solution de l'exercice 4



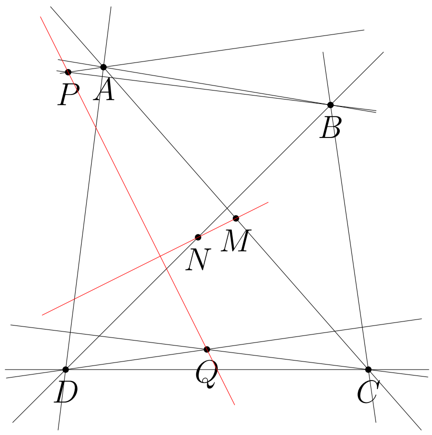
On introduit H l'orthocentre de ABC et on montre facilement qu'il est sur l'axe radical des trois cercles en calculant sa puissance par rapport à chaque cercle puis en utilisant entre autres $EADB$ cyclique. Les cercles sont donc coaxiaux (leurs axes radicaux sont confondus) et ils se rencontrent en un point autre que O.

Solution de l'exercice 5



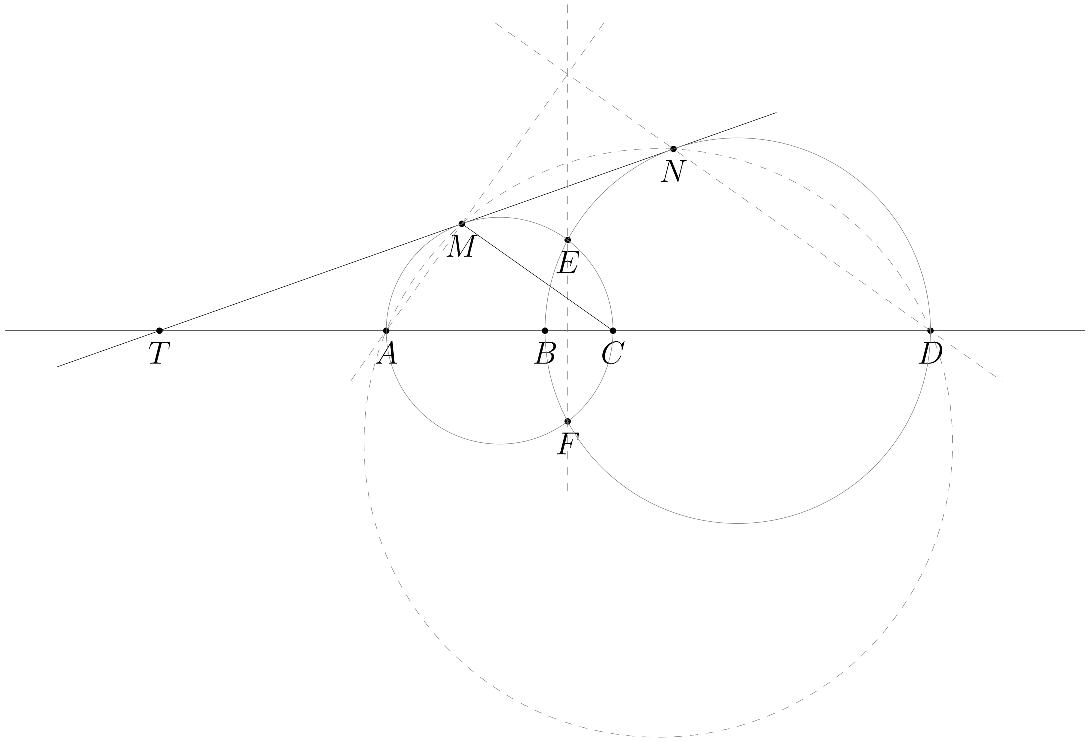
Soit M le milieu de $[OH]$. On nomme D l'intersection, autre que H, de (OH) avec le cercle de centre O et de rayon OH. On nomme C l'intersection, autre que O, de (OH) et du cercle de diamètre AB. Il faut montrer que M est sur l'axe radical des deux cercles. Pour cela, montrons que M a la même puissance par rapport aux deux cercles. On note $d = MO$. On a $MH = d$ et $OH = 2d$, mais on a aussi $HC = HO = 2d$ par symétrie d'axe (AB) et $OD = OM = 2d$ par symétrie de centre O. On a donc $MO \cdot MC = d \cdot 3d = 3d^2$ et $MH \cdot MD = d \cdot 3d = 3d^2$, d'où $MO \cdot MC = MH \cdot MD$, ce qui conclut par puissance du point M.

Solution de l'exercice 6



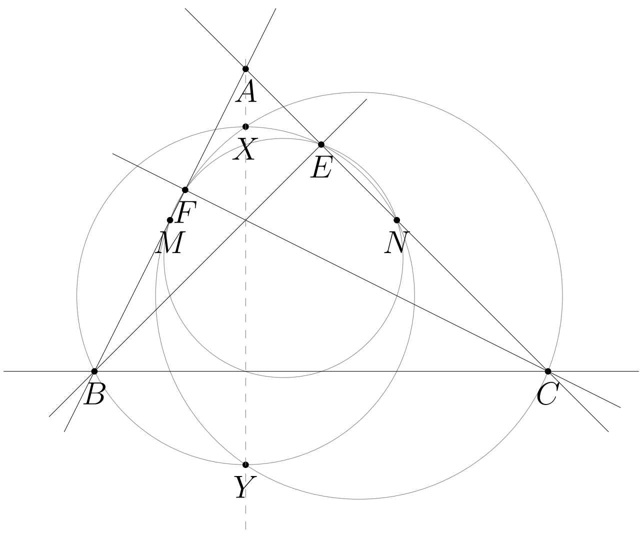
Considérons les cercles Ω_1 et Ω_2 de centre M et N et de rayons respectifs MA et NB. Montrons que P est sur l'axe radical des deux cercles. Soit X et Y les pieds des hauteurs issus de A et D respectivement sur $[CD]$ et $[AB]$. L'angle droit donne de façon immédiate que X appartient à Ω_1 et que Y appartient à Ω_2. Comme $XYAD$ est cyclique, P à la même puissance par rapport aux deux cercles et il est sur l'axe radical. De la même manière on montre que Q est sur l'axe radical de Ω_1 et Ω_2. L'axe radical de deux cercles étant perpendiculaire à la droite qui relie leurs centres, on peut conclure.

Solution de l'exercice 7



La concourance revient à montrer que $AMND$ est cyclique par théorème du centre radical. De plus, par homothétie, on a (MC) parallèle à (ND). On conclut avec le théorème de l'angle inscrit car $\widehat{TMA} = \widehat{MCA} = \widehat{NDA}$.

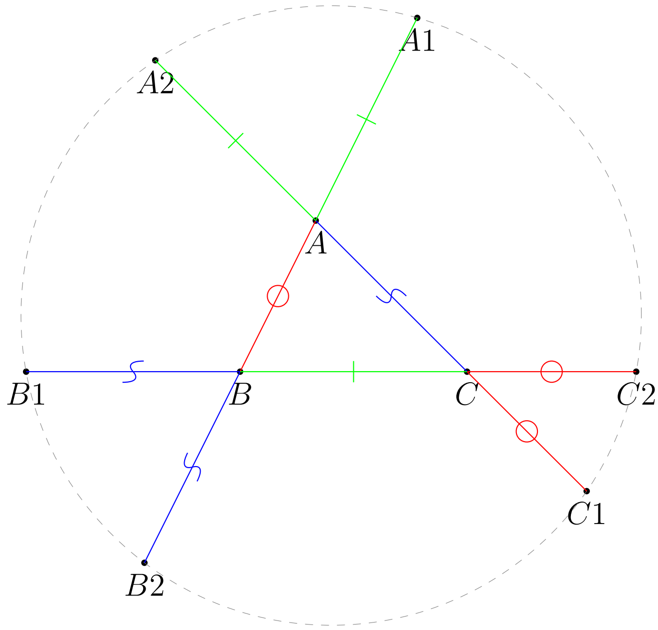
Solution de l'exercice 8



Soient E, F respectivement les pieds de hauteurs issues de B et C dans ABC. Alors E, F, M, N sont cocycliques sur le cercle d'Euler (on peut par exemple le montrer par simple chasse aux angles en utilisant $(MN)//(BC)$ et $BCEF$ cyclique). De plus E et F sont clairement sur les cercles de diamètre $[BN]$ et $[CM]$ respectivement. Ainsi A est le centre radical de $(FEMN), (MFXY), (NEXY)$, et donc A est sur (XY) qui est l'axe radical de $(MFXY)$ et

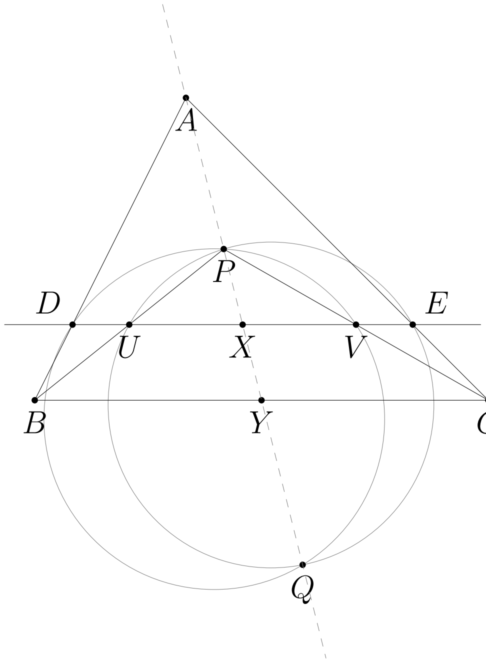
$(NEXY)$. De plus cet axe radical est perpendiculaire à la droite joignant leurs centres, c'est-à-dire (MN), et donc est perpendiculaire à (BC). (XY) est donc la hauteur issue de A dans ABC.

Solution de l'exercice 9



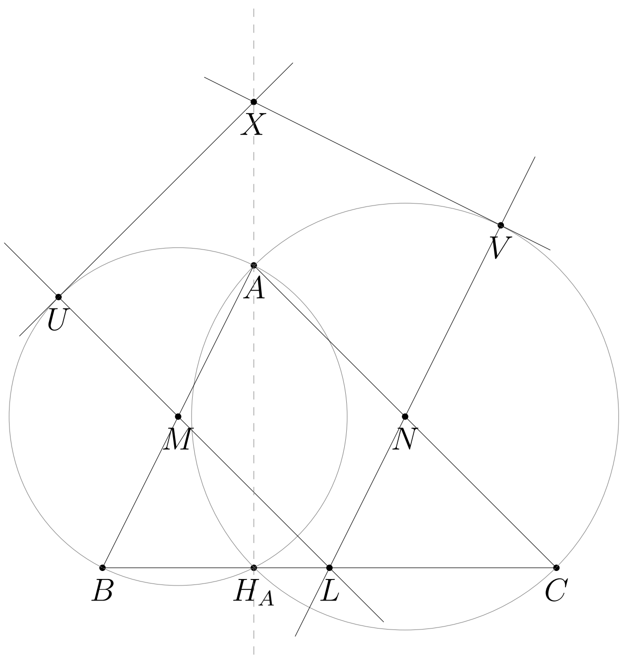
Tout d'abord, montrons que $A_1A_2B_2C_1, B_1B_2C_2A_1etC_1C_2A_2B_1$ sont cycliques. Posons $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On a $AA_1AB_2 = a(c+b)$ et $AA_2AC_1 = a(b+c)$, d'où $AA_1AB_2 = AA_2AC_1$. Donc $A_1A_2B_2C_1$ est cyclique, de même que $B_1B_2C_2A_1$ et $C_1C_2A_2B_1$. Il suffit donc de montrer que les cercles circonscrits de ces quadrilatères sont confondus pour conclure. Supposons qu'ils sont disjoints. Leurs axes radicaux sont alors (A_1B_2), (B_1C_2) et (C_1A_2). Ce sont les côtés du triangle ABC. Ceci est une contradiction car les axes radicaux doivent être concourants.

Solution de l'exercice 10



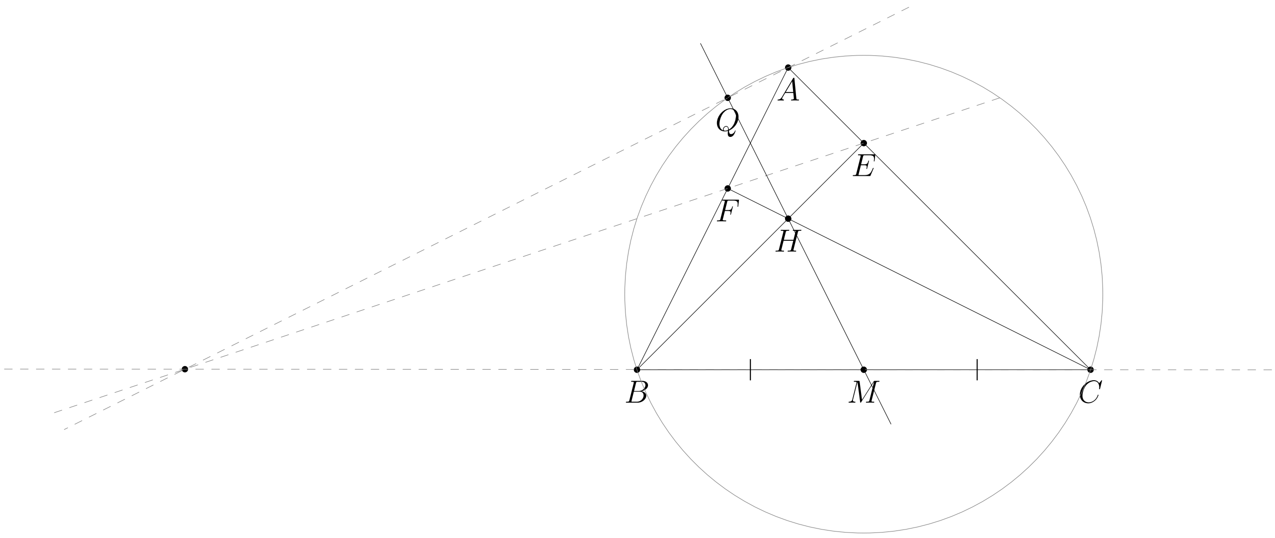
Soient X, Y les intersections de (AP) avec $(DE), (BC)$ respectivement. On a alors par Thalès $\frac{XU}{XV} = \frac{YB}{YC} = \frac{XD}{XE}$, d'où $XU \cdot XE = XV \cdot XD$, et ainsi X appartient à l'axe radical de (PEU) et (PDV), qui est donc (PX) et donc A est aussi dessus, c'est-à-dire A est sur (PQ) comme voulu.

Solution de l'exercice 11



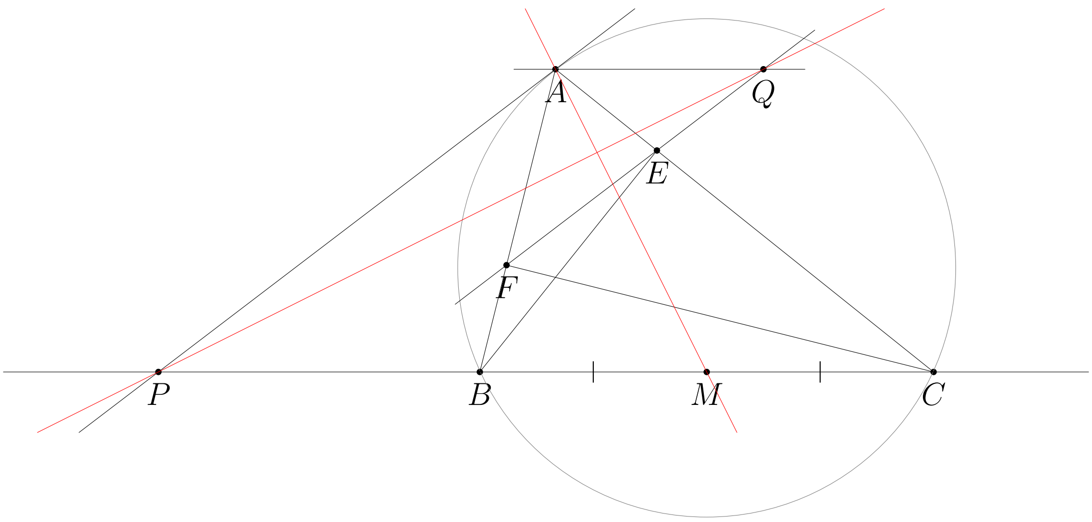
Puisque Γ_1 et Γ_2 passent par H_A le pied de hauteur issue de A dans ABC, il suffit de montrer que X est sur leur axe radical, c'est-à-dire $XU = XV$. On remarque alors $LM = NA = NV$ et $LN = MA = MU$ donc $LU = LV$. De plus $\widehat{LMX} = 90 = \widehat{LNX}$, ce qui nous donne bien l'égalité voulue.

Solution de l'exercice 12



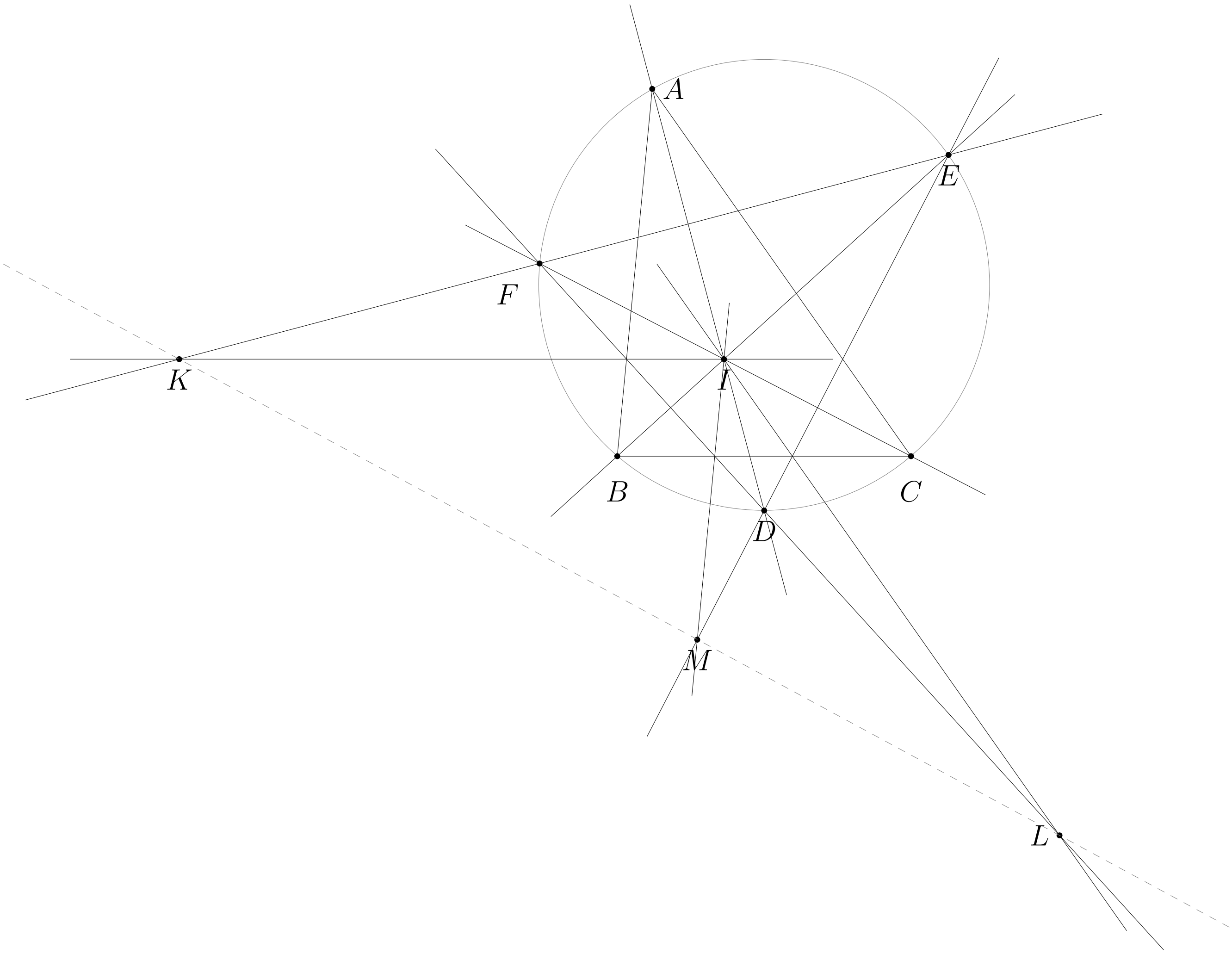
On note D le pied de hauteur issue de A, U le symétrique de H par (BC) et V le symétrique de H par M. On peut montrer par chasse aux angles que U et V sont sur (ABC). Ainsi on a $\widehat{HQA} = \widehat{VQA} = \widehat{VUA} = \widehat{MDA} = 90$ et donc $AHEFQ$ cyclique par angle inscrit. On peut alors conclure avec le théorème du centre radical sur $(AQEF)$,$(EFBC)$ et (ABC).

Solution de l'exercice 13



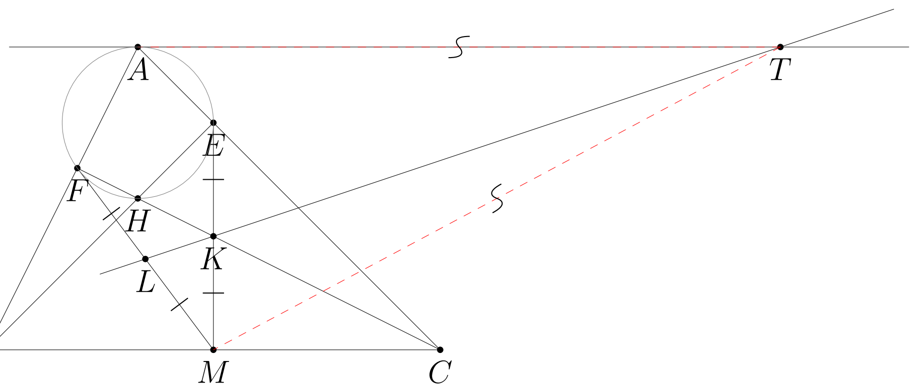
Par puissance d'un point on a $PA^2 = PB \cdot PC$ donc P est sur l'axe radical d du cercle point A et de $(BCFE)$. On a $\widehat{QAE} = \widehat{QAC} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE}$ par angle inscrit donc (AEF) est tangent à (QA) et donc par puissance d'un point, $QA^2 = QE \cdot QF$ et donc Q est aussi sur d. Puisque M et A sont les centres des cercles mentionnés, on obtient la relation voulue.

Solution de l'exercice 14



Par angle inscrit puis parallélisme on a $\widehat{FEI} = \widehat{FCB} = \widehat{FEI} = \widehat{FIK}$ et donc (KI) est tangente à (FIE) : cela signifie $KI^2 = KE \cdot KF$ et donc K est sur l'axe radical de (ABC) et du cercle point (I). De même, L et M sont également sur cet axe et on en déduit l'alignement voulu.

Solution de l'exercice 15



On note H l'orthocentre de ABC. Remarquons que (MF) et (ME) sont tangentes au cercle $(AEFH)$ de diamètre $[AH]$ (on peut le voir avec une chasse aux angles par exemple : $\widehat{HAF} =$

$\widehat{FCM} = \widehat{MFH}$ car M est le centre de $(BFEC)$). Ainsi les points K et L, qui sont les milieux des segments $[ME]$ et $[MF]$ respectivement, ont la même puissance par rapport au cercle de diamètre $[AH]$ et au cercle-point M : on en déduit que l'axe radical de ces cercles est (KL) et donc que T a également la même puissance par rapport aux deux cercles. Clairement (TA) est perpendiculaire à (AH) et donc (TA) est tangente au cercle de diamètre $[AH]$: on en déduit $TA^2 = TM^2$, c'est-à-dire $TA = TM$ ce qui est l'égalité voulue.

6 Invariants et monovariants (Gaëtan et Hadriel)

Exercice 1
P'tit Rémi a un carré 100 × 100 d'ampoules. Pour une ligne ou une colonne donnée, il peut changer l'état de toutes les ampoules. Initialement, il n'y a qu'une ampoule qui est allumée. Peut-il se retrouver avec toutes les ampoules éteintes à la fin ?

Exercice 2
Les nombres entiers de 1 à 2024 sont écrits au tableau. À chaque étape, Hadriel choisit deux des nombres écrits au tableau, les efface et réécrit sur le tableau la valeur absolue de leur différence. Montrer que le dernier nombre que Hadriel écrit au tableau est pair.

Exercice 3
On dispose de $2n$ points distincts dans le plan. Montrer qu'il existe une droite telle qu'il y ait exactement n points de chaque côté de la droite.

Exercice 4
Gaëtan écrit les nombres de 1 à 42 dans l'ordre. À chaque étape, Gaëtan peut permuter deux entiers adjacents. Montrer que Gaëtan ne peut pas retrouver la configuration initiale après un nombre impair d'étapes.

Exercice 5
Trois fourmis se déplacent sur le plan cartésien de la manière suivante. Chaque minute, deux des fourmis vont rester immobiles, et la troisième fourmi se déplacera sur une droite parallèle à la droite formée par ses deux comparses ; elle peut bien sûr rester immobile elle aussi si cela lui chante. Originellement, les trois fourmis se situent en trois points de coordonnées $(0, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$. Est-il possible que, au bout d'un certain temps, nos trois fourmis se retrouvent en les points de coordonnées $(-1, 0)$, $(0, 1)$ et $(1, 0)$?

Exercice 6
Soit A un sous-ensemble non vide de $\mathbb{N}^*$. On définit $\operatorname{gcd} A$ comme le plus grand entier strictement positif qui divise chaque élément de A. Montrer que $\operatorname{gcd} A$ est une combinaison linéaire finie à coefficients dans $\mathbb{Z}$ d'éléments de A.

Exercice 7
Sur une île ténébreuse vivent 34 lutins maléfiques. Au début, il y en a 7 bleus, 10 rouges et 17 jaunes. Quand deux lutins de couleurs différentes se rencontrent, ils décident de jouer un tour à leurs congénères, et adoptent simultanément la troisième couleur. Un jour, P'tit Rémi arrive sur l'île et observe que tous les lutins sont de la même couleur. Quelle est cette couleur ?

Exercice 8
Sur un tableau, on écrit n fois le chiffre 1. Une opération consiste à choisir deux nombres a et b écrits au tableau, à les effacer et à écrire $\frac{a+b}{4}$ à la place. Montrer que le nombre écrit au tableau au bout de $n-1$ étapes est supérieur ou égal à $\frac{1}{n}$.

Exercice 9
Sur une ligne, on écrit 2018 entiers naturels. Ensuite, pour chaque ligne, on écrit en-dessous de chaque entier le nombre de fois qu'il apparaît dans la ligne, créant ainsi une nouvelle ligne

en-dessous de la première, sur laquelle on réapplique le processus. Montrer qu'au bout d'un certain temps toutes les lignes qu'on écrit deviennent identiques.

Exercice 10

Exercice 11
On colorie n points du plan en rouge et n autres en bleu de telle sorte que ces $2n$ points ne soient pas 3 à 3 alignés. Est-il toujours possible de tracer n segments reliant un point rouge à un point bleu, chaque point étant utilisé une seule fois, de manière à ce que deux segments ainsi tracés ne s'intersectent jamais ?

Exercice 12
La banque de l'île de Koridaï produit des pièces en aluminium (A) et en bronze (B). Morshu arrange $2n$ pièces, n de chaque type, en ligne dans un ordre arbitraire. Puis il fixe k entier entre 1 et $2n$ et il applique le processus suivant : il identifie la plus longue séquence de pièces consécutives de même type qui contient la k-ième pièce en partant de la gauche, et déplace toutes les pièces de cette séquence à gauche de la ligne. Par exemple, avec $n = 4$, $k = 4$, on peut avoir la suite d'opérations

$$AABBBABA \longrightarrow BBBAAABA \longrightarrow AAABBBBA \longrightarrow BBBBAAAA \longrightarrow \ldots$$

Trouver toutes les paires (n, k) avec $1 \leq k \leq 2n$ telles que pour toute configuration initiale, les n pièces de gauche sont de même type après un nombre fini d'étapes.

Exercice 13
2009 cartes sont rangées côte à côte sur une table. Chaque carte a une face noire et une face blanche. Au début, chaque carte a sa face blanche visible. Hadriel et Gaëtan jouent au jeu suivant : chacun leur tour à commencer par Hadriel, ils choisissent un bloc de 50 cartes côte à côte dont la carte la plus à gauche est blanche et ils retournent chaque carte du bloc.
a) Le jeu se termine-t-il nécessairement ?
b) Existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

Solution de l'exercice 1
On remarque que la parité du nombre d'ampoules allumées est un invariant. Il y en a un nombre impair au début, et un nombre pair à la fin. Ce n'est donc pas possible.

Solution de l'exercice 2
On observe que la parité de la somme des nombres écrits au tableau est un invariant. Elle est paire au début donc le dernier nombre est pair.

Solution de l'exercice 3
L'ensemble des directions des droites formées par 2 points de l'ensemble est fini : ainsi il existe une direction n'étant parallèle à aucune de ces droites. On fait rouler continuement au travers du plan une droite de cette direction de manière à ce qu'elle conserve sa direction. On choisit le point de départ et le point d'arrivée de sorte à ce que tous les points soient contenus entre la droite de départ et la droite d'arrivée. On tient compte du nombre de points croisés pendant le roulage : il croît de 0 à $2n$ en augmentant de 1 en 1. Ainsi à un moment il vaut n : la droite à cet instant vérifie la condition voulue.

Solution de l'exercice 4
On se place à un instant quelconque. On note $x_1, ..., x_{42}$ les nombres dans l'ordre actuel. On appelle le nombre de croisements le nombre de couples $(i, j) \in [1, 42]^2$ tels que $i < j$ et $x_i > x_j$. On remarque que lorsqu'on permute deux nombres, le nombre de croisements augemente ou diminue de 1. Or à l'instant 0, le nombre de croisements vaut 0. Ainsi le nombre de croisements est pair aux instants pairs et impair aux instants impairs. En particulier, il ne peut pas valoir 0 lors des instants impairs, et donc Gaëtan ne peut pas retrouver la configuration initiale après un nombre impair d'étapes.

Solution de l'exercice 5
On vérifie que l'aire du triangle formé par les fourmis est invariante par ces transformations (on utilise la formule base · hauteur). L'aire d'origine vaut $1/2$ et l'aire finale 1, c'est contradictoire.

Solution de l'exercice 6
Traitons d'abord le cas où A est fini. Si $|A| = 1$ c'est évident. On procède ensuite par récurrence. On prend $|A| = k + 1$ en supposant le résultat vrai pour k. On pose $A = \{a_1, ..., a_{k+1}\}$. On vérifie facilement que $\gcd(A) = \gcd(\gcd(a_1, ..., a_k), a_{k+1})$. On en déduit par Bézout que $\gcd(A)$ est une combinaison linéaire entière de $\gcd(a_1, ..., a_k)$ et a_{k+1}. Par hypothèse de récurrence on en déduit le résultat voulu.
Pour A infini, on pose (a_n) une suite répertoriant les éléments de A et pour tout k on pose $A_k = \gcd(a_1, ..., a_k)$. Alors on voit que $(\gcd(A_k))$ est une suite croissante pour la relation de divisibilité et que tous ses termes divisent $\gcd(A)$. On a une suite d'entiers bornée et croissante donc elle est stationnaire à une station s qui divise $\gcd(A)$. Si $s < \gcd(A)$ alors il existerait a_i non divisible par s donc s ne diviserait pas $\gcd A_i$, c'est contradictoire. Ainsi $s = \gcd A$ et donc il existe un sous-ensemble de A fini B tel que $\gcd B = \gcd A$. On en déduit le résultat grâce au cas fini.

Solution de l'exercice 7
On note B, R, J le nombre de lutinsnde couleur bleu, rouge et jaune respectivement. À chaque étape un de ces trois nombres augmente de 2 et les deux autres diminuent de 1. Modulo 3 , ils augmentent donc tous de 1. Lorsqu'il n'y a plus qu'une couleur, les tous deux couleurs disparues donnent une valeur de 0 modulo 3. Elles avaient donc initialement la même valeur modulo 3 ce qui signifie que la couleur restante ne peut qu'être jaune compte tenu des valeurs de départ. Coup de chance pour P'tit Rémi, c'est sa couleur préférée.

Solution de l'exercice 8
Considérons un nombre a en dehors de la première ligne. Il représente le nombre d'occurrences d'un des nombres de la ligne du dessus. Ce dernier est donc présent a fois dans la ligne du dessus, et a est présent au moins a fois dans sa ligne. Dès lors, si l'on regarde une colonne, tous les nombres à l'exception du premier sont triés par ordre croissant. Comme de plus la somme des nombres d'une ligne autre que la première fait 2018, toutes les lignes deviennent identiques au bout d'un certain temps (sinon, la somme de chaque ligne augmenterait de 1 autant de fois que voulu, tout en restant inférieure à 2018).

Solution de l'exercice 9
On utilise l'IAH : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geq \frac{4}{a+b}$. Dès lors, la somme des inverses des nombres écrits au tableau est décroissante lorsqu'on applique une transformation. Elle vaut n dans la position initiale, donc dans la position finale elle est inférieure à n : le dernier nombre écrit est dès lors supérieur à $\frac{1}{n}$.

Solution de l'exercice 10

a) Le nombre de bonbons est positif, n'augmente jamais et décroit strictement lorsque Gaëtan vole un bonbon. Ainsi au bout d'un moment Gaëtan ne vole plus jamais de bonbon : on étudie la situation à partir de ce moment. Si on note $a_1, \ldots, a_n$ le nombre de bonbons des enfants $1, \ldots, n$ respectivement, après une minute celui-ci devient $(\frac{a_1+a_2}{2}, \ldots, \frac{a_n+a_1}{2})$. Vu qu'on remplace par des moyennes arithmétiques, n'importe quelle "inégalité des moyennes" devrait donner un monovariant intéressant. Le plus naturel serait de s'intéresser au maximum, mais il faut prendre en compte le fait qu'on peut avoir plusieurs a_i égaux au maximum. Ici, on va plutôt utiliser l'IAG. On a $\prod \frac{a_i+a_{i+1}}{2} \geq \prod \sqrt{a_i a_{i+1}} = \prod a_i$ Le produit des a_i augmente donc chaque minute. Or ce produit reste entier et est borné car le nombre de bonbons est fixe : ainsi au bout d'un moment il n'augmente plus et alors on a cas d'égalité dans chaque IAG ce qui signifie que tous les a_i sont égaux.

b) On remarque que la quantité $\max a_i$ décroit au cours des transformations. Ainsi cette quantité est bornée par sa valeur initiale que l'on va appeler M. Cela signifie en particulier que le nombre de bonbons total est majoré par nM (chaque enfant a au plus M bonbons à chaque étape). Ainsi vient un moment à partir duquel Gaëtan ne donne plus de bonbons. La situation est alors analogue à celle étudiée en question a).

Solution de l'exercice 11

Il y a un nombre fini de configurations où les points sont reliés par paires rouge-bleu. Parmi celles-ci, on en considère une qui minimise la somme des longueurs des segments tracés. Si on avait un croisement, on remarque grâce à l'inégalité triangulaire que remplacer les segments qui se croisent $[R_1B_1]$ et $[R_2B_2]$ par $[R_1B_2]$ et $[R_2B_1]$ fait décroître strictement la somme des longueurs, absurde. Notre configuration est donc sans croisement, comme voulue.

Solution de l'exercice 12

Source : IMO 2021 P1

Solution de l'exercice 13

Source : IMOSL 2009 C1

7 Combinatoire : TD pot pourri (Raphaël)

En stand-by...

8 Géométrie : Comment et pourquoi faire de belles figures (Aurélien et Melvil)

Comment et pourquoi faire de belles figures ?

Pour résoudre un problème de géométrie, il est crucial de réaliser une belle figure. Outre être un support pour votre réflexion, notamment une chasse aux angles, une belle figure permet de remarquer des propriétés des objets de l'énoncé. Faire une telle conjecture, si cette propriété est effectivement vraie, est souvent une avancée décisive dans un problème, car cela permet de découper le problème en deux sous-problèmes, prouver la conjecture et conclure à partir de celle-ci, plus simples. Pour permettre de bien faire des conjecture, la figure doit satisfaire plusieurs critères.

1. Les droites et segments doivent être tracées à la règle, les cercles au compas.
2. La figure doit être grande, sans rature ni traits de constructions ou traits inutiles visibles
3. La conclusion de l'exercice doit être apparente. S'il faut montrer que trois points sont alignés, il faut tracer cette droite (de préférence en pointillé). S'il faut montrer que 4 points sont cocycliques, il faut tracer ce cercle.
4. Pas de fausse conjecture : une figure où des points ont l'air alignés sans qu'ils le soient vraiment, ou où des points sont trop proches est une mauvaise figure
5. le triangle de base ne doit pas être isocèle ou presque isocèle, et surtout pas en A. Pour cela, il est conseillé de toujours tracer le même triangle.
6. Commencer par tracer le cercle circonscrit, puis placer des points dessus.
7. Pour tracer vos bissectrices et les centres des cercles inscrits ou exinscrits, le plus efficace est d'utiliser les propriétés du pôle sud (cf cours de la veille)
8. Ne lésinez pas sur la qualité de vos cercles et tangentes. En tant qu'objets difficiles à tracer, il est possible d'être tenté de les tracer à main levé, celà est à éviter lorsque vous êtes en train de réaliser votre figure au propre.

Quelques explications sur ces points :

1. Ceci est nécessaire pour la suite
2. Éviter de surcharger la figure permet de se concentrer sur ce qui est vraiment utile.
3. Plusieurs fonctions :
   — Vérifier qu'on a bien lu et bien compris l'énoncé
   — Vérifier que notre figure n'est pas trop fausse
   — Remarquer si un $4^{\text{ième}}$ point se trouve sur cette droite ou si un $5^{\text{ième}}$ point se trouve sur ce cercle. C'est une conjecture particulièrement intéressante (voir exercices pour comprendre pourquoi)

   On conseille de tracer une droite qui passe par trois points dont on veut montrer qu'ils sont alignés en pointillés car lors d'une chasse aux angles, le risque d'utiliser l'alignement pour le prouver est grand.
4. Si trois points ont l'air alignés, on risque d'utiliser cet fait par inadvertance, ou d'essayer de le prouver alors que c'est faux. Pire encore, si plusieurs points sont confondus ou même juste trop proches, cela peut faire rater une chasse aux angles si il n'est plus clairement visible à quelle droite commencent et s'arrêtent les angles.

5. Un triangle isocèle, surtout en le sommet particulier (généralement A, voir section sur la symétrie de définition) est la garantie que des fausses conjectures seront visibles sur la figure.
6. C'est beaucoup plus simple que de tracer des médiatrices et le cercle circonscrit après coup.
7. Celà vous fera économiser du temps et en limitant les étapes de construction, vous permettra d'être plus précis et d'avoir une figure plus propre.
8. Les tangentes en particuler sont souvent sources d'imprécisions, il est recommandé de les tracer à partir du centre du cercle.

Arguments de symétrie

Faire une belle figure est l'étape la plus importante pour faire de bonnes conjectures, mais un autre argument aide beaucoup : la symétrie dans les définitions.

Que veut dire ce terme "symétrie dans les définitions". On n'entend pas par là une vraie symétrie axiale ou centrale, géométrique, mais simplement que des points sont définis de manière identique. Dans deux nombreux problèmes, entre les trois points du triangle ABC, le sommet A sera particulier, mais les sommets B et C seront en fait interchangeables. En échangeant B et C, certains points vont rester identiques (par exemple le milieu de BC, le pied de la hauteur issue de A, le centre du cercle inscrit, etc.) et d'autres points vont être échangés (par exemple, le pied de la hauteur issue de B est échangé avec le pied de la hauteur issue de A). Il est très utile de reconnaître quand un énoncé est symétrique car si les hypothèses et définitions de l'énoncé ont une symétrie, alors les résultats qu'on peut prouver à partir de là aussi. Cela permet d'éliminer facilement des conjectures. Par exemple, supposons que sur une figure comportant un triangle ABC, il me semble que le point B, le centre I du cercle inscrit à ABC, le milieu M du segment $[BC]$ ainsi que le pied de la hauteur issue de C semblent cocycliques. Si cette conjecture était vraie, alors, par l'argument de symétrie on déduit que C, I, M et le pied de la hauteur issue de B devraient aussi être cocycliques. Sans doute que ceci est visiblement faux sur ma figure. J'ai donc pu déduire très rapidement que ma conjecture était fausse et je n'ai pas perdu de temps à essayer de la prouver.

L'argument de symétrie est aussi à garder en tête quand vous prouvez un résultat intermédiaire, puisque s'il n'est pas symétrique, l'argument de symétrie vous dit qu'un autre résultat se prouve de manière identique et est donc également vrai.

TD

Exercice 1
(TST belge 2021) Soit ABC un triangle. Les tangentes au cercle (ABC) en B et C se coupent en T. La parallèle à (AB) passant par T coupe (AC) au point S. Montrer que $AS = BS$.

Exercice 2
(Serbia JBMO TST 2018 P1) Soit ABC un triangle et S l'intersection de la bissectrice issue de A avec le cercle cinconscrit à ABC. On prend M un point sur la droite (AS) et N le point du segment$[AB]$ tel que $(MN)//(BC)$. La droite (CM) rencontre le cercle circonscrit à ABC en L. Montrer que S, L et N sont alignés.

Exercice 3
Soit ABC un triangle dont on note D le pied de la hauteur issue de A, P et Q les milieux des hauteurs issues de B et C respectivement et M le milieu de $[BC]$. Montrer que D, P, Q et M sont cocycliques.

Exercice 4
Soit ABC un triangle et soit Γ son cercle circonscrit. Soit P le point d'intersection de la droite (BC) et de la tangente à Γ en A. Soit D et E les symétriques respectifs des points A et B par rapport à P. Soit alors ω_1 le cercle circonscrit au triangle EAC et soit ω_2 le cercle circonscrit au triangle APB. On note F le point d'intersection des cercles ω_1 et ω_2 autre que A, puis on note G le point d'intersection, autre que F, du cercle ω_1 avec la droite (BF). Démontrer que les droites (BC) et (EG) sont parallèles.

Exercice 5
Soit ABC un triangle dont D est un point sur la droite (BC) et I le centre inscrit. La médiatrice de $[AD]$ coupe les bissectrices issues de B et C en X et Y respectivement. Montrer que A, X, Y et I sont cocycliques.

Exercice 6
(G1 2019) Soit ABC un triangle. Γ est un cercle passant par A qui rencontre les segments $[AB]$ et $[AC]$ une deuxième fois en D et E respectivement, et intersecte le segment $[BC]$ en F et G. La tangente au cercle BDF en F et la tangente au cercle CEG à G se rencontre en T. Si les points A et T sont distincts. Montrer que la droite AT est parallèle à BC.

Exercice 7
(G2 JBMO 2023) Soit ABC un triangle avec $AB < AC$ et ω son cercle circonscrit. La tangente à ω en A intersecte la droite BC en D. Soit E un point du cercle ω tel que (BE) soit parallèle à (AD). (DE) intersecte le segment (AB) et ω en F en G. Le cercle circonscrit à BGF intersecte (BE) en N. La droite (NF) intersecte (AD) et (EA) en S et T respectivement. Montrer que $DGST$ est cocyclique.

Exercice 8
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$ dont on note O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre. La droite (OH) rencontre (AB) et (AC) en X et Y respectivement. Montrer que AXY est équilatéral.

Exercice 9
(P2 JBMO 2024) Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$. Le cercle exinscrit opposé à A est tangent aux droites (AB), (AC) et (BC) en trois points que l'on appelle respectivement D, E et F ; on note J le centre de ce cercle. Soit P un point situé sur le côté $[BC]$. Les cercles circonscrits aux triangles BDP et CEP se recoupent en un point que l'on note Q. Enfin, soit R le point de la droite (FJ) pour lequel (AR) est perpendiculaire à (FJ). Démontrer que les points P, Q et R sont alignés.
(Le cercle exinscrit du triangle ABC opposé au sommet A est le cercle tangent au segment $[BC]$, à la demi-droite $[AB)$ au-delà de B et à la demi-droite $[AC)$ au-delà de C.)

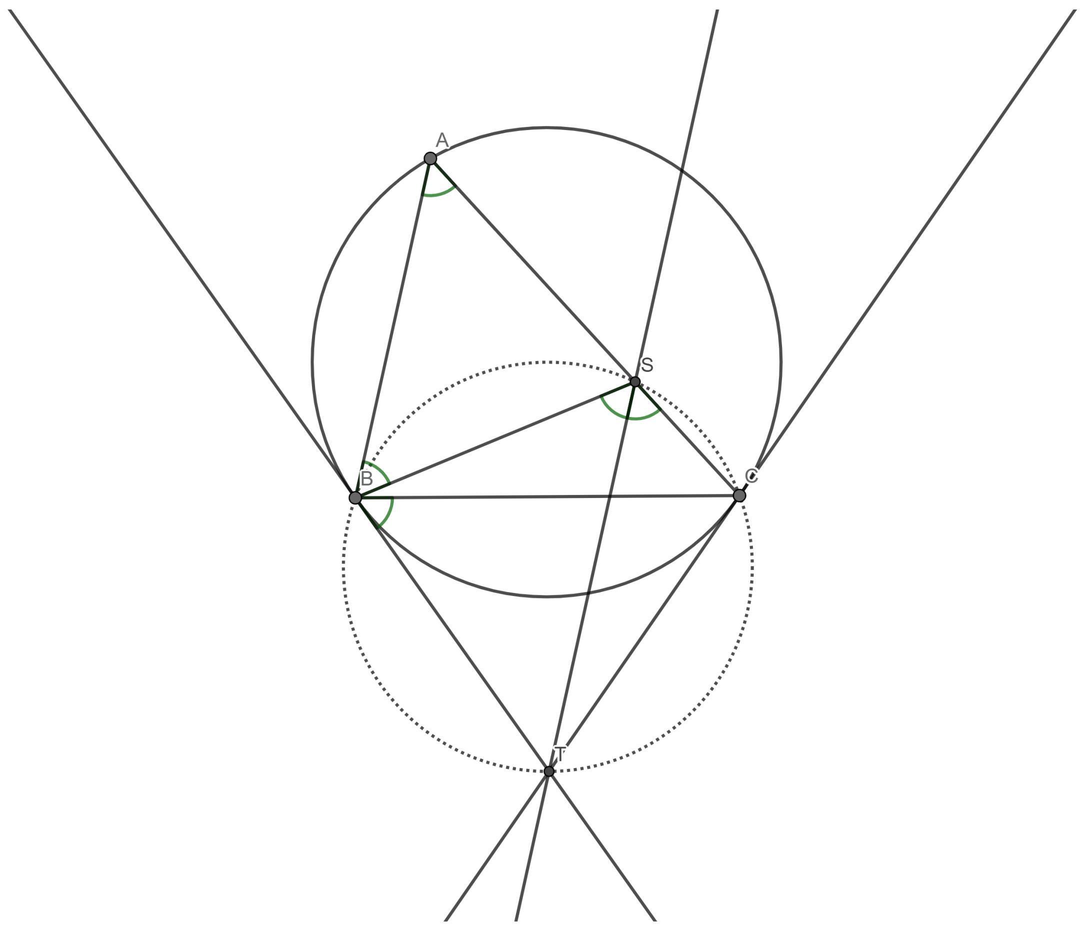
Exercice 10
(OFM 2024 P3 Junior) Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus et tel que $AB <$

AC, et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit D le point de $[AC]$ tel que $AB = AD$. On note E le point d'intersection de la droite (AB) avec la perpendiculaire à (AO) passant par D . Soit F le point d'intersection de la droite perpendiculaire à (OC) passant par C et de la droite parallèle à (AC) passant par E . Enfin, le point d'intersection des droites (CE) et (DF) est noté G . Prouver que (AG) et (BF) sont parallèles.

Exercice 11
(P1 KMO 2016) Soit ABC un triangle acutangle et D, E les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. On pose S et T les symétriques de E par rapport à AC et BC respectivement. On appelle X l'intersection ce (AC) avec (CST), et O le centre de ce même cercle. Montrer que (OX) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 12
(P4 IMO 2013) Soit ABC un triangle d'orthocentre H dont tous les angles sont aigus ; soit W un point du côté BC, compris strictement entre B et C. Les points M et N sont, respectivement, les pieds des hauteurs issues de B et de C. On note ω_1 le cercle circonscrit au triangle BWN et X le point de ω_1 tel que $[WX]$ en soit un diamètre. De la même façon, on note ω_2 le cercle circonscrit au triangle CWM et Y le point de ω_2 tel que $[WY]$ en soit un diamètre. Montrer que les points X, Y et H sont alignés.

Solution de l'exercice 1



Dans cet exercice il fallait remarquer que B, C, T et S sont cocycliques. En effet, puisque (TS) est parallèle à (AB), on a

$$\widehat{TSC} = \widehat{BAC}$$

et par angle tangentiel,

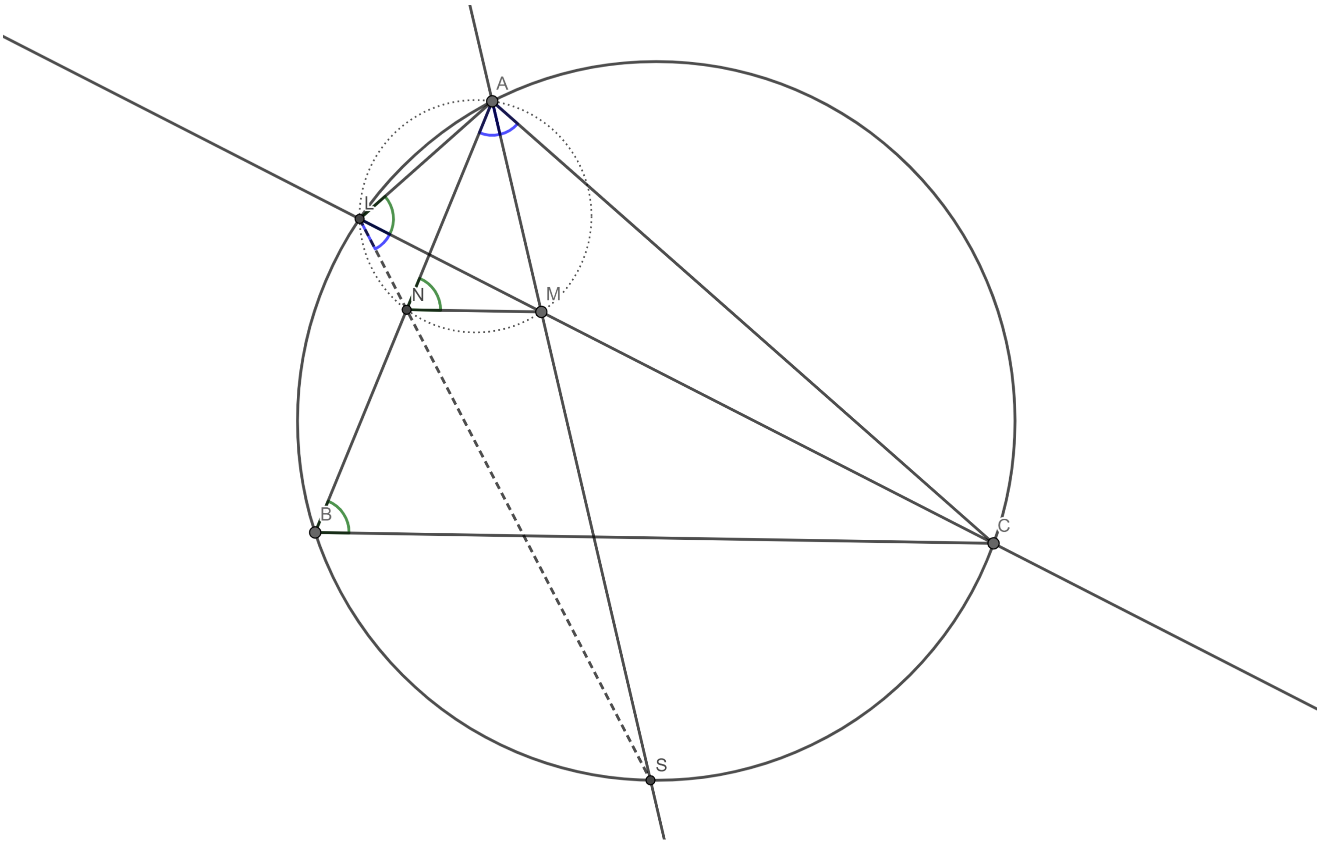
$$\widehat{BAC} = \widehat{TBC}$$

Fort de cette nouvelle information, on conclut par chasse aux angles :

$$\widehat{SAB} = \widehat{BST} = \widehat{BCT} = \widehat{BAS}$$

□

Solution de l'exercice 2



La clé de l'exercice est de remarquer que A, M, Net L sont cocyliques. En effet puisque (MN) est parallèle à BC on a,

$$\widehat{MNA} = \widehat{CBA}$$

et par angle inscrit,

$$\widehat{CBA} = \widehat{MLA}$$

Donc A, M, Net L sont cocyliques.
Pour montrer l'alignement des points S, L et N on va montrer que $\widehat{NLC} = \widehat{SLC}$.

Par angle inscrit, on a d'une part :

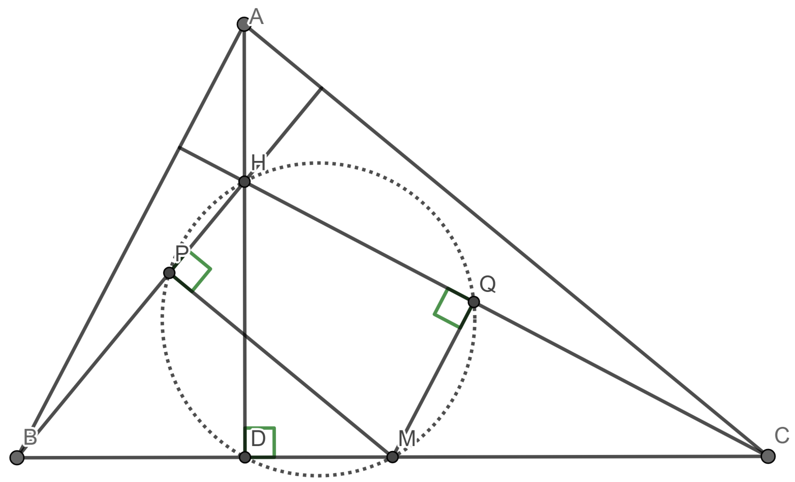
$$\widehat{NLC} = \widehat{NAM} = \widehat{BAS} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

D'autre part,

$$\widehat{SLC} = \widehat{SAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}$$

□

Solution de l'exercice 3



La bonne idée dans cet exercice était de penser à introduire l'orthocentre H qui a la gentille propriété d'être un cinquième point sur le cercle $PQMD$. Ainsi, pour montrer la cocylicité demandée, il est plus simple de montrer d'abord les cocyclicités $HQMD$ et $HMDP$.

Montrons que le quadrilatère $HQMD$ est ciclique.
On a d'une part, puisque H est l'orthocentre,

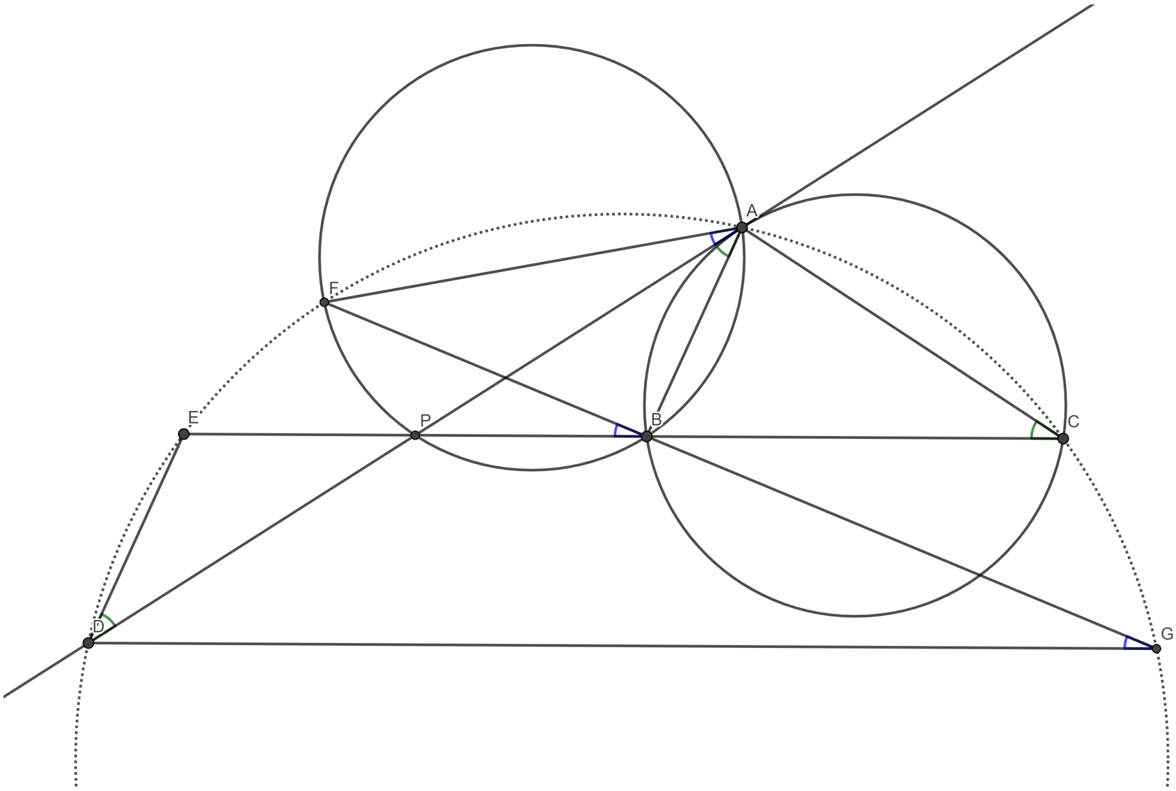
$$\widehat{MDH} = 90°$$

D'autre part, par homotéthie de rapport $\frac{1}{2}$,

$$\widehat{MQC} = 90°$$

Donc les points H, Q, M et D sont cocycliques.
La symétrie des rôles joués par B et C nous donne immédiatement que les points H, P, M et D sont cocycliques. Ainsi les 5 points H, P, Q, M et D sont sur un même cercle. □

Solution de l'exercice 4



Une bonne figure permet de conjecturer tout de suite que D appartient au cercle ω_1.

Pour le démontrer, une technique très souvent utile en géometrie est de remarquer que P étant un milieu de 2 segments, le quadrilatère, $ABDE$ est un parallélogramme. Ainsi on a,

$$\widehat{ADE} = \widehat{DAB}$$

et par angle tangentiel,

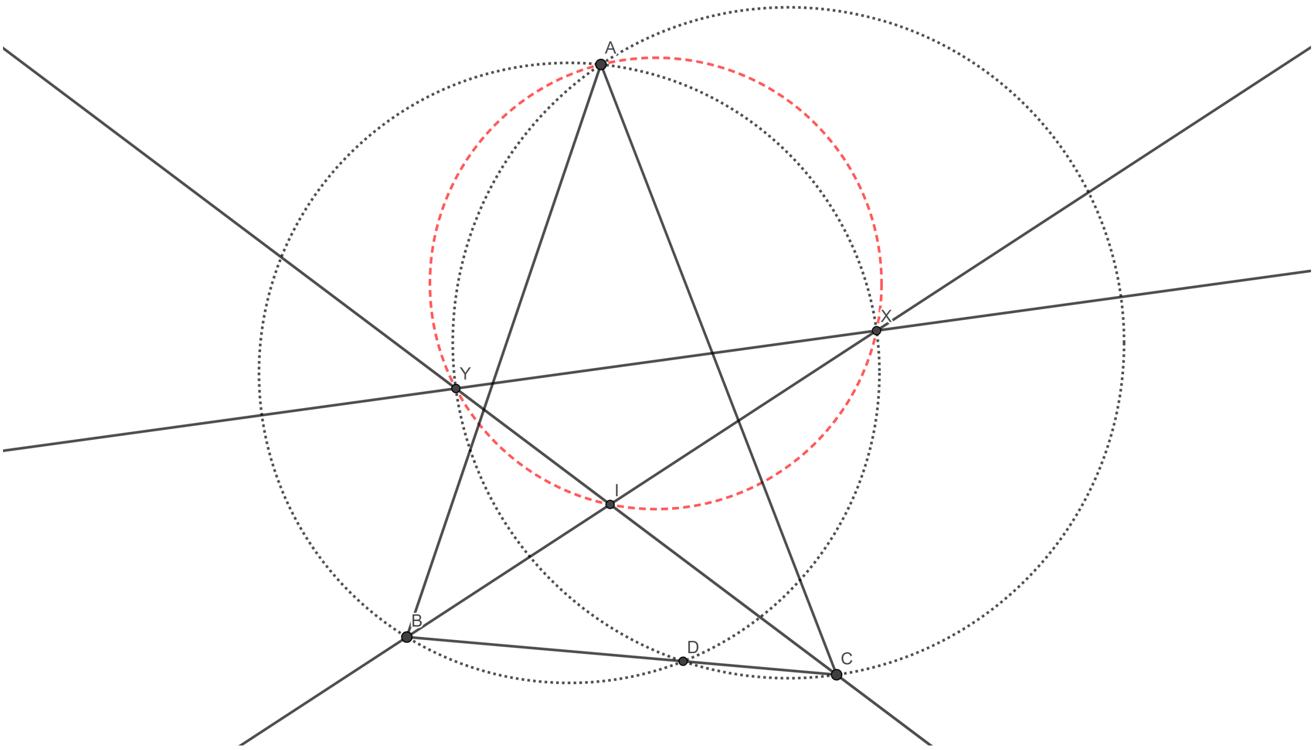
$$\widehat{DAB} = \widehat{ACE}$$

Maintenant que l'on dispose d'un cercle à 6 points sur la figure, on peut attaquer une chasse aux angles. En effet par angles inscrits, on a :

$$\widehat{FBP} = \widehat{FAD} = \widehat{FGD}$$

Donc les droites (BC) et (DG) sont parallèles □

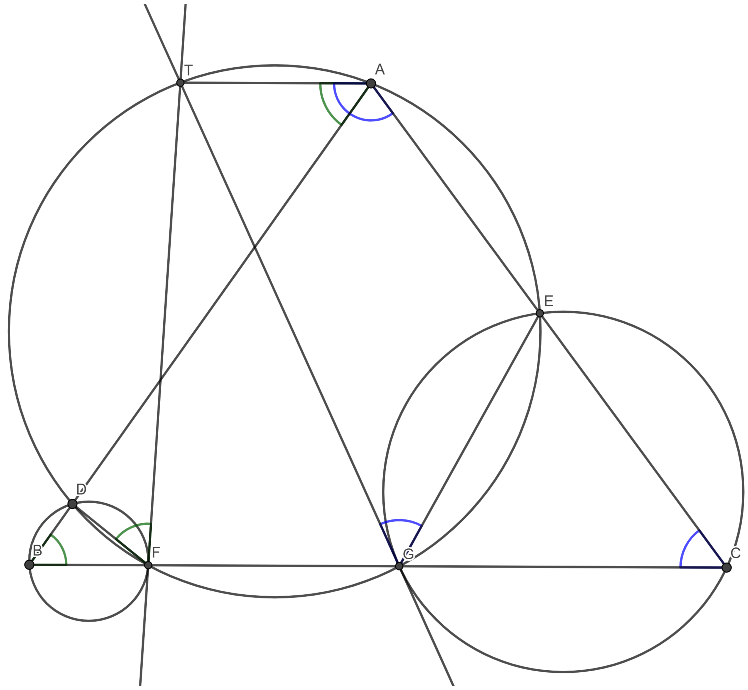
Solution de l'exercice 5



Un élève aguerri en géométrie doit remarquer tout de suite que l'on a tracé 2 pôles sud sur cette figure, il s'agit de X et Y respectivement pour les cercles $AXDB$ et $AYDC$. Pour ceux qui n'auraient pas eu le réflexe de voir les pôles sud, une bonne figure permettait également de remarquer les 2 cocyclicités.

On reconnaît ensuite une configuration de Miquel dans le triangle IBC ce qui permet de conclure que les cercles IXY, CYA et BAX sont concourants en I. Ainsi, les points A, X, I et Y sont cocycliques. $\square$

Solution de l'exercice 6



La figure de cette exercice est particulièrement complexe à tracer précisément sur feuille, celà est dû à la présence de nombreux cercles et de 2 tangentes (cf. partie théorique pour les tangentes).

En contrepartie, l'élève qui a tracé une jolie figure pour cet exercice, est récompensé par l'apparition d'un 6e point sur le cercle Ω, il s'agit du point T. On va donc chercher à montrer que le point d'intersection T des 2 tangentes est sur le cercle Γ

En géométrie quand l'objectif est de montrer la concourance entre 2 droites et 1 cercle, il est presque toujours mieux de montrer que l'une des droites passe par le point d'intersection entre le cercle et l'autre droite. C'est cette technique qu'on va utiliser ici en fixant T' le point d'intersection entre la tangente à DBF en F et le cercle Γ.

Par angle inscrit et angle tangentiel, on a :

$$\widehat{T'AB} = \widehat{T'FD} = \widehat{CBA}$$

Ainsi, le point T' est sur la parallèle à (BC) passant par A.

Pour des raisons de symétries, le point T'' défini comme l'intersection de la tangente à ECG en G avec Γ est lui aussi sur la parallèle à (BC) en A. Ainsi, les 4 objets suivants sont concourants

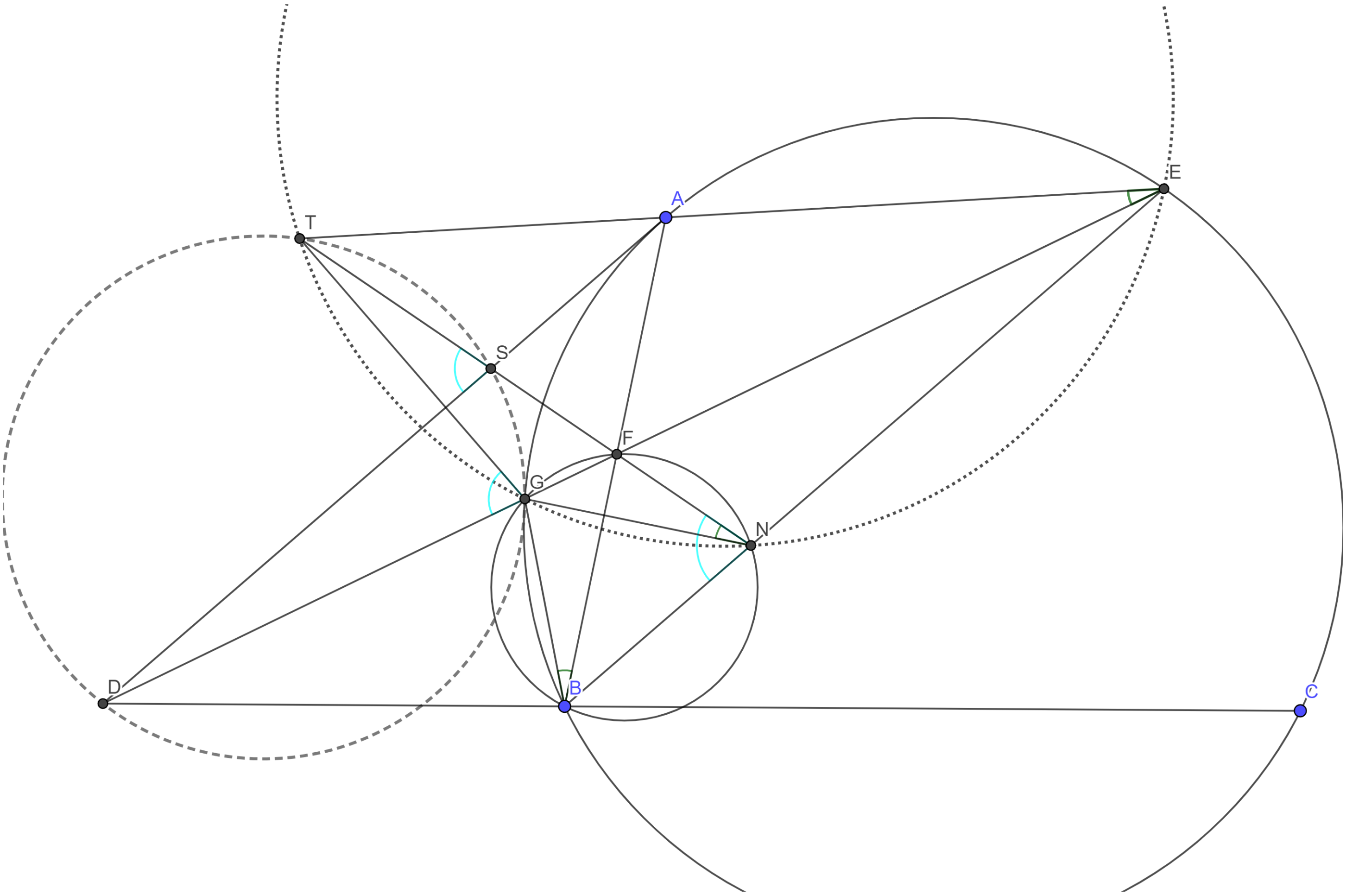
— le cercle Γ

— la tangente à DBF en F

— la tangente à ECG en G

— la parallèle (BC) passant par A □

Solution de l'exercice 7



Remarquons que le quadrilatère $TGNE$ est cyclique.

En effet,

$$\widehat{TNG} = \widehat{FBG} = \widehat{ABG} = \widehat{TEG}$$

On en déduit par parallélisme,

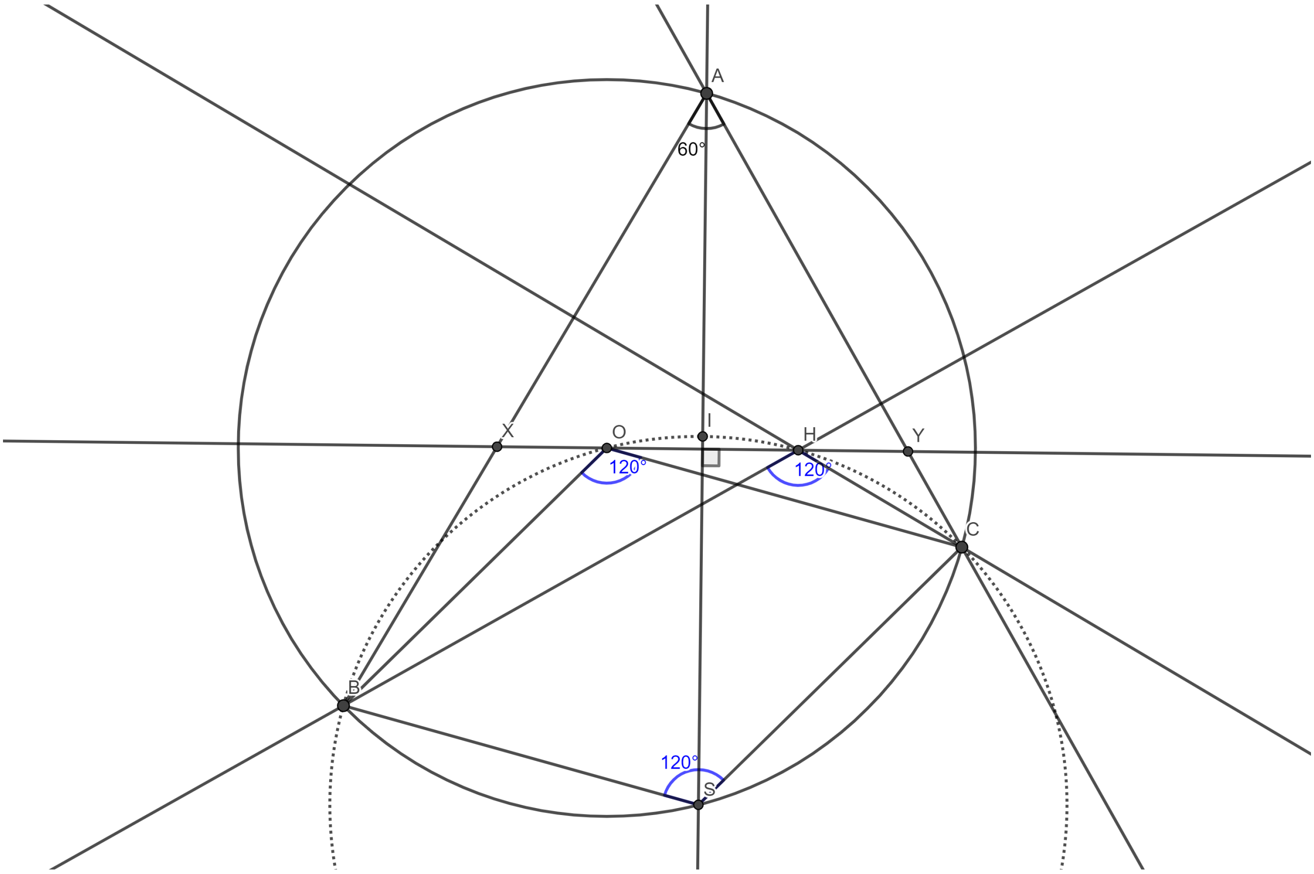
$$\widehat{TSD} = \widehat{TNB} = 180° - \widehat{ENT}$$

Enfin puisque, $TGNE$ est cyclique,

$$180° - \widehat{ENT} = 180° - \widehat{EGT} = \widehat{TGD}$$

□

Solution de l'exercice 8



Cet exercice a le bon goût de faire réviser les propriétés usuelles du triangle

On commence par remarquer la cocyclicité des points B, C, H et O. En effet,

$$\widehat{BOC} = 2 \cdot \widehat{BAC} = 120°$$

Et par cocyclicité des pieds des hauteurs issues de B et C avec A et H,

$$\widehat{BHC} = 180 - \widehat{BAC} = 120°$$

Puisque la bissectrice issue de A doit aussi jouer le rôle de la médiatrice de $[XY]$ c'est une bonne idée de l'introduire. On remarque que le point I est sur le cercle $BOHC$ ce qui signifie qu'il s'agissait en fait du cercle arctique. Pour le montrer il suffit d'établir que le pôle sud S est le centre du cercle $BOHC$, puisqu'il est toujours vrai que S est sur la médiatrice de $[BC]$ il suffira de montrer que $\widehat{CSB} = 180 - \dfrac{\widehat{BOC}}{2} = 120°$.

Ceci est vrai car par cocyclicité de $BACS$, on a

$$\widehat{CSB} = 180 - \widehat{BAC} = 120°$$

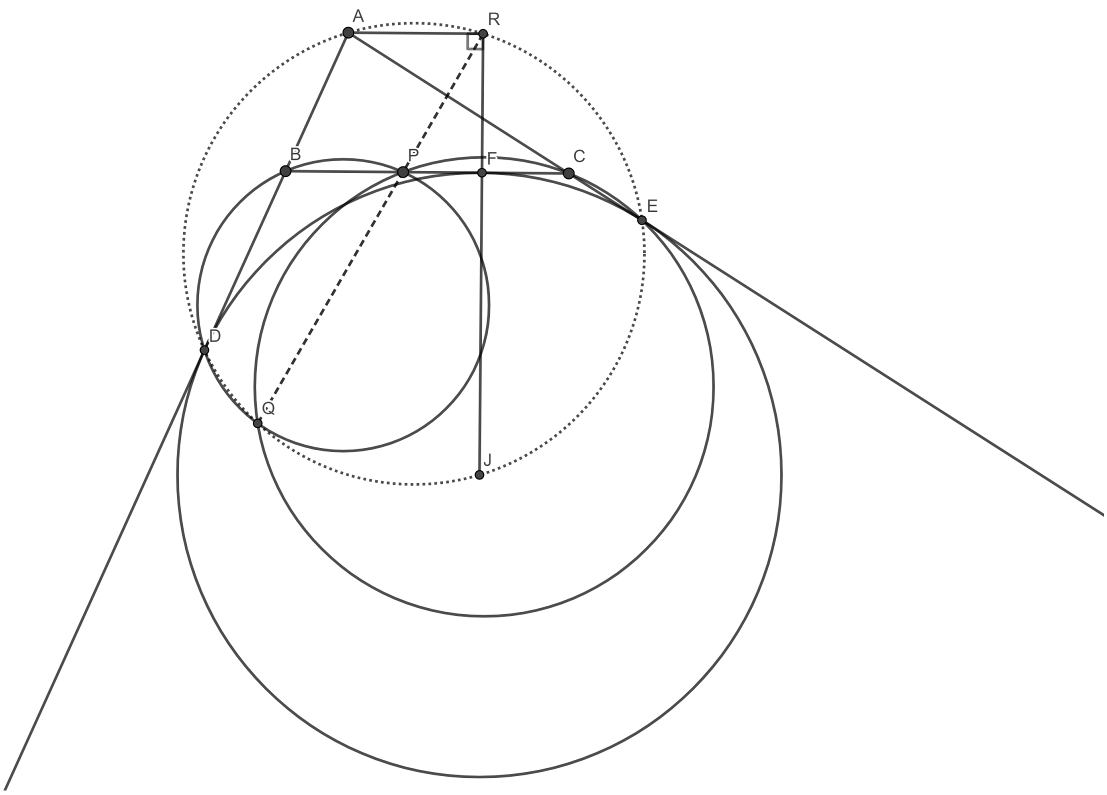
Pour conclure on utilisera le résultat suivant (toujours vrai), la droite (AO) est la symétrique de (AH) par rapport à (AS). Par ailleurs la symétrie d'axe (AS) laisse invariant le cercle arctique car $S \in (AS)$. Ainsi, l'image du point O doit se situer sur l'intersection du cercle arctique et de la droite (OH), il s'agit donc de H.

Ainsi, on a montré que la symétrie d'axe (AS) échange O et H. La droite (AS) est donc hauteur et bissectrice en A dans le triangle AXY, cela suffit à montrer que AXY est isocèle en A. Enfin puisque $\widehat{AXY} = 60°$, on a nécessairement

$$\widehat{YXA} = \widehat{XYA} = 60°$$

Donc le triangle AXY est équilatéral. $\square$

Solution de l'exercice 9



Les points A, R, E, J et D appartiennent tous au cercle de diamètre $[AJ]$ car $\widehat{ARJ} = \widehat{AEJ} = \widehat{ADJ} = 90°$. Ainsi, on dispose déjà d'un cercle à 5 points sur la figure, et dans ce cas, il faut évidement le tracer.

Grâce à une figure bien tracée, on remarque que Q est également sur ce cercle. En effet, Q est le point de Miquel dans le triangle ABD, pour les cercles BPD, PCE et AED.

Ce 6e point sur le grand cercle de la figure va nous permettre de conclure. En effet, puisque les droites (AR) et (BC) sont parallèles :

$$\widehat{RQD} = 180 - \widehat{RAD} = \widehat{ABC}$$

Et d'autre part,

$$\widehat{PQD} = 180 - \widehat{PBD} = \widehat{ABC}$$

Cela montre l'alignement des points R, P et Q $\square$

Solution de l'exercice 10
Vous trouverez l'exercice avec sa solution directement sur le site de l'OFM 2024 :

Solution de l'exercice 11
Une vidéo d'Antoine Dérimay (avec les cheveux courts :), en train de corriger l'exercice 11

Solution de l'exercice 12
Une autre vidéo d'Antoine (toujours avec les cheveux courts :), qui corrige l'exercice 12

2 Entraînement de mi-parcours

Entraînement de mi-parcours, groupe C

Stage olympique de Valbonne 2024

18 août 2023

Veuillez rédiger chaque problème sur une copie différente. N'oubliez pas d'écrire votre nom et chaque numéro d'exercice. Les calculatrices sont interdites.

Énoncés

Exercice 1
Soit ABC un triangle. On note M le milieu de $[AC]$ et J un point de (BM). Le cercle tangent à (AC) en C passant par J recoupe la droite (MB) en R.
Montrer que

$$\widehat{MJA} = \widehat{RAM}$$

Exercice 2
On considère une grille de 9×10. On place une tour dans le coin supérieur gauche. Elle se déplace selon les règles suivantes :

— Elle ne peut se déplacer qu'horizontalement ou verticalement.

— A l'étape $2n-1$, la tour peut se déplacer de x cases avec $1 \leqslant x \leqslant 9$ dans la direction de son choix (tout en ne sortant pas de la grille)

— A l'étape $2n$, la tour se déplace de $9-x$ cases dans la direction de son choix où x est sa distance de déplacement à l'étape $2n-1$.

Est-il possible que la tour visite toutes les cases de la grille exactement une fois et revienne à sa case de départ ?

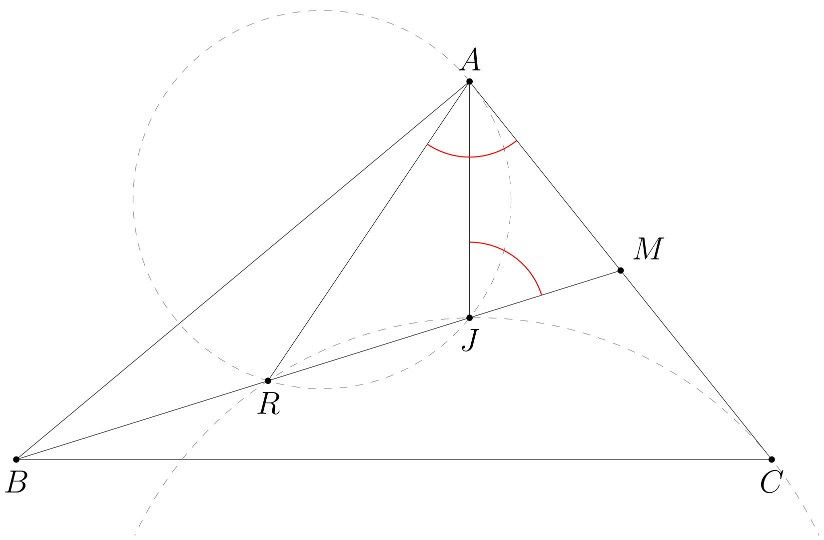
Exercice 3
On place n élèves sur un cercle, et on leur donne à chacun un nombre pair de bonbons. Chaque minute, chaque élève donne le moitié de ses bonbons à son voisin de gauche. Si un élève se retrouve avec un nombre impair de bonbons après cette opération, Antoine leur donne un bonbon.
Montrer que tous les élèves finissent par avoir le même nombre de bonbons.

Exercice 4
Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus. Soit F le pied de la hauteur de ABC issue de A, et soit P un point situé sur le segment $[AF]$. On note D le point de (BC) tel que

(PD) soit parallèle à (AC), puis X le point où se recoupent le cercle circonscrit à ABD et le cercle de centre D passant par A. De même, on note E le point de (BC) tel que (PE) soit parallèle à (AB), puis Y le point où se recoupent le cercle circonscrit à ACE et le cercle de centre E passant par A.
Démontrer que les points B, C, X et Y sont cocycliques.

Solutions

Solution de l'exercice 1



On commence par remarquer que la définition de R implique que $MC^2 = MR \times MJ$. De plus, comme M est le milieu de $[AC]$, on a aussi $MA^2 = MC^2 = MR \times MJ$. Ainsi, le cercle circonscrit à RJA est tangent à (AC) en A.
On peut maintenant conclure par chasse aux angles : on a $\widehat{AJR} = 180 - \widehat{AJM}$, puis c'est le théorème de l'angle à la tangente qui permet de conclure. En effet, $\widehat{RAM}$ est l'angle à la tangente interceptant l'arc AR passant par J et $\widehat{AJR}$ est un angle inscrit interceptant l'arc AR du coté ne contenant pas J, d'où finalement :

$$\widehat{RAM} = 180 - \widehat{AJR} = \widehat{AJM}$$

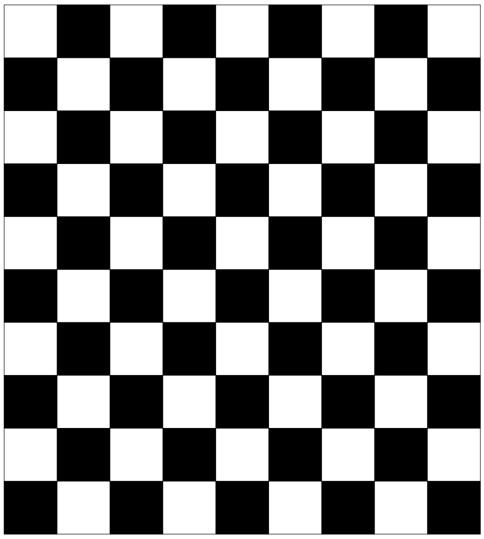
Solution alternative :

Comme pour la première solution, oncommence par remarquer que la définition de R implique que $MC^2 = MR \times MJ$. De plus, comme M est le milieu de $[AC]$, on a aussi $MA^2 = MC^2 = MR \times MJ$. Ainsi, on peut réécrire cette égalité

$$\frac{MR}{MA} = \frac{MA}{MJ}$$

Ce qui conclut imédiatement puisque les triangles AJM et RAM sont alors semblables.

Solution de l'exercice 2



On pave notre grille comme un échiquier (voir la figure ci-dessus). L'idée ici est de remarquer que tous les deux coups, on va avoir changé de couleur. En effet, si on est sur une case blanche après un nombre pair $2n$ d'étapes alors :

— Si on va sur une case noire, c'est qu'on s'est déplacés d'un nombre impair de cases à l'étape $2n+1$, donc on va se déplacer d'un nombre pair de cases à l'étape $2n+2$, et donc atterir sur une case noire.

— Si on va sur une case blanche, c'est qu'on s'est déplacés d'un nombre pair de cases à l'étape $2n+1$, donc on va se déplacer d'un nombre impair de cases à l'étape $2n+2$, et donc atterir sur une case noire.

Et de la même manière, si on était sur une case noire, alors deux étapes plus tard, on sera sur une case blanche.
Ainsi, au cours des 90 étapes nécessaires à couvrir l'échiquier, on aura changé de couleur entre les étapes 2 et 4, 4 et 6, ..., 88 et 90 et on sera donc sur la couleur opposée à celle de départ (puisque $90/2 = 45$ est imapair), ce qui nous apprend que l'on ne sera pas sur le case de départ !

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
Le processus commence à $t = 0$ minutes . On note $(a_{t,1}, a_{t,2}, ..., a_{t,n})$ les nombres de bonbons qu'ont les élèves à l'instant t. On note $m_t = \min(a_{t,1}, a_{t,2}, ..., a_{t,n})$, et $M_t = \max(a_{t,1}, a_{t,2}, ..., a_{t,n})$

Montrons que la suite $(M_t)_{t\geqslant 0}$ est décroissante. Cela constitura donc un premier monovariant : le maximum décroit.

Considérons un élève i à un temps t. A l'instant t, cet élève aura donc $a_{t,i}$ bonbons. Prenant la convention que $a_{s,0} = a_{s,n}$ pour tout s, au temps $t+1$, l'élève i aura :

Si $\frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2}$ est pair : $a_{t+1,i} = \frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2}$. Dans ce cas là, on a donc :

$$a_{t+1,i} = \frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2} \leqslant \frac{M_t+M_t}{2} = M_t$$

Si $\frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2}$ est impair : $a_{t+1,i} = \frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2} + 1$. Or si $\frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2}$ est impair, il ne peut pas être égal à M_t qui est pair. Ainsi, $\dfrac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2} < M_t$, et donc :

$$a_{t+1,i} = \frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2} + 1 \leqslant M_t$$

Dans tous les cas, $a_{t+1,i} \leqslant M_t$. On a cela pour tout i. On a donc $M_{t+1} \leqslant M_t$.

Considérons la suite des minima $(m_t)_{t\geqslant 0}$. Considérons un élève i à un instant t. On a :

$$\frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2} + 1 \geqslant \frac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2} \geqslant \frac{m_t+m_t}{2} = m_t$$

. Or $a_{t+1,i} \in \left\{\dfrac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2}, \dfrac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2}+1\right\}$. Donc $a_{t+1,i} \geqslant m_t$. On a cela pour tout i, donc $m_{t+1} \geqslant m_t$.

On suppose par l'absurde qu'on arrive jamais à une configuration où tous les élèves ont le même nombre de bonbons. Si pour un t donné, $m_t \geqslant M_0$, alors pour tout i, $m_t \leqslant a_{t,i} \leqslant M_t \leqslant M_0 \leqslant m_t$, impliquant que tous les élèves ont le même nombre de bonbons.
On a donc pour tout $t \in \mathbb{N}$, $m_t < M_0$. Puisque la suite $(m_t)_{t\geqslant 0}$ est croissante, majorée, et est une suite d'entiers, elle est stationnaire (elle est constante à partir d'un certain rang). Soit T tel que pour tout $t \geqslant T, m_t = m_T$. On pose $(X_t)_{t\geqslant T}$ la suite définie par :

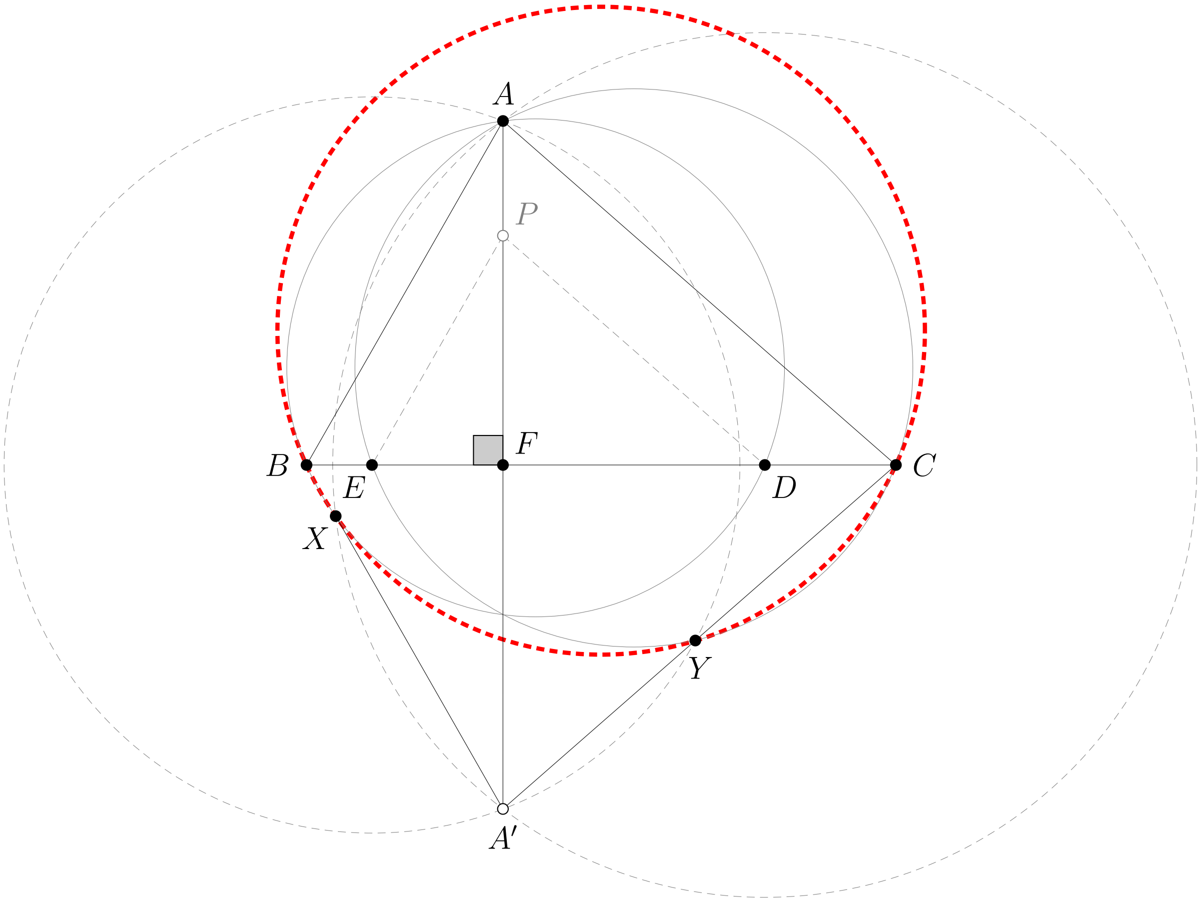
$$X_t = \text{Card}\{i \in [\![1,n]\!] \mid a_{t,i} = m_T\}$$

Montrons que la suite $(X_t)_{t\geqslant T}$ est strictement décroissante.
Considérons un élève i à un instant $t \geqslant T$. On a $a_{t+1,i} \geqslant \dfrac{a_{t,i-1}+a_{t,i}}{2} \geqslant m_t$, avec égalité ssi $a_{t,i-1} = a_{t,i} = m_t$. Ainsi un élève aura $m_{t+1} = m_t$ bonbons à l'instant $t+1$ ssi lui et son voisin de droite avaient m_t bonbons au temps t. $(X_t)_{t\geqslant T}$ est donc décroissante. Supposons par l'absurde qu'il existe t tel que $X_t = X_{t+1}$. Ainsi tout élève se situant à droite d'un élève qui a m_t bonbons à l'instant t a m_t bonbons à l'instant t. Or cela implique que tout le monde a m_t bonbons, ce qui est absurde. Ainsi $X_t \neq X_{t+1}$, et donc $(X_t)_{t\geqslant T}$ est strictement décroissante.

Puisque $(X_t)_{t\geqslant T}$ est une suite d'entiers strictement décroissante, il existe un t tel que X_t vaut 0. Ainsi pour tout i, $m_T < a_{t,i}$. On a donc $m_T \neq m_t$, ce qui contredit le fait que la suite $(m_t)_{t\geqslant 0}$ est stationnaire.

Il existe donc un moment à paritr duquel tous les élèves ont le même nombre de bonbons.

Solution de l'exercice 4



Dans un tel problème, le plus simple est d'essayer d'éliminer au mieux les points qui pourraient s'avérer peu utiles pour la suite. Ici, c'est par exemple le cas du point P, qui ne sert qu'à construire les points D et E en tant qu'images de B et C par une même homothétie de centre F. Ainsi, $FE \times FC = FB \times FD$, et F a donc même puissance par rapport aux cercles circonscrits à ABD et à ACE. Ces deux cercles ont donc (AF) pour axe radical.

On s'intéresse donc aux axes radicaux de ces deux cercles avec l'éventuel cercle circonscrit à $BXCY$, c'est-à-dire aux droites (BX) et (CY), et au centre radical de ces trois cercles. Or, sur la figure, celui-ci semble appartenir aux cercles de centres D et E passant par A. Cela signifierait qu'il est confondu avec le symétrique de A par rapport à la droite $(DE) = (BC)$; on note A' ce symétrique.

Une manière simple de réutiliser l'égalité $DA = DX$ consiste à dire que les arcs de cercle $\overset{\frown}{DA}$ et $\overset{\frown}{XD}$ ont même mesure. Ainsi,

$$(BX, BC) = (BX, BD) = (BD, BA) = (BC, BA) = (BA', BC).$$

On démontre de même que $(CY, CB) = (CA', CB)$, de sorte que les trois droites (AF), (BX) et (CY) sont bien concourantes en A'.

En particulier, A' est le centre radical des cercles circonscrits à $ABDX$, à $ACEY$ et à BCY, donc $(A'B) = (BX)$ est l'axe radical des cercles circonscrits à $ABDX$ et à BCY. Puisque X appartient à l'un de ces cercles, il appartient aussi à l'autre, ce qui conclut.

3 Deuxième partie : Algèbre et Arithmétique

1 Polynômes 1 (Aline)

Qu'est-ce qu'un polynôme ?

Pour définir des polynômes, il faut un ensemble de coefficients dans lequel on peut faire des opérations d'addition, de soustraction et de multiplication : l'ensemble des entiers $\mathbb{Z}$, des rationnels $\mathbb{Q}$, des réels $\mathbb{R}$ par exemple. Dans ce cours, le cas le plus général sera celui des polynômes à coefficients réels.

Définition 1 (Polynômes à coefficients réels)**.**

Un **polynôme** P de la variable X à coefficients réels est une somme pondérée de puissances de X (monômes) :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n$$

avec $a_0, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ les **coefficients** de P.
Le plus grand indice k tel que $a_k \neq 0$ est appelé le **degré** de P, noté $\deg P$.
Lorsque P est de degré n, a_n est appelé le **coefficient dominant** de P et a_0 le **coefficient constant**.
On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

Remarque 2 (Polynôme nul)**.**

Le **polynôme nul**, dont tous les coefficients valent 0, n'a pas de degré (ou alors, on dit que son degré vaut $-\infty$).

On ne note généralement pas les coefficients nuls d'indice supérieur au degré. En fait, on se ramène souvent (en divisant par le coefficient dominant) à des polynômes unitaires pour simplifier les énoncés :

Définition 3 (Polynôme unitaire)**.**

Lorsque le coefficient dominant vaut 1, on dit que le polynôme est unitaire. Un polynôme unitaire est donc de la forme :

$$P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

X est une **variable**, c'est-à-dire que l'on peut **évaluer** les polynômes en une valeur choisie pour la variable dans un ensemble donné. Généralement, on évalue les polynômes sur $\mathbb{R}$ (variable réelle), ce qui fait qu'un polynôme devient une **fonction polynomiale** de $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dans ce cours, comme c'est souvent le cas, on appellera aussi "polynôme" la fonction polynomiale associée.

Les fonctions polynomiales ont plusieurs propriétés sympathiques, qui font que l'on en use et en abuse en analyse. On ne peut pas vraiment les introduire rigoureusement puisque l'on devrait définir des notions d'analyse comme la limite ou la dérivée, mais on peut se représenter assez facilement ce que certains résultats signifient. Citons-en quelques uns :

Proposition 4 (Fonction polynomiale)**.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, considéré ici comme une fonction $\mathbb{R} \to \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

Continuité : P est continue. Notamment, P vérifie le théorème des valeurs intermédiaires (TVI).

Dérivabilité : P est dérivable et sa dérivée est un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ (et même indéfiniment dérivable).

Limites en $\pm\infty$: Si P n'est pas constant, notons ϵ le signe de son coefficient dominant. Alors $P(x)$ tend vers $\epsilon\infty$ quand x tend vers $+\infty$, et $P(x)$ tend vers $(-1)^{\deg P}\epsilon\infty$ quand x tend vers $-\infty$.

Rappel 5 (Théorème des valeurs intermédiaires)**.**

Soit $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ une fonction continue et $a, b \in \mathbb{R}$. Pour tout réel y compris entre $f(a)$ et $f(b)$, il existe x compris entre a et b tel que $f(x) = y$.

"$P(x)$ tend vers $+\infty$ quand x tend vers $+\infty$" signifie que pour toute valeur M arbitrairement grande, on peut trouver une valeur x_0 telle que $P(x) > M$ dès que $x > x_0$. On laissera le lecteur adapter la définition pour les autres cas de limites.

Corollaire 6 (Un polynôme est constant ou non borné)**.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Supposons P borné, autrement dit qu'il existe $M > 0$ tel que $|P(x)| < M$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.
Alors P est constant.

Notons qu'un polynôme non constant peut tout à fait être minoré ou majoré (par exemple, X^2 ne prend que des valeurs positives) mais pas les deux à la fois.

Exercice 1 (Valeurs entières sur les entiers)
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels quel que

$$\forall\, a \in \mathbb{R}, \qquad P(a) \in \mathbb{Z} \Rightarrow a \in \mathbb{Z}$$

<u>*Solution de l'exercice 1*</u>

Si P est constant, il faut et il suffit que cette constante soit non entière.
On suppose donc P non constant solution. Comme P n'est pas borné et continu, P passe par une infinité de valeurs entières. L'ensemble A des $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) \in \mathbb{Z}$ est donc lui aussi infini, et d'après l'hypothèse, c'est un sous-ensemble de $\mathbb{Z}$. Il n'est donc pas borné.
Soit $n \in A$. Entre n et $n+1$, un tel polynôme ne soit pas passer par une valeur entière, donc par le théorème des valeurs intermédiaires, $|P(n+1) - P(n)| \leqslant 1$. Or regardons le polynôme $Q(X) = P(X+1) - P(X)$. S'il est non constant, $|Q(x)|$ prend à partir d'un certain rang des valeurs arbitrairement grandes, donc en particulier, $Q(n)$ ne peut pas être dans $[-1, 1]$ pour tout $n \in A$. P ne peut pas vérifier l'énoncé. Il faut donc que Q soit constant et donc que P soit de degré au plus 1.
Notons $P = aX + b$ avec $a \neq 0$. Alors $-\frac{b}{a}$ (point d'annulation de P) est entier, ainsi que $\frac{1-b}{a}$ (point en lequel P vaut 1). Donc : $\frac{1}{a}$ est entier et b est multiple de a.
On vérifie que ces solutions fonctionnent bien.

Remarque 7 (Monôme dominant asymptotiquement).

On voit que pour savoir comment le polynôme se comporte lorsque $|x|$ devient très grand, seul le monôme dominant compte (le terme de plus haut degré) pour connaître le signe. Ceci implique que si on veut par exemple comparer deux polynômes P et Q avec $\deg P > \deg Q$, quels que soient les coefficients, pour x assez grand on aura $|P(x)| > |Q(x)|$.

Arithmétique de l'algèbre $\mathbb{R}[X]$

Puisque l'on peut faire des opérations algébriques ($+$, $-$, $\times$) dans $\mathbb{R}$, on peut assez naturellement en faire dans $\mathbb{R}[X]$.

Définition 8 (Sommes et produits de polynômes).
Soit P (resp.Q) $\in \mathbb{R}[X]$, de degré n (resp. m) et de coefficients $a_0, \ldots, a_n$ (resp. $b_0, \ldots, b_m$) :

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_n X^n \qquad \text{et} \qquad Q(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_m X^m$$

Alors on peut définir les polynômes suivants :

Somme $P + Q$ est un polynôme de degré (au plus) $N = \max(\deg P, \deg Q)$ et de coefficients $(a_k + b_k)$:

$$(P + Q)(X) = (a_N + b_N)X^m + \cdots + (a_1 + b_1)X + (a_0 + b_0)$$

où les a_j pour $j > n$ et les b_j pour $j > m$ valent 0.

Produit PQ est un polynôme de degré $n + m$ et de coefficients

$$\sum_{j=0}^{k} a_j b_{k-j}$$

Soit en développant les coefficients les plus simples

$$(PQ)(X) = a_n b_m X^{n+m} + (a_n b_{m-1} + a_{n-1} b_m)X^{n+m-1} + \cdots + (a_1 b_0 + a_0 b_1)X + a_0 b_0$$

Naturellement, si l'on peut faire des sommes, on peut tout aussi bien faire des différences de polynômes en soustrayant terme à terme.

Remarque 9 (Degré de $P + Q$).

Le degré d'une somme est toujours égal au maximum des degrés des termes (P et Q) à une exception près, lorsque ceux-ci sont de même degré ($n = m$) et de coefficient dominant opposé ($a_n = -b_n$).

On notera que $P + Q = Q + P$ et $PQ = QP$. Comme dans $\mathbb{R}$, $+$ et $\times$ sont symétriques, ce sont aussi des opérateurs associatifs (on peut faire des sommes et des produits avec autant de termes et de facteurs que l'on veut sans que l'ordre importe) et enfin, $\times$ est distributif sur $+$.

Si l'on peut faire des produits de polynômes, on peut aussi élever un polynôme à une puissance entière arbitraire. On peut également les multiplier par des coefficients réels, et sommer tout cela : bref, on peut évaluer un polynôme en en polynôme. De même que l'évaluation sur un réel donne un réel, l'évaluation sur un polynôme donne un polynôme.

Définition 10 (Composition de polynômes)**.**
Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. La **composée** de Q par P est un polynôme noté $P(Q)$, obtenu en appliquant P à Q. On a $\deg P(Q) = \deg P \times \deg Q$ lorsque P et Q sont non nuls.

Remarque 11 (Opérations algébriques et évaluation)**.**

Soit $x \in \mathbb{R}$. De même que l'on a $(P+Q)(x) = P(x) + Q(x)$ et $(PQ)(x) = P(x)Q(x)$, l'évaluation en x du polynôme $P(Q)$, notée $P(Q)(x)$, est en fait égale à l'évaluation de P en $Q(x)$, qui se note $P(Q(x))$.

Exemple 12 (Changement de variable)**.**

Lorsque l'on manipule des fonctions polynomiales, on aime bien faire des changements de variable polynomiaux. Par exemple, on utilise souvent :

(i) $P(-X)$ renverse le sens de l'axe des x.

(ii) $P(X-a)$ décale l'axe des x de a vers la gauche.

(iii) $P(X^2)$ est un polynôme avec uniquement des coefficients (non nuls) de degré pair.

La composition n'est pas une opération algébrique, en particulier elle n'est surtout pas symétrique ou inversible (en général).

Divisibilité, polynômes irréductibles

Cela n'a en général pas de sens de "diviser" par un polynôme, du moins on n'obtient pas un polynôme à tous les coups. Tout comme dans $\mathbb{Z}$, il convient de s'assurer que le diviseur et le dividende que l'on se donne sont bien compatibles pour ne pas écrire n'importe quoi. On va voir que tout cela se rapproche sous beaucoup d'aspects de la façon de faire de l'arithmétique sur $\mathbb{Z}$ et que l'on peut y établir un certain nombre de résultats analogues.

Définition 13 (Polynôme diviseur)**.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit qu'un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ **divise** P ou **est un diviseur de** P lorsqu'il existe un polynôme $R \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X)R(X)$.
On pourra noter dans ce cas $Q \mid P$.

Dans $\mathbb{R}$, toutes les constantes non nulles (polynômes de degré 0) sont diviseurs universels (ils divisent n'importe quel autre polynôme). De même, si Q divise P, pour tout $k \in \mathbb{R}^*$ (non nul) on a aussi kQ diviseur de P. Pour éviter d'avoir une infinité de diviseurs qui ne diffèrent d'une constante multiplicative, on considère souvent les seuls **diviseurs unitaires**.

Exemple 14.

(i) Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, P divise le polynôme nul 0 et $1 \mid P$ (où 1 est le polynôme unitaire constant).

(ii) Le polynôme X divise $P \in \mathbb{R}[X]$ lorsque $P(0) = 0$ (P n'a pas de coefficient constant).

Proposition 15 (Relation de divisibilité polynomiale)**.**

Réflexivité : Pour tout $P \in \mathbb{R}[X]$, on a $P \mid P$.

Antisymmétrie : Si $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires vérifient $P \mid Q$ et $Q \mid P$, alors $P = Q$.

Transitivité : Si $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ vérifient $P \mid Q$ et $Q \mid R$, alors $P \mid R$.

Comparaison des degrés : Si $P, Q \min \mathbb{R}[X]$ vérifient $Q \mid P$ et $P \neq 0$, alors $\deg Q \leqslant \deg P$.

Les trois premières propriétés sont identiques à celles de la divisibilité dans $\mathbb{Z}$, la quatrième est l'analogue de "si un entier d divise un entier n non nul, alors $|d| \leqslant |n|$".
On a également un analogue des nombres premiers :

Définition 16 (Polynôme irréductible).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que P est **irréductible** lorsqu'il a exactement deux diviseurs unitaires distincts, qui sont 1 et lui-même (divisé par son coefficient dominant).

Remarque 17 (Définition rigoureuse des éléments irréductibles).

Cette définition a le mérite de se rapprocher de la notion de nombre premier dans $\mathbb{Z}$. La notion d'élement irréductible est en fait beaucoup plus générale et peut s'appliquer dans quantité d'ensembles pourvu qu'ils aient une bonne structure arithmétique, en l'occurence celle d'un anneau (muni de $+$, $-$, $\times$, d'un 0 et d'un 1). Plus rigoureusement, un irréductible a dans un anneau A est un élément :

(i) Non nul ($a \neq 0$)

(ii) Non inversible (il n'existe pas d'élément $b \in A$ tel que $a \times b = 1$)

(iii) Premier avec tout élément qu'il ne divise pas : pour tout $b \in A$, le PGCD de a et b vaut soit a, soit 1.

On pourra vérifier que lorsque l'on applique cela dans $\mathbb{Z}$, on retrouve bien les nombres premiers.

Ainsi, les polynômes de degré 0 (constantes non nulles) ne sont pas irréductibles selon cette définition. En revanche, les polynômes de degré 1 sont tous irréductibles.

Remarque 18 (Division de polynômes ?).

Lorsque $P, Q, R \in \mathbb{R}[X]$ sont tels que $P = QR$, on s'autorisera à écrire

$$R = \frac{P}{Q} \qquad \text{ou} \qquad R(X) = \frac{P(X)}{Q(X)}$$

Il faut cependant faire attention à ce qu'il y ait bien divisibilité, sinon l'objet $\frac{P}{Q}$ n'est plus un polynôme (et pas toujours défini en tout $[x \in \mathbb{R}]$).

Comme la division n'est pas toujours autorisée, on a en revanche comme dans $\mathbb{Z}$ une notion de **division euclidienne de polynômes** : en effet, la division euclidienne n'utilise que les trois opérations $+, -, \times$ et quelque chose permettant d'assurer que le reste est "plus petit" que le diviseur (ici, le degré est donc l'analogue de la valeur absolue dans $\mathbb{Z}$, comme on l'a vu dans un autre cas).

Théorème 19 (Division euclidienne de polynômes)**.**

Soit $A, B \in \mathbb{R}[X]$ avec $B \neq 0$. Il existe alors un unique couple de polynômes $(Q, R) \in \mathbb{R}[X]^2$ tel que $\deg R < \deg B$ et $A = BQ + R$.

On a en outre

$$R = 0 \quad \Leftrightarrow \quad B \mid A$$

Exercice 2 (Division euclidienne pour les polynômes)

En s'inspirant de l'algorithme de division euclidienne dans $\mathbb{Z}$, écrire la division euclidienne de $A(X) = 6X^{10} + 3X^8 + 7X^7 - 2X^6 + 16X^5 + X^4 - 18X^3 + 2X^2 + 7X - 6$ par $B(X) = 2X^3 - X + 1$.

Solution de l'exercice 2

On pose la division un peu comme on le fait dans $\mathbb{Z}$, en se souvenant que la "taille" des nombres est remplacée par le degré des polynômes.

On trouve finalement :

$$6X^{10}+3X^8+7X^7-2X^6+16X^5+X^4-18X^3+2X^2+7X-6 = (2X^3-X+1)(3X^7+2X^4-X^3+9X^2-4)+(-7X^2$$

Grâce à la division euclidienne, on peut dérouler un algorithme d'Euclide qui mène directement à la notion de PGCD :

Définition 20 (PGCD, polynômes premiers entre eux)**.**
Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. Il existe un unique polynôme unitaire R de degré maximal tel que $R \mid P$ et $R \mid Q$. On l'appelle le Plus Grand Commun Diviseur (PGCD) de P et Q.

Lorsque $R = 1$, on dit que P et Q sont **premiers entre eux**.

Exemple 21.

(i) Deux polynômes qui diffèrent d'une constante sont premiers entre eux.

(ii) Lorsque le reste R de la division euclidienne de A par B (notée $A = BQ + R$) est de degré 0, A et B sont premiers entre eux (de même que le A et Q).

(iii) Si R est le PGCD de $P, Q \in \mathbb{R}[X]$, et que $\tilde{P}, \tilde{Q}$ sont tel que $P = \tilde{P}R$ et $Q = \tilde{Q}R$, alors $\tilde{P}$ et $\tilde{Q}$ sont premiers entre eux.

Dans $\mathbb{Z}$, deux nombres sont premiers entre eux si et seulement si ils n'ont aucun diviseur premier en commun. Dans $\mathbb{R}[X]$, cela donne :

Lemme 22 (Critère pour polynômes premiers entre eux)**.**

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$. P et Q sont premiers entre eux si et seulement si il n'existe aucun polynôme irréductible qui divise P et Q.

À première vue, tant que l'on n'a pas caractérisé les irréductibles, ce n'est pas très utile. Il faut donc décrire un peu mieux ceux-ci, ce qui est l'objet de la partie suivante. Mentionnons tout de même le théorème fondamental de l'arithmétique, version $\mathbb{R}[X]$:

Théorème 23 (Théorème fondamental de l'arithmétique (des polynômes)).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire (donc non nul). Il existe des polynômes irréductibles $Q_1, \dots, Q_n$ tels que $P = Q_1 \dots Q_n$. Cette décomposition est **unique** à permutation des facteurs près.

Exercice 3 (Division euclidienne)
Calculer la division euclidienne de X^n par $X^2 - 3X + 2$, où $n \geqslant 2$.

Solution de l'exercice 3

Avec un dividende qui dépend de n, on ne peut pas bêtement écrire la division euclidienne étape par étape. Il faut donc être astucieux : écrivons $X^n = (X^2 - 3X + 2)Q + R$, avec $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ et $\deg R < 2$. On peut donc écrire $R = aX + b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$.

On évalue ensuite l'égalité en deux points précis, ce qui permettra de déterminer entièrement a et b (R est une droite, donc il suffit de deux points). Deux valeurs qui semblent intéressantes pour x sont les racines de $X^2 - 3X + 2$, qui sont 1 et 2 :

$$\begin{aligned} 1^n = 0 + a \times 1 + b \text{ et } 2^n = 0 + a \times 2 + b &\Leftrightarrow a = 2^n - 1 \text{ et } -b = 2^n - 2 \\ &\Leftrightarrow R(X) = (2^n - 1)X - (2^n - 2) \end{aligned}$$

Racines et factorisation

Définition 24 (Racine d'un polynôme).
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. On dit que $x \in \mathbb{R}$ est **racine** de P lorsque $P(x) = 0$.

Proposition 25 (Mise en facteur des racines).

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $x \in \mathbb{R}$. Alors il a équivalence entre les propositions suivantes :

(i) x est racine de P.

(ii) P est divisible par le polynôme $(X - x)$ de degré 1.

Démonstration. Il suffit d'écrire la division euclidienne de P par $(X - x)$. □

Ceci conduit à introduire la notion de multiplicité des racines :

Définition 26 (Multiplicité des racines).
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$, $x \in \mathbb{R}$ et $\nu \in \mathbb{N}$. On dit que x est racine de P de multiplicité ν lorsque $(X - x)^\nu$ divise P mais $(X - x)^{\nu+1}$ ne divise pas P, autrement dit, ν est le plus grand exposant tel que $(X - x)^\nu$ divise P.

En particulier, si x est racine de P, sa multiplicité est $\nu \geqslant 1$.

Une racine de multiplicité 1 est dite **racine simple**, tandis qu'une racine de multiplicité $\nu \geqslant 2$ est dite **racine multiple**. On parle aussi de racine double ($\nu = 2$), triple ($\nu = 3$), etc.

Remarque 27.

La multiplicité des racines est sembable à la notion de valuation p-adique dans $\mathbb{Z}$.

Ainsi, trouver des racines de P, c'est trouver des diviseurs et réduire P à une expression de plus en plus simple. On en déduit aussi le résultat fondamental suivant :

Théorème 28 (Nombre maximal de racines)**.**

Un polynôme non nul de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines (comptées avec multiplicité, ce qui signifie qu'une racine de multiplicité ν est comptée ν fois).

Démonstration. Si un polynôme P a pour racines (avec multiplicité) $x_1, \ldots, x_n$, alors il est divisible par $(X - x_1) \ldots (X - x_n)$ de degré n. Donc $n \leqslant \deg P$. □

En particulier, on utilisera souvent le lemme ci-dessous :

Lemme 29 (Critères de polynôme nul)**.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Alors si une des conditions suivantes est vérifiée :

(i) P est de degré $\deg P < n$ et a n racines distinctes (au moins).

(ii) P prend $n > \deg P$ fois (au moins) une même valeur y, autrement dit l'équation $P(x) = y$ a au moins n solutions distinctes.

(iii) P prend une infinité de fois une même valeur y.

Alors P est constant (nul dans le cas (i)).

ou encore la variante :

Lemme 30 (Critère d'égalité entre deux polynômes)**.**

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ et $n \in \mathbb{N}$ tel que $\deg P, \deg Q < n$. On suppose qu'il existe $x_1, \ldots, x_n \in \mathbb{R}$ distincts tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $P(x_i) = Q(x_i)$.

Alors $P = Q$.

Les racines sont donc bien commodes pour factoriser, mais a-t-on toujours des racines ? Déjà, on peut voir qu'un polynôme irréductible est un polynôme qui a au plus une racine (non multiple).

Dans $\mathbb{R}[X]$, on a un premier résultat pratique et assez intuitif (théorème des valeurs intermédiaires et limites en $\pm\infty$) :

Lemme 31 (Polynôme réel de degré impair)**.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré n impair. Alors P possède au moins une racine réelle.

Notons qu'il n'est pas toujours aisé de trouver cette racine. En général, la factorisation de polynômes est un problème complexe sans solution analytique.

Exercice 4

Soit $P, Q \in \mathbb{R}[X]$ unitaires de degré 2024 tels que l'équation $P(x) = Q(x)$ n'a aucune solution réelle. Montrer qu'il existe un réel x tel que $P(x-1) = Q(x+1)$.

Solution de l'exercice 4

On veut montrer que le polynôme $R(X) = P(X-1) - Q(X+1)$ a une racine réelle. Or, R est de degré au plus 2023, donc on a bien envie d'essayer de montrer qu'il est de degré impair (par exemple, que c'est exactement 2023).

Posons $P(X) = X^{2024} + aX^{2023} + \tilde{P}(X)$ et $Q(X) = X^{2024+bX^{2023}+\tilde{Q}(X)}$ avec $\tilde{P}, \tilde{Q}$ de degré au plus 2022.

Si $a \neq b$, alors $P - Q$ est de degré exactement 2023 qui est impair, donc il a une racine réelle. C'est exclu d'après l'énoncé. Donc $a = b$.

Le coefficient de degré 2023 de R est ensuite :

$$c = -\binom{2024}{2023} + a - \binom{2024}{2023} - b = a - b - 2 \times 2024 = a - b - 4048 = 4048$$

qui est en particulier non nul. Donc R est bien de degré 2023, impair, et possède une racine réelle.

On a vu que les polynômes de degré 1 étaient tous irréductibles. Pour les polynômes de degré 2, on a deux cas : en effet, tout polynôme de degré 2 de la forme $P(X) = aX^2 - bX + c$ peut s'écrire sous la forme ($a \neq 0$) :

$$P(X) = a\left[\left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

Comme un carré est toujours positif, on voit que le polynôme peut s'annuler si et seulement si son discriminant $\Delta = b^2 - 4ac$ est positif, auquel cas on calcule facilement les racines. Dans le cas contraire, le polynôme est toujours du signe strict de a. Récapitulons :

(a) Les polynômes de degré 1 dans $\mathbb{R}[X]$ sont irréductibles.

(b) Les polynômes de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$ sont irréductibles si et seulement si leur discriminant est strictement négatif.

(c) Les polynômes de degré impair strictement plus grand que 1 ne sont jamais irréductibles.

En fait, on a même un résultat beaucoup plus fort mais plus compliqué à démontrer :

Théorème 32 (Polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}$)**.**
Les polynômes irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont exactement :

(i) Les polynômes de degré 1.

(ii) Les polynômes de degré 2 dont le discriminant est strictement négatif.

Ainsi, tout polynôme $P \in \mathbb{R}[X]$ peut s'écrire sous la forme

$$P(X) = a\prod_{k=1}^{r}(X - x_k)\prod_{\ell=1}^{s}(X^2 - b_\ell X + c_\ell)$$

avec a le coefficient dominant de P, $r + 2s = \deg P$, $x_1, \dots, x_r$ les racines réelles de P (avec multiplicité) et pour tout $1 \leqslant \ell \leqslant s$, le polynôme $X^2 - b_\ell X + c_\ell$ est de discriminant $\Delta_\ell = b_\ell^2 - 4c_\ell < 0$.

Cette décomposition est unique à permutation près des racines ou des facteurs de degré 2.

Définition 33 (Polynôme scindé (à racines simples))**.**
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Lorsque la décomposition de P en irréductibles n'a que des facteurs de degré 1, on dit que P est **scindé** sur $\mathbb{R}$. Lorsqu'en outre toutes ses racines sont simples (de multiplicité 1), on dit qu'il est **scindé à racines simples** (PSARS).

On aime bien faire apparaître des PSARS dans les exercices parce qu'il est souvent plus facile d'exhiber des racines distinctes et de montrer grâce au degré que l'on a tout trouvé, plutôt que de montrer que le polynôme n'a pas autant de racines réelles que son degré ou calculer la multiplicité de ses racines réelles.

Exercice 5 (Suite logique)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}$, tel que pour tout $1 \leqslant k \leqslant n+1$, $P(k) = \frac{1}{k}$. Calculer $P(-1)$.

Solution de l'exercice 5
L'idée est d'utiliser les informations sur P pour former un polynôme avec beaucoup de racines. Celui qui se présente immédiatement est

$$Q(X) = XP(X) - 1$$

de degré $n+1$ avec justement $n+1$ racines distinctes (entiers de 1 à $n+1$). Ainsi, il existe a une constante tel que

$$XP(X) - 1 = a \prod_{k=1}^{n+1} (X - k)$$

Pour trouver a, on peut évaluer l'égalité en 0, ce qui donne

$$a = \frac{(-1)^n}{(n+1)!}$$

Puis on évalue tout cela en -1, ce qui donne :

$$\begin{aligned} -P(-1) - 1 &= \frac{(-1)^n}{(n+1)!}(-1)^{n+1}(n+2)! \\ P(-1) &= n+1 \end{aligned}$$

Un autre aspect intéressant des polynômes scindés (pas nécessairement à racines simples) est les relations coefficients-racines :

Proposition 34 (Formules de Viète ou relations coefficients-racines)**.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire, scindé sur $\mathbb{R}$, de degré $n \in \mathbb{N}^*$. On note $x_1, \ldots, x_n$ ces racines et a_k le coefficient de degré k pour tout $0 \leqslant k \leqslant n$.
Alors l'égalité

$$(X - x - 1) \ldots (X - x_n) = P(X) = X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$$

conduit, en développant le produit et en identifiant les coefficients de même degré à gauche et à droite, aux formules suivantes : pour $0 \leqslant k \leqslant (n-1)$, le coefficient de degré k vaut

$$a_k = (-1)^{n-k} \sum_{1 \leqslant i_1 < \cdots < i_k \leqslant n} \prod_{j=1}^{k} x_{i_j}$$

En particulier pour les cas les plus simples :

(i) $a_0 = (-1)^n x_1 \dots x_n$

(ii) $a_{n-1} = -(x_1 + \cdots + x_n)$

Exercice 6

Trouver tous les triplets de nombres réels (x, y, z) tels que

$$x + y + z = 2 \qquad xy + yz + xz = -11 \qquad xyz = -12$$

Solution de l'exercice 6

On sait que les triplets solution sont exactement le triplet des racines du polynôme

$$P(X) = X^3 - 2X^2 - 11X + 12$$

A priori, elles n'ont aucune raison d'être entières, mais cherchons toujours s'il n'y a pas une racine évidente : bonne surprise, on constate que 1 est racine donc on met immédiatement $(X - 1)$ en facteur.

$$P(X) = (X - 1)(X^2 - X - 12)$$

Il nous reste 2 racines à trouver (celles du facteur du second degré), on obtient -3 et 4.

Les triplets solution sont donc les permutations de $(1, -3, 4)$.

Cas des polynômes à coefficients rationnels ou entiers (partie mentionnée mais non abordée en cours)

Comme on a défini $\mathbb{R}[X]$, on peut définir :

Définition 35 (Polynômes à coefficients rationnels ou entiers)**.**

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$. Lorsque tous les coefficients de P sont entiers (resp. rationnels), on dit que P est un polynôme à coefficients entiers (resp. rationnels).

L'ensemble des polynômes à coefficients entiers (resp. rationnels) est noté $\mathbb{Z}[X]$ (resp. $\mathbb{Q}[X]$).

On n'utilise pas "$\mathbb{N}[X]$", parce que $\mathbb{N}$ ne permet pas de faire toutes les opérations dont on a besoin, notamment on ne peut pas faire de soustraction. Dans $\mathbb{Z}[X]$ et $\mathbb{Q}[X]$, toutes les opérations se passent comme dans $\mathbb{R}[X]$ et il existe une notion de divisibilité, de PGCD, de polynômes premiers entre eux.

On peut faire des divisions euclidiennes, mais pour $\mathbb{Z}[X]$, exclusivement par un polynôme unitaire.

Là où il devient intéressant de considérer des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ ou $\mathbb{Q}[X]$ est que ces deux ensembles contiennent des irréductibles de degré arbitrairement grand.

Remarque 36 (Irréductibles de degré 0, polynômes primitifs)**.**

Dans $\mathbb{Q}[X]$, on peut comme dans $\mathbb{R}[X]$ toujours se ramener à un polynôme unitaire en mettant en facteur le coefficient dominant. Dans $\mathbb{Z}[X]$ en revanche, ce n'est pas le cas puisque $\frac{1}{a}$ n'est en général pas dans $\mathbb{Z}$ lorsque a l'est.

Si on applique la définition générale des irréductibles, les constantes non nulles (polynômes de degré 0) sont considérées différemment dans $\mathbb{Q}[X]$ ou dans $\mathbb{Z}[X]$: dans $\mathbb{Q}[X]$, elles sont inversibles donc non irréductibles. Dans $\mathbb{Z}[X]$, à l'exception de ± 1, elles le sont.

S'il n'est pas suffisant de raisonner sur les polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}[X]$, on se limite en revanche souvent aux polynômes **primitifs**, dont le PCGD des coefficients vaut 1. Cela évite de s'embarasser des irréductibles de degré 0.

Alors que les irréductibles de $\mathbb{R}[X]$ sont assez faciles à décrire, dans $\mathbb{Z}[X]$ on est plutôt dans le cas des nombres premiers de $\mathbb{Z}$: on peut en énumérer autant que l'on veut, on peut donner des conditions suffisantes pour dire qu'un polynôme de $\mathbb{Z}[X]$ est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, mais on ne dispose pas d'une condition nécessaire et suffisante simple.

Remarque 37.

Lorsqu'un polynôme est à coefficients entiers, on peut le considérer comme un élément de $\mathbb{Z}[X]$ ou comme un élément de $\mathbb{R}[X]$. S'il est irréductible dans $\mathbb{R}[X]$ (et primitif), il l'est a fortiori dans $\mathbb{Z}[X]$, mais la réciproque est fausse.

L'idée est que $\mathbb{R}[X]$ est "plus gros" que $\mathbb{Z}[X]$ (qui est un tout petit sous-ensemble de $\mathbb{R}[X]$), donc qu'il y a beaucoup plus de "candidats diviseurs" autorisés.

Exemple 38.

Le polynôme $P_n(X) = X^n - 2$ pour $n \geqslant 2$ est :

(i) Réductible dans $\mathbb{R}[X]$ puisque l'on peut factoriser $X -^n \sqrt{2}$.

(ii) Irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$ puisqu'il n'existe aucun rationnel r tel que $r^n = 2$.

La théorie des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ est dont à la fois très similaire à la théorie de $\mathbb{R}[X]$ et très spécifique sous certains aspects. On peut même fabriquer et manipuler des polynômes dans des ensembles de nombres plus exotiques comme $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On ne rentrera pas trop dans les détails pour ce premier cours.

Exercice 7 (Lemme du contenu)
Pour $P\mathbb{Z}[X]$, on appelle **contenu** de P et on note $\gamma(P)$ le PGCD des coefficients de P.

Montrer que pour tout $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$, $\gamma(PQ) = \gamma(P)\gamma(Q)$.

Solution de l'exercice 7

Quitte à diviser par $\gamma(P)$ et $\gamma(Q)$, on se ramène au cas de polynômes primitifs. L'objectif est de montrer que $\gamma(PQ) = 1$.

Si p est un nombre premier, soit k (rep. ℓ) le plus grand indice tel que le coefficient a_k de P (resp. b_ℓ de Q) soit non divisible par p. Le coefficient de degré $k + \ell$ de PQ est alors :

$$\sum_{j=0}^{k+\ell} a_j b_{k+\ell-j} \equiv a_k b_\ell \not\equiv 0 \ [p]$$

Puisque lorsque $j < k$, $b_{k+\ell-j}$ est divisible par p et lorsque $j > k$, a_j l'est. Ainsi, au moins un coefficient de PQ n'est pas divisible par p, donc p ne divise pas $\gamma(PQ)$.

Ainsi, $\gamma(PQ) = 1$.

Exercice 8 (Irréductibilité dans $\mathbb{Z}$ et dans $\mathbb{Q}$)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ primitif.

(a) Supposons que P est irréductible dans $\mathbb{Q}[X]$. Montrer que P l'est aussi dans $\mathbb{Z}[X]$.

(b) Supposons réciproquement P irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$. Montrer que P l'est aussi dans $\mathbb{Q}[X]$. *On pourra utiliser le lemme du contenu.*

(c) En déduire qu'une racine réelle d'un polynôme à coefficients entiers est soit entière, soir irrationnelle.

Solution de l'exercice 8

(a) On raisonne par contraposée : supposons que P est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$: il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ différents de 1 et P, tel que $P = QR$. Somme P est primitif, Q et R le sont aussi et en particulier ne sont pas des constantes, donc sont de degré supérieur ou égal à 1. La factorisation obtenue est aussi valable dans $\mathbb{Q}[X]$ (les deux facteurs sont bien non inversibles) et P est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$.

(b) Raisonnons là encore par contraposée : si P est réductible dans $\mathbb{Q}[X]$, il existe $Q, R \in \mathbb{Q}[X]$ de degré supérieur ou égal à 1 tel que $P = QR$. Comme les coefficients de Q et R sont rationnels, il existe un entier q et un entier r tels que les polynômes qQ et rR soient à coefficients entiers. Prenons q et r minimaux, de sorte que qR et rR sont primitifs. Regardons alors le contenu γ du polynôme (à coefficients entiers) qrP :

$$\gamma(qrP) = qr\gamma(P) = qr \times 1 = qr$$

d'une part, mais aussi

$$\gamma(qrP) = \gamma(qQrR) = \gamma(qQ)\gamma(rR) = 1 \times 1 = 1$$

d'après le lemme du contenu (exercice précédent). Il en résulte $qr = 1$, ce qui signifie que Q et R sont déjà à coefficients entiers, donc que P est réductible dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercices supplémentaires

Exercice 9 (Calcul du reste)

Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ et $a, b \in \mathbb{R}$ distincts. On suppose que le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)$ (resp. $(X - b)$) vaut 1 (resp. -1). Calculer le reste de la division euclidienne de P par $(X - a)(X - b)$.

Solution de l'exercice 9

D'après l'énonce, il existe $Q_a, Q_b \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant :

$$\begin{cases} P(X) = (X-a)Q_a + 1 & \text{donc } P(a) = 1 \\ P(X) = (X-b)Q_b - 1 & \text{donc } P(b) = -1 \end{cases}$$

Le reste de la divion euclidienne de P par $(X-a)(X-b)$ étant de degré 1 au plus, on peut l'écrire sous la forme $R(X) = uX + v$ avec $u, v \in \mathbb{R}$.

Comme dans l'exercice précédent, on évalue alors en a et b pour obtenir un système d'équations sur u et v. La solution en est :

$$R(X) = \frac{2}{a-b}X + \frac{a+b}{b-a}$$

Exercice 10 (Chasse aux racines entières)
En rentrant de la taverne, le shérif de Nottingham tombe sur Robin des Bois qui lui propose le jeu suivant dans le but de le détrousser en s'amusant : Robin écrit un polynôme à coefficients entiers aX^2+bX+c tel que $|a|+|b|+|c| = 2024$ et $a \neq 0$. Pour 1 shilling, le shérif peut modifier un coefficient d'une unité (faire $+1$ ou -1 sur un des coefficients). Son but est d'obtenir un polynôme de degré 2 à au moins une racine entière (comme il ne peut pas annuler a, passer de $a = 1$ à $a = -1$ ou vice-versa coûte 1 shilling seulement). Le prix de la limonade ayant fort augmenté ces temps-ci, le shérif n'a plus que 1050 shillings en poche. Montrer qu'il peut s'en sortir, puis calculer le maximum que Robin pourra lui extorquer ainsi, quel que soit le polynôme qu'il choisit.

Solution de l'exercice 10

Si $|c| \leqslant 1050$, le shérif a assez d'argent pour se ramener à $aX^2 + bX$ dont 0 est racine (stratégie A).

Sinon, il applique la stratégie B : pour au plus 974 shillings, le shérif peut se ramener à $b = 0$ et $a = -1$ si c est positif, ou $a = 1$ si c est négatif. Sans perte de généralité, supposons c positif.

Il reste à ramener c au carré parfait le plus proche. Soit $m \in \mathbb{N}$ tel que $m^2 \leqslant c \leqslant (m+1)^1$. Comme $c < 2024 < 2025 = 45^2$, on sait que m est inférieur ou égal à 44. Ainsi, $(m+1)^2 - m^1 = 2m + 1 \leqslant 89$ et en particulier, c est à distance au plus 44 d'un carré.

Le prix total de l'opération est donc au maximum $974 + 44 = 1018$.

Plutôt que de changer de stratégie lorsque $|c|$ dépasse la valeur 1050, cherchons à partir de quelle valeur M de $|c|$ il devient intéressant d'appliquer la stratégie B :

Le coût de la stratégie A est de M shillings au maximum. Le coût de la stratégie B vaut, lui, $2024 - M + 44$ shillings au maximum. Le M permettant de minimiser à tous les coups est donc tel que

$$M = 2024 - M + 44 \quad \text{soit} \quad M = 1034$$

Exercice 11 (d'après un shortlist 1989)

Trouver tous les polynômes unitaires $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré $n \in \mathbb{N}^*$, dont le coefficient de degré $n-1$ vaut n, dont les racines $r_1, \ldots, r_n$ sont toutes réelles et vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} r_i^2 = n$$

Solution de l'exercice 11
Soit P un tel polynôme. D'après les relations coefficients-racines, la somme des racines est égale à l'opposé du coefficient de degré $n-1$:

$$\sum_{i=1}^{n} r_i = -n$$

Or, d'après l'inégalité de Chauchy-Schwarz,

$$n^2 = n \times \sum_{i=1}^{n} r_i^2 = \left(\sum_{i=1}^{n} 1^2\right)\left(\sum_{i=1}^{n} r_i^2\right) \geqslant \left(\sum_{i=1}^{n} 1 \times r_i\right)^2 = n^2$$

On est donc dans le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz : toutes les racines sont de même valeur, et comme leur somme vaut $-n$, cette valeur commune est -1.

Il en résulte que le seul polynôme est

$$P = (X+1)^n$$

Exercice 12 (Équation polynomiale)
Déterminer tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ vérifiant

$$P(X^2) = (X^1 + 1)P(X)$$

.

Solution de l'exercice 12

Le polynôme nul est solution. Supposons P non nul et solution : nécessairement, si les polynômes $P(X^2)$ et $(X^1+1)P(X)$ sont égaux, ils ont même degré. Or $\deg P(X^2) = 2\deg P$ et $\deg[(X^2+1)P(X)] = \deg P + 2$, donc $\deg P$ doit valoir 2.

Si P est un polynôme du second degré $P(X) = aX^2 - bX + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{R}$ et $a \neq 0$, alors l'équation devient :

$$\begin{aligned} P(X^2) = (X^2+1)P(X) &\Leftrightarrow aX^4 - bX^2 + c = aX^4 - bX^3 + (a+c)X^2 - bX + c \\ &\Leftrightarrow b = 0 \text{ et } a + c = 0 \\ &\Leftrightarrow P(X) = a(X^2 - 1) \end{aligned}$$

Les solutions sont donc les polynômes de la forme $P(X) = a(X^2-1)$ pour $a \in \mathbb{R}^*$, plus le polynôme nul.

Exercice 13 (Viète un jour, Viète toujours)

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$ les racines du polynôme $X^3 - 3X + 1$. Calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Solution de l'exercice 13

À première vue, on ne sait pas grand chose sur la puissance quatrième de ces racines, mais on peut déjà l'exprimer en fonction de puissances plus petites : par exemple, $a^4 = a \cdot a^3 = a \cdot (3a-1) = 3a^2 - a$.

Formons ensuite la somme qui nous intéresse et faisons apparaître des quantités connues :

$$\begin{aligned} a^4+b^4+c^4 &= 3(a^2+b^2+c^2)-(a+b+c) \\ &= 3\left[(a+b+c)^2-2(ab+bc+ac)\right]-(a+b+c) \\ &= 3\left[0-2\times(-3)\right]-0 \\ &= 18 \end{aligned}$$

Exercice 14 (IMO 1998)

Montrer que l'ensemble des solutions réelles de l'inégalité

$$\sum_{k=1}^{63} \frac{k}{x-k} \geqslant 1$$

est une réunion d'intervalles dont la somme des longueurs vaut 2016.

Solution de l'exercice 14

Traduisons cela en un problème de polynômes : si l'on pose

$$Q(X)=\prod_{k=1}^{63}(X-k) \qquad \text{et} \qquad R(X)=\sum_{k=1}^{63} k \prod_{\substack{1\leqslant i\leqslant 63\\ i\neq k}}(X-i)-Q(X)$$

et enfin $P(X)=Q(X)R(X)$, l'ensemble de réels cherché est exactement celui sur lequel P est positif.

On remarque que $R(1)<0$, $R(2)>0$, $R(3)<0$ et ainsi de suite jusqu'à $R(63)>0$. De plus, pour x assez grand, $R(x)>0$. Les racines de R sont donc $r_1,\dots,r_{63}$ tel que

$$1<r_1<2<\cdots<63<r_{63}$$

et ce sont là toutes ses racines (puisque son degré est 63). Quant à P, il s'annule en tous les r_k $(1\leqslant k\leqslant 63)$ et en $1,\dots,63$ et est négatif pour x assez grand ou assez petit (coefficient dominant négatif).

Ainsi, P est positif sur la réunion des intervalles $[k,r_k]$ pour $1\leqslant k\leqslant 63$. On utilise les relations coefficients-racines pour calculer la longueur accumulée : le coefficient de degré 62 de R vaut :

$$\sum_{k=1}^{63} r_k=\sum_{k=1}^{63} k-\left(-\sum_{k=1}^{63} k\right)=63\times 64$$

donc on conclut la preuve en vérifiant

$$\sum_{k=1}^{63}(r_k-k)=\frac{63\times 64}{2}=2016$$

Exercice 15 (Plus subtil)

Soit $n \in \mathbb{N}$, $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ distincts et $b_1, \ldots, b_n \in \mathbb{R}$ également distincts. Dans un tableau $n \times n$, on écrit en ligne i, colonne j, le nombre $a_i + b_j$.

Pour $1 \leqslant i, j \leqslant n$, on note A_i le produit des éléments de la ligne i et B_j le produit des éléments de la colonne j.

Montrer que si $A_1 = A_2 = \cdots = A_n$, alors $B_1 = B_2 = \cdots = B_n$.

Solution de l'exercice 15

Comment faire apparaître des polynômes intéressants avec cet énoncé ? La piste peut nous être donnée par la façon dont le tableau est construit et en particulier si l'on développe l'expression de A_i pour $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$A_i = \prod_{j=1}^{n} (a_i + b_j)$$

On introduit donc le polynôme

$$P = \prod_{j=1}^{n} (X + b_j)$$

tel que $A_i = Q(a_i)$ pour tout i. P est de degré n et prend n fois la valeur A_1, donc on sait que

$$Q(X) = P(X) - A_1 = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$$

On est passé d'un polynôme dont les racines sont les $-b_j$ ($1 \leqslant j \leqslant n$) à un polynôme dont les racines sont les a_i ($1 \leqslant i \leqslant n$) : essayons d'exprimer B_j en utilisant le polynôme Q.

$$B_j = \prod_{i=1}^{n} (a_i + b_j) = \prod_{i=1}^{n} (-1)(-b_j - a_i) = (-1)^n Q(-b_j) = (-1)^n [P(-b_j) - A_1] = (-1)^{n+1} A_1$$

puisque $-b_j$ est racine de P. Comme on l'espérait, le résultat ne dépend pas de j.

2 Petit théorème de Fermat et ordre (Aimeric)

Définition 1.
$\phi(n)$ indicatrice d'Euler est le nombre d'entiers plus petits que n premiers avec n.

Théorème 2 (Théorème d'Euler)**.**
Si a est premier avec n, $a^{\phi(n)} \equiv 1 \mod n$.

Corollaire 3 (Petit théorème de Fermat)**.** Si p est un nombre premier, $a^p \equiv a \mod p$

Définition 4.
L'ordre multiplicatif d'un entier a modulo n est le plus petit entier strictement positif $\omega(a)$ (ou $o(a)$ tel que $a^{\omega(a)} \equiv 1 \mod n$

Théorème 5.
Si $a^k \equiv 1 \mod n$, alors $\omega(a)|k$.

Exercice 1
Que vaut le reste de la division par 17 de $11\dots11$ avec trente-deux 1 ?

Solution de l'exercice 1
On calcule :

$$\begin{aligned} 111\dots111 &= \sum_{k=0}^{31} 10^k \\ &= \frac{10^{32}-1}{10-1} \\ &\equiv 0 \mod 17 \end{aligned}$$

car 9 et 10 sont premiers avec 17

Exercice 2
Un nombre premier de Fermat est un nombre premier de la forme $2^{2^n}+1$. Trouver tous les diviseurs premiers de Fermat de $5^{1000}-5$.

Solution de l'exercice 2
Un tel diviseur premier p doit diviser 5 ou $5^{999}-1$. S'il est différent de 5, l'ordre de 5 doit donc diviser $\phi(p) = 2^{2^n}$ et 999 qui sont premiers entre eux, donc $5 \equiv 1 \mod p$, ce qui est impossible. La seule solution est donc 5.

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que la suite définie par $a_0 = 1$, $a_{n+1} = 2^{a_n}$ est stationnaire modulo n.

Solution de l'exercice 3
Si n est une puissance de 2, la suite s'annule à partir d'un certain rang. On prouve le résultat par récurrence forte : pour un entier pair $n = 2^k m$ avec m impair, d'après le théorème des restes chinois la suite est stationnaire modulo 2^k et modulo m par hypothèse de récurrence forte, donc modulo n. Si n est impair, la suite des exposants est stationnaire modulo $\phi(n)$ donc la suite est aussi stationnaire modulo n.

Exercice 4
Montrer que $n|\phi(2^n-1)$.

Solution de l'exercice 4
On remarque que n est l'ordre de 2 modulo $2^n - 1$, et le théorème 5 conclut.

Exercice 5
Soit q diviseur premier de $\sum_{k=0}^{p-1} p^k$. Montrer que $q \equiv 1 \mod p$.

Solution de l'exercice 5
cf. TD de l'an dernier

Exercice 6
Un ensemble d'entiers infini est tel que tout produit fini d'entiers moins un est un nombre premier. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers de cet ensemble qui ne sont pas divisibles par 42.

Solution de l'exercice 6
On va montrer que pour tout premier p, il n'y a qu'un nombre fini d'entiers qui ne sont pas divisibles par p. S'il y a une infinité d'entiers non divisibles par p congrus entre eux, le produit de $\phi(p)$ d'entre eux moins un est divisible par p donc doit être égal à p impossible (sauf pour un nombre fini de petits cas) car le produit est plus grand que p.

Exercice 7 (Une partie du théorème des deux carrés)
Montrer qu'un nombre premier congru à 3 modulo 4 ne peut pas diviser une somme de carrés premiers avec p et entre eux.

Solution de l'exercice 7
Si p divise $a^2 + b^2$, $(ab^{-1})^2 \equiv -1 \mod p$ donc l'ordre de ab^{-1} modulo p, est 4. Donc 4 divise $\phi(p) = p - 1$, et $p \equiv 1 \mod 4$.

3 Ordre (Serge et Théo)

Ce td a d'abord pour objectif de maîtriser les outils puissants en arithmétique déjà introduits dans le cours précédent : l'ordre et le petit théorème de Fermat. L'intérêt de ces outils est de manipuler les puissances d'un entier modulo un autre entier.

Rappelons d'abord les propriétés classiques de l'ordre :

(i) Soit a et n deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Alors l'ordre de a modulo n, noté ω, existe et se définit comme le plus petit entier strictement positif tel que $a^{\omega} \equiv 1 \pmod{n}$.

(ii) Soit a, n, k des entiers vérifiant $pgcd(a, n) = 1$. Alors $a^k \equiv 1 \pmod{n} \Longleftrightarrow \omega \mid k$.

(iii) (Théorème d'Euler-Fermat) Soit $n \geq 2$ et $\varphi(n)$ le nombre d'entiers plus petits que n et premiers avec n. Si $pgcd(a, n) = 1$, alors $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. En particulier, quand $n = p$ est un nombre premier, $\varphi(p) = p - 1$ et donc $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$: on retrouve le petit théorème de Fermat.

(iv) Il découle des propriétés (ii) et (iii) que $\omega \mid \varphi(n)$ et que si $n = p$, alors $\omega \mid p - 1$.

Les exercices 1 à 5 traitent d'idées diverses autour de l'ordre.

Les exercices 6 à 10 illustrent une idée très souvent utile dans des exercices d'ordre : considérer le plus petit facteur premier de n quand on regarde modulo n. L'intérêt d'une telle idée est qu'on ne sait pas très bien faire de l'ordre modulo n car on maîtrise mas $\varphi(n)$. En revanche, c'est plus facile de faire de l'ordre modulo un nombre premier p car on maîtrise alors très bien la valeur de $\varphi(p)$ qui vaut $p-1$. Pourquoi considérer le plus petit facteur ? L'idée est de trouver un facteur premier encore plus petit grâce aux relations de divisibilités de l'ordre et d'aboutir ainsi à une contradiction. Un exemple étant plus clair qu'une explication, cherchez ces exercices !

Les exercices 11 à 15 sont un peu plus durs et illustrent différentes idées et astuces autour de l'ordre.

Exercice 1
Montrer que 11 divise $2^{2024} - 4^{2022}$.

Exercice 2
Soit p un nombre premier. Montrer que tous les facteurs premiers de $2^p - 1$ sont strictement plus grand que p.

Exercice 3
Soit n un entier strictement positif impair. Montrer que n divise $2^{n!} - 1$.

Exercice 4
Soit n et b deux entiers strictement positifs. Soit p un nombre premier impair divisant $b^{2^n} + 1$. Montrer qu'il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1}m + 1$.

Exercice 5
Soit a et b des entiers strictement positifs. Montrer que $PGCD(2^a - 1, 2^b - 1) = 2^{PGCD(a,b)} - 1$.

Exercice 6
Déterminer tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que n divise $2^n - 1$.

Exercice 7
Déterminer tous les entiers strictement positif n impairs tels que n divise $3^n + 1$

Exercice 8
Déterminer tous les couples d'entiers (a, n) avec n strictement positif tels que n divise $(a + 1)^n - a^n$.

Exercice 9
Déterminer toutes les suites $(u_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs telles que pour tout $n \geqslant 1$, u_n divise $2^{u_{n+1}} - 1$.

Exercice 10
Déterminer tous les couples d'entiers (n, p) avec p premier, $0 < n \leqslant 2p$ et :

$$n^{p-1} | (p-1)^n + 1$$

Exercice 11
Soit k un entier strictement positif premier avec 6. Démontrer qu'il existe n un entier strictement positif tel que k divise $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Exercice 12
Déterminer tous les nombres premiers p tels que $2^p + p$ divise $3^p + p$.

Exercice 13
Déterminer tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que $pqr | (7^p - 3^p)(7^q - 3^q)(7^r - 3^r)$

Exercice 14
Déterminer tous les couples (p, q) de nombres premiers telles que pq divise $5^p + 5^q$.

Exercice 15
Déterminer tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs pour lesquels il existe des entiers strictement positifs g et N tels que l'égalité $PGCD(a^n + b, b^n + a) = g$ soit vérifiée pour tout entier $n \geqslant N$.

Solution de l'exercice 1
Comme 2 est premier avec 11, par le théorème de Petit Fermat, $2^{10} \equiv 1 \pmod{11}$. En particulier

$$2^{2024} \equiv \left(2^{10}\right)^{202} \times 2^4 \equiv 1^{202} \times 16 \equiv 16 \pmod{11}.$$

De même

$$4^{2022} \equiv \left(4^{10}\right)^{202} \times 4^2 \equiv 1^{202} \times 16 \equiv 16 \pmod{11}.$$

Ainsi $2^{2024} - 4^{2022} \equiv 16 - 16 \equiv 0 \pmod{11}$.

Solution de l'exercice 2
Soit q un facteur premier de $2^p - 1$. On a $2^p \equiv 1 \pmod{q}$. En particulier l'ordre de 2 modulo q existe (on le note ω) et divise p.

Si $\omega = 1$, on obtient que $2^1 \equiv 1 \pmod{q}$, donc q divise $2 - 1 = 1$ ce qui est absurde.

Ainsi $\omega = p$. Comme l'ordre de 2 modulo q existe, 2 est premier avec q, donc par Petit Fermat ω divise $q - 1$. Ainsi p divise $q - 1$, donc comme $q > 1$, on a $q \geqslant p + 1$. Ainsi tous les facteurs premiers de $2^p - 1$ sont strictement plus grand que p.

Solution de l'exercice 3
On sait que l'ordre de 2 modulo n existe car n est impair donc premier avec 2. Notons-le ω. Par le théorème d'Euler ω divise $\varphi(n)$. Comme $\varphi(n) \leqslant n$, $\varphi(n)|n!$ donc ω divise $n!$. Ainsi

$$2^{n!} \equiv (2^{\omega})^{n!/\omega} \equiv 1^{n!/\omega} \equiv 1 \pmod n$$

donc n divise $2^{n!} - 1$.

Solution de l'exercice 4
Regardons modulo p : $b^{2^n} = -1 \pmod p$ donc $b^{2^n} = -1 \pmod p$. En élevant au carré l'égalité précédente, $b^{2^{n+1}} = 1 \pmod p$. Notons ω l'ordre de b modulo p qui existe d'après l'équation précédente. Comme $b^{2^{n+1}} = 1 \pmod p$, ω divise 2^{n+1} donc ω s'écrit sous la forme 2^k avec $k \in [\![1, n+1]\!]$.

Si $k \leqslant n$, comme $\omega = 2^k$ divise 2^n, $-1 = b^{2^n} = 1 \pmod p$ donc $p = 2$. Ceci est impossible car p est impair. On en déduit que $\omega = 2^{n+1}$. Par le théorème de Fermat, ω divise $p-1$, donc il existe $m \in \mathbb{N}$ tel que $p = 2^{n+1}m + 1$.

Solution de l'exercice 5
Posons $d = 2^{PGCD(a,b)} - 1$, $d' = PGCD(2^a - 1, 2^b - 1)$ et montrons que d divise d'. Modulo d, $2^{PGCD(a,b)} \equiv 1 \pmod d$, donc l'ordre de 2 modulo d existe et divise $PGCD(a,b)$. Ainsi il divise a et b, donc $2^a \equiv 1 \equiv 2^b \pmod d$, ainsi d divise $2^a - 1$ et $2^b - 1$, donc divise $d' = PGCD(2^a - 1, 2^b - 1)$.

Réciproquement, montrons que d' divise d. Modulo d' on a $2^a \equiv 1 \pmod{d'}$ et $2^b \equiv 1 \pmod{d'}$ car d' divise $2^a - 1$ et $2^b - 1$. En particulier, l'ordre de 2 modulo d' existe et divise a et b, donc divise $PGCD(a,b)$. Ainsi $2^{PGCD(a,b)} \equiv 1 \pmod{d'}$, donc d' divise $2^{PGCD(a,b)} - 1 = d$.

Comme d divise d' et d' divise d, et les deux quantités sont positives, on a bien $d = d'$ qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 6
$n = 1$ est clairement solution, supposons désormais $n > 1$. Notons p le plus petit facteur premier de n, en particulier p divise $2^n - 1$. Modulo p, on a $2^n \equiv 1 \pmod p$, donc 2 admet un ordre modulo p. L'ordre de 2 (noté ω) divise alors $p-1$ et n.

Montrons que $PGCD(p-1, n) = 1$. Si le pgcd ne vaut pas 1, soit q un facteur premier de $p-1$ et de n. Comme q divise n, $q \geqslant p$, donc q ne divise pas $p-1$ ce qui est absurde.

Ainsi ω divise $PGCD(p-1, n) = 1$, donc $\omega = 1$. Ainsi $2^1 \equiv 1 \pmod p$, donc p divise $2^1 - 1 = 1$ ce qui est absurde.

On a aboutit à une contradiction, ainsi le seul entier solution est $n = 1$.

Solution de l'exercice 7
Tout d'abord, $n = 1$ est solution, supposons désormais $n > 1$.

Notons p le plus petit facteur premier de n, en particulier p divise $3^n - 1$. Modulo p, on a $3^n \equiv -1 \pmod p$, donc en élevant au carré, $3^{2n} \equiv 1 \pmod p$ donc 3 admet un ordre modulo p. L'ordre de 3 (noté ω) divise alors $p-1$ et $2n$.

Comme dans l'exercice 6, on a que $p-1$ est premier avec n. Comme ω divise $p-1$, ω est premier avec n donc divise 2.

Ainsi $p \mid 3^2 - 1 = 8$ donc $p = 2$, ce qui est absurde car n est impair.

$n = 1$ est donc la seule solution.

Solution de l'exercice 8
Si $n = 1$, tout a convient.

Sinon supposons $n > 1$ et notons q le plus petit diviseur premier de n. q divise $(a+1)^n - a^n$, donc modulo q, $(a+1)^n \equiv a^n \pmod{q}$. Or, si $q|a$ alors $q|a^n$ donc $q|(a+1)^n$ donc $q|a+1$. Ainsi $q \mid a+1-a = 1$, ce qui est absurde.

On obtient donc que a est inversible, notons u un inverse de a modulo n. On a $\Big((1+a)u\Big)^n \equiv 1 \pmod{q}$. Ainsi notons d l'ordre de $(1+a)u$ modulo q qui existe : d divise n et $q-1$. Comme dans les exercices précédents, $q-1$ et n sont premiers entre eux donc $d = 1$ .Ainsi $(1+a)u \equiv 1 \pmod{d}$ donc en multipliant par a, on a $1+a \equiv a \pmod{q}$. En particulier q divise $1+a-a = 1$ ce qui est absurde.

Les seules solutions sont donc les couples de la forme $(1, a)$ avec a entier.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Soit $(u_n)_{n\geqslant 1}$ une suite vérifiant l'énoncé. Montrons que $u_1 = 1$. S'il existe $N \geqslant 1$ tel que $u_N = 1$, alors u_{N-1} divise $2^{u_N} - 1 = 1$, donc $u_{N-1} = 1$. En particulier, par récurrence immédiate, $u_{N-k} = 1$ pour tout $k \in \{0, \dots, N-1\}$. Pour $k = N-1$, on a $u_1 = 1$.

Désormais supposons $u_n > 1$ pour tout $n \geqslant 1$. On note alors q_n le plus petit facteur premier de u_n pour tout $n \geqslant 1$. Notons que p_n divise u_n qui divise $2^{u_{n+1}} - 1$. Ainsi modulo q_n, on a $2^{u_{n+1}} \equiv 1 \pmod{q_n}$. L'ordre de 2 existe (notons-le ω_n) donc modulo q_n et divise u_{n+1}. De plus par Petit Fermat il divise $q_n - 1$.

Si $\omega_n = 1$, alors $2^1 \equiv 1 \pmod{q_n}$, donc q_n divise $2-1 = 1$ ce qui est absurde. Ainsi $\omega_n > 1$: notons q un facteur premier de ω_n. Comme q divise ω_n, q divise u_{n+1} donc $p_{n+1} \leqslant q$. Or q divise $p_n - 1$, donc $q < p_n$. Ainsi $p_{n+1} < p_n$ pour tout $n \geqslant 1$.

On a ainsi une suite strictement décroissante $(p_n)_{n\geqslant 1}$ d'entiers strictement positifs ce qui est impossible. On a donc une contradiction : on obtient bien que $u_1 = 1$.

Soit $N \geqslant 1$, montrons que $u_{N+1} = 1$. La suite $(u_{n+N})_{n\geqslant 1}$ vérifie aussi l'énoncé par hypothèse, donc $u_{N+1} = 1$. Comme pour tout $N \geqslant 1$, $u_{N+1} = 1$ et $u_1 = 1$, la suite est constante égale à 1.

Réciproquement la suite constante égale à 1 vérifie clairement l'énoncé car 1 divise $2^1 - 1$, c'est donc l'unique solution.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>

Supposons $n = 1$, la condition se réécrit $0 < 1 \leqslant 2p$ $1|p$ ce qui est vrai pour tout p premier, donc $(1, p)$ est solution pour tout p premier.

Désormais supposons $n \geqslant 2$ et notons q le plus petit diviseur premier de n. Si $q = 2$, alors n est pair donc $(p-1)^n + 1$ aussi, donc $p-1$ est impair. Ainsi p est pair donc $p = 2$. Réciproquement si $p = 2$ la condition se réécrit $n|2$ et on a la solution $(2, 2)$ qui réciproquement vérifie toutes les conditions de l'énoncé (car 2 divise $1+1$ et $0 < 2 \leqslant 4$).

On peut donc désormais supposer $q \geqslant 3$ et $p \neq 2$. Comme q divise $(p-1)^n + 1$, on a $(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$. En élevant au carré, $(p-1)^{2n} \equiv 1 \pmod{q}$. En particulier l'ordre de $p-1$ modulo q existe (notons-le d), et divise $2n$. Par Petit Fermat, il divise aussi $q-1$. Comme dans les exercices précédents, on montre que n et $q-1$ sont premiers entre eux. Comme d divise $q-1$, il est premier avec n. Comme d divise $2n$, on a donc que d divise 2, donc $(p-1)^2 \equiv 1 \pmod{p}$.

De plus comme $q \geqslant 3$, n est impair, donc

$$-1 \equiv (p-1)^n \equiv \left((p-1)^2\right)^{\frac{n-1}{2}} \times (p-1) \equiv 1^{\frac{n-1}{2}}(p-1) \equiv p-1 \pmod{q}.$$

Ainsi q divise $p-1+1 = p$, donc $q = p$.

Comme $n \leqslant 2p$, on a $n = p$ ou $n = 2p$, mais si $n = 2p$ alors $q = 2$ et on a supposé le contraire, donc $n = p$. On obtient alors que $p^{p-1}|(p-1)^p + 1$. En développant avec le binôme de Newton, on obtient :

$$(p-1)^p + 1 = p^p - \binom{p}{p-1}p^{p-1} + \ldots + \binom{p}{3}p^3 - \binom{p}{2}p^2 + \binom{p}{1}p - 1 + 1$$

Tous les termes sont divisibles par p^3 sauf éventuellement les trois derniers. L'antépénultième vaut $\frac{p(p-1)}{2}p^2$ donc est divisible par p^3 car p est impair, donc $(p-1)^p + 1 \equiv p^2 \pmod{p^3}$, donc n'est pas divisible par p^3. Il faut donc que $p - 1 < 3$, donc $p = 3$.

On vérifie aisément que si $n = p = 3$, on a bien $0 < 3 \leqslant 2 \times 3$ et que $3^2 = 9$ divise $2^3 + 1 = 9$.

Les solutions sont donc finalement $(1, p)$ pour tout p premier, $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

Solution de l'exercice 11

Notons que $\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = 0$. Informellement, il faudrait donc choisir n tel que $2^n \equiv 2^{-1} \pmod{k}$, $3^n \equiv 3^{-1} \pmod{k}$ et $6^n \equiv 6^{-1} \pmod{k}$. Comme $2^{\varphi(k)} \equiv 3^{\varphi(k)} \equiv 6^{\varphi(k)} \equiv 1 \pmod{p}$ par Petit Fermat, le bon entier à considérer semble $\varphi(k) - 1$. Mais pour que n soit strictement positif, on consdière plutôt $2\varphi(k) - 1$. On prend donc $n = 2\varphi(k) - 1$. Alors 2, 3 et 6 sont premiers avec k et :

$$6(2^{2\varphi(k)-1} + 3^{2\varphi(k)-1} + 6^{2\varphi(k)-1} - 1) \equiv 3 \times 2^{2\varphi(k)} + 2 \times 3^{2\varphi(k)} + 6^{2\varphi(k)} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod{p}.$$

En particulier, k divise $6(2^n + 3^n + 6^n - 1)$, donc comme k est premier avec 6, k divise $2^n + 3^n + 6^n - 1$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 12

Soit p premier tel que $2^p + p$ divise $3^p + p$. Notons q un facteur premier de $2^p + p$. q divise $2^p + p$ et $3^p + p$, donc q divise $3^p - 2^p$ qui est impair. Ainsi $q \neq 2$, donc 2 est inversible mod q. Comme $3^p \equiv 2^p \pmod{q}$, en posant u un inverse de 2 modulo q, on a $(3u)^p \equiv 1 \pmod{q}$.

Posons ω l'ordre de $3u$ modulo q : par hypothèse ω existe et divise p. Si $\omega = 1$, on a $3u \equiv 1 \pmod{q}$, donc en multipliant par 2 $3 \equiv 2 \pmod{q}$. Ainsi q divise $3 - 2 = 1$ ce qui est absurde. On a donc $\omega \neq 1$, et comme ω divise p, $\omega = p$.

Or par Petit Fermat, ω divise $q - 1$, donc $q \equiv 1 \pmod{p}$. En particulier, comme tous les facteurs premiers de $2^p + p$ valent 1 modulo p, on a que $2^p + p \equiv 1 \pmod{p}$. Or si $p \neq 2$, par Petit Fermat, $2^p + p \equiv 2 \not\equiv 1 \pmod{p}$. Si $p = 2$, alors $2^p + p \equiv 0 \pmod{p}$ ce qui est aussi absurde.

Ainsi il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 13

Si $p = 3$, alors $(7^p - 3^p)(7^q - 3^q)(7^r - 3^r) \equiv 7^{p+q+r} \not\equiv 0 \pmod{3}$. Contradiction. On trouve de manière analogue que $p \neq 7$ puis par symétrie de p, q et r dans le problème on en déduit que $p, q, r \neq 3, 7$.

Traitons d'abord le cas où $min(p, q, r) > 2$.

On suppose sans perte de généralité que $p = min(p, q, r)$. Alors, d'après le petit théorème de Fermat, $(7^p - 3^p)(7^q - 3^q)(7^r - 3^r) \equiv 4(7^q - 3^q)(7^r - 3^r) \pmod{p}$. Comme $p \neq 2$, p est premier avec 4, donc $p \mid (7^q - 3^q)(7^r - 3^r)$. Supposons spdg que $p|7^q - 3^q$. Alors $7^q \equiv 3^q \pmod{p}$. Comme $p \neq 3$, 3 admet un inverse modulo p, que l'on note u. Alors $(7u)^q \equiv 1 \pmod{p}$. Comme p est premier avec 7 et 3, il est premier avec $7u$. Donc l'ordre de $7u$ modulo p, noté ω, existe et vérifie $\omega|q$. Si $\omega = 1$, alors $(7u)^1 \equiv 1 \pmod p$ et en multipliant par 3, on a $7 \equiv 3 \pmod p$ donc $p|7-3=4$. Contradiction avec $p \neq 2$. Comme $\omega|q$, on en déduit que $\omega = q$. Or $\omega|p-1$ d'après le petit théorème de Fermat. Donc $q|p-1$. Donc $q < p$ car $p-1 > 0$. Contradiction aveec la minimalité de p.

On traite maintenant le cas où $min(p,q,r) = 2$.

Supposons spdg que $2 = p \leq q \leq r$. Alors d'après le petit théorème de Fermat $0 \equiv (7^p-3^p)(7^q-3^q)(7^r-3^r) \equiv (7^2-3^2)(7-3)(7^r-3^r) \equiv 160(7^r-3^r) \pmod q$. Si q est premier avec 160, alors $q|7^r-3^r$ et par un raisonnement analogue au paragraphe précédent on aboutit à une contradiction avec $q \leq r$. Donc $q|160 = 2^5 \cdot 5$. Donc $q = 2$ ou $q = 5$.

On trait chacun des 2 cas séparément avec un peu de calcul.

Si $p = q = 2$, alors d'après le petit théorème de Fermat, $r|(7^2-3^2)^2(7-3) = 40^2 \cdot 4 = 2^8 \cdot 5^2$. Donc $r = 2$ ou $r = 5$. Cela nous donne potentiellement les solutions $(2,2,2)$ et $(2,2,5)$ qu'on vérifiera à la fin du raisonnement.

Si $p = 2$ et $q = 5$, alors de même $r|(7^5-3^5)(7^2-3^2)(7-3) = 2^5 \cdot 5 \cdot (7^5-3^5)$. Comme $r \geq q = 5$, on a $r = 5$ ou alors r est un facteur premier de 7^5-3^5. Calculons l'atroce nombre 7^5-3^5 :

$$7^5-3^5 = 4(7^4+7^3\cdot3+7^2\cdot3^2+7\cdot3^3+3^4) = 4(2401+1029+441+189+81) = 4\cdot4141 = 4\cdot41\cdot101$$

Donc $r = 41$ ou $r = 101$. On a donc les potentielles solutions $(2,5,5)$, $(2,5,41)$ et $(2,5,101)$ à vérifier.

$(2,2,2)$ convient car $2^3|(7^2-3^2)$.

$(2,2,5)$ convient car $2^2 \cdot 5|(7^2-3^2)$.

$(2,5,5)$ ne convient pas car $5 \nmid 7^5-3^5$ et $5^2 \nmid 7^2-3^2$.

$(2,5,41)$ et $(2,5,101)$ conviennent car $2,5$ et 41 (resp. 101) sont deux à deux premiers entre eux, et 2×5 divise 7^2-3^2 et 41 et 101 divise 7^5-3^5.

Ainsi les solutions sont les triplets $(2,2,2), (2,2,5), (2,5,41), (2,5,101)$.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>

Supposons que pq divise 5^p+5^q. Supposons tout d'abord que $p \neq 5,2$ et $q \neq 5,2$, dans ce cas p et q sont premiers avec 5. En particulier modulo p, par le petit théorème de Fermat, $0 \equiv 5^p+5^q \equiv 5+5^q \pmod p$, donc $5^{q-1}+1 \equiv 0 \pmod p$ en simplifiant par 5. Ainsi on a $5^{q-1} \equiv -1 \pmod p$ donc $5^{2(q-1)} \equiv 1 \pmod p$.

Notons ω l'ordre de 5 modulo q qui existe et divise $2(q-1)$ mais pas $q-1$ car $5^{q-1} \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod p$ vu que $p \neq 2$. En particulier pour tout p premier impair, $V_p(\omega) \leqslant V_p(2(q-1)) = V_p(q-1)$. Comme ω ne divise pas $q-1$, il existe p' premier tel que $V_{p'}(\omega) > V_{p'}(q-1)$, donc p' ne peut être impair. On a donc $p' = 2$, donc $V_2(\omega) > V_2(q-1)$.

Or ω divise $2(q-1)$, donc $V_2(\omega) \leqslant 1+V_2(q-1)$. Ainsi on a $V_2(\omega) = 1+V_2(q-1)$. Or par Petit Fermat, ω divise $p-1$, donc $1+V_2(q-1) = V_2(\omega) \leqslant V_2(p-1)$.

De même par symétrie, $1+V_2(p-1) \leqslant V_2(q-1)$, donc en sommant les deux inégalités précédentes, $2+V_2(p-1)+V_2(q-1) \leqslant V_2(p-1)+V_2(q-1)$ ce qui est absurde.

On en déduit donc que soit $p = 5$ ou 2, soit $q = 5$ ou 2. Par symétrie supposons $p = 2$ ou 5.

— Si $p = 2$, $2q$ divise $25+5^q$. En particulier, modulo q, si $q \neq 5$, $0 \equiv 25+5^q \equiv 25+5 \equiv 30 \pmod 5$ par le théorème de Petit Fermat. Ainsi on a $q = 2,3$ ou 5. Réciproquement, $(2,2)$ ne convient pas car 4 ne divise pas $25+25 = 50$, $(2,3)$ et $(3,2)$ conviennent car 6 divise $5^3+5^2 = 150$, et $(2,5)$ convient car 10 divise $25(1+5^3)$ vu que $1+5^3$ est divisible par 2, et 25 par 5.

— Si $p = 5$, $5q$ divise $5^5 + 5^q$. En particulier, modulo q, si $q \neq 5$, $0 \equiv 5^5 + 5^q \equiv 5(5^4+1) \equiv 5 \times 626 \equiv 30 \pmod 5$ par le théorème de Petit Fermat. En particulier, si $q \neq 5$, q divise $626 = 2 \times 313$, donc $q = 2$ ou 313.

Réciproquement on a déjà vérifié que $(2,5)$ et $(5,2)$ sont solution, $(5,5)$ l'est aussi car 25 divise 2×5^5, et pour $(5,313)$ et $(313,5)$, on a bien que 5 divise $5^{313} + 5^5$, et comme 313 est premier, $5^{313} + 5^5 \equiv 5 + 5^5 \equiv 5 \times 626 \equiv 0 \pmod{313}$ par Petit Fermat, donc comme 313 et 5 sont premiers entre eux, 5×313 divise bien $5^5 + 5^{313}$: le couple est bien solution.

Ainsi les couples solution sont $(2,3), (3,2), (2,5), (5,2), (5,5), (5,313), (313,5)$.

Solution de l'exercice 15

Idéalement on aimerait trouver un n tel qu'on puisse factoriser $a^n + b$ et $b^n + a$ par la même quantité. En effet, si p divise cette quantité, et a et b ont un ordre modulo p, alors les deux quantités sont divisibles par p au rang $n + k(p-1)$ pour tout $k \geqslant 0$.

On est rapidement tenté de regarder $a+b$, mais à priori, si a, b et $a+b$ ont le même radical, cela ne convient pas. Et pour $n \geqslant 0$, on ne trouve pas de telle quantité. Par contre pour $n = -1$, on obtient $a^{-1} + b = \frac{1+ab}{a}$ et $b^{-1} + a = \frac{1+ab}{b}$. Ainsi $K = 1 + ab$ semble être la bonne quantité à considérer, en prenant des n de la forme $\ell\phi(K) - 1$.

Notons que K est premier avec a et b. En particulier, si n est de la forme $\ell\phi(K) - 1$, avec ℓ assez grand pour que $\ell\phi(K) - 1 > N$, on a que

$$a(a^n + b) \equiv a^{n+1} + ab \equiv a^{\ell\phi(K)} + ab \equiv 1 + ab \equiv 0 \pmod K$$

par le théorème d'Euler. Comme K est premier avec a, K divise $a^n + b$. De même K divise $b^n + a$, donc K divise g. En particulier K divise $PGCD(a^{n+1} + b, b^{n+1} + a)$, donc $0 \equiv a^{n+1} + b \equiv 1 + b \pmod K$, donc $b \equiv -1 \pmod K$. De même $a \equiv -1 \pmod K$, donc

$$0 \equiv ab + 1 \equiv (-1)^2 + 1 \equiv 2 \pmod K.$$

On en déduit que K divise 2. Or $K \geqslant 2$, avec égalité si et seulement si $a = b = 1$, donc $a = b = 1$.

Réciproquement, si $a = b = 1$, alors $a^n + b = b^n + a = 2$ pour tout $n \geqslant 0$, donc $(1,1)$ est bien solution.

4 Polynômes 2 (Benoît)

Le cours traitait des comportement en l'infini des polynômes, des relations de Viète et de l'interpolation de Lagrange. La partie cours était tirée de l'exquis cours Polynômes 2 de Georges de 2023.

Exercices pour commencer

Exercice 1
P est un polynôme de degré 4. $P(0) = P(1) = 1, P(2) = 4, P(3) = 9, P(4) = 16$. Calculer $P(-1)$

Solution de l'exercice 1
P ressemble beaucoup à X^2, nous allons donc étudier $P(X) - X^2$. Ce polynôme possède 4 racines (1,2,3,4). Ainsi $P(X) - X^2 = (X-1)(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)$, où Q est un polynôme. Etudions les degrés :
$\deg(P(X)-X^2) = 4 = \deg((X-1)(X-2)(X-3)(X-4)Q(X)) = 4 + \deg(Q) \iff \deg(Q) = 0$
Par conséquent Q est une constante c, que l'on va déterminer avec $P(0)$. $P(0) - 0^2 = c(0-1)(0-2)(0-3)(0-4) \iff c = \frac{1}{4!} = \frac{1}{24}$. Donc $P(-1) = (-1)^2 + \frac{(-2)\cdot(-3)\cdot(-4)\cdot(-5)}{4!} \iff P(-1) = 1 + 5 = 6$

Exercice 2
Déterminer tous les polynômes P tels que que $P(0) = 0$ et $P(X^2 + 1) = P(X)^2 + 1$

Solution de l'exercice 2
Soit u_n, la suite telle que $u_{n+1} = u_n^2 + 1$ et $u_0 = 0$. Par récurrence immédiate $P(u_n) = u_n$. Or la suite u_n est strictement croissante et prend donc une infinité de valeurs. Ainsi, le polynôme $P(X) - X$ a une infinité de racines donc vaut 0. Ainsi, $P(X) = X$.

Exercice 3
Montrer qu'il n'existe pas de polynômes tels que pour tous $n \in \mathbb{N}^*$ on a :

$$P(n) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \ldots + \frac{1}{n}$$

Solution de l'exercice 3
On a $0 < P(n) < n$, ainsi $\deg P \leqslant \deg(X) = 1$. Donc P est de la forme $aX + b$. Par $P(1) = 1$ et $P(2) = \frac{3}{2}$, on a $a = b = \frac{1}{2}$. Cependant, on n'a pas $P(3) = 2$, c'est absurde.

Exercice 4
Montrer que tous les polynômes P tels que pour tous x réels on a :

$$xP(x)P(1-x) + x^3 + 100 \geqslant 0$$

on a P de la forme $P = X + b$ ou $P = -X + b$.

Solution de l'exercice 4
Soit $Q(X) = XP(X)P(1-X) + X^3 + 100$. On suppose que P est de degré n plus grand que 2. Alors $\deg Q = 2n + 1$, comme Q est de degré impair, il est soit négatif pour les nombres très négatifs, soit négatif pour les nombres très positifs, c'est absurde. Donc P est de degré

inférieur à 1. On écrit $P = aX + b$.
Ainsi $Q = X(aX + b)(a + b - aX) + X^3 + 100 = (1 - a^2)X^3 + a^2X^2 + b(a + b)X + 100$. Par le même raisonnement, on ne peut pas avoir Q de degré 3. Ainsi, $-a^2X^3 + X^3 = 0$ et donc $a = \pm 1$

Exercice 5
Trouver tous les réels x et y tels que :

$$\begin{cases} x + y = 2 \\ x^2 + y^2 = 10 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 5
On cherche à trouver les valeurs xy et $x + y$. On a $x + y = 2$. Or, $(x + y)^2 = x^2 + 2xy + y^2 = 4$ donc $2xy = -6$ et $xy = -3$. Ainsi x et y sont les racines de

$$X^2 - 2X - 3$$

On trouve 1 et -3 comme racines, donc les solutions sont $(1, -3)$ et $(-3, 1)$.

Exercice 6
Trouver tous les triplets de réels (x, y, z) tels que :

$$\begin{cases} x + y + z = 2 \\ x^2 + y^2 + z^2 = 14 \\ x^3 + y^3 + z^3 = 20 \end{cases}$$

Solution de l'exercice 6
De la même façon que dans l'exercice précédent, on essaye de trouver les polynômes de Viète : $x + y + z$, $xy + yz + zx$ et xyz.
On a déjà $x + y + z = 2$, par ailleurs :

$$(x + y + z)^2 = 4 = x^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx)$$

donc $xy + yz + zx = -5$. De plus :

$$(x + y + z)^3 = 8 = x^3 + y^3 + z^3 + 6xyz + 3(xy^2 + yz^2 + zx^2 + yx^2 + xz^2 + zy^2)$$

En utilisant,

$$(x + y + z)(xy + zx + yz) = (xy^2 + yz^2 + zx^2 + yx^2 + xz^2 + zy^2) + 3xyz$$

On a donc $xyz = -6$, ainsi, x, y, z sont les racines du polynôme

$$X^3 - 2X^2 - 5X + 6$$

On observe que $1, -2$ et 3 sont racines de ce polynôme donc $(x, y, z) = (-2, 1, 3)$ ou une permutation de ces nombres.

Exercice 7
Déterminer les polynômes P de degré 2 tels que $P(0) = 4$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 2$.

Solution de l'exercice 7
On peut utiliser l'interpolation de Lagrange, on a alors :

$$P(X) = 4 \cdot \frac{(X-1)(X-2)}{2} + 2 \cdot \frac{X(X-2)}{-1} + 2 \cdot \frac{X(X-1)}{2} = X^2 - 3X + 4$$

On peut d'ailleurs vérifier que ce polynôme vérifie l'énoncé et donc par rigidité c'est le seul.

Exercice 8
Soit $a_1, \ldots, a_n$ des réels distincts et $b_1, \ldots, b_n$ des réels. Déterminer tous les polynômes P unitaires de degré n tels que pour tout i, $P(a_i) = b_i$.

Solution de l'exercice 8
On considère Q le polynôme interpolateur de Lagrange des a_i et b_i. On a $\deg Q \leqslant n-1$. On considère P un polynôme qui vérifie l'énoncé. On a alors $P - Q$ qui a les $a_1, \ldots, a_n$ comme racines et est de degré n unitaire, donc $P - Q = (X-a_1)\cdots(X-a_n)$. Finalement, l'unique solution est :

$$P = Q + (X-a_1)(X-a_2)\cdots(X-a_n)$$

Exercices pour continuer

Exercice 9
Soit a, b et c les racines de $X^3 - 3X + 1$ calculer $a^4 + b^4 + c^4$.

Solution de l'exercice 9
On a $a+b+c=0$, $ab+bc+ca=-3$ et $abc=-1$, on pourrait donc calculer $a^4+b^4+c^4$ en développant $(a+b+c)^4$. Cependant, ici, on peut être plus efficace. Les a, b, c sont racines du polynôme $X^3 - 3X + 1$, en particulier $a^4 - 3a^2 + a = 0$ (et la même chose pour b et c). Ainsi

$$A = a^4 + b^4 + c^4 = 3(a^2+b^2+c^2) - (a+b+c) = 3((a+b+c)^2 - 2(ab+bc+ca)) = 18$$

Exercice 10
Résoudre

$$\sqrt{x} + \sqrt{13-x} = 5$$

Solution de l'exercice 10
On peut mettre au carré astucieusement deux fois pour se ramener à un trinôme mais on peut également utiliser les formules de Viète. On note $y = \sqrt{x}$ et $z = \sqrt{13-x}$. On a alors :

$$\begin{cases} y + z = 5 \\ y^2 + z^2 = 13 \end{cases}$$

Ainsi, $yz = 6$ et donc y et z sont les racines du polynôme $X^2 - 5X + 6$ soit 2 et 3. Selon que $y = 2$ ou $y = 3$, on a $x = 4$ ou $x = 9$

Exercice 11
Soit P un polynôme de degré 3 à coefficients réels. On suppose qu'il existe i un entier tel que $P(i), P(i+1), P(i+2)$ et $P(i+3)$ sont entiers.
Montrer que $P(n)$ est entier pour tout n entier.

Solution de l'exercice 11
On considère P comme polynôme interpolateur de Lagrange pour ces conditions, on a :

$$P = P(i)L_i + P(i+1)L_{i+1} + P(i+2)L_{i+2} + P(i+3)L_{i+3}$$

Montrons que chacun des L_j prend des valeurs entières sur les entiers, on a

$$L_i = \frac{(X-i-1)(X-i-2)(X-i-3)}{-6}$$

Or si on évalue ce polynôme en un entier n, le numérateur est le produit de 3 entiers consécutifs, l'un est donc pair et l'un est un multiple de 3, ainsi le numérateur est divisible par 6 et $L_i(n)$ est un entier. On peut faire le même raisonnement sur les autres L_j, ainsi, P prend des valeurs entières sur les entiers.

Exercice 12
Soit $n > 2$, montrer que le polynôme $X^n + X^{n-1} + 2$ ne peut pas avoir n racines réelles.

Solution de l'exercice 12
On suppose que le polynôme a $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ comme racines réelles. Par les formules de Viète, on a $(\alpha_1 + \ldots + \alpha_n) = 1$ et $\sum_{i \neq j} \alpha_i \alpha_j = 0$, ainsi :

$$(\sum_i \alpha_i)^2 = (-1)^2 + 2 \cdot 0 = 1$$

Donc la somme de toutes les racines au carré vaut 1, en particulier, chaque racine est de norme inférieure à 1. Or on a également $\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n = (-1)^n 2$, c'est impossible car un produit de réels de norme plus petite que 1 donne un nombre de norme plus petit que 1.

Exercice 13
Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients réels et $k_0, k_1, \dots, k_n$ des entiers. Montrer qu'on a $|P(k_i)| \geqslant \frac{n!}{2^n}$ pour au moins un i de $[\![0, n]\!]$.

Solution de l'exercice 13
On suppose sans perte de généralités, que $k_0 < k_1 < \ldots < k_n$, on écrit P comme interpolation, on a :

$$P = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j \neq i} \frac{X - k_j}{k_i - k_j} \right) P(k_i)$$

Comme P est unitaire, on peut écrire :

$$1 = \sum_{i=0}^{n} \left(\prod_{j \neq i} \frac{1}{k_i - k_j} \right) P(k_i)$$

On peut alors remarquer que comme 2 entiers sont séparés d'au moins 1, on a en valeur absolue :

$$\prod_{j \neq i} (k_i - k_j) = \prod_{j < i} (k_i - k_j) \prod_{j > i} (k_i - k_j) \geqslant i!(n-i)!$$

On suppose maintenant par l'absurde que l'énoncé est faux, on a alors :

$$\sum_{i=0}^{n}\left(\prod_{j\neq i}\frac{1}{k_i-k_j}\right)P(k_i) < \sum_{i=0}^{n}\left|\prod_{j\neq i}\frac{1}{k_i-k_j}\right|\frac{n!}{2^n} \leqslant \frac{1}{2^n}\sum_{i=0}^{n}\frac{n!}{i!(n-i)!} = 1$$

C'est absurde.

Exercice 14
Soit a, b, c et d des réels. On suppose

$$\begin{cases} abc - d = 1 \\ bcd - a = 2 \\ cda - b = 3 \\ dab - c = -6 \end{cases}$$

Montrer que $a+b+c+d \neq 0$

Solution de l'exercice 14
On suppose par l'absurde que $a+b+c+d=0$. On remarque alors qu'en sommant les hypothèses, on a :

$$abc + bcd + cda + dab = 0$$

Cela signifie que a, b, c et d sont les racines d'un polynôme de la forme

$$X^4 + kX^2 + l$$

En particulier, si x est une racine du polynôme alors $-x$ aussi. On ne peut clairement pas avoir tous les a, b, c et d nuls, donc deux nombres sont opposés. Supposons par exemple $a=-b$ (les autres cas se traitent la même façon), alors par la deuxième et la troisième égalité, on a :

$$-acd - a = 2 \quad \text{et} \quad cda + a = 3$$

C'est absurde. Donc $a+b+c+d \neq 0$

Exercice 15
Soit P un polynôme unitaire de degré n à coefficients réels. Montrer qu'il existe deux polynômes Q et R unitaires de degrés n à coefficients réels, et ayant chacun n racines réelles comptées avec multiplicité, tels que :

$$P = \frac{Q+R}{2}$$

Solution de l'exercice 15
Soit $i \in \{1, \dots, n\}$. Si i est impair, on pose $y_i = \max(0, 2P(i)) + 1$, si i est pair, on pose $y_i = \min(0, 2P(i)) - 1$. Soit T le polynôme d'interpolation de Lagrange associé aux points $(i, y_i - i^n)$ pour i entre 1 et n, qui est donc de degré inférieur ou égal à $n-1$, et posons $Q(x) = x^n + T(x)$ et $R(x) = 2P(x) - Q(x)$.

On vérifie aisément que Q et R sont deux polynômes unitaires de degrés n à coefficients réels vérifiant $P = \dfrac{Q+R}{2}$. Vérifions à présent qu'ils ont chacun n racines réelles comptées avec multiplicité. Par définition de Q et R, on a pour tout i entre 1 et n : $Q(i) = y_i$ et $R(i) = 2P(i) - y_i$. Ainsi, on a $Q(1) > 0, Q(2) < 0, Q(3) > 0, \ldots$ et $R(1) < 0, R(2) > 0, R(3) < 0, \ldots$. Comme les fonctions $Q(x)$ et $R(x)$ sont continues, pour tout i entre 1 et $n-1$, Q et R changent de signe entre i et $i+1$, et ont donc une racine dans cet intervalle.

Ainsi, ces deux polynômes ont $n-1$ racines $q_1, \ldots, q_{n-1}$ et $r_1, \ldots, r_{n-1}$ respectivement : on peut poser $Q = (X - q_1) \cdots (X - q_{n-1})Q_0$ et $R = (X - r_1) \cdots (X - r_{n-1})R_0$, les polynômes Q_0 et R_0 sont alors de degrés 1, et ont une racine réelle, ainsi Q et R ont n racines réelles comptées avec multiplicité, ce qui conclut.

5 Inégalités (Gabriel et Lucile)

Rappels & Preuves

Rappel 1 (Inégalité Arithmético-Géométrique - ♣)**.**
Soit $a_1, \dots a_n$ des réels positifs ou nuls, on a

$$\sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + a_2 + \cdots + a_n}{n}$$

avec égalité si et seulement si tous les a_i sont égaux.

Rappel 2 (IAG pondérée)**.**
Soit $a_1, \dots a_n$ des réels $\geqslant 0$ et $\lambda_1, \dots \lambda_n \geqslant 0$ tq $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$, on a

$$a_1^{\lambda_1} a_2^{\lambda_2} \cdots a_n^{\lambda_n} \leqslant \lambda_1 a_1 + \lambda_2 a_2 + \cdots + \lambda_n a_n.$$

Démonstration. Il s'agit de l'inégalité de Jensen appliquée à la fonction $\log$, concave.
Alternativement : l'inégalité étant homogène on peut supposer spdg que $a_1 \cdots a_n = 1$. On peut maintenant procéder par récurrence.
INITIALISATION : $a_1 \geqslant 1 = a_1$.
HÉRÉDITÉ : Supposons que l'inégalité est vraie au rang $n-1$. Soit $a_1, \dots, a_n$ tq $a_1 \cdots a_n = 1$ à quitte réordonner nos termes, on peut supposer que $a_1 = \max_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \geqslant 1$ et $a_2 = \min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_i \leqslant 1$ et ainsi

$$(a_1 - 1)(a_2 - 1) \leqslant 0 \quad \textit{i.e.} \quad a_1 + a_2 - a_1 a_2 \leqslant 1 \tag{V.1}$$

Par ailleurs l'inégalité au rang $n-1$ appliquée à la famille $a_1 a_2, a_3, \dots, a_n$ donne

$$a_1 a_2 + a_3 + \ldots + a_n \leqslant n - 1 \tag{V.2}$$

On conclut la récurrence en sommant (1) et (2).
Avec cette seconde preuve, on peut montrer la version pondérée en la montrant d'abord pour des pondérations rationnelles puis pour toutes les pondérations avec des arguments de passage à la limite.

□

Rappel 3 (Cauchy-Schwarz - ♣)**.**
Soit $a_1, \dots a_n$ et $b_1, \dots b_n$ des réels alors on a

$$(a_1 b_1 + \cdots + a_n b_n)^2 \leqslant (a_1^2 + \cdots + a_n^2)(b_1^2 + \cdots + b_n^2)$$

avec égalité si et seulement s'il existe un réel k, pour tout $i, b_i = k a_i$.

Remarque 4 (Identité de Lagrange)**.**
En fait, on peut donner une égalité qui est plus précise que C-S :

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \sum_{i=1}^{n} b_i^2 - \left(\sum_{i=1}^{n} a_i b_i \right)^2 = \sum_{i<j} (a_i b_j - a_j b_i)^2.$$

Démonstration. Il suffit de prouver l'identité de Lagrange :

$$\sum_{1\leqslant i<j\leqslant n}(a_ib_j-a_jb_i)^2=\sum_{i<j}(a_i^2b_j^2+a_j^2b_i^2)+\sum_{i=1}^n a_i^2b_i^2-\sum_{i=1}^n a_i^2b_i^2-2\sum_{i<j}a_ib_ia_jb_j=\sum_{i=1}^n a_i^2\sum_{i=1}^n b_i^2-\left(\sum_{i=1}^n a_ib_i\right)^2$$

□

Rappel 5 (Les mauvais élèves / Titu - ♣**).**
Pour $a_1,\dots,a_n$ des réels et $b_1,\dots,b_n$ des réels strictement positifs on a

$$\frac{(a_1+\cdots+a_n)^2}{b_1+\cdots+b_n}\leqslant\frac{a_1^2}{b_1}+\cdots+\frac{a_n^2}{b_n}$$

Avec la même condition d'égalité que C-S.

Démonstration. Il s'agit de Cauchy-Schwarz appliquée à $\left(\frac{a_i}{\sqrt{b_i}}\right)_{i=1}^n$ et $\left(\sqrt{b_i}\right)_{i=1}^n$ □

Rappel 6 (Réordonnement - ♣**).**
Soit $a_1\leqslant\ldots\leqslant a_n$ et $b_1\leqslant\ldots b_n$ et σ une permutation de $[\![1,n]\!]$, on a

$$a_1b_n+a_2b_{n-1}+\cdots+a_nb_1\leqslant a_1b_{\sigma(1)}+\cdots+a_nb_{\sigma(n)}\leqslant a_1b_1+\cdots+a_nb_n$$

Démonstration. L'ensemble des permutations étant fini, il existe une permutation ρ telle que $\sum_{k=1}^n a_kb_{\rho(k)}$ soit maximale. Pour $j>i$ soit

$$\rho_{ij}:\begin{cases}i\mapsto\rho(j)\\ j\mapsto\rho(i)\\ k\mapsto\rho(k)\quad\text{si } k\notin\{i,j\}\end{cases}$$

On a $\sum_{k=1}^n a_kb_{\rho(k)}-\sum_{k=1}^n a_kb_{\rho_{ij}(k)}=a_ib_{\rho(i)}+a_jb_{\rho(j)}-a_ib_{\rho(j)}-a_jb_{\rho(i)}=(a_j-a_i)(b_{\rho(j)}-b_{\rho(i)})\geqslant 0$ d'où $\rho(j)\geqslant\rho(j)$, ce qui est caractéristique de la permutation identité. L'inégalité de gauche s'obtient facilement en prenant $b_i'=-b_{n+1-i}$ qui est croissante. □

Remarque 7.
Si (a_i) et (b_i) sont strictement croissantes, les deux inégalités deviennent elles aussi strictes.

Rappel 8 (Tchebychev)**.**
Pour les mêmes suites croissantes que précédemment, on a

$$\frac{a_1b_n+\cdots+a_nb_1}{n}\leqslant\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right)\leqslant\frac{a_1b_1+\cdots+a_nb_n}{n}$$

Démonstration. Il suffit de développer puis de sommer suivant les diagonales :

$$\begin{aligned}\left(\frac{a_1+\cdots+a_n}{n}\right)\left(\frac{b_1+\cdots+b_n}{n}\right)&=\frac{1}{n^2}\sum_{(i,j)\in[\![1,n]\!]^2}a_ib_j\\&=\frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^n\sum_{i=1}^n a_ib_{i+k}\end{aligned}$$

où on prend les indices dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ c'est-à-dire $\forall i\leqslant n,\quad b_{i+n}=b_i$. On peut ensuite appliquer l'inégalité de réarrangement à chacune des sous-sommes pour obtenir l'inégalité voulue.

□

Exos

Exercice 1 (IAH, un échauffement, $\diamondsuit$)
Pour $a_1, \ldots, a_n > 0$, montrer que $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \dfrac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$.

Exercice 2 ($\diamondsuit$)
Soit x, y et z des réels positifs vérifiant $x^3y^2z = 1$. Quelle est la valeur minimale de $x+2y+3z$?

Exercice 3 (Grèce JBMO TST 2015 P1, $\diamondsuit$)
Soit x, y et z des réels strictement positifs, montrez que

$$(3x + y)(3y + z)(3z + x) \geqslant 64xyz$$

et donnez les cas d'égalité.

Exercice 4 (IAG pondérée rationnellement, $\diamondsuit$)
A partir de l'IAG classique, prouvez l'IAG pondérée si les λ_i sont rationnels.

Exercice 5
Montrer que pour tous réels positifs x, y et z,

$$x^2 + y^4 + z^6 \geqslant xy^2 + y^2z^3 + xz^3.$$

Exercice 6 ($\diamondsuit$)
Soient a, b, c et d quatre réels strictement positifs tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}.$$

Exercice 7 ($\diamondsuit$)
Soit $a_1, \ldots, a_n$ des entiers positifs distincts. Montrez que

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant n$$

et explicitez les cas d'égalité.

Exercice 8 ($\diamondsuit$)
Soient a et b deux réels positifs et n un entier. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}.$$

Exercice 9 ($\diamondsuit\diamondsuit$)
Soit a, b, x, y et z des réels positifs. Montrer que

$$\frac{x}{ay + bz} + \frac{y}{az + bx} + \frac{z}{ax + by} \geqslant \frac{3}{a + b}.$$

Exercice 10 (Roumanie JBMO TST 2018 Set 1 P2, ◇◇)
Soit a, b, c des réels tels que $a^2 + b^2 + c^2 = 3$, montrez que

$$\frac{1}{a} + \frac{3}{b} + \frac{5}{c} \geqslant 4a^2 + 3b^2 + 2c^2.$$

Exercice 11 (EGMO 2016 P1, ◇◇)
Soit n impair et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs et $x_{n+1} = x_1$. Montrez que

$$\min_{i\in\{1,\ldots,n\}} a_i^2 + a_{i+1}^2 \leqslant \max_{j\in\{1,\ldots,n\}} 2a_j a_{j+1}.$$

Exercice 12 (Milne, ◇◇)
Montrez que pour $a, b, c, d > 0$ on a

$$\frac{ac}{a+c} + \frac{bd}{b+d} \leqslant \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}.$$

Exercice 13 (Grèce JBMO TST 2022 P3, ◇◇)
Soit x, y, z des réels positifs inférieurs à 2 tels que $x + y + z = 4$. Trouvez le minimum de A où

$$A = \sqrt{2+x} + \sqrt{2+y} + \sqrt{2+z} + \sqrt{x+y} + \sqrt{y+z} + \sqrt{z+x}.$$

Exercice 14 (Baltic Way 2023 P2, ◇◇◇)
Soit $(a_i)_{i=1}^{2023} \in [0, +\infty[^{2023}$ tels que $\sum_{i=1}^{2023} a_i^i \leqslant 1 + \frac{1}{2023}$ montrez que

$$\sum_{i=1}^{2023} a_i^{2024-i} \leqslant 2023.$$

Exercice 15 (IMO 2023 P4, ◇◇◇)
Soit $x_1, x_2 \ldots, x_{2023}$ des réels positifs deux à deux distincts et $a_1, \ldots, a_{2023}$ des entiers tels que

$$a_n = \sqrt{(x_1 + x_2 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \frac{1}{x_2} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}.$$

Montrez que $a_{2023} \geqslant 3034$.

Exercice 16 (◇◇◇)
Trouver le minimum de

$$\left(\frac{a}{c} + \frac{b}{a} + \frac{c}{b}\right) \cdot \left(\frac{ab}{a+b} + \frac{ac}{c+a} + \frac{bc}{c+b}\right)$$

avec a, b, c des réels tels que $abc = 1$.

Solutions

Ce td est en partie inspiré de celui donné par Mathieu Baré en 2019 et d'exercices trouvés sur Art of Problem Solving (AOPS).

Solution de l'exercice 1
C'est équivalent à

$$n^2 \leqslant \left(\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}\right)\left(\frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}\right)$$

vrai par CS. Mauvais élèves marche aussi.

Alternativement
En appliquant l'IAG à $x_i = \frac{1}{a_i}$ on a

$$\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \cdots + \frac{1}{a_n}} \leqslant \sqrt[n]{a_1 \cdots a_n} \leqslant \frac{a_1 + \cdots + a_n}{n}$$

avec égalité quand $a_1 = \cdots = a_n$.
Solution de l'exercice 2
On cherche à appliquer l'IAG donc on réécrit l'expression en

$$x + 2y + 3z = \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + \frac{x}{3} + y + y + 3z \geqslant 6\sqrt[6]{\frac{x^3y^2z}{9}} = 6\sqrt[6]{\frac{1}{9}}.$$

Il est important de vérifier que le minimun est atteignable, il y a égalité pour l'IAG si

$$\frac{x}{3} = y = 3z = \sqrt[6]{\frac{1}{9}}.$$

Solution de l'exercice 3
Par l'IAG, $3x + y \geqslant 4x^{\frac{3}{4}}y^{\frac{1}{4}}$, d'où l'inégalité voulue en multipliant, avec égalité ssi $x = y = z$.
Solution de l'exercice 4
On pose $\lambda_i = \frac{p_i}{q_i}$, et $q = \text{ppcm}(q_1, \ldots, q_n)$ ainsi que $r_i = \frac{q}{q_i}$ de sorte que $\lambda_i = \frac{p_i r_i}{q}$. On s'est ramené au cas de l'IAG classique à q termes : il suffit de remarquer que $\lambda_i a_i = \sum_{i=1}^{p_i r_i} \frac{a_i}{q}$.
Solution de l'exercice 5
On utilise le lemme du tourniquet, pour a, b, c réels $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$, car

$$a^2 + b^2 + c^2 - ac - bc - ba = \frac{1}{2}[(a-b)^2 + (a-c)^2 + (b-c)^2] \geqslant 0.$$

Ici $a = x, b = y^2$ et $c = z^3$.
Solution de l'exercice 6
On applique l'IAG au numérateur,

$$\begin{aligned}
& \frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \\
\leqslant & \frac{(b+c+d)^3}{27(b+c+d)^2} + \frac{(a+c+d)^3}{27(a+c+d)^2} + \frac{(a+b+d)^3}{27(a+b+d)^2} + \frac{(a+b+c)^3}{27(a+b+c)^2} \\
= & \frac{1}{27}(3(a+b+c+d)) = \frac{1}{9}.
\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7
On applique l'inégalité de réordornnement avec les a_i, Soit σ une permutation telle que $a_{\sigma(1)} < a_{\sigma(2)} < \cdots < a_{\sigma(n)}$, comme il s'agit d'entiers on a $a_{\sigma(i)} \geqslant i$, donc comme $1, \frac{1}{2}, \cdots, \frac{1}{n}$ décroissante alors

$$a_1 + \frac{a_2}{2} + \cdots + \frac{a_n}{n} \geqslant a_{\sigma(1)} + \frac{a_{\sigma(2)}}{2} + \cdots + \frac{a_{\sigma(n)}}{n}$$
$$\geqslant 1 + \frac{2}{2} + \cdots + \frac{n}{n} = n$$

Solution de l'exercice 8
1ère solution, on applique l'IAG et on obtient

$$\begin{aligned}\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n &\geqslant 2\sqrt{\left(1+\frac{a}{b}\right)^n \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)^n} \\ &= 2 \cdot \left[\left(1+\frac{a}{b}\right) \cdot \left(1+\frac{b}{a}\right)\right]^{\frac{n}{2}} \\ &= 2 \cdot \left[2 + \frac{a}{b} + \frac{b}{a}\right]^{\frac{n}{2}} \\ &\geqslant 2 \cdot [2+2]^{\frac{n}{2}} = 2^{n+1}.\end{aligned}$$

car $\frac{a}{b} + \frac{b}{a} \geqslant 2$.
2eme solution La fonction $x \longmapsto (1+x)^n$ est convexe sur $\mathbb{R}_+$. Ainsi, avec Jensen, on a

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n \geqslant 2\left(1+\frac{\frac{a}{b}+\frac{b}{a}}{2}\right)^n \geqslant 2 \cdot (1+1)^n = 2^{n+1}.$$

3eme solution, (la mienne)

$$\left(1+\frac{a}{b}\right)^n + \left(1+\frac{b}{a}\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\frac{a^k}{b^k} + \frac{b^k}{a^k}\right) \geqslant 2 \cdot \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^{n+1}.$$

Solution de l'exercice 9
On veut faire apparaitre des carrés aux numérateurs pour appliquer les mauvais élèves. L'inégalité devient

$$\begin{aligned}\frac{x^2}{ayx+bzx} + \frac{y^2}{ayz+bxy} + \frac{z^2}{azx+bzy} &\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+xz)} \\ &= \frac{x^2+y^2+z^2+2xy+2yz+2xz}{(a+b)(xz+zy+yx)} \\ &\geqslant \frac{3(xy+yz+xz)}{(a+b)(xy+yz+zx)} \\ &= \frac{3}{a+b}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 10
En appliquant l'IAG sur chacun des termes puis uniquement sur $\frac{3}{\sqrt[3]{abc}}$ on a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)+\left(\frac{1}{b}+\frac{1}{b}+b^2\right)+2\left(\frac{1}{c}+\frac{1}{c}+c^2\right) &\geqslant \frac{3}{\sqrt[3]{abc}}+3+6\\ &\geqslant 12\\ &= 4(a^2+b^2+c^2)\end{aligned}$$

D'où l'inégalité, avec cas d'égalité quand $a=b=c=1$.

Solution de l'exercice 11
Pour avoir une intuition, on regarde un cas simple, ici $n=3$. Ce qui est spécifique à $n=3$, c'est que le membre de gauche et de droite ne dépendent pas de l'ordre des éléments et ainsi on peut supposer $a_1>a_2>a_3$, et alors $2a_1a_2=a_1a_2+a_1a_2\geqslant a_2^2+a_3^2$.
On s'intéresse maintenant à des fenêtres de 3 nombres successifs :

1. Si $a_i\leqslant a_{i+1}\leqslant x_{i+2}$, alors $2a_{i+1}a_{i+2}\geqslant a_i^2+a_{i+1}^2$.
2. Similairement si $a_i\geqslant a_{i+1}\geqslant a_{i+2}$.

Ainsi, par l'absurde, si l'énoncé était faux, on aurait pour tout i, $a_i<a_{i+1}>a_{i+2}$ ou $a_i>a_{i+1}<a_{i+2}$. Sans perte de généralité, supposons qu'on soit dans le premier cas pour $i=1$, comme n est impair, on a alors $a_1<a_2>a_3<a_4>\ldots<a_{n-1}>a_n<a_1>a_2$ ce qui est impossible.
Alternativement, on peut faire une récurrence en regardant $a_1,\ldots,a_{n_2}$ et a_{n-2},a_{n-1},a_n puis avec une disjonction de cas.

Solution de l'exercice 12
Tout développer puis faire apparaître des carrés fonctionne. Plus élégant est de poser $u=\frac{a+c}{2},x=\frac{b+d}{2},v=\frac{a-c}{2},y=\frac{b-d}{2}$ pour obtenir par les mauvais élèves (on a bien x et $u>0$)

$$\begin{aligned}\frac{ac}{a+c}+\frac{bd}{b+d} &= \frac{u^2-v^2}{2u}+\frac{x^2-y^2}{2x}=\frac{u+x}{2}-\left(\frac{v^2}{2u}+\frac{y^2}{2x}\right)\\ &\leqslant \frac{u+x}{2}-\frac{(v+y)^2}{2(u+x)}=\frac{(u-v+x-y)(u+v+x+y)}{2(u+x)}\\ &= \frac{(a+b)(c+d)}{a+b+c+d}.\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 13
On a

$$\begin{aligned}\left(\sqrt{2+x}+\sqrt{4-x}\right)^2 &= 6+2\sqrt{(2+x)(4-x)}\\ &\geqslant 6+2\sqrt{8+x(2-x)}\\ &\geqslant 6+4\sqrt{2}\\ &= (2\sqrt{2})^2\end{aligned}$$

d'où $A\geqslant 6+3\sqrt{2}$ en sommant. Cette borne est atteinte pour $x=y=2$ et $z=0$.

Solution de l'exercice 14
Si pour tout i, $a_i < 1$, alors $\sum_{i=1}^{2023} a_i^{2024-i} \leqslant \sum_{i=1}^{2023} \leqslant 2023$. Sinon, il existe un unique indice i_0 pour lequel $a_{i_0} > 1$ et alors

$$\begin{aligned} a_{i_0}^2 023 &\leqslant \left(1+\frac{1}{2023}\right)^{2023} \\ &= \sum_{k=0}^{2023} \binom{2023}{k} \frac{1}{2023^k} = \sum_{k=0}^{2023} \frac{\prod_{j=0}^{k-1} \frac{2023-j}{2023}}{k!} \\ &\leqslant \sum_{k=0}^{2023} \frac{1}{k!} \\ &\leqslant 1+1+\frac{1}{2}+\frac{1}{2^2}+\cdots+\frac{1}{2^{2022}} \\ &\leqslant 3 \end{aligned}$$

(c'est une manière très détournée de se passer du *logarithme* pour montrer l'inégalité classique $(1+\frac{1}{n})^n \leqslant e$). et alors $\sum_{i=1}^{2023} a_i^{2024-i} \leqslant \sum_{i=1}^{1012} a_i^i + a_{i_0}^{2023} + \sum_{i=1013}^{2023} a_i^{2024-i} \leqslant 1012+3+\frac{1}{2023} \leqslant 2023$.

Solution de l'exercice 15
Il ne faut pas avoir peur du fait que a_n soit entier, cela permet le plus souvent de passer d'une égalité stricte à une meilleure inégalité large. Par ailleurs, c'est le genre d'exo où il est plus que pratique d'essayer de deviner ce qu'il faut prouver grâce aux données numériques de l'énoncé. Bref, on remarque que $a_1 = 1$ et $3034 = 3 \times \frac{2022}{2} + 1$, et alors il est assez naturel de vouloir prouver que $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$.

Par C.-S. appliquée à $(\sqrt{x_1+\cdots+x_n}, \sqrt{x_{n+1}+x_{n+2}})$ et $(\sqrt{\frac{1}{x_1}+\cdots+\frac{1}{x_n}}, \sqrt{\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_{n+2}}})$puis l'IAG

$$\begin{aligned} a_{n+2} &= \sqrt{(x_1+x_2+\cdots+x_{n+2})\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_{n+2}}\right)} \\ &\geqslant \sqrt{(x_1+x_2+\cdots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\frac{1}{x_2}+\cdots+\frac{1}{x_n}\right)} + \sqrt{(x_{n+1}+x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}}+\frac{1}{x_{n+2}}\right)} \\ &= a_n + \sqrt{2+\frac{x_{n+1}}{x_{n+2}}+\frac{x_{n+2}}{x_{n+1}}} \\ &> a_n + 2 \end{aligned}$$

la dernière inégalité étant stricte car $x_{n+1} \neq x_{n+2}$. Comme a_{n+2} et a_n sont des entiers, on obtient alors $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 16

— On commence par montrer que

$$\frac{a}{c}+\frac{b}{a}+\frac{c}{b} \geqslant a+b+c$$

en effet,

$$\frac{1}{3}\left(\frac{a}{c}+\frac{a}{c}+\frac{c}{b}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{b}{a}+\frac{b}{a}+\frac{a}{c}\right)+\frac{1}{3}\left(\frac{c}{b}+\frac{c}{b}+\frac{b}{a}\right) \geqslant \sqrt[3]{\frac{a^2}{cb}}+\sqrt[3]{\frac{b^2}{ca}}+\sqrt[3]{\frac{c^2}{ab}} = a+b+c$$

avec l'IAG et le fait que $a^2 = \frac{1}{bc}$.

— Or

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}((a+b)+(a+c)+(c+b)) \cdot \left(\frac{ab}{a+b}+\frac{ac}{c+a}+\frac{bc}{c+b}\right) \\ \geqslant \quad & \frac{9}{2}\sqrt[3]{(a+b)(c+b)(a+c) \cdot (\frac{ab}{a+b} \cdot \frac{ac}{c+a} \cdot \frac{bc}{c+b})} \\ = \quad & \frac{9}{2} \end{aligned}$$

avec 2 IAG.

— on a égalité si $\frac{a}{c} = \frac{b}{a} = \frac{c}{b}$, donc $a = b = c = 1$, et en effet pour ces valeurs le minimum est atteint.

6 Arithmétique : Problèmes de taille (Eva)

Idées

- ☞ pour $a, b \in \mathbb{Z}^*, a|b \Rightarrow |a| \leq |b|$ donc en particulier si $b > 0, a \leq b$

- ☞ entre deux puissance k-ième d'entiers consécutifs, il n'y a pas d'autre puissance $k-$ième, c'est-à-dire que pour $n^k < a < (n+1)^k$, a n'est pas une puissance k-ième d'un entier. Souvent utile pour $k = 2$ (entre deux carrés parfait, pas de carré parfait).
- ☞ l'écart entre deux puissances k-ième consécutives devient de plus en plus grand
- ☞ en particulier on remarque que $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$. Donc pour $x, y \in \mathbb{N}, x \neq y, |x^2 - y^2| \geq |2x+1|$ (idem pour y)
- ☞ on a les croissances comparées suivantes : $n! > a^n > n^p$ en $+\infty$, pour $n \to +\infty$ et a, p des constantes positives. c'est-à-dire que ces inégalités sont verifiées *à partir d'un certain rang*
- ☞ pour $p > q$, x^p croit plus vite que x^q ainsi une inégalité de la forme $x^p < kx^q$ (avec k une constante) n'aura qu'un nombre fini de solution (dans $\mathbb{N}$)
- ☞ comme dans le point précédent, on trouve souvent des inégalités vérifiées *à partir d'un certain rang*, que l'on aura à determiner puis il faudra traiter les premiers cas à la main
- ☞ Si un nombre a une infinité de diviseurs alors il est nul
- ☞ Il est facile de comparer une factorielle a un polynome, en effet par exemple pour $n \geq 4, n! = n(n-1)\cdots 2$ donc $n! \geq 2(n^2 - n)$

Exercices

Exercice 1
Trouver les (x, y) dans $\mathbb{N}$ tels que $x^2 = y^2 + 7y + 6$

Exercice 2
Trouver tous les $x \in \mathbb{N}$ tq $x^2 + 7|x + 13$

Exercice 3
Trouver les $x \in \mathbb{N}$ tq $x^2 + 11|x^3 + 13$

Exercice 4
On dispose de deux entiers a, b tels que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $2^n a + b$ est un carré parfait. Montrer que $a = 0$

Exercice 5
Trouver les entiers x positifs tels que $x! = x^3 - 11x + 4$

Exercice 6
Soient a, b, n tq pour tout $k > 0, b - k|a - k^n$, montrer que $a = b^n$

Exercice 7
Trouver tous les entiers strictement positifs tels que $a^2 + b + c, b^2 + a + c, c^2 + a + b$ soient tous des carrés parfaits

Exercice 8
Trouver tous les couples d'entiers naturels (n, x) tels que $2^n + 5^n = x^2 + 65$

Exercice 9
Trouver les triplets (a, b, c) dans $\mathbb{N}$ avec $a, b, c \geq 2$ et tels que $(a-1)(b-1)(c-1)|abc-1$

Exercice 10 ((Martin Rakovsky) OFM 2024 junior P4)
Trouver tous les entiers $n \geq 2$ pour lesquels il existe n $a_1, a_2, \ldots, a_n$ supérieurs ou égaux à 2 et tels que pour tous les indices i et j distincts l'un de l'autre, l'entier a_i divise $a_j^2 + 1$

Exercice 11
Trouver tous les triplets d'entier positifs supérieurs ou égaux à 2 tels que $p|qr-1, q|pr-1, r|pq-1$

Exercice 12 (N1 shortlist IMO 2013)
Trouver les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $m, n \in \mathbb{N}^*, m^2 + f(n)|mf(m) + n$.

Exercice 13 (N1 shortlist IMO 2021)
Déterminer tous les $n \geq 1$ tels que il existe un couple (a, b) d'entiers naturels tels que a^2+b+3 ne possède aucun diviseurs qui soit le cube d'un nombre premier, et que

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n$$

Exercice 14 (P4 IMO 2006)
Determiner les couples d'entiers (x, y) tels que $2^{2x+1} + 2^x + 1 = y^2$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Pour $y > 3, (y+3)^2 < y^2 + 7y + 6$ et pour $y > 0, (y+4)^2 > y^2 + 7y + 6$. Ainsi, pour $y > 3$, on a $(y+3)^2 < x^2 < (y+4)^2$, donc pas de solutions car $(y+3)^2$ et $(y+4)^2$ sont deux carrés parfaits consécutifs.
On traite ensuite les cas $y \in \{0; 1; 2; 3\}$ à la main et on trouve que le seul couple solution est $(6, 3)$.

Solution de l'exercice 2
On remarque que $apcr$ $x^2 + 7 > x + 13$ (croissances comparées). Ainsi il suffit de trouver le rang en question puis de tester les petits cas à la main.
On résout $x^2 - x - 6 = 0$, les racines sont $\{3; -2\}$ donc pour $x > 3, x^2 + 7 > x + 13$. On teste pour les petits cas et on vérifie qu'il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 3
Soit x une solution, on a $x > 1$ car 0 et 1 ne sont pas solution. Alors $x^2+11|x(x^2+11)-(x^3+13)$, *ie* $x^2 + 11|11x - 13$. Or pour $x > 1, 11x - 13 > 0$ on en déduit $11x - 13 \geq x^2 + 11$.
On procède de même que précédemment : on a $11x - 13 \geq x^2 + 11$ pour $-3 \leq x \leq 8$. On teste à la main et on trouve comme solution $x = 3$ et $x = 8$

Solution de l'exercice 4
On pose (u_n) la suite d'entier tq $u_n^2 = 2^n a + b$. On veut utiliser les croissances comparées, on

va donc d'abord se débarasser des puissances de 2.
On remarque que $(2u_n)^2 = 2^{n+2}a + 4b$ donc $(2u_n)^2 - u_{n+2}^2 = 3b$.
Si $b = 0$ alors $2^0 a$ et $2a$ sont des carrés parfait *ie* $2u_0^2 = u_1^2$ donc $u_0 \neq 0$ car $\sqrt{2}$ est irrationnel.
Donc $2u_n \neq u_{n+2}$ donc $3|b| \geq |4u_n + 1|$. donc $|u_n| \leq |b|$.
Or si $a \neq 0, |2^n a + b| \to +\infty$ ce qui est absurde car $|2^n a + b| = |u_n| \leq |b|$.
Donc $a = 0$

Solution de l'exercice 5
Intuitivement, la factorielle croit beaucoup plus vite que le cube, on peut donc s'attendre à majorer x très rapidement.
On peut tester les petits cas, on calcule les deux expressions pour $x \in \{1, 2, 3, 4\}$ et on obtient que seul $x = 4$ est solution.
Pour $x \geq 4, x! = x(x-1)(x-2)(x-3)(x-4)! \geq x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 3x$.
Et on vérifie que alors $x! - (x^3 - 11x + 4) \geq x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 5x - 4 = (x-4)(x^3 - 3x^2 - x + 1)$, or pour $x \geq 5, x^3 - 3x^2 - x + 1 > 0$, on en déduit que $x < 5$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6
A l'aide de l'énoncé, on peut se rappeler que $b - k | b^n - k^n$. Ainsi, on peut s'en servir : $b - k | a - k^n - (b^n - k^n) = a - b^n$. Donc $a - b^n$ possède une infinité de diviseur il est donc nul.

Solution de l'exercice 7
Spdg on suppose que $b \geq a \geq c$. Alors $b^2 < b^2 + a + c \leq b^2 + 2b < (b+1)^2$. On a donc aucune solution.

Solution de l'exercice 8
Supposons que n soit impair. Alors on peut factoriser : $(5+2)(5^{n-1} + 2 \cdot 5^{n-2} + \ldots + 2^{n-1}) = x^2 + 65$. On regarde alors modulo 7 : $x^2 \equiv -2[7]$, ce qui est impossible. On en conclut donc que n est pair et on note $k = \frac{n}{2}$.
On a donc $25^k + 4^k = x^2 + 65$, donc $(5^k)^2 + 4^k - 65 = x^2$. Or, pour $k \geq 4, 4^k - 65 > 0$ donc $x^2 > (5^k)^2$. De plus $(5^k + 1)^2 = 5^{2k} + 2 \cdot 5^k + 1 > 5^{2k} + 4^k - 65 = x^2$. On a donc pas de solution entière pour $k > 3$. On traite maintenant à la main (courage pour $k = 3$) et on trouve que l'unique solution est $(4, 24)$

Solution de l'exercice 9
On cherche k tel que $abc - 1 = k(a-1)(b-1)(c-1)$. Or on peut remarquer que $ab + bc + ac > a + b + c$ car ce sont des entiers naturels supérieur à 2 donc $abc - 1 > (a-1)(b-1)(c-1)$ donc $k > 1$.
Intuitivement, lorsque a, b, c sont grands, $abc - 1 \sim (a-1)(b-1)(c-1)$. Formalisons le.
On suppose spdg $a \leq b \leq c$. On a

$$\frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} - \frac{1}{(a-1)(b-1)(c-1)} = k$$

donc $\frac{abc}{(a-1)(b-1)(c-1)} > k$. Or $x \mapsto \frac{x}{x-1} = 1 + \frac{1}{x-1}$ est décroissante donc $\frac{a}{a-1} \geq \frac{b}{b-1} \geq \frac{c}{c-1}$ donc $k < \frac{a^3}{(a-1)^3}$.
Maintenant il est temps de majorer k, a et de tester les petits cas.

— Pour $a = 2$, on a $1 < k < 8$. De plus on a $2bc - 1 = k(b-1)(c-1)$. On en déduit que k est impair. On peut maintenant tester.

  - ✪ k=3 , $bc - 3b - 3c + 4 = 0$ donc $(b-3)(c-3) = 5$ donc $b = 4, c = 8$
  - ✪ k=5, on factorise de même $(3b-5)(3c-5) = 7$ donc $b = 2, c = 4$
  - ✪ k=7, $(5b-7)(5c-7) = 9$ donc $b = c = 2$
- — $a = 3$, $1 < k < \frac{27}{8} \leq 4$ donc :
  - ✪ $k = 2$, $3bc - 1 = 4(b-1)(c-1)$ donc $(b-4)(c-4) = 11$ donc $b = 5, c = 15$
  - ✪ $k = 3$, $3bc - 1 = 6(b-1)(c-1)$ et en regardant modulo 3 on voit qu'il n'y a pas de solution
- — $a = 4$, $1 < k < \frac{64}{27} \leq 3$ donc $k = 2$ donc $4bc - 1 = 6(b-1)(c-1)$, qui n'admet pas de solution modulo 2.
- — $a = 5$, $1 < k < \frac{125}{64} < 2$ on a donc pas de solution et pour $n \geq 5$ en raison de la decroissance de $x \mapsto \frac{x}{x-1}$, $\frac{n^3}{(n-1)^3} < 2$ donc il n'y a pas de solutions pour $a \geq 5$.

On a donc comme solutions les triplets : $(2,4,8), (2,2,4), (2,2,2), (3,5,15)$, et leurs permutations puisque l'on avait spdg ordonné nos inconnues.

Solution de l'exercice 10

Soit n un entier solution. On peut ordonner nos entiers $a_1 < \ldots < a_n$ car ils sont distincts, car premier entre eux de par les relations de divisibilité. Supposons $n \geq 3$, alors comme a_2 et a_3 sont premiers entre eux, $a_3 a_2 | a_1^2 + 1$ donc $a_1^2 + 1 \geq a_3 a_2 > (a_1+1)^2 > a_1^2 + 1$ On a donc bien la contradiction désirée. Donc $n = 2$, qui fonctionne pour $a_1 = 2, a_2 = 5$

Solution de l'exercice 11

Soit (p, q, r) un triplet solution. On a que

$$pqr|(qr-1)(pr-1)(pq-1) = (pqr)^2 - p^2qr - q^2pr - r^2pq + pq + pr + qr - 1,$$

donc $pqr|pq + pr + qr - 1$. On suppose spdg que $p > q > r$ (ils ne peuvent pas être égaux). Or pour $r \geq 3$ on a $pqr \geq pq + pq + pq > pq + pr + qr > pq + pr + qr - 1$. Ce qui est absurde d'après la relation de divisibilité. Donc $r = 2$.

On a donc $p|2q - 1, q|2p_1$ et $p > q > 2$. De même cela nous donne $pq|(2p-1)(2q-1)$ donc $pq|2p + 2q - 1$. Or pour $q \geq 4$ on a $pq \geq 2p + 2p > 2p + 2q > 2p + 2q - 1$. On a donc $q = 3$. Ce qui nous donne $p|5$ donc $p = 5$.

Solution de l'exercice 12

L'identité est clairement solution, montrons que c'est la seule.

On procède à la substitution $m = f(n)$ et on obtient $f(n)^2 + f(n)|f(n)f(f(n)) + n$. On en déduit que $f(n)|n$ donc $f(n) \leq n$.

On procède maintenant à la substitution $m = n$: $n^2 + f(n)|nf(n) + n$ donc $n^2 + f(n) \leq nf(n) + n$ donc $n \leq f(n)$.

Ainsi $f(n) = n$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13

Soit n une solution et (a, b) un couple convenant.

On a $b \equiv -(a^2+3)[a^2+b+3]$ donc on a :

$$\begin{aligned}
&ab + 3b + 8 \equiv 0[a^2+b+3] \\
&-a(a^2+3) - 3(a^2+3) + 8 \equiv 0[a^2+b+3] \\
&a^3 + 3a^2 + 3a + 1 \equiv 0[a^2+b+3] \\
&(a+1)^3 \equiv 0[a^2+b+3]
\end{aligned}$$

Or on peut en déduire que $a^2+b+3|(a+1)^2$ en effet pour tout diviseur premier de a^2+b+3, on a $p|(a+1)$ donc $p^2|(a+1)^2$. Comme a^2+b+3 ne possède pas de cube de nombres premiers pour diviseur, on a bien $a^2+b+3|(a+1)^2$.
Or on a $2(a^2+b+3) > (a+1)^2$ donc on a forcèment $n=1$.
On peut verifier que n est solution, avec le couple $(2,2)$.

Solution de l'exercice 14
On teste les petits cas.

— $x=0$ donne $2^{2x+1}+2^x+1=2+1+1=4=2^2$ donc $(0,2)$ est solution.

— $x=1$ donne $2^{2x+1}+2^x+1=8+2+1=11$ qui n'est pas un carré parfait ,donc $x=1$ ne donne aucune solution.

— $x=2$ donne $2^{2x+1}+2x+1=32+4+1=37$ qui n'est pas un carré parfait, donc $x=2$ ne donne aucune solution.

Supposons maintenant que (x,y) est une solution avec $x \geq 3$. Comme $x \geq 3 > 0, y^2$ doit être impair donc y aussi : on écrit $y=2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Alors l'équation se réécrit $2^x(2^{x+1}+1)=(2k+1)^2-1=2k(2k+2)=4k(k+1)$ donc $k(k+1)=2^{x-2}(2^{x+1}+1)$, en particulier $k>0$ (le membre de droite est non-nul). Comme k et $k+1$ sont des entiers consécutifs, l'un est pair et l'autre impair. En particulier, 2^{x-2} divise $k(k+1)$ mais est premier avec l'un des deux (celui qui est impair), donc 2^{x-2} divise l'un ou l'autre (d'après le lemme de Gauss).

— Supposons que 2^{x-2} divise k. On dispose d'un entier $m \geq 1$ tel que $k=2^{x-2}m$, et alors $k+1=2^{x-2}m+1$. En réinjectant dans l'équation, $m(2^{x-2}m+1)=2^{x+1}+1$ donc $2^{x-2}(m^2-8)=1-m$.Si $m \geq 3, 2^{x-2}(m^2-8)>0>1-m$, c'est impossible. Si $m=2, -4 \cdot 2^{x-2}=-1$, impossible car 4 ne divise pas 1. Enfin si $m=1, -72^{x-2}=0$, impossible également. Donc ce cas est impossible.

— Supposons désormais que 2^{x-2} divise $k+1$. On dispose d'un entier $m \geq 1$ tel que $k+1=2^{x-2}m$, et alors $k=2^{x-2}m-1$. En réinjectant dans l'équation, $m(2^{x-2}m-1)=2^{x+1}+1$ et donc $2^{x-2}(m^2-8)=1+m$. Comme $1+m>0$, alors $m^2-8>0$ et donc $m \geq 3$. Alors $1+m=2^{x-2}(m^2-8) \geq 2(m^2-8)$ car $x-2 \geq 1$ et$m^2-8>0$. Alors $2m^2-m-17 \leq 0$ donc $m(2m-1) \leqslant 17$. Le membre de gauche est croissant en m, et en $m=4$ on a $4(24-1)=28>17$ donc pour $m \geq 4$, l'inégalité n'est pas vérifiée. La seule possibilité est donc $m=3$. En remplaçant, on obtient $2^{x-2}(32-8)=1+3$ donc $2^{x-2}=4$,d'où $x-2=2$,et alors $x=4$. On vérifie : $2^{2x+1}+2^x+1=512+16+1=529=232$, donc $(4,23)$ est solution.

Finalement, il y a exactement deux solutions, $(x,y)=(0,2)$ et $(x,y)=(4,23)$.

7 Equations fonctionnelles (Martin)

La première partie de ce TD effectue des rappels sur les techniques usuelles des équations fonctionnelles : substitutions, injectivité et surjectivité.

La seconde partie du TD est consacrée à l'étude des problèmes dits "du multigraphe" (voir la partie pour plus de détail).

Les exercices de la première partie, (sauf éventuellement le dernier) permettent de pratiquer les techniques usuelles pour les fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$. Les exercices de la deuxième partie sont un peu plus difficiles, mais restent abordables avec un peu de patience et sont un excellent entraînement pour apprivoiser le piège du multigraphe.

Remarque : Une fois ce TD acquis, on pourra s'attaquer à des équations fonctionnelles sur des ensembles plus restrictifs, comme des fonction allant de $\mathbb{R}^\star$ ou $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}$, pour lesquelles il y a, de fait, moins de substitutions possibles.

Substitutions, injectivité, surjectivité

Sans redéfinir ce qu'est une équation fonctionnelle (chose pour laquelle on voit renvoie au cours du groupe B dédié), rappelons les substitutions intéressantes qu'il est possible de faire. L'objectif d'une substitution est, souvent, de simplifier l'équation donnée. Au prix de la généralité perdue (l'équation obtenue est moins générale que l'équation de l'énoncé), on récupère des informations plus simples sur la fonction. C'est dans ce but qu'il faut donc effectuer des substitutions. On pourra donc essayer :

- $x = y = 0$. Cela simplifie les sommes et les produits, de sorte que, bien souvent, on récupère une équation reliant $f(0)$ et $f(f(0))$, voire même la valeur de l'un de ces termes.
- $x = 0$ (resp $y = 0$). Contrairement à la substitution précédente, on ne remplace qu'une seule variable par 0, afin de simplifier une partie de l'équation. On obtient alors des relations entre $f(x), f(f(x)), f(2x), f(x + f(0))$... (resp $f(y), f(f(y)), f(2y), f(y + f(0))$...). Parfois, remplacer x par 0 puis remplacer y par 0 permet d'avoir deux égalités différentes sur $f(z), f(f(z)), f(2z), f(z + f(0))$..., que l'on peut combiner pour obtenir de nouvelles expressions plus simples.
- Pour les mêmes raisons, $x = 1$ et/ou $y = 1$ (qui simplifient les produits).
- $y = -x$. Cette substitution permet de simplifier les sommes $x + y$.
- Les substitutions permettant **d'annuler** les termes à l'intérieur de f. Par exemple, en présence d'un terme de la forme $f(x - f(y))$, on pourra prendre y variable et poser $x = f(y)$ (et non pas prendre x variable et poser y tel que $f(y) = x$, chose que l'on ne peut pas faire si x n'est pas dans l'image de f). Avec cette subtitution, le terme devient $f(0)$, qui est beaucoup plus simple.
- Les substitutions permettant **d'égaliser** deux termes de l'équation. Par exemple, si le membre de droite contient $f(x + y)$ et le membre de gauche de l'équation contient $f(f(x) - y)$, prendre x variable et poser $y = \frac{1}{2}(f(x) - x)$, de sorte que $x + y = f(x) - y$ et donc $f(f(x) - y) = f(x + y)$, ce qui permettra encore de simplifier l'équation.

On n'oubliera pas de tirer parti des symétries du problème. On en présente deux types ici :

- Les symétries de signe. Si le membre de gauche de l'équation est invariant par changement dee signe (par exemple $f(x^2+y^2)$, qui reste identique pour les couples (x,y) et $(-x,-y)$), mais pas le membre de droite (par exemple parce qu'il contient un terme de la forme $xf(y)$, qui devient $-xf(-y)$ en remplaçant le couple (x,y) par le cuople $(-x,-y)$), alors remplacer le couple (x,y) par le couple $(-x,-y)$ dans l'équation va donner une nouvelle expression.
- Les symétries en x et y. Si le membre de gauche de l'équation est symétrique en x et y (par exemple $f(x+y)$ qui reste identique pour les couples (x,y) et (y,x)), mais pas le membre de droite (par exemple $x+f(y)$ qui devient $y+f(x)$ si on remplace le couple (x,y) par (y,x)), alors remplacer le couple (x,y) par le couple (y,x) est encore une fois une bonne idée. Par exemple dans l'équation

  $$f(x+y)=x+f(y),$$

  en remplaçant (x,y) par (y,x), on obtient que $f(x+y)=y+f(x)$. Comme $f(x+y)=x+f(y)$ d'après l'équation initiale, on trouve $y+f(x)=x+f(y)$ pour tous x,y. Ici, on peut alors conclure en remarquant que $f(x)-x=f(y)-y$ pour tout y, ce qui permet de voir, pour $y=0$, que $f(x)=x+f(0)$.

On pourra également chercher les propriétés d'injectivité et de surjectivité de f, notions que l'on rappelle ci-après.

Définition 1. Un fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite *surjective* si, pour tout réel y, il existe un réel x tel que $f(x)=y$:

$$\forall y\in\mathbb{R},\ \ \exists x\in\mathbb{R},\quad f(x)=y.$$

Autrement dit, une fonction surjective est une fonction par laquelle tout réel admet au moins un antécédent.

Pour montrer que f est surjective, on doit isoler les termes qui ne dépendent pas de f et avoir **un seul** terme en f d'un côté de l'équation.

Exemple 2. Soit f un fonction vérifiant $f(x-f(y))=f(x)+y$. En posant $x=0$, on trouve $f(-f(y))=f(0)+y$. En remplaçant y par $y-f(0)$, on trouve $f(-f(y+f(0)))=y$. Ainsi, tout réel x admet un antécédentau moins un antécédent par f. La fonction f est donc surjective.

Définition 3. Un fonction f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est dite *injective* lorsque, si u et v sont deux réels tels que $f(u)=f(v)$, on a forcément $u=v$:

$$f(u)=f(v)\quad\Rightarrow\quad u=v.$$

Autrement dit, une fonction injective est une fonction par laquelle tout réel admet au plus un antécédent.

Exemple 4. Soit f un fonction vérifiant $f(x-f(y))=f(x)+y$. Soient alors u et v deux réels tels que $f(u)=f(v)$. En remplaçant successivement y par u puis par v, on trouve

$$f(x)+u=f(x-f(u))=f(x-f(v))=f(x)+v,$$

ce qui donne, après simplification, que $u=v$. La fonction f est donc bien injective.

Montrer la surjectivité d'une fonction f permet d'élargir le champ des substitutions possibles (par exemple, on peut choisir x tel que $f(x) = 0$, qui existe bien par surjectivité de f). Montrer l'injectivité d'une fonction permet de "simplifier par f" l'équation. Dès qu'on montre une de ces propriétés, on essayera de choisir des substitutions qui nous mettent en position d'utiliser ces propriétés (par exemple transformer l'équation en $f(\dots) = f(\dots)$ si on a montré que f est injective, afin de simplifier par f).

Il ne reste plus qu'à pratiquer ces notions sur les exercices suivants :

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y).$$

Exercice 2
(Slovénie 1999) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(f(x) + f(y)) = f(x) + y$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = f(x + y) + xy.$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(2x) + 8y + 6.$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions f telles que

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y).$$

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x + 1) + y - 1) = f(x) + y.$$

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y)).$$

Exercice 10
(TST France 2019) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y).$$

Exercice 11
(IMO SL 2005 A2) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)).$$

Multigraphes

Le problème de multigraphe est un problème d'inversion des quantificateurs. Il surgit lorsque l'on a établi que la fonction f pouvait prendre deux valeurs possibles en chaque point. Par exemple, si f satisfait l'équation

$$f(x)^2 = x^2 \tag{V.3}$$

pour tout x, alors on déduit que $f(x) = \pm x$, que l'on réécrit comme

$$\forall x \in \mathbb{R}, (\quad f(x) = x \quad \text{ou } f(x) = -x \quad). \tag{A}$$

Le piège est d'en déduire

$$(f(x) = x \ \ \forall x \in \mathbb{R}) \quad \text{ou} \quad (f(x) = -x \ \ \forall x \in \mathbb{R}). \tag{B}$$

On ne peut pas déduire (B) uniquement à partir de (A). Par exemple, la fonction $f(x) = |x|$ ou encore la fonction f qui vaut x si x est rationnel et $-x$ si x est irrationnel vérifient tous les deux (A) mais ne vérifient pas (B). Bien souvent, les solutions de l'équation fonctionnelle que l'on cherche ne seront pas aussi compliquée et vérifieront bien (B), mais pour le montrer il faut encore travailler avec l'équation.

Voyons comment gérer cette situation à l'aide d'un exemple.

Exemple 5. Exercice : (Balkan MO 2007) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

Solution :

Soit f une solution éventuelle. On cherche à annuler les termes à l'intérieur de chacun des $f(\ldots)$. En posant $y = x^2$, on trouve

$$f(f(x) + x^2) = f(0) + 4x^2 f(x).$$

En posant $y = -f(x)$, on trouve cette fois-ci :

$$f(0) = f(x^2 + f(x)) - 4f(x)^2.$$

En faisant la somme de ces équations, on trouve

$$0 = 4f(x)(x^2 - f(x)).$$

Ainsi, pour tout x, on a soit $f(x) = 0$ soit $f(x) = x^2$. Dans tous les cas, on a $f(0) = 0$. En remplaçant x par 0 dans l'équation, on récupère que $f(x) = f(-x)$.

On désire à présent montrer que $f(x) = 0$ pour tout x ou que $f(x) = x^2$ pour tout x. Pour cela, supposons que f est une solution de l'équation qui n'est ni la fonction nulle, ni la fonction carrée. Comme f n'est pas la fonction nulle, il existe $a \neq 0$ tel que $f(a) = 0$. Comme f n'est pas la fonction carrée, il existe $b \neq 0$ tel que $f(b) = b^2$. On va alors travailler avec a et b pour obtenir une contradiction. Notons qu'alors $f(-b) = f(b) = b^2$. En remplaçant x par a et y par b^2 dans l'équation, on trouve :

$$b^2 = f(f(a) + b) = f(a^2 - b) + 4bf(a) = f(a^2 - b).$$

On a alors $f(a^2 - b) = 0$ ou $f(a^2 - b) = (a^2 - b)^2$. Comme $b \neq 0$, on a

$$b^2 = (a^2 - b)^2.$$

Après simplification, on obtient $0 = a^2(a^2 - 2b)$. Comme $a \neq 0$, on a $0 = a^2 - 2b$. En reprenant le même raisonnement avec $x = a$ et $y = -b$, on déduit que $0 = a^2 + 2b$. On déduit que $b = 0$, ce qui est absurde.

Ainsi, si $f(x) = 0$ pour un x non nul alors f est la fonction nulle, et si $f(x) = x^2$ pour un x non nul alors f est la fonction carrée. Les deux seules solutions sont donc bien la fonction nulle et la fonction carrée. Réciproquement ces deux fonctions sont bien solutions, puisque si f est la fonction nulle alors pour tous x, y,

$$f(f(x) + y) = 0 = 0 + 4y \times 0 = f(x^2 - y) + 4yf(x);$$

et si f est la fonction carrée, alors pour tous x, y,

$$f(f(x) + y) = (x^2 + y)^2 = x^4 + y^2 + 2x^2y = (x^4 + y^2 - 2x^2y) + 4yx^2 = f(x^2 - y) + 4yf(x).$$

Les deux solutions de l'équation sont donc la fonction constante et la fonction carrée.

On pourra pratiquer la notion de multigraphe sur les exercices suivants.

Exercice 12
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

Exercice 13
(Pan African 2024) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) - yf(y) = f(x+y)(f(x) - y).$$

Exercice 14
(USAMO 2016 P4) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = (f(x+y))^2.$$

Exercice 15
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2) + xf(y) = f(x)f(x + f(y))$$

pour tous réels x, y.

Exercice 16
(RMM SL 2019 A1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 + xy + f(y^2) = xf(y) + f(x^2) + y^2$$

Solutions

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)) + f(f(y)) = 2y + f(x - y).$$

Solution de l'exercice 1
On posant $x = y$, on a $2f(f(x)) = 2x + f(0)$, soit $f(f(x)) = x + \frac{1}{2}f(0)$. En réinjectant cette égalité dans l'équation, on trouve

$$x + y + f(0) = 2y + f(x - y),$$

soit $f(x - y) = x - y + f(0)$. Pour z un réel quelconque, en posant $x = y + z$, on trouve $f(z) = z + f(0)$. Réciproquement, si f est de la forme $f(x) = x + c$, on vérifie que

$$f(f(x)) + f(f(y)) = f(x) + c + f(y) + c = x + y + 2c = 2y + x - y + c = 2y + f(x - y).$$

On déduit que $c = 0$ et la seule solution est la solution identité.

Exercice 2
(Slovénie 1999) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y.$$

Solution de l'exercice 2
Soit f une solution éventuelle. Soit y quelconque, en remplaçant x par $f(y)$, on trouve

$$f(0) = 1 - f(y) - y$$

ce qui se réécrit

$$f(y) = -y + 1 - f(0).$$

Ainsi, f est de la forme $f(y) = -y + c$ avec c un réel. Réciproquement, si $f(y) = -y + c$ est solution, alors

$$f(x - f(y)) = -x + f(y) + c = -x - y + 2c = 1 - x - y.$$

On déduit que $c = 1/2$. La seule fonction solution est donc la fonction $f(x) = -x + 1/2$.

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

Solution de l'exercice 3
Solution 1 :

Avant d'essayer de résoudre l'équation fonctionnelle, on peut toujours essayer de repérer en avance des solutions faciles. Les fonctions $f : x \to 0$ et $f : x \to x$ sont solutions. On peut également voir que la fonction $f : x \to -x$ est solution. Ces fonctions sont à priori les seules solutions, essayons de le montrer.
Parmis ces solutions, 2 sont injectives, de plus l'équation présente une variable sortie, on a donc bien envie de montrer l'injectivité, seulement cela est impossible car la fonction nulle est solution du problème sans être injective. Pour avoir une chance de montrer l'injectivité de la fonction, on va donc mettre de côté la fonction nulle en ne travaillant que sur des fonctions admettant un réel l, tel que $f(l) \neq 0$. Si $f(a) = f(b)$, alors en posant $y = a$ puis $y = b$, on obtient $f(f(x)f(a)) = f(x)a$ et $f(f(x)f(b)) = f(x)b \implies f(x)a = f(x)b$. Ainsi, pour $x = l$, on peut diviser par $f(l) \neq 0$ et on obtient $a = b$ donc f est injective. Revenons à l'équation originale, et posons $y = 1$, alors on a $f(f(x)f(1)) = f(x) \implies f(x)f(1) = x$. Si $f(1) = 0$, alors en posant $x = 1$ on trouve $0 = 1$ ce qui est faux donc $f(1) \neq 0$. Ainsi $f(x) = \dfrac{x}{f(1)}$ donc on peut écrire $f(x) = cx$ pour tout x.
Avec l'équation de départ, cela donne $f(f(x)f(y)) = c^3xy = f(x)y = cxy$ donc $c = 0$ ou $c = \pm 1$. On retrouve les 3 solutions identifiées au début.

Solution 2 :

Dans cette équation, le terme de gauche est symétrique en x et y alors que le terme de droite ne l'est pas. Dans ce genre de situation il est intéressant de se servir de cette symétrie, ici cela donne : $f(f(x)f(y)) = f(x)y = xf(y)$. Donc pour tous réels x, y non nuls, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$ donc le terme $\dfrac{f(x)}{x}$ est constant et on peut écrire $f(x) = cx$ pour tout x non nul. De plus $f(0) \cdot 1 = 0 \cdot f(1) \implies f(0) = 0$, donc $f(x) = cx$ pour tout réel x. $f(f(x)f(y)) = c^3xy =$

$f(x)y = cxy$ donc $c = 0$ ou $c = \pm 1$. On vérifie que les fonctions $f : x \mapsto 0$, $f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$ sont bien solutions de l'équation.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = f(x+y) + xy.$$

Solution de l'exercice 4
Soit f une solution éventuelle. En posant $x = y = 0$, on trouve que $f(0)^2 = f(0)$, donc $f(0) = 0$ ou $f(0) = 1$.

Si $f(0) = 0$: En posant $y = 0$, on trouve que $0 = f(x) + 0$, de sorte que f est constante égale à 0. Mais la fonction nulle n'est pas solution de l'équation.

Si $f(0) = 1$: En posant $y = -x$, on trouve $f(x)f(-x) = 1 - x^2$. En posant $x = 1$ dans cette équation, on obtient que $f(1)f(-1) = 0$. On distingue alors encore deux cas :

- Si $f(1) = 0$, alors en posant $y = 1$ dans l'équation de départ, on trouve $0 = f(x+1) + x$. On déduit que $f(x) = -x + 1$. Réciproquement, cette fonction est bien solution du problème puisque

$$(-x+1)(-y+1) = (-x-y+1) + xy.$$

- Si $f(-1) = 0$, alors en posant $y = -1$ dans l'équation de départ, on trouve que $0 = f(x-1) - x$, de sorte que $f(x) = x + 1$ pour tout x. Réciproquement, cette fonction est bien solution puisque

$$(x+1)(y+1) = (x+y+1) + xy.$$

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + 2f(y)) = f(2x) + 8y + 6.$$

Solution de l'exercice 5
Soit f une solution éventuelle. En posant $x = 0$, on trouve

$$f(f(0) + 2f(y)) = f(0) + 8y + 6.$$

On peut en déduire que f est injective. En effet, en prenant u et v tels que $f(u) = f(v)$, on a en remplaçant y par u puis par v dans l'équation ci-dessus, on déduit que

$$f(0) + 8u + 6 = f(f(0) + 2f(u)) = f(f(0) + 2f(v)) = f(0) + 8v + 6.$$

On déduit que $u = v$, de sorte que f est injective.

Prenons alors $y = -3/4$, afin d'annuler le terme $8y + 6$. L'équation devient

$$f\left(f(x) + 2f\left(-\frac{3}{4}\right)\right) = f(2x).$$

Par injectivité, on déduit que

$$f(x) + 2f\left(-\frac{3}{4}\right) = 2x.$$

f est donc de la forme $f(x) = 2x + c$. Réciproquement, si f est une solution de la forme $2x + c$, on a

$$f(f(x)+2f(y)) = 2(f(x)+2f(y))+c = 4x+2c+8y+4c+c = 2f(2x)+8y+6 = 4x+c+8y+6.$$

On déduit que $c = 0$, de sorte que la seule solution est la fonction $f(x) = 2x$.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions f telles que

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y).$$

Solution de l'exercice 6
En posant $y = 0$, on trouve que $f(x^2 + f(0)) = 2x - f(0)$. Comme le côté droit de cette égalité peut atteindre n'importe quelle valeur réelle en faisant varier x, il en est de même du côté gauche, ce qui signifie que f est surjective.

Soit z un réel quelconque et y tel que $f(y) = z$, qui existe bien par surjectivité de f. En posant $x = 0$ dans l'équation, on trouve

$$f(z) = f(f(y)) = -f(y) = -z.$$

Cependant, la fonction $f(z) = -z$ n'est pas solution de l'équation. Ainsi, l'équation n'a pas de solutions.

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x+1) + y - 1) = f(x) + y.$$

Solution de l'exercice 7
En posant $x = 0$ dans l'équation, on obtient

$$f(f(1) + y - 1) = f(0) + y.$$

Comme le membre de gauche peut prendre toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ quand y varie, il en est de même du membre de gauche. La fonction f est donc surjective.

Soit alors x_0 tel que $f(x_0 + 1) = 1$. En remplaçant x par x_0 dans l'équation, on déduit que

$$f(y) = f(f(x_0 + 1) + y - 1) = f(x_0) + y.$$

On peut alors en déduire que la fonction est injective : si u et v sont deux réels tels que $f(u) = f(v)$, alors en remplaçant y successivement par u et v, on trouve

$$u + f(x_0) = f(u) = f(v) = v + f(x_0).$$

Ainsi $u = v$ et f est bien injective. En prenant $y = 0$ dans l'équation de départ, on trouve que

$$f(f(x+1)-1) = f(x).$$

Par injectivité, on obtient $f(x+1) - 1 = x$. Un changement de variable $z = x + 1$ donne que $f(z) = z$.

Réciproquement, la fonction identité est bien solution du problème, c'est donc la seule.

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = y.$$

Solution de l'exercice 8
Les propriétés de surjectivité et d'injectivité de f vont fortement dépendre de si $f(x) = 1$ ou non. Voyons plutôt.

Notons que la fonction constante $f(x) \equiv 1$ n'est pas solution du problème. Ainsi, on dispose de x_0 tel que $f(x_0) \neq 1$. En remplaçant x par x_0, on trouve

$$f(x_0 f(y) + f(x_0 + y)) = y(1 - f(x_0)) - f(x_0).$$

Comme le côté droit de l'équation parcourt tout $\mathbb{R}$ lorsque y parcourt $\mathbb{R}$, on déduit que le membre de gauche aussi, de sorte que f est surjective.

Refaisons alors le même raisonnement avec $f(0)$.

Si $f(0) = 1$: en remplaçant x par 0 dans l'équation, on trouve

$$f(f(y)) = -1 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

En particulier, pour $y = 0$, on obtient que $f(1) = -1$. En posant $x = 1$ dans l'équation de départ, on trouve

$$f(f(y+1) + f(y)) = 2y + 1.$$

En réappliquant f, on trouve que $f(2y+1) = f(f(f(y+1) + f(y))) = -1$, de sorte que f n'est pas surjective, ce qui est une contradiction.

Si $f(0) \neq 1$: En remplaçant x par 0 dans l'équation de départ, on trouve que

$$f(f(y)) = y(1 - f(0)) - f(0).$$

On déduit notamment que f est surjective et que f est injective. En posant $y = -1$ dans cette égalité, on trouve $f(f(-1)) = -1$. Mais en posant $y = -1$ et $x = 1$ dans l'équation de départ, on trouve aussi $f(f(-1) + f(0)) = -1$. On déduit que $f(-1) + f(0) = f(-1)$ par injectivité de f, de sorte que $f(0) = 0$. On déduit que $f(f(y)) = y$ pour tout y. En posant $y = 0$ dans l'équation de départ, on trouve $f(f(x)) = -f(x)$, ce qui implique que $f(x) = -f(f(x)) = -x$ pour tout x.

Réciproquement, si $f(x) = -x$, on a bien

$$(y+1)f(x) + f(xf(y) + f(x+y)) = (y+1)(-x) - (-xy - x - y) = y.$$

La seule solution de l'équation est donc $f(x) = -x$.

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y)).$$

Solution de l'exercice 9
Soit f une solution éventuelle. L'équation nous donne que f est injective. En effet, si u et v sont deux réels tels que $f(u) = f(v)$, alors en remplaçant successivement x par u et v, on trouve

$$f(u) - 2u + f(f(y)) = f(y - f(u)) = f(y - f(v)) = f(v) - 2v + f(f(y)).$$

On déduit alors que $-2u = -2v$, et donc que $u = v$. f est bien injective.

En posant $y = f(0)$ et $x = 0$, on trouve que $f(f(f(0))) = 0$. En prenant $x = f(f(0))$ et $y = 0$, on trouve

$$0 = 0 - 2f(f(0)) + f(f(0)) = -f(f(0)).$$

Ainsi, $f(f(0)) = 0$, de sorte qu'en appliquant f à cette égalité, on trouve $0 = f(f(f(0))) = f(0)$. Finalement, $f(0) = 0$. On déduit, en posant $x = 0$ dans l'équation de départ, que

$$f(y) = f(f(y)) \ \ \forall y \in \mathbb{R}.$$

Par injectivité, on déduit que $f(y) = y$ pour tout y.

Réciproquement, la fonction identité est bien solution de l'équation. C'est donc la seule.

Exercice 10
(IMO SL 2005 A2) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)).$$

Solution de l'exercice 10
Supposons qu'il existe x tel que $f(x) < 1$. Alors on peut choisir $y = \dfrac{x}{1 - f(x)}$, de telle sorte que $y = x + yf(x)$. On déduit alors en simplifiant que $f(x) = 2$, ce qui est une contradiction. On a donc que $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x > 0$. On a donc $f(x)^2 > \sqrt{2}$. Par une récurrence rapide, on déduit que $f(x) > 2^{2^n - 1} 2^n$ pour tout n, si bien que $f(x) \geqslant 2$ pour tout $x > 0$.

En particulier, pour tout x, y, on a $f(x + yf(x)) \geqslant f(x)$ donc f est croissante.

Supposons désormais que f est injective. Le membre de gauche est symétrique en x et y, on a donc

$$f(x + yf(x)) = \frac{f(x)f(y)}{2} = f(y + xf(y))$$

donc $x + yf(x) = y + xf(y)$. Cela implique que le rapport $\dfrac{x}{1 - f(x)}$ est constant, donc f est affine. On vérifie alors qu'aucune fonction affine ne convient.

Supposons que f n'est pas injective et qu'il existe a et b tels que $f(a) = f(b)$. On pose alors $x = a$ et y tel que $yf(a) = b - a$ pour pouvoir simplifier et avoir $f(y) = 2$. Il vient que $f = 2$ sur $]0, y]$ par croissance. On suppose désormais que $f = 2$ sur $]0, b]$. On prend désormais $a < b$ et y tel que $a + 2y < b$. Alors

$$2 = f(a + yf(a)) = f(a)f(y) = f(b)f(y) = f(b + yf(b))$$

Donc $f = 2$ sur un intervalle plus grand. On peut prendre y fixé, de sorte que l'intervalle grandit en taille de façon constante. Donc $f \equiv 2$. Réciproquement, $f \equiv 2$ convient.

Exercice 11
(TST France 2019) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y).$$

Solution de l'exercice 11
Tout d'abord, on constate aisément que, pour tout réel a, la fonction $f : x \to x + a$ est une solution du problème. Réciproquement, on va montrer qu'il n'existe pas d'autre solution.

Dans ce qui suit, on considère une fonction solution f, on pose $a = f(0)$, et on notera $\mathbf{E}(x, y)$ l'équation

$$f(x + f(y)) + x = f(f(2x) + y).$$

Tout d'abord, les équations $\mathbf{E}(x, 0)$ et $\mathbf{E}(0, 2x)$ montrent que $f(f(2x)) = f(x+a)+x$ et que $f(f(2x)) = f(2x + a)$. On en déduit que

$$f(2x + a) = f(f(2x)) = f(x + a) + x$$

et, si l'on pose $x = -a$, il s'ensuit même que $f(-a) = f(0) - a = 0$.

On considère alors un réel x quelconque, et on pose $y = -f(-2x) - a$ puis $z = -x + f(y)$. Comme $f(-a) = 0$, l'équation $\mathbf{E}(-x, y)$ montre que $f(z) - x = f(-a) = 0$, c'est-à-dire que $f(z) = x$. La fonction f est donc surjective.

Démontrons que f est également injective. Soit x et y deux réels tels que $f(x) = f(y)$, et soit $d = y - x$. Soit également t un réel quelconque, et soit z un antécédent de t par f. Les équations $\mathbf{E}(z/2, x)$ et $\mathbf{E}(z/2, y)$ démontrent que

$$f(t + x) = f(f(2z/2) + x) = f(z/2 + f(x)) + z/2 = f(z/2 + f(y)) + z/2 = f(t + y).$$

Si $d \neq 0$, cela signifie que f est d-périodique, ce qui prouve que $f(2x) = f(2x+2d) = f(2y)$ et que $f(x + a) = f(x + a + d) = f(y + a)$. Mais alors l'équation $\mathbf{E}(x, 0)$ indique que

$$x = f^2(2x) - f(x + a) = f^2(2y) - f(y + a) = y,$$

contredisant le fait que $d \neq 0$.

La fonction f est donc bien injective. Puisque $\mathbf{E}(0, y)$ montre que $f(f(y)) = f(y + a)$, comme on l'a déjà mentionné ci-dessus, il s'ensuit que $f(y) = y + a$ pour tout réel y, ce qui conclut.

Exercice 12
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

Solution de l'exercice 12
Soit f une solution éventuelle. En posant $x = y = 0$ dans l'équation, on trouve $2f(0) = f(0)^2$, ce qui donne que $f(0) = 0$ ou $f(0) = 2$. On distingue les deux cas.

Si $f(0) = 2$: En posant $x = 0$, on trouve

$$2 + 2 = 2f(y) + 2y + 0.$$

Ainsi, $f(y) = 2 - y$. Réciproquement, cette fonction est bien solution, puisque

$$2 - x^2 + 2 - xy = (2 - x)(2 - y) + y(2 - x) + x(2 - x - y).$$

Si $f(0) = 0$: En posant $y = 0$ dans l'équation, on trouve $f(x^2) = xf(x)$. En exploitant cette équation pour x et pour $-x$, on trouve que $-xf(-x) = xf(x)$. Ainsi, si $x \neq 0$, $f(x) = -f(-x)$. Cette relation se prolonge en 0 puisque $f(0) = 0$. En remplaçant alors y par $-x$, on trouve

$$f(x^2) + f(-x^2) = f(x)f(-x) - xf(x) + xf(0).$$

Ainsi, $0 = -f(x)^2 - xf(x)$. On conclut que $f(x) = 0$ ou $f(x) = -x$ pour tout x.

Soient a et b tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = -b$. Notons alors que $f(a^2) = af(a) = 0$ et $f(b^2) = bf(b) = -b^2$. En posant $x = a$ et $y = b$ on a

$$f(ab) = f(a^2) + f(ab) = f(a)f(b) + bf(a) + af(a + b) = af(a + b).$$

En posant $x = b$ et $y = a$ on a

$$-b^2 + f(ab) = f(b^2) + f(ab) = f(b)f(a) + af(b) + bf(a + b).$$

En réinjectant $f(ab) = af(a + b)$ dans cette égalité, on obtient

$$-b^2 + ab = (b - a)f(a + b).$$

Si $f(a+b) = 0$, alors $b = 0$ ou $a = b$. Les deux cas sont impossibles, donc $f(a+b) = -a-b$. Mais alors $-b^2 + ab = -(b - a)(a + b) = -b^2 + a^2$, ce qui implique que $a = 0$ ou que $a = b$, ce qui est impossible encore.

En conclusion, les seules solutions possibles sont la fonction nulle et la fonction définie par $f(z) = -z$. Réciproquement, ces deux fonctions sont bien solutions de l'équation puisque, si $f \equiv 0$, alors pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = 0 = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y),$$

et si $f(z) = -z$, alors pour tout $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) + f(xy) = -x^2 - xy = (-x)(-y) + y(-x) + x(-x - y) = f(x)f(y) + yf(x) + xf(x + y).$$

Les solutions sont donc $f \equiv 0$ et $f(z) = -z$.

Exercice 13
(Pan African 2024) Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2) - yf(y) = f(x+y)(f(x) - y).$$

Solution de l'exercice 13
Soit f une solution éventuelle. En posant $x = 0$, on trouve $f(0) - yf(y) = f(y)(f(0) - 1)$, qui donne après simplification

$$f(0)(f(y) - 1) = 0 \quad \forall y \in \mathbb{R}.$$

Ainsi, si f n'est pas la fonction constante égale à 1, $f(0) = 0$. Notons que la fonction constante égale à 1 est bien solution de l'équation puisque :

$$f(x^2) - yf(y) = 1 - y = f(x+y)(f(x) - y).$$

On suppose donc que $f(0) = 0$ dans la suite. On utilise ce résultat pour annuler chacun des terme de la forme $f(\ldots)$ dans l'équation. En posant $y = 0$, on a

$$f(x^2) = f(x)^2.$$

En posant $x = -y$ dans l'équation de départ, on trouve

$$f(y^2) - yf(y) = f(0)(f(-y) - y) = 0.$$

Ainsi, en combinant les deux équations, on obtient $f(y)^2 = f(y^2) = yf(y)$. On a alors $0 = f(y)(f(y) - y)$ pour tout $y \in \mathbb{R}$. On a donc pour tout y, soit $f(y) = 0$ soit $f(y) = y$.

Montrons que $f(y) = 0$ pour tout y ou que $f(y) = y$ pour tout y. Notons que dans les deux cas, $f(0) = 0$. Supposons par l'absurde que f ne soit ni l'identité, ni la fonction constante, et qu'il existe $a, b \neq 0$ tels que $f(a) = 0$ et $f(b) = b$. Notons qu'alors $f(a^2) = af(a) = 0$. En posant $y = b$ et $x = a$ dans l'équation, on a

$$-b^2 = f(a^2) - bf(b) = f(a+b)(f(a) - b) = -bf(a+b).$$

Or, $f(a+b) = 0$ ou $f(a+b) = a+b$. Comme b est non nul, $f(a+b) = a+b$. Mais alors $-b^2 = -ab - b^2$, ce qui donne $ab = 0$ qui est absurde.

Ainsi, si $f(0) = 0$, la fonction f est soit la fonction nulle soit la fonction identité. Réciproquement, on vérifie que ces deux fonctions sont bien solutions puisque, si f est la fonction nulle,

$$f(x^2) - yf(y) = 0 = f(x+y)(f(x) - y);$$

et si f est la fonction identité,

$$f(x^2) - yf(y) = x^2 - y^2 = (x+y)(x-y) = f(x+y)(f(x) - y).$$

Les solutions de l'équation fonctionnelle sont donc $f \equiv 1$, $f \equiv 0$ et la fonction identité.

Exercice 14
Trouver toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = (f(x+y))^2.$$

Solution de l'exercice 14
La principale difficulté de ce problème se trouve dans la gestion du multigraphe qui est un peu particulier ici.

Soit f une solution éventuelle. En remplaçant x et y par 0 dans l'équation, on a $2f(0)^2 = f(0)^2$, soit $f(0) = 0$.

En remplaçant x par 0, on a trouve

$$f(y)f(-y) = f(0)f(-3y) + f(y)f(-y) = f(y)^2.$$

Ainsi, pour tout y, on a $f(y)(f(-y) - f(y)) = 0$. On a donc pour tout y, $f(y) = 0$ ou $f(-y) = f(y)$. Notons qu'alors, si $f(y) = 0$, $f(-y) = 0$ ou $f(-y) = f(y) = 0$. Donc dans tous les cas , $f(y) = f(-y)$. Ainsi, $f(y) = f(-y)$ pour tout réel y.

En posant $y = -x$, on trouve

$$(f(x) - x^2)f(4x) + (f(-x) - x^2)f(4x) = f(0)^2 = 0.$$

Ainsi on a $2f(4x)(f(x) - x^2) = 0$. Ceci amène

$$\big(f(4x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

En posant $y = 3x$, on trouve $(f(x) + 3x^2)f(-8x) + (f(3x) + 3x^2)f(0) = f(4x)^2$, soit, en utilisant que $f(z) = f(-z)$ pour tout z,

$$(f(x) + 3x^2)f(8x) = f(4x)^2. \tag{$\star$}$$

On déduit alors que si $f(8x) = 0$, alors $f(4x) = 0$. En utilisant cette remarque pour $x = z/4$, on trouve que pour tout réel z, $f(2z) = 0$ implique que $f(z) = 0$. En particulier, si $f(4x) = 0$ pour un certain x, alors $f(2x) = 0$ et alors $f(x) = 0$. On déduit la nouvelle dichotomie suivante :

$$\big(f(x) = 0 \quad \text{ou} \quad f(x) = x^2\big) \quad \forall x \in \mathbb{R}.$$

Notons alors que dans ($\star$), $f(x) + 3x^2$ est toujours non nul pour $x \neq 0$, de sorte que si $f(4x)$, alors $f(8x) = 0$. En remettant à l'échelle, on déduit que si $f(z) = 0$, alors $f(2z) = 0$.

On étudie maintenant la structure de l'ensemble $A := \{a \in \mathbb{R}, f(a) = 0\}$, qui est non vide puisqu'il contient 0.

Lemme 6. Si $a_1, a_2 \in A$, alors $-a_1, -a_2 \in A$ et $a_1 + a_2 \in A$.

Démonstration. Si $a_1 \in A$, alors $f(-a_1) = f(a_1) = 0$ donc $-a_1 \in A$. D'autre part, en choisissant x et y tels que

$$\begin{cases} x - 3y &= a_1 \\ y - 3x &= a_2 \end{cases},$$

(en prenant donc $-8x = a_1 + 3a_2$ et $-8y = 3a_1 + a_2$) on trouve $x + y = \dfrac{a_2 - a_1}{2}$. On a alors que $f(x+y)^2 = 0$, et donc que $f(2(x+y)) = 0$, c'est-à-dire que $f(a_2 - a_1) = 0$. C'est également vrai pour le couple $(-a_1, a_2)$, donc $f(a_1 + a_2) = 0$ et $a_1 + a_2 \in A$. $\square$

Prenons à présent $b \neq 0$ tel que $f(b) = b^2$ et $a \in A$ tel que $a \neq 0$. Alors $a + b$ n'est pas dans A, sinon on aurait $b = (a+b) - a \in A$. De même, on a que $4b$ n'est pas dans A mais que $4a \in A$ et donc que $3a - b = 4a - (a + b)$ n'est pas un élément de A. De même, puisque $4b$ n'est pas dans A (cela impliquerait que $b \in A$) et que $3b - a = 3(a + b) - 4a$, $3b - a$ n'est pas dans A non plus. En remplaçant x par a et y par b, on trouve avec toutes ces observations que

$$(a+b)^4 = f(a+b)^2 = (f(a)+ab)f(a-3b)+(f(b)+ab)f(3a-b) = abf(a-3b)+(b^2+ab)(3a-b)^2,$$

qui donne après simplification $0 = a^2(9b^2 + a^2 - 6ab) = a^2(a - 3b)^2$.On trouve alors $a = 3b$, ce qui contredit que $3b - a$ n'est pas dans A. On a obtenu une contradiction, ce qui achève de prouver que

$$f(z) = 0, \quad \forall z \in \mathbb{R} \quad \text{ou} \quad f(z) = z^2, \quad \forall z \in \mathbb{R}.$$

Réciproquement, ces deux fonctions sont bien solutions puisque, si f est la fonction nulle alors on a bien pour tous x, y

$$(f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) = 0 = (f(x + y))^2;$$

et si f est la fonction carrée, alors on a pour tous x, y

$$\begin{aligned}
& (f(x) + xy) \cdot f(x - 3y) + (f(y) + xy) \cdot f(3x - y) \\
= \;& x(x + y)(3x - y)^2 + y(x + y)(3y - x)^2 \\
= \;& (x + y)[x(9x^2 + y^2 - 6xy) + y(9y^2 + x^2 - 6xy)] \\
= \;& (x + y)(x + y)^3 = (f(x + y))^2
\end{aligned}.$$

Les solutions de l'équation sont dont la fonction nulle et la fonction carrée.

Exercice 15
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2) + xf(y) = f(x)f(x + f(y))$$

pour tous réels x, y.

Solution de l'exercice 15
En posant $x = 0$, on trouve que $f(0) = 0$ ou $f(f(y)) = 1$ pour tout y.

cas 1 : $f(f(y)) = 1$ pour tout y. En particulier, $1 = f(f(f(1))) = f(1)$. Alors en remplaçant y par $f(y)$ et x par 1, on trouve que $f(1)+1 = f(1)f(2)$, soit $f(2) = 2$. Mais alors $1 = f(f(2)) = f(2) = 2$ ce qui est absurde.

cas 2 : $f(0) = 0$. En remplaçant y par 0, on trouve $f(x^2) = f(x)^2$. En remplaçant x par $-f(y)$, on trouve donc

$$f(f(y)^2) = f(y)^2 = f(y^2)$$

Notre objectif est désormais d'avoir l'injectivité de f. Pour cela, on remarque que si a est une racine de f, en posant $x = a$ on trouvait $af(y) = 0$. Donc si f n'est pas nulle (ce qui marcherait), la seule racine de f est 0.

En posant $x = y \neq 0$, on obtient que $x + f(x)$ est un point fixe de f pour tout x.

Soit maintenant u et v tels que $f(u) = f(v) = c$. Alors en remplaçant y par $u + c$ puis par $v + c$ et x par $-c$, on trouve

$$f(-c)^2 - c(u+c) = f(-c)f(u) = f(-c)f(v) = f(-c)^2 - c(v+c)$$

ce qui donne bien que $u = v$ et f est injective.

De $f(f(y)^2) = f(y^2)$ on déduit que $f(y^2) = f(y)^2 = y^2$ pour tout y. Donc f est l'identité sur les réels positifs et pour tout y, $f(y) = -y$ ou $f(y) = y$.

Soit b non nul tel que $f(b) = -b$. On prend $x = -b$ et y suffisamment grand pour que $y + b > 0$. On trouve

$$b^2 - by = -bf(b+y) = -b(b+y)$$

soit $b^2 = 0$, ce qui est la contradiction voulue.

La seule fonction solution est l'identité.

Exercice 16
(RMM SL 2019 A1) Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x^2 + xy + f(y^2)) = xf(y) + f(x^2) + y^2$$

<u>*Solution de l'exercice 16*</u>
En posant $y = 0$, on trouve $f(x^2 + f(0)) = xf(0) + f(x^2)$. En remplaçant x par $-x$ dans cette équation, on trouve $f(x^2 + f(0)) = -xf(0) + f(x^2)$, et en combinant on obtient donc $2xf(0) = 0$, soit $f(0) = 0$.

En posant $x = 0$, on trouve $f(f(y^2)) = y^2 + f(0) = y^2$. En posant $y = -x$, on trouve cette fois-ci que $f(f(y^2)) = -yf(y) + y^2 + f(y^2)$. On en déduit que

$$f(y^2) = yf(y)$$

D'autre part, en posant $x = -f(y^2)/y$, on trouve

$$-\frac{f(y)f(y^2)}{y} + y^2 = 0$$

On déduit que si y est non nul, alors $y^3 = f(y)f(y^2) = yf(y)^2$, ou encore $f(y)^2 = y^2$. Puisque si $y = 0$, alors $f(0) = 0$, on a donc pour tout y réel que $f(y) = \pm y$.

Dans la suite, on suppose qu'il existe a et b tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. Notons qu'alors $f(a^2) = a^2$ et $f(b^2) = -b^2$, puisque $f(x^2) = xf(x)$.

En remplaçant $x = a$ et $y = b$ dans l'équation, on trouve

$$\pm(a^2 + ab - b^2) = -ab + b^2 + a^2$$

Le cas où le signe du LHS est un $+$ donne que $b(a-b)=0$. Si $b\neq 0$, alors $a=b$ ce qui donne $a=f(a)=f(b)=-b=-a$ donc $a=b=0$. Dans tous les cas, a ou b est nul.

Le cas où le signe du LHS est un $-$ donne que $a^2=0$ donc $a=0$.

On déduit que les seules solutions sont les fonction $f\equiv x$ et $f\equiv -x$.

8 Equations diophantiennes (Paul LL et Quentin)

Exercice 1
Trouver tous les entiers $a, n \geq 0$ tels que $7^n + 9 = a^2$.

Solution de l'exercice 1
Ici, on cherche à factoriser. L'équation se réécrit $7^n = a^2 - 9 = (a-3)(a+3)$. Remarquons que $\text{pgcd}(a-3, a+3) = \text{pgcd}(a-3, 6) \mid 6$, mais il doit également diviser 7^n, leur pgcd est donc 1. Mais alors, comme $(a-3)(a+3) = 7^n$, on a $a - 3 = 7^k, a + 3 = 7^l$, $0 \leq k \leq l$, $k + l = n$. Et comme ils sont premiers entre eux, nécessairement $k = 0$ soit $a = 4$, et donc $7 = a + 3 = 7^l$, d'où $l = 1$ et donc $n = 1$.
Réciproquement pour $a = 4, n = 1$, on a $7^n + 9 = 7 + 9 = 16$ et $a^2 = 4^2 = 16$ donc $(4, 1)$ convient.
Finalement, il y a une unique solution $(a, n) = (4, 1)$.

Exercice 2
Trouver tous les nombres premiers p et entiers $m, n \geq 0$ tels que $p^n + 144 = m^2$.

Solution de l'exercice 2
On reconnaît que $144 = 12^2$, et on réécrit l'équation afin de factoriser.
On a alors $p^n = m^2 - 12^2 = (m-12)(m+12)$. Il existe donc deux entiers $k, l \geq 0$ avec $k + l = n$ tels que $m - 12 = p^k, m + 12 = p^l$. Comme $m + 12 > 0$, on a $1 \leq m - 12 < m + 12$ et donc $k \leq l$. Or, $\text{pgcd}(m-12, m+12) = \text{pgcd}(m-12, 24) \mid 24$, et $\text{pgcd}(m-12, m+12) = p^{\min(k,l)} = p^k$. On a donc plusieurs cas possibles.

- $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 1$, dans ce cas $m - 12 = 1$, d'où $m = 13$. Réciproquement si $m = 13$, alors $p^n = 25$ donc $p = 5, n = 2$ conviennent.
- $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 3$, dans ce cas $p = 3, k = 1$ donc $m - 12 = 3$, d'où $m = 15$, et $m + 12 = 27 = 3^3$, et ainsi $m = 15, p = 3, n = 4$ conviennent.
- $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 2$, dans ce cas $p = 2, k = 1$ et $m = 14, m + 12 = 26$ n'est pas une puissance de 2, contradiction.
- $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 4$, dans ce cas $m = 16$ et $m + 12 = 28$ n'est pas une puissance de 2, contradiction.
- $\text{pgcd}(m-12, m+12) = 8$, dans ce cas $m = 20$, $p = 2$ et $m + 12 = 32 = 2^5$, donc $m = 20, n = 8, p = 2$ conviennent.

Finalement, il y a trois triplets solutions : $(m, n, p) = (13, 2, 5)$, $(m, n, p) = (15, 4, 3)$ et $(m, n, p) = (20, 8, 2)$.

Exercice 3 (Envoi Arithmétique 2021-2022, Exercice 4)
Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (x, n) tels que $3 \times 2^x + 4 = n^2$.

Solution de l'exercice 3
Si $x = 0$, l'équation devient $n^2 = 7$ qui n'a pas de solution. Supposons donc $x > 0$.
On factorise : $3 \times 2^x = n^2 - 4 = (n-2)(n+2)$. Notons que $\text{pgcd}(n-2, n+2) = \text{pgcd}(n-2, 4) = 1, 2$ ou 4. On a alors deux cas possibles.

- Cas 1 : on dispose de $a, b \geq 0$ tels que $n - 2 = 3 \times 2^a, n + 2 = 2^b$ et $a + b = x$. Comme le pgcd divise 4, on a $\min(a, b) \leq 2$. Mais $2^b = n + 2 = n - 2 + 4 = 3 \times 2^a + 4 > 4$ donc $b > 2$. On en déduit que $a \leq 2$. Si $a = 0$, on a $n = 5$ donc $n + 2 = 7$ n'est pas une puissance de deux. Si $a = 1$ on a $n = 8$ donc $n+2 = 10$ n'est pas une puissance de deux. Enfin si $a = 2$, on a $n = 14$ donc $n + 2 = 16 = 2^4$ ce qui donne $b = 4, x = 6$ et ceci nous donne donc la solution potentielle $(x, n) = (6, 14)$, qui réciproquement convient car $3 \times 2^6 + 4 = 14^2$.

- Cas 2 : on dispose de $a, b \geq 0$ tels que $n-2 = 2^a, n+2 = 3\times 2^b$ et $a+b = x$. On a toujours $\min(a, b) \leq 2$. On distingue donc les différents cas.
  Le cas $a = 0$ donne $n = 3$ donc $n + 2 = 5 \neq 3 \times 2^b$, contradiction.
  Le cas $a = 1$ donne $n = 4$ donc $n+2 = 6 = 3\times 2$, on a donc $a = b = 1$ soit $x = 2$, ceci donne la solution potentielle $(x, n) = (2, 4)$, qui réciproquement convient car $3 \times 2^2 + 4 = 4^2$.
  Le cas $a = 2$ donne $n = 6$ donc $n + 2 = 8 \neq 3 \times 2^b$, contradiction.
  Le cas $b = 0$ donne $n = 1$ donc $n - 2 = -1 \neq 2^a$, contradiction.
  Le cas $b = 1$ donne $n = 4$ donc $n - 2 = 2$, on retombe sur le cas $a = 1$ traité plus haut.
  Le cas $b = 2$ donne $n = 10$ donc $n - 2 = 8 = 2^3$, soit $a = 3$, d'où $x = 5$, et finalement ceci donne lieu à la solution potentielle $(x, n) = (5, 10)$, qui réciproquement convient car $3 \times 2^5 + 4 = 10^2$.

Les solutions de l'équation sont donc $(x, n) = (6, 14)$, $(x, n) = (2, 4)$ et $(x, n) = (5, 10)$.

Exercice 4
Trouver tous les entiers $x, \alpha, \beta \geq 0$ vérifiant $x^2 + x = 2^\alpha 3^\beta$.

Solution de l'exercice 4
Dans une situation comme celle-ci, il est souhaitable de factoriser.
On réécrit donc $x(x + 1) = 2^\alpha 3^\beta$. Comme $\mathrm{pgcd}(x, x + 1) = \mathrm{pgcd}(x, 1) = 1$, on est dans l'un des cas suivants.

- $x = 1, x + 1 = 2^\alpha 3^\beta$, dans ce cas $x + 1 = 2$ donc $\alpha = 1, \beta = 0$, ce qui donne la solution $(x, \alpha, \beta) = (1, 1, 0)$.
- $x = 2^\alpha, x + 1 = 3^\beta$. On a alors $3^\beta - 2^\alpha = 1$. On réécrit cette équation $3^\beta - 1 = 2^\alpha$. Si $\alpha = 0$, il n'y a pas de solution. Si $\alpha = 1$, on a $\beta = 1$. Si $\alpha \geq 2$, modulo 4 $(-1)^\beta \equiv 1 \pmod 4$ donc β est pair (et $\beta > 0$) : on écrit $\beta = 2\gamma$. On a alors $2^\alpha = (3^\gamma - 1)(3^\gamma + 1)$.
  Comme $\mathrm{pgcd}(3^\gamma-1, 3^\gamma+1) \mid 2$ et que $1 \leq 3^\gamma-1 < 3^\gamma+1$ sont pairs ($\gamma > 0$), on a $3^\gamma-1 = 2$ soit $\gamma = 1$, et alors $\alpha = 3$
  Finalement, on a les solutions $(x, \alpha, \beta) = (2, 1, 1)$ et $(x, \alpha, \beta) = (8, 3, 2)$.
- $x = 3^\beta, x + 1 = 2^\alpha$. Dans ce cas, $2^\alpha - 3^\beta = 1$, soit $2^\alpha - 1 = 3^\beta$. Si $\beta = 0$, on retombe sur la solution $\alpha = 1, \beta = 0, x = 1$. Si $\beta \geq 1$, modulo 3 on obtient que α est pair, donc $\alpha = 2\gamma$. Mais alors $(2^\gamma-1)(2^\gamma+1) = 3^\beta$, d'où, puisque $\mathrm{pgcd}(2^\gamma-1, 2^\gamma+1) \mid 2$ et est une puissance de 3 : $2^\gamma - 1 = 1$, et donc $\alpha = 2, \beta = 1$. On obtient donc la solution $(x, \alpha, \beta) = (3, 2, 1)$.

Il y a donc quatre triplets solution : $(x, \alpha, \beta) = (1, 1, 0)$, $(x, \alpha, \beta) = (2, 1, 1)$, $(x, \alpha, \beta) = (8, 3, 2)$ et $(x, \alpha, \beta) = (3, 2, 1)$

Exercice 5 (JBMO P1 2018)
Trouver tous les couples d'entiers (m, n) tels que

$$m^5 - n^5 = 16mn.$$

Solution de l'exercice 5
On commence par chercher des diviseurs communs aux deux membres. On note donc

$d = (m, n)$ (leur pgcd). De plus, on note $m = d \cdot x$ et $n = d \cdot y$. On trouve :

$$d^3(x^5 - y^5) = 16xy, \text{ avec } (x, y) = 1$$

De plus, si $x^5 - y^5$ et xy sont divisibles tout deux par un nombre premier p, alors il divise x ou y. On peut supposer spdg que $p \mid x$, et comme p divise également $x^5 - y^5$, on trouve que p divise y^5. Donc $p \mid y$ ce qui contredit la coprimalité de x et y, absurde.
Donc $(x^5 - y^5, xy) = 1$. On en déduit, par le lemme de Gauss, que $x^5 - y^5 \mid 16$, et en particulier $|x^5 - y^5| \leqslant 16$.
Or, si $|x|$ ou $|y| \geqslant 2$, alors la distance avec la plus proche puissance cinquième vaut au moins 31.
Si $x = y = 0$, on trouve la solution $(m, n) = (0, 0)$. Si $x = y \neq 0$, on n'a pas de solution parce que $0 = d^3(x^5 - y^5) = 16xy \neq 0$, et si x ou y est non-nul (et donc $x \neq y$), alors l'autre l'est aussi parce que $16xy = d^3(x^5 - y^5) \neq 0$.
Ainsi, on trouve les deux couples $(x, y) = (1, -1)$ et $(-1, 1)$ qui donnent respectivement lieu à $d^3 = 8$, c'est-à-dire $d = 2$, et $d^3 = -8$, c'est-à-dire $d = -2$. Et les solutions $(2, -2)$ et $(-2, 2)$.
Les solutions sont donc $(m, n) = (0, 0)$, $(2, -2)$ et $(-2, 2)$.

Exercice 6 (Envoi Arithmétique 2022-2023, Exercice 6)
Trouver tous les nombres premiers p, q tels que $p^5 + p^3 + 2 = q^2 - q$.

Solution de l'exercice 6
Cette forme développée n'est pas idéale, on cherche à factoriser.
On réécrit $p^3(p^2 + 1) = q^2 - q - 2 = (q - 2)(q + 1)$, d'où $p^3 \mid (q - 2)(q + 1)$.
Or, $\operatorname{pgcd}(q - 2, q + 1) = \operatorname{pgcd}(q - 2, 3) = 1$ ou 3.
Supposons d'abord $p = 3$, on veut résoudre $(q - 2)(q + 1) = 270$, soit $q^2 - q - 272 = 0$, qui a comme solution $q = 17$ (qui est bien un nombre premier) et $q = -16$ (qui n'est pas un nombre premier). Le cas $p = 3$ donne lieu à une unique solution $q = 17$.
Supposons à présent $p \neq 3$. En particulier p ne peut pas diviser à la fois $q - 2$ et $q + 1$, donc soit $p^3 \mid q - 2$, soit $p^3 \mid q + 1$ d'après le lemme de Gauss.
Si $p^3 \mid q - 2$, alors $p^3(p^2 + 1) = (q - 2)(q + 1) \geq (q - 2)^2 \geq p^3 \times p^3$ soit $p^2 + 1 \geq p^3$, absurde.
Donc $p^3 \mid q + 1$, mais alors $q - 2 \mid p^2 + 1$ par le lemme de Gauss.
Il suit $p^3 \leq q + 1 = (q - 2) + 3 \leq p^2 + 1 + 3 = p^2 + 4$, d'où $p^2(p - 1) \leq 4$. Ceci n'est possible que pour $p = 2$, qui donne lieu à $q^2 - q = 42$, soit $q = 7$ (qui est bien premier) ou $q = -6$ (qui n'est pas un nombre premier).
En conclusion, on a deux solutions $(p, q) = (3, 17)$ et $(p, q) = (2, 7)$.

Exercice 7 (JBMO Shortlist 2019, N3)
Soit p un nombre premier. Trouver tous les entiers positifs $x \neq y$ tels que $x^4 - y^4 = (x^3 - y^3)p$.

Solution de l'exercice 7
Si $x = 0$, on a $y \neq 0$ et $y^4 = y^3 p$ soit $y = p$. Réciproquement si $y = 0, x = p$. On suppose à présent $x, y > 0$.
On factorise : $x^4 - y^4 = (x^2 - y^2)(x^2 + y^2) = (x - y)(x + y)(x^2 + y^2)$, et $x^3 - y^3 = (x - y)(x^2 + xy + y^2)$.
Comme $x \neq y$, on peut simplifier et réécrire l'équation $(x + y)(x^2 + y^2) = p(x^2 + xy + y^2)$.
Soit $d = \operatorname{pgcd}(x, y)$, on écrit $x = da, y = db, \operatorname{pgcd}(a, b) = 1$.
On a alors $d^3(a + b)(a^2 + b^2) = pd^2(a^2 + ab + b^2)$, soit $d(a + b)(a^2 + b^2) = p(a^2 + ab + b^2)$.
Or, $\operatorname{pgcd}(a^2 + b^2, a^2 + ab + b^2) = \operatorname{pgcd}(a^2 + b^2, ab) = 1$ (si q premier divise a, b, sans perte de généralité il divise a donc il divise $a^2 + b^2 - a^2 = b^2$, donc il divise b, absurde). De plus,

$\operatorname{pgcd}(a+b, a^2+ab+b^2) = \operatorname{pgcd}(a+b, (a+b)^2 - a^2 - ab - b^2) = \operatorname{pgcd}(a+b, ab) = 1$ de même. Finalement, a^2+ab+b^2 est premier avec $(a+b)(a^2+b^2)$, donc d'après le lemme de Gauss il divise d.
On écrit $d = k(a^2+ab+b^2)$, l'équation devient $k(a+b)(a^2+b^2) = p$. Or $a^2+b^2 > a+b > 1$, contradiction (p est premier). On en déduit qu'il n'y a pas de solution avec $x, y > 0$.
Finalement, les solutions sont $(x,y) = (p,0)$ et $(x,y) = (0,p)$.

Exercice 8
Trouver tous les entiers $x, y \geq 0$ tels que $x^2 - y! = 2024$

Solution de l'exercice 8
Pour $y \geq 3$, on a $3 \mid y!$ et donc $x^2 \equiv 2024 \equiv 2 \pmod 3$, mais on sait qu'un carré ne peut être congru qu'à 0 ou 1 modulo 3, donc il n'y a pas de solution pour $y \geq 3$.
Pour $y = 0$ et 1, on a $x^2 = 2025 = 45^2$, on a donc deux solutions, $(x,y) = (45,0)$ ainsi que $(x,y) = (45,1)$.
Pour $y = 2$, on a $x^2 = 2026$ qui n'est pas le carré d'un entier.
On a finalement deux solutions, $(x,y) = (45,0)$ et $(x,y) = (45,1)$.

Exercice 9
Trouver tous les triplets d'entiers strictement positifs (a,b,c) tels que

$$6^a = 1 + 2^b + 3^c.$$

Solution de l'exercice 9
La présence de tous ces différents nombres nous incite à étudier l'équation dans différents modulos.
En regardant $\pmod 3$, on trouve que b est impair (sinon $2^b \equiv 1 \pmod 3$ et on en déduit que $1 + 2^b + 3^c \equiv 2 \not\equiv 0 \equiv 6^a \pmod 3$, impossible). De plus, si $b = 1$, et si $c \geqslant 2$, $1 + 2^b + 3^c \equiv 3 \pmod 9$, ce qui est impossible (car $6^a \equiv 6$ ou $0 \pmod 9$). Donc si $b = 1$, on a forcément $c = 1$ et on trouve une première solution $(a,b,c) = (1,1,1)$.
Désormais, on traite le cas $b > 1$, donc $b \geqslant 3$ (car b est impair). On étudie l'équation $\pmod 8$: 3^c vaut soit 3, soit $1 \pmod 8$, donc $1 + 2^b + 3^c \equiv 2$ ou $4 \pmod 8$. Or, il est impossible que $6^a \equiv 2 \pmod 8$, et si $6^a \equiv 4 \pmod 8$, alors $a = 2$,. Comme il faut que $2^b < 36$, et que b soit impair, on a soit $b = 3$, ce qui donne $c = 3$, soit $b = 5$, ce qui donne $c = 1$. On obtient donc trois solutions : $(1,1,1)$, $(2,3,3)$ et $(2,5,1)$.

Exercice 10 (Olympiade Junior Coréenne 1998, P1)
Montrer qu'il n'existe aucun triplet d'entiers (x,y,z) tel que $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9$.

Solution de l'exercice 10
Le fait que la somme des cubes valent 9 nous incite à regarder l'équation $\pmod 9$. Pour un éventuel triplet solution (x,y,z), on a donc $x^3 + 2y^3 + 4z^3 \equiv 0 \pmod 9$.
Or les cubes valent $0, 1$ ou $-1 \pmod 9$.
Si $z^3 \equiv 1, -1 \pmod 9$, on trouve $x^3 + 2y^3 \equiv 4, -4 \pmod 9$, et on voit que ceci est impossible comme $x^3, y^3 \equiv \pm 1 \pmod 9$.
Donc $z^3 \equiv 0 \pmod 9$, c'est-à-dire 3 divise z. Mais alors $x^3 + 2y^3 \equiv 0 \pmod 9$, ce qui est également impossible à moins que $x, y \equiv 0 \pmod 3$. Alors on dispose de x', y', z' tels que $x = 3x', y = 3y', z = 3z'$. En injectant dans l'équation de base, $27(x'^3 + 2y'^3 + 4z'^3) = 9$ donc 27

divise 9, contradiction.
L'équation $x^3 + 2y^3 + 4z^3 = 9$ n'a aucune solution.

Exercice 11
Trouver tous les entiers $x, y, z, t > 0$ tels que $6(x^2 + y^2) = z^2 + t^2$.

Solution de l'exercice 11
Si (x, y, z, t) est solution, alors $3 \mid z^2 + t^2$. Un carré étant congru à 0 ou 1 modulo 3, on a nécessairement $z = 3z', t = 3t'$ pour $z', t' > 0$ entiers.
On obtient alors $2(x^2 + y^2) = 3(z'^2 + t'^2)$. De la même manière, il existe $x', y' > 0$ tels que $x = 3x', y = 3y'$.
Ainsi $6(x'^2 + y'^2) = z'^2 + t'^2$: à partir de la solution (x, y, z, t), on a construit une nouvelle solution (x', y', z', t') strictement plus petite ($0 < x' < x, 0 < y' < y, 0 < z' < z$ ainsi que $0 < t' < t$). Comme il n'y a pas de suite strictement décroissante d'entiers positifs, on conclut par l'absurde qu'il n'y a aucune solution à l'équation diophantienne. C'est ce qu'on appelle le principe de descente infinie.

Exercice 12 (JBMO Shortlist 2020, N2)
Trouver tous les entiers $a, b, c > 0$ et les nombres premiers p tels que $73p^2+6 = 9a^2+17b^2+17c^2$.

Solution de l'exercice 12
Supposons que $p > 2$. Alors p est impair donc $p^2 \equiv 1 \pmod 8$. Il découle modulo 8 que $7 \equiv a^2 + b^2 + c^2 \pmod 8$. Un carré valant $0, 1, 4 \pmod 8$, on obtient une contradiction.
Supposons à présent que $p = 2$. On doit onc résoudre $9a^2 + 17b^2 + 17c^2 = 298$. Comme $a \geq 1$, on a $17(b^2 + c^2) \leq 298 - 9 = 289$ d'où $b^2 + c^2 \leq \dfrac{289}{17} = 17$. Alors les possibilités pour (b, c) sont $(1, 1), (1, 2), (1, 3), (1, 4), (2, 1), (2, 2), (2, 3), (3, 1), (3, 2)$. De plus modulo 9, $b^2 + c^2 \equiv 8 \pmod 9$. Il reste donc les possibilités $(1, 4), (2, 2), (4, 1)$. Les couples $(1, 4), (4, 1)$ donnent lieu aux solutions $(p, a, b, c) = (2, 1, 1, 4)$ et $(p, a, b, c) = (2, 1, 4, 1)$. En revanche $(2, 2)$ donnerait lieu à $a^2 = 18$, impossible.
Finalement, il y a deux solutions (p, a, b, c), qui sont $(2, 1, 1, 4)$ et $(2, 1, 4, 1)$.

Exercice 13
Soit p un nombre premier, montrer que $7p + 3^p - 4$ n'est jamais un carré parfait.

Solution de l'exercice 13
On commence par traiter le cas $p = 2$: $7p + 3^p - 4 = 14 + 9 - 4 = 19$ n'est pas un carré parfait. Donc on traite par la suite le cas $p \geqslant 3$, en particulier p est impair. Supposons par l'absurde qu'il existe un entier a tel que $7p + 3^p - 4 = a^2$.
Comme p est impair, $7p+3^p-4$ est pair, donc pour être un carré parfait, il faut que $7p+3^p \equiv 0 \pmod 4 \implies 3^p \equiv p \pmod 4$. Comme p est impair, $3^p \equiv 3 \pmod 4$, donc $p \equiv 3 \pmod 4$.
De plus, par le petit théorème de Fermat, $3^p \equiv 3 \pmod p$, donc $a^2 \equiv 7p+3^p-4 \equiv -1 \pmod p$. Or, $1 \equiv a^{p-1} \equiv (a^2)^{\frac{p-1}{2}} \equiv (-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv -1 \pmod p$ (car $p - 1$ est divisible par 2 mais pas par 4), ce qui est absurde (car $p \neq 2$).
Il n'existe donc aucun nombre premier p tel que $7p + 3^p - 4$ soit un carré parfait.

Exercice 14 (IMO Shortlist 2023, N2)
Déterminer toutes les paires (a, p), avec a entier strictement positif et p nombre premier, telles que $p^a + a^4$ est un carré parfait.

Solution de l'exercice 14
Soit (a,p) une solution potentielle, on dispose de $b>0$ entier tel que $p^a+a^4=b^2$. On réécrit l'équation $p^a=b^2-a^4=(b-a^2)(b+a^2)$. Comme $b+a^2, p^a>0$, on a $0<b-a^2<b+a^2$. On dispose donc d'un entier $x\geq 0$ tel que $2x<a$ et tel que $b-a^2=p^x, b+a^2=p^{a-x}$. Alors $2a^2=(b+a^2)-(b-a^2)=p^{a-x}-p^x=p^x(p^{a-2x}-1)$.
On distingue alors plusieurs cas.

1. Si $p=2$, l'équation devient $a^2=2^{x-1}(2^{a-2x}-1)$. En particulier $x-1=2v_2(a)$ et puisque $\operatorname{pgcd}(2,2^{a-2x}-1)=1$, on a que $2^{a-2x}-1$ est un carré parfait. Si $v_2(a)>0$, comme a est pair alors 2^{a-2x} est un carré donc $2^{a-2x}-1=0$ (les seuls carrés consécutifs sont 0 et 1), c'est-à-dire $a=2x$, contradiction ($2x<a$). Donc $v_2(a)=0$ et $x=1$. Il découle $a^2=2^{a-2}-1$. Or si $a\geq 4$, $2^{a-2}-1\equiv 3 \pmod 4$ n'est pas un carré. Donc on est ramené à étudier les cas $a=1,2,3$, et on voit qu'aucun d'eux ne vérifie $a^2=2^{a-2}-1$. Le cas $p=2$ ne donne donc lieu à aucune solution.
2. Si $p>2$, alors $x=2v_p(a)$. Soit $m=v_p(a)$, alors il existe $n\geq 1$ premier à p tel que $a=p^m n$. Dès lors, $2n^2=p^{a-2x}-1=p^{p^m n-4m}-1$. On distingue plusieurs cas.
   (i) Si $p\geq 5$. On a $p^m\geq 5^m>4m$ (par récurrence par exemple). Alors :
   $$2n^2+1=p^{p^m n-4m}>p^{p^m n-p^m}\geq 5^{5^m(n-1)}\geq 5^{n-1}.$$
   Or on peut montrer par récurrence que $5^{n-1}>2n^2+1$ dès que $n\geq 3$. Si $n=1$, on a $2=p^{a-2x}-1$ donc $p=3$, absurde. Si $n=2$, on a $8=p^{a-2x}-1$ donc $p=3$, absurde aussi.
   (ii) Si $p=3$, alors $2n^2+1=3^{3^m n-4m}$. Or si $m\geq 2$ alors $3^m>4m$. Il en découle que $2n^2+1>3^{3^m(n-1)}>3^{9(n-1)}$ de même. Mais par récurrence, $3^{9(n-1)}\geq 2n^2+1$ pour $n\geq 2$. Donc $n=1$, d'où $3=2\times 1^2+1=3^{3^m-4m}$. Ainsi $3^m=4m+1$. Là encore on peut montrer qu'il y a une unique solution $m=2$ (par récurrence par exemple), et dans ce cas $a=3^m\times n=9$. Réciproquement, pour $a=9, p=3$, on a $p^a+a^4=3^9+9^4=162^2$ qui est bien un carré parfait.
   Autrement, si $m=0$, alors $2n^2+1=3^n$ qui a pour solutions $n=1, n=2$ qui donnent respectivement $a=1, a=2$. Réciproquement, pour $a=1, p=3$, on a bien $p^a+a^4=3+1=2^2$ et pour $a=2, p=3$ on a $p^a+a^4=9+16=5^2$ donc ce sont bien des solutions.
   Finalement, si $m=1$, on a $2n^2+1=3^{3n-4}$. Par récurrence, on montre par récurrence que $n\geq 3$ ne marche pas. De plus, $n=1$ ne marche pas non plus. Pour $n=2$, on trouve $a=6$ et réciproquement pour $a=6, p=3$ on a $p^a+a^4=3^6+6^4=2025=45^2$ qui est donc bien solution.

Finalement, il y a quatre solutions, $(a,p)=(1,3), (a,p)=(2,3), (a,p)=(6,3)$ et $(a,p)=(9,3)$.

Exercice 15 (IMO Shortlist 2010, N2)
Trouver tous les couples d'entiers positifs (m,n) tels que $m^2+2\times 3^n=m(2^{n+1}-1)$.

Solution de l'exercice 15
On commence par traiter les petits cas.

- Pour $n=0$, l'équation devient $m^2+2=m$ soit $m^2-m+2=0$, qui n'a pas de solution entière.
- Pour $n=1$, on obtient $m^2+6=3m$, qui n'a pas non plus de solution entière.

- Pour $n = 2$, $m^2 + 18 = 7m$, pas de solution.
- Pour $n = 3$, $m^2 + 54 = 15m$ soit $(m-6)(m-9) = 0$, ce qui donne lieu à deux solutions, $(m,n) = (6,3)$ et $(m,n) = (9,3)$.
- Pour $n = 4$, $m^2 + 162 = 31m$, qui n'a pas de solution entière.
- Pour $n = 5$, $m^2 + 486 = 63m$, qui se réécrit $(m-9)(m-54) = 0$, ce qui donne lieu à deux solutions, $(m,n) = (9,5)$ et $(m,n) = (54,5)$.

Supposons désormais $n \geq 6$. Alors m divise 2×3^n et donc m est soit de la forme 3^p avec $0 \leq p \leq n$, soit de la forme 2×3^p avec $0 \leq p \leq n$.

(i) Si $m = 3^p$, en posant $q = n - p$, l'équation devient $3^{2p} + 2 \times 3^{p+q} = 3^p(2^{n+1} - 1)$, soit encore $3^p + 2 \times 3^q = 2^{n+1} - 1$ avec $p + q = n$.

(ii) Si $m = 2 \times 3^p$, en posant $q = n - p$ on obtient $4 \times 3^{2p} + 2 \times 3^{p+q} = 2 \times 3^p(2^{n+1} - 1)$, qu'on peut réécrire $3^q + 2 \times 3^p = 2^{n+1} - 1$ avec $p + q = n$.

On remarque alors que les deux cas sont symétriques, en échangeant les rôles de p et q. On est finalement ramené à étudier l'équation $3^p + 2 \times 3^q = 2^{n+1} - 1$ avec $p + q = n$.
Cherchons à encadrer p, q. On a :

$$3^p = 2^{n+1} - 1 + 2 \times 3^q < 2^{n+1} = 8^{\frac{n+1}{3}} < 9^{\frac{n+1}{3}} = 3^{\frac{2(n+1)}{3}}.$$

Donc $p < \dfrac{2(n+1)}{3}$. De même $2 \times 3^q < 2^{n+1}$ donc $3^q < 2^n$, d'où $q < \dfrac{2n}{3} < \dfrac{2(n+1)}{3}$.
On a donc $p, q < \dfrac{2(n+1)}{3}$, et $p + q = n$ donc $p, q > n - \dfrac{2(n+1)}{3} = \dfrac{n-2}{3}$. Ainsi :

$$\frac{n-2}{3} < p, q < \frac{2(n+1)}{3}.$$

Notons $r = \min(p,q)$. Alors $r > \dfrac{n-2}{3} \geq \dfrac{6-2}{3} = \dfrac{4}{3}$, donc comme r est entier, $r \geq 2$. En particulier $9 \mid 3^r \mid 3^p + 2 \times 3^q = 2^{n+1} - 1$. Comme l'ordre de 2 modulo 9 est 6, on en déduit que 6 divise $n+1$. On écrit $n + 1 = 6a$ avec $a \geq 1$ entier (rappelons que $n \geq 6$ donc $a > 0$).
On a alors que 3^r divise $2^{n+1} - 1 = 2^{6a} - 1 = 4^{3a} - 1 = (4^a - 1)(4^{2a} + 4^a + 1)$, ce qui se factorise encore en $(2^a - 1)(2^a + 1)(4^{2a} + 4^a + 1)$.
En étudiant modulo 9, on se rend compte que $4^{2a} + 4^a + 1$ est divisible par 3 mais pas par 9, donc 3^{r-1} divise $(2^a - 1)(2^a + 1)$. Mais $\operatorname{pgcd}(2^a - 1, 2^a + 1) = \operatorname{pgcd}(2^a - 1, 2) = 1$ car $a \geq 1$ donc $2^a - 1$ est impair. Ainsi, 3^{r-1} divise soit $2^a - 1$ soit $2^a + 1$.
On a donc $3^{r-1} \leq 2^a - 1 < 2^a + 1$ dans le premier cas, et $3^{r-1} \leq 2^a + 1$.
Dans les deux cas, $3^{r-1} \leq 2^a + 1 \leq 3^a$ donc $r - 1 \leq 3^a$. D'où $\dfrac{n+1}{6} = a \geq r - 1 > \dfrac{n-2}{3} - 1$, ainsi $n + 1 \geq 2(n-2) - 6$, ou encore $n < 11$. Comme nous avions précédement supposé $n \geq 6$, et qu'on a prouvé que $n+1$ est divisible par 6, on obtient une contradiction (aucun nombre n'est congru) -1 modulo 6 parmi $6, 7, 8, 9, 10$).
Finalement, les solutions sont $(m,n) = (6,3)$, $(m,n) = (9,3)$, $(m,n) = (9,5)$ et $(m,n) = (54,5)$.

4 Entraînement de fin de parcours

Énoncés

Exercice 1
Trouver tous les couples d'entiers (k, n) strictement positifs, tels que $\text{pgcd}(n, k-1) = 1$, et tels que n divise $k^n - 1$.

Exercice 2
Soient a et b deux nombres réels tels que les deux polynômes $X^2 + aX + b$ et $X^2 + bX + a$ ont chacun deux racines réelles distinctes, et le polynôme $(X^2 + aX + b)(X^2 + bX + a)$ a trois racines réelles distinctes. Que vaut la somme de ces trois racines ?

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y, on a :

$$f(xf(x) + f(y)) = f(x)^2 + y.$$

Exercice 4
Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $7^a - 3^b$ divise $a^4 + b^2$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Si $n = 1$ et $k \geq 1$ est quelconque, on va bien avoir que 1 divise $k^1 - 1$ et que $\text{pgcd}(1, k-1) = 1$. Donc $(k, 1)$ est solution pour tout $k \geq 1$.
On suppose à présent que (k, n) est solution avec $n \geq 2$. Comme $n \geq 2$, il admet (au moins) un diviseur premier. Soit p le plus petit diviseur premier de n. On a alors $p \mid n \mid k^n - 1$. Mais comme n et $k - 1$ sont premiers entre eux, p ne divise pas $k - 1$.
Ainsi, en notant ω l'ordre de k modulo p (qui existe puisque p divise $k^n - 1$ donc est premier avec k), on a que $\omega > 1$ (puisque p ne divise pas $k - 1$) et que ω divise n (puisque p divise $k^n - 1$).
D'autre part, d'après le petit théorème de Fermat, p divise $k^{p-1} - 1$ donc ω divise $p - 1$. Alors ω divise $\text{pgcd}(n, p-1)$. Comme p a été choisi comme **le plus petit diviseur premier** de n, les nombres n et $p - 1$ n'ont aucun facteur premier en commun, ils sont donc premiers entre eux. On obtient alors $\omega = 1$, ce qui est absurde.
Finalement, les solutions sont les $(k, n) = (k, 1)$ pour n'importe quel $k \geq 1$.

Solution de l'exercice 2
Notons r_1, r_3 les racines de $X^2 + aX + b$ et r_2, r_4 celles de $X^2 + bX + a$. On a alors $X^2 + aX + b = (X - r_1)(X - r_3)$ et $X^2 + bX + a = (X - r_2)(X - r_4)$ avec $r_1 \neq r_3$ et $r_2 \neq r_4$.
Alors $(X^2 + aX + b)(X^2 + bX + a) = (X - r_1)(X - r_3)(X - r_2)(X - r_4)$, mais il n'a que trois racines réelles distinctes. Cela signifie que $X^2 + aX + b$ et $X^2 + bX + a$ ont une racine commune, sans perte de généralité $r_3 = r_4$.
Les relations de Viete pour $X^2 + aX + b$ donnent :

$$\begin{cases} r_1 + r_3 = -a & (E_1) \\ r_1 \times r_3 = b & (E_2) \end{cases}$$

De même, les relations de Viete pour $X^2 + bX + a$ donnent :

$$\begin{cases} r_2 + r_3 = -b & (E_1') \\ r_2 \times r_3 = a & (E_2') \end{cases}$$

Alors $(E_1) + (E_2')$ et $(E_2) + (E_1')$ donnent :

$$\begin{cases} r_1 + r_3 + r_2 r_3 = 0 & (L_1) \\ r_2 + r_3 + r_1 r_3 = 0 & (L_2) \end{cases}$$

Alors $(L_1) - (L_2)$ donne $0 = r_1 - r_2 - r_1 r_3 + r_2 r_3 = (r_1 - r_2)(1 - r_3)$. Or $r_1 \neq r_2$ d'où $r_3 = 1$.
Ainsi en reprenant (L_1) et en remplaçant $r_2 r_3$ par r_2, on obtient $r_1 + r_2 + r_3 = 0$.
Donc la somme des trois racines vaut 0.

Solution de l'exercice 3
En posant $x = 0$ dans l'équation fonctionnelle, on obtient $f(f(y)) = y + f(0)^2 \ \ (E_1)$. Puisque $y + f(0)^2$ décrit $\mathbb{R}$ quand y varie, on en déduit que f est surjective.
On cherche à déterminer $f(0)$. Par surjectivité, il existe un réel a tel que $f(a) = 0$.
En posant $x = y = a$, on obtient $f(0) = f(af(a) + f(a)) = f(a)^2 + a$ donc $f(0) = a$.
Mais alors $y = a$ dans (E_1) donne $a = f(0) = f(f(a)) = a + f(0)^2 = a + a^2$ donc $a^2 = 0$, d'où $a = 0$. Finalement, $f(0) = 0$.
L'équation (E_1) devient alors $f(f(y)) = y$. Dès lors, en substituant $x = f(x)$ dans l'équation intiale, on obtient $f(f(x)x + f(y)) = f(f(x)f(f(x)) + f(y)) = f(f(x))^2 + y = x^2 + y$, mais d'après l'équation initiale, $f(xf(x) + y) = f(x)^2 + y$. On en déduit que pour tout réel x, on a $f(x)^2 = x^2$.
Ici, il faut faire attention, on est en présence d'un **multigraphe** : l'équation $f(x) = x^2$ nous dit que pour chaque x réel, soit $f(x) = x$, soit $f(x) = -x$. Mais ce n'est pas suffisant pour conclure que $f(x) = x$ pour tout x ou $f(x) = -x$ pour tout x.
Pour ce faire, supposons par l'absurde qu'il existe $x_0, y_0 \neq 0$ tels que $f(x_0) = x_0$ et $f(y_0) = -y_0$. Alors en substituant $x = x_0, y = y_0$ dans l'équation initiale, on obtient $x_0^2 + y_0 = f(x_0^2 - y_0)$. Si $f(x_0^2 - y_0) = x_0^2 - y_0$, on obtient $y_0 = 0$, absurde. Sinon, $f(x_0^2 - y_0) = -x_0^2 + y_0$ et donc dans ce cas on obtient $x_0 = 0$, absurde aussi.
Ainsi, soit $f(x) = x$ pour tout $x \neq 0$, soit $f(x) = -x$ pour tout $x \neq 0$. Comme $f(0) = 0$, ceci nous donne deux solutions potentielles à l'équation, $f_1(x) = x$ et $f_2(x) = -x$.
Réciproquement, $f_1(xf_1(x) + f_1(y)) = x^2 + y = f_1(x)^2 + y$ donc f_1 est solution, on a aussi $f_2(xf_2(x) + f_2(y)) = x^2 + y = f_2(x)^2 + y$ donc f_2 est solution également.
Il y a donc deux solutions à l'équation fonctionnelle, $f_1 : x \longmapsto x$ et $f_2 : x \longmapsto -x$.

Solution de l'exercice 4
Supposons que (a, b) est solution. Alors $7^a - 3^b$ est pair, donc $a^4 + b^2$ est pair, donc a et b sont de même parité.
Si a et b sont tous les deux impairs, alors $7^a - 3^b$ est divisible par 4, mais $a^4 + b^2 \equiv 2 \pmod 4$, ce qui est absurde. Donc a et b sont tous les deux pairs. On dispose donc de $x, y \geq 1$ tels que $a = 2x, b = 2y$.
On réécrit alors $a^4 + b^2 = 16x^4 + 4y^2 = 4(4x^2 + y^2)$, et $7^a - 3^b = 7^{2x} - 3^{2y} = (7^x - 3^y)(7^x + 3^y)$. Alors, $7^x - 3^y$ et $7^x + 3^y$ sont tous les deux pairs, mais l'un est divisible par 4 ($7^x - 3^y$ si x, y sont de même parité, $7^x + 3^y$ sinon). Donc $(7^x - 3^y)(7^x + 3^y)$ est divisible par 8, il en vient que $4x^4 + y^2$ est pair, donc y est pair.

Ainsi, il existe $z \geq 1$ tel que $y = 2z$. Finalement, $(7^x - 9^z)(7^x + 9^z)$ divise $16(x^4 + z^2)$. Comme $16(x^4 + z^2) > 0$, on en déduit que $|(7^x - 9^z)|(7^x + 9^z) \leq 16(x^4 + z^2)$. De plus, $7^x \neq 9^z$ et sont tous les deux impairs, donc $|7^x - 9^z| \geq 2$.
Finalement, $2(7^x + 9^z) \leq 16(x^4 + z^2)$, d'où :

$$7^x + 9^z \leq 8(x^4 + z^2).$$

Cependant, $9^z > 8z^2$ pour $z \geq 1$. On peut le montrer par récurrence : pour $z = 1$, $9 > 8$, et pour $z \geq 1$, si $9^z > 8z^2$, alors $9^{z+1} = 9 \times 9^z > 9 \times 8 \times z^2$, or $9z^2 > z^2 + 2z + 1 = (z+1)^2$, donc $9^{z+1} > 8(z+1)^2$.
De plus, si $x \geq 4$, $7^x > 8x^4$. En effet, pour $x = 4$, on a $7^4 = 49^2 = 2401 > 2048 = 8 \times 4^4$. Et pour $x \geq 4$, si $7^x > 8x^4$, alors $7^{x+1} > 7 \times 8x^4$, et $7x^4 > (x+1)^4$ lorsque $x \geq 4$, d'où $7^{x+1} > 8(x+1)^4$.
Ainsi, dès que $x \geq 4$, on a $7^x + 9^z > 8(x^4 + z^2)$. Il reste donc à traiter les cas $x = 1, 2, 3$.

(i) Si $x = 1$, on a $7 + 9^z \leq 8(1 + z^2)$ soit $9^z \leq 8z^2 + 1$, on vérifie (par récurrence) qu'il y a une seule solution $z = 1$, ce qui donne le candidat $(x, z) = (1, 1)$.

(ii) Si $x = 2$, on a $49 + 9^z \leq 8(16 + z^2)$ soit $9^z \leq 79 + 8z^2$, et on vérifie que seuls $z = 1, z = 2$ peuvent potentiellement convenir, ce qui donne $(x, z) = (2, 1)$ et $(x, z) = (2, 2)$.

(iii) Si $x = 3$, on a $343 + 9^z \leq 8(81 + z^2)$ soit $9^z \leq 305 + 8z^2$, et encore une fois on vérifie que seuls $z = 1, z = 2$ peuvent convenir, ce qui donne les candidats $(x, z) = (3, 1)$ et $(x, z) = (3, 2)$.

Finalement, en regardant lesquels vérifient que $(7^x - 9^z)(7^x + 9^z)$ divise $16(x^4 + z^2)$, on trouve que seul $(x, z) = (1, 1)$ convient, soit $a = 2, b = 4$.
Il y a donc une unique solution $(a, b) = (2, 4)$.

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Combinatoire et Arithmétique

1 Ordre (Hadriel)

Définition 1. Soit a et n deux entiers non nuls premiers entres eux. L'ordre de a modulo n est le plus petit entier non nul ω tel que $a^\omega \equiv 1[n]$.

Proposition 2.
Soit k un entier, a et n non nuls premiers entres eux, et ω l'ordre de a modulo n. On a :

$$a^k \equiv 1[n] \iff \omega \mid k$$

Démonstration. on pose $k = q\omega + r$ la division euclidienne de k par ω.
Si $\omega \mid k$, alors $a^k \equiv (a^\omega)^q \equiv 1[n]$.
Si $a^k \equiv 1$, alors $a^r \equiv a^{q\omega+r} \equiv 1[n]$. $r \neq 0$ contredit la minimalité de l'ordre, donc $r = 0$. □

Définition 3. Une racine primitive modulo n est un entier g tel que les puissances de g parcourent tous les nombres inversibles modulo n. Dit de manière équivalente, une racine primitive est un entier g d'ordre $\varphi(n)$.

On donne le réaultat suivant sans démonstration :

Proposition 4.
Il existe des racines primitives modulo 2, 4, les puissances de premiers impairs, et les doubles de puissances de premiers impairs, et il en existe pas pour les autres nombres.

Une dernière chose avant d'attaquer les exercices : Il est souvent une bonne idée dans des exercices d'arithmétique de considérer un diviseur premier minimal. A vous de voir comment appliquer cette idée là. Bonne recherche !

Exercice 1
Soit p premier, et $d > 1$ tel que $d \mid 2^p - 1$. Montrer que $d > p$.

Exercice 2
Montrer que pour tout $n > 0, n \mid \varphi(2^n - 1)$

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $n \mid 2^{2n!} - 2^{n!}$

Exercice 4
Montrer que pour tout p premier, $p^p - 1$ admet un diviseur premier $q \equiv 1[p]$

Exercice 5
Caracteriser les entiers $n \geqslant 2$ tel que pour tout a entier, $a^{n+1} \equiv a[n]$.

Exercice 6
Soit $k \in \mathbb{N}^*$ tel que 2 et 3 ne divisent pas k. Montrer qu'il existe $n \geqslant 0$ tel que $k \mid 2^n+3^n+6^n-1$.

Exercice 7
Soit p premier. Trouver tous les entiers k tels que p divise $1^k + 2^k + ... + (p-1)^k$

Exercice 8
Trouver toutes les suites $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ d'entiers strictement positifs telles que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, $u_n \mid 2^{u_{n+1}} - 1$

Exercice 9
Soit $n > 1$ tel que $n \mid 2^n + 1$. Montrer que $3 \mid n$.

Exercice 10
Soit $p \geqslant 5$ premier. Montrer que les seuls diviseurs de $2^p + 3^p$ inférieurs à p sont 1 et 5.

Exercice 11
Trouver tous les $n > 1$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$

Solution de l'exercice 1
d divise $2^p - 1$. Ecrit en modulos, on a $2^p \equiv 1[d]$, donc l'ordre ω de 2 modulo d divise p. On a donc deux cas : $\omega = 1$ ou $\omega = p$. Si $\omega = 1$, alors $2 \equiv 1[d]$, ce qui n'est pas possible. Ainsi $\omega = p$. On a donc :

$$p = \omega \mid \varphi(d)$$

Donc $p \leqslant \varphi(d) < d$. $\square$

Solution de l'exercice 2
On remarque que l'ordre de 2 modulo $2^n - 1$ est n. Ainsi $n \mid \varphi(2^n - 1)$. $\square$

Solution de l'exercice 3
Montrons que pour tout p diviseur premier de n, notant $v = v_p(n)$, on a $p^v \mid 2^{2n!} - 2^{n!}$. Prenons donc p un diviseur premier de n, et v la valuation p-adique de n. Distinguons deux cas :
Si $p = 2$: Pour tout n dans $\mathbb{N}$, on a $n \leqslant 2^n$. Ainsi $v \leqslant 2^v \leqslant n!$. On a donc $2^v \mid 2^{2n!}$ et $2^v \mid 2^{n!}$, d'où $2^v \mid 2^{2n!} - 2^{n!}$.
Si $p \neq 2$: On a $\varphi(p^v) = (p-1)p^{v-1} \mid n! \mid 2n!$. Ainsi, $2^{2n!} \equiv 2^{n!} \equiv 1[p^v]$. Donc $p^v \mid 2^{2n!} - 2^{n!}$.
On a donc $n \mid 2^{2n!} - 2^{n!}$. $\square$

Solution de l'exercice 4
Soit q un diviseur premier de $p^p - 1$, et $v = v_q(p^p - 1)$. On a donc $p^p \equiv 1[q^v]$. Ainsi l'ordre ω de p modulo q^v divise p. On a deux cas : $\omega = 1$ ou $\omega = p$.
Si $\omega = p$, alors $p \mid \varphi(q^v) = (q-1)q^{v-1}$. p et q sont premiers entres eux, donc $p \mid q - 1$, et on a fini.
Si $\omega = 1$, alors $p \equiv 1[q^v]$. Si cela est vrai pour tout diviseur premier de $p^p - 1$, alors par les restes chinois, on a $p \equiv 1[p^p - 1]$, ce qui n'est pas possible car $p^p - 1 > p$. Il existe donc un diviseur premier de $p^p - 1$ tel que $\omega = p$, ce qui conclut. $\square$

Solution de l'exercice 5
Cet exercice est l'exercice 7 de l'envoi d'arithmétique de 2015-2016

Solution de l'exercice 6
Prenant $n = \varphi(k) - 1$, on a :

$$2^n + 3^n + 6^n - 1 \equiv 2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1[k]$$

Or $6(2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1}) \equiv 6[k]$, donc $2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} \equiv 1[k]$, d'où $2^{-1} + 3^{-1} + 6^{-1} - 1 \equiv 0[k]$. $\square$

Solution de l'exercice 7

On considère une racine primitive g modulo p. Pour k non-divisible par $p-1$ on a :

$$1^k + 2^k + ... + (p-1)^k \equiv 1 + g^k + ... + g^{(p-2)k} \equiv \frac{g^{k(p-1)} - 1}{g^k - 1} \equiv 0[p]$$

ce dernier car $g^{p-1} \equiv 1[p]$. Ainsi les k non divisibles par $p-1$ fonctionnent.
Si k est divisible par $p-1$, alors $1^k + 2^k + ... + (p-1)^k \equiv 1 + 1 + ... + 1 \equiv p - 1 \not\equiv 0[p]$. Donc si k est divisible par $p-1$, alors k ne fonctionne pas. En somme, les solutions sont k non-divisible par $p-1$. $\square$

Solution de l'exercice 8

Soit (u_n) une suite vérifiant l'énoncé. Montrons que (u_n) est constante égale à 1. On considère l'ensemble

$$E = \{p \in \mathbb{P} \mid \exists n \in \mathbb{N}, p \mid u_n\}$$

On suppose par l'absurde que E est non vide. Soit q sont plus petit élément, et m tel que $q \mid u_m$. On a donc $q \mid 2^{u_{m+1}} - 1$, donc l'ordre ω de 2 modulo q divise u_{m+1}. L'ordre ne vaut pas 1 car $q > 1$. Ainsi il existe r premier tel que $r \mid \omega \mid u_{m+1}$. Donc $r \in E$ et $r < q$, ce qui contredit la minimalité de q. E est donc vide. Ainsi (u_n) est constante égale à 1. Réciproquement cette suite vérifie bien les conditions de l'énoncé. La seule solution est donc la suite constante égale à 1.$\square$

Solution de l'exercice 9

Soit q le plus petit diviseur premier de n. q est impair, car n est impair. On a $2^n \equiv -1[q]$ donc $2^{2n} \equiv 1[q]$. Soit ω l'ordre de 2 modulo q. On a donc $\omega \mid \mathrm{pgcd}(2n, q-1)$. Or $q-1$ est pair, et $q-1$ est premier avec n, car q est le plus petit diviseur premier de n. Donc $\omega \mid \mathrm{pgcd}(2n, q-1) = 2$. On a deux cas : $\omega = 1$ et $\omega = 2$. $\omega = 1$ implique $q = 1$ ce qui n'est pas possible. Aisni $\omega = 2$. On obtient donc que $q \mid 2^2 - 1 = 3$. Donc $q = 3$ et $3 \mid n$. $\square$

Solution de l'exercice 10

Ceci est l'exercice 9 de l'envoi d'arithmétique de 2012.

Solution de l'exercice 11

Commencons par montrer que $v := v_3(n) \leqslant 1$. On a :

$$2v_3(n) = v_3(n^2) \leqslant v_3(2^n + 1) = 1 + v_3(n)$$

Cette derniere égalité étant due au "Lifting the exponent lemma". Donc $v_3(n) \leqslant 1$.
Montrons maintenant que n n'a pas de diviseur premier autre que 3. 2 ne divise pas n car $n \mid 2^n + 1$ qui est impair. Supposons par l'absurde que n admet un diviseur premier impair autre que 3. On note p le plus petit diviseur premier de n autre que 3. On a donc :

$$2^{2n} \equiv 1[p]$$

Ainsi l'ordre ω de 2 modulo p divise $2n$ et $p-1$.
Puisque p est le plus petit diviseur premier de n autre que 3, si un diviseur premier de $p-1$ divise aussi n, il doit être égal à 3, car sinon n admetterait un diviseur premier différent de 3 plus petit que p contredisant la minimalité de p. Ainsi, $\mathrm{pgcd}(2n, p-1) \mid 6$. Donc $\omega \mid 6$.
De plus, $2^n \equiv -1[p]$ et $2^{2n} \equiv 1[p]$. Donc ω divise $2n$ mais pas n. Donc ω est pair. On a donc deux cas pour la valeur de ω :

Si $\omega = 2 : 4 \equiv 1[p]$, ce qui n'est pas possible car $p \neq 3$ Si $\omega = 6 : p \mid 2^6 - 1 = 63$. Ainsi, $p = 7$. Or $2^3 \equiv 1[7]$. Donc l'ordre de 2 modulo 7 est 3, ce qui est absurde.

Ainsi il n'existe pas de tel diviseur premier. Les seuls possibilités restantes sont donc 1 et 3. Réciproquement, 1 det 3 fonctionnent bien. $\square$

2 Graphes (Emilhan)

Cadre : Graphes (pas forcéments simples) avec boucles et non orientés.

Lemme 1. La somme des degrés des sommets d'un graphe est toujours paire.

Démonstration. Cette somme vaut le double du nombre d'arêtes. □

Remarque 2. Il y a donc un nombre pair de sommets ayant un degré impair.

Exercice 1
On considère n points dans le plan tels que la distance entre deux points est toujours $\geqslant 1$. Montrer qu'il existe au plus $3n$ paires de points qui sont à distance exactement 1.

Solution de l'exercice 1
On construit un graphe dont les n sommets sont les points, et on trace des arêtes entre les paires de points qui sont à distance 1. Puisque deux points distincts sont toujours à distance $\geqslant 1$, il y a au plus 6 points sur un cercle de rayon 1. Donc tout sommet est de degré $\leqslant 6$. Cela montre qu'il y a au plus $\frac{6n}{2} = 3n$ arêtes.

Définition 3. Un **cycle** (simple) est un chemin non trivial qui débute et termine par le même sommet (et emprunte des arêtes toutes distinctes).

Lemme 4. Soit G un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, et possèdant au moins une arête. Alors G possède un cycle.

Démonstration. Si G possède une boucle, le résultat est vrai. Dans le cas contraire, on fixe v un sommet de G de degré > 0. On construit le cycle de façon gloutonne en partant de v. On commence par aller vers un voisin de v. Ensuite, tant qu'on n'est pas revenu à v, on peut toujours emprunter une nouvelle arête depuis le dernier sommet atteint car son degré est pair. Puisque le nombre d'arêtes est fini, on est forcés de revenir à notre sommet de départ. □

Lemme 5. Soit G un graphe non trivial dont tous les sommets sont de degré $\geqslant 2$. Alors G possède un cycle.

Démonstration. La démonstration est similaire à la précédente. Cette fois-ci, le même argument montre que le chemin glouton doit passer deux fois par un même sommet, et on peut donc en extraire un cycle. En effet, lorsque le chemin atteint un nouveau sommet, il est toujours possible de le continuer avec une nouvelle arête. □

Définition 6. Un cycle de G est dit **eulérien** s'il passe exactement une fois par chaque arête de G.

Théorème 7 (Euler)**.**
Un graphe connexe G admet un cycle eulérien si et seulement si tous ses sommets sont de degré pair.

Démonstration. Le sens direct est clair en retirant successivement les arêtes d'un cycle eulérien. Montrons la réciproque.
Soit v un sommet de G. Notre algorithme glouton nous donne un cycle C passant par v. Tant que l'on dispose d'un sommet u de C appartenant à une arête non explorée, on remplace u

par un cycle basé en u et dont toutes les arêtes sont nouvelles (en retirant les arêtes précédentes, tous les sommets sont encore de degré pair). Ce procédé se termine puisque G a un nombre fini d'arêtes.
Supposons donc que C n'a plus de tel sommet. Si un sommet u apparaît dans C, alors tous ses voisins apparaissent également par hypothèse. Par connexité, tous les sommets de G apparaissent dans C, et donc toutes les arêtes de G également.

□

Définition 8. Un graphe est un **arbre** s'il est connexe et sans cycle.

Lemme 9. Un graphe connexe G à n sommets possède au moins $n-1$ arêtes.

Démonstration. Pour un graphe H, on note $X(H)$ le nombre de composantes connexes de H. Soit G un graphe connexe à n sommets, et G_0 le graphe obtenu si on retire toutes les arêtes de G. La quantité $X(G_0)$ vaut donc n. On rajoute alors chaque arête successivement, et à chaque étape, X diminue d'au plus 1. Puisque G est connexe, $X(G) = 1$, donc G possède au moins $n-1$ arêtes. □

Lemme 10. Soit G un graphe à n sommets et $n-1$ arêtes. Alors G est un arbre si et seulement s'il est connexe si et seulement s'il est sans cycle.

Démonstration. On montre le résultat par récurrence sur n, en initialisant avec le cas trivial $n = 1$.
Supposons donc le résultat démontré pour un certain $n \geqslant 1$. Soit G un graphe à $n+1$ sommets et n arêtes.
Supposons tout d'abord que G soit connexe. On peut alors trouver un sommet v de degré 1 puisque la somme des degrés est inférieure à $2 \cdot n$. Notons G' le graphe obtenu en enlevant à G le sommet v ainsi que l'arête partant de v. G' est alors un graphe connexe à n sommets et $n-1$ arêtes. Il s'agit donc d'un arbre par hypothèse de récurrence, et cela est donc également le cas pour G (tout sommet dans un cycle est de degré $\geqslant 2$).
Supposons maintenant que G soit sans cycle. Grâce à un lemme précédent, on dispose d'un sommet v de degré au plus 1. On note de même G' le graphe obtenu en enlevant à G le sommet v ainsi que l'arête éventuelle partant de v. Si v était de degré 1, G' est un graphe sans cycle à n sommets et $n-1$ arêtes, donc est connexe, et G est donc connexe. Si v était de degré 0, alors G' est un graphe sans cycle à n sommets et n arêtes. On considère une arête A entre deux sommets u et v. Alors le graphe G'' obtenu en retirant l'arête A de G' est sans cycle à n sommets et $n-1$ arêtes. Donc G'' est connexe, donc il existe un chemin entre u et v, et en lui ajoutant A on obtient un cycle dans G', ce qui est absurde. □

Exercice 2
Montrer qu'un graphe à n sommets ayant au moins n arêtes possède un cycle.

Solution de l'exercice 2
On raisonne par l'absurde. Soit G un graphe sans cycle à n sommets et à au moins n arêtes. Quitte à remplacer G par l'une de ses composantes connexes ayant au moins autant d'arêtes que de sommets, on peut supposer que G est connexe. Quitte à lui enlever des arêtes, on suppose que G a n arêtes. Si on lui enlève une arête $a-b$, G est sans cycle à n sommets et $n-1$ arêtes. C'est donc un arbre. Il existe alors un chemin entre a et b dans $G \backslash a-b$, et G possède donc un cycle en ajoutant l'arête $a-b$, ce qui est absurde.

Définition 11. Un graphe **bipartite** est un graphe dont l'ensemble de sommets V est la réunion disjointe de A et B, qui sont tels que deux sommets de A ou deux sommets de B ne sont jamais reliés entre eux.

Définition 12. Un **couplage** d'un graphe simple non orienté G est un ensemble d'arêtes qui n'ont aucun sommet en commun. Il est dit **parfait** si tout sommet de G appartient à une arête.

Théorème 13 (Hall)**.**
Un graphe biparti $G = (U, V; E)$ admet un couplage parfait si et seulement si pour tout sous-ensemble X de U (de V, respectivement), le nombre de sommets de V (de U, respectivement) adjacents à X est supérieur ou égal à la cardinalité de X.

Démonstration (esquisse). Le sens direct est clair. Montrons le sens réciproque.
On prend G qui est arête-minimal pour les hypothèses. On montre alors par l'absurde que tout sommet est de degré 1. En effet, si b_1 et b_2 sont deux voisins de $a \in A$, et si A_1 et A_2 contredisent les hypothèses pour $G \backslash ab_1$ et $G \backslash ab_2$, alors $A_1 \cap A_2 \backslash \{a\}$ contredit les hypothèses pour G. □

Exercice 3
Soit $G = (A, B; E)$ un graphe biparti tel que A et B sont de cardinal n et tel que tout sommet de G est de degré $\geqslant \frac{n}{2}$. Montrer que G possède un couplage parfait.

Solution de l'exercice 3
Si spdg $X \subseteq A$ est de cardinal $\leqslant \frac{n}{2}$, on a au moins $\frac{n}{2}$ voisins de X dans B si X est non vide. Et si X est de cardinal $> \frac{n}{2}$, alors tout élément de B est un voisin de X.

Exercice 4
Soit $G = (A, B; E)$ un graphe biparti dont tous les sommets sont de degré $d > 0$. Montrer que G possède un couplage parfait.

Solution de l'exercice 4
Soit spdg $X \subseteq A$, et soit $Y \subseteq B$ les voisins de X, de cardinaux respectifs x et y. Il y a alors par hypothèse $d \cdot x$ arêtes entre X et Y, et au plus $d \cdot y$ arêtes entre Y et X. Donc $x \leqslant y$.

Définition 14. Une **n-clique** K_n est un graphe possédant n sommets tous reliés deux à deux.

Théorème 15 (Mantel)**.**
Soit G un graphe à n sommet qui ne contient pas de copie de K_3. Alors G a au plus $\lfloor \frac{n^2}{4} \rfloor$ arêtes.

Démonstration. Cette borne est bien atteinte dans le cas d'un graphe biparti complet dont les ensembles de sommets sont de cardinal $\lfloor \frac{n}{2} \rfloor$ et $\lceil \frac{n}{2} \rceil$.
Montrons maintenant que la borne est optimale. Soit v un sommet de G de degré maximal, A l'ensemble de ses voisins, et B les autres sommets de G (en particulier, $v \in B$). Par hypothèse, puisque tous les sommets de A sont reliés à v, on en déduit que A est sans arêtes internes. On considère ensuite G' le graphe obtenu en supprimant les arêtes internes à B et en ajoutant toutes les arêtes manquantes entre A et B. Tous les sommets de B ont donc le même degré que v dans G', et leur degré a donc augmenté. Cela montre que G' possède plus d'arêtes que G (au sens large). Cependant, en notant $k = |B|$, G' possède

$$k \cdot (n - k) \leqslant \frac{(k + n - k)^2}{4} = \frac{n^2}{4}$$

arêtes. On en déduit le résultat. □

Exercices :

Exercice 5
Il y a $n \geqslant 4$ participants à une réunion Animath. On suppose que parmi tout groupe de 4 participants, l'un deux connaît les trois autres. Montrer qu'il existe un participant qui connaît tous les autres.

Exercice 6 (OMM 2009)
Soit une assemblée de n personnes telle que parmi n'importe quel groupe de 4 personnes, il y en a soit 3 qui se connaissent deux à deux, soit 3 qui ne se connaissent pas deux à deux. Montrer qu'on peut séparer l'assemblée en deux groupes, de sorte que tous les membres du premier groupe se connaissent entre eux, et qu'aucune paire de personnes dans le deuxième groupe ne se connaisse.

Exercice 7 (Cours de Colin Valbonne 2021)
Sur une planète lointaine, il y a n hommes, n femmes et n matheux. Une famille heureuse est une famille composée d'un homme, une femme et un matheux. Cependant, pour former une famille, il faut que les trois membres s'apprécient (le fait de s'apprécier est toujours réciproque). Est-il toujours possible de former n familles disjointes sachant que chaque membre de chacun des trois groupes apprécie au moins k personnes dans chacun des deux autres groupes (donc $2k$ personnes en tout), et si : (i) $2k = n$? (ii) $4k = 3n$?

Exercice 8
Dans un tableau de taille $n \times n$, les lignes sont deux à deux distinctes. Montrer qu'il existe une colonne telle que le tableau $n \times (n-1)$ obtenu en retirant cette colonne ait la même propriété.

Exercice 9 (OSK 2019 Indonesia)
Dans une compétition à 2019 participants, trois participants ne se connaissent jamais 2 à 2. Trouver le $m \in \mathbb{N}$ maximal tel que tout participant connaisse au plus m autres participants, et tel qu'il existe au moins un participant connaissant exactement k autres participants pour tout $1 \leqslant k \leqslant m$.

Exercice 10 (IMO C4 2024)
Les nombres entiers de 1 à n^2 sont écrits en ligne sur un tableau de dimension $1 \times n^2$. Déterminer le nombre minimal de coupes du tableau qu'il est nécessaire d'effectuer afin de pouvoir recouvrir un tableau de dimension $n \times n$ avec des morceaux de la ligne précédente (sans rotation ou réflexion) qui sont tels que pour tout $1 \leqslant i, j \leqslant n$, n divise $a_{ij} - i - j + 1$.

Exercice 11 (USA TST 2009 P6)
Soit $N > M > 1$ des naturels. On considère N personnes participant à un tournoi et s'affrontant tous deux à deux exactement une fois. On suppose que pour tous joueurs $P_0, \ldots, P_M$ tels que P_i a battu P_{i+1} quel que soit $0 \leq i \leq M-1$, P_0 a aussi battu P_M. Montrer qu'il est possible de numéroter les joueurs de 1 à N de sorte que si $a \geq b + M - 1$, le joueur b a battu le joueur a.

Exercice 12 (IMO 2020 P3)
On dispose de $4n$ billes, de poids $1, \ldots, 4n$. Chacune de ces billes est coloriée en l'une des n couleurs distinctes disponibles, avec 4 billes de chaque couleur. Montrer qu'il est possible de

séparer les billes en deux groupes tels que les deux groupes aient le même poids total, et tels que chaque groupe possède deux billes de chaque couleur.

Solution de l'exercice 5
Soit G le graphe dont les sommets sont les participants et les arêtes correspondent aux relations de connaissance. Soit t (comme Théo) un sommet de degré maximal (qui est donc de degré $\geqslant 3$). Montrons que t est relié à tous les autres sommets de G. Supposons par l'absurde qu'il existe v un sommet qui n'est pas relié à t, et soit a et b des voisins de t. En appliquant l'hypothèse à t, a, a' et v, on sait que a ou a' connaît les trois autres. En particulier, deux voisins de t sont toujours voisins entre eux, donc tout voisin de t a au moins autant de voisins que t. Et il existe a un voisin de t qui est relié à v. Donc $deg(a) > deg(t)$, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 6
Soit A une clique de taille maximale dans le graphe G dont les sommets sont les n personnes et les arêtes sont les relations de connaissance, et B les autres sommets de G. Montrons que les groupes A et B conviennent.
Si B possède au plus un élément, on a fini. Sinon, soit b et b' deux éléments distincts de B. Puisqu'ils ne sont pas dans A, on dispose de a et a' tels que $a - b$ et $a' - b'$ ne sont pas des arêtes. S'il n'est pas possible de trouver de tels a et a' qui soient distincts, cela signifie qu'il existe un $a \in A$ tel que b et b' sont reliés à tous les éléments de $A \backslash a$. Mais puisque la clique A est de taille maximale, on ne peut pas avoir l'arête $b - b'$ dans G, car sinon on peut enlever a à la clique A et ajouter les deux sommets b et b' afin d'obtenir une clique de taille strictement plus grande, ce qui est absurde. On suppose donc que a et a' sont distincts, cela montre que parmi a,a', b et b', on ne dispose pas de 3 sommets se connaissant tous entre eux. Puisque $a - a'$ est une arête de G, et que l'on dispose de 3 sommets parmi a,a', b et b' qui ne se connaissent pas deux à deux, on en déduit que $b - b'$ n'apparaît pas dans G. Cela montre bien que B ne possède aucune paire de sommets qui se connaissent.

Solution de l'exercice 7
(i) Non ! On partitionne les trois groupes en des parties disjointes H_1, H_2, F_1, F_2 et M_1, M_2 qui sont toutes de taille k. On dit que A apprécie B si c'est le cas pour tous individus $a \in A$ et $b \in B$. On choisit alors que H_1 apprécie F_1, qui apprécie M_2, qui apprécie H_2, qui apprécie F_2, qui apprécie M_1, qui apprécie H_1. On vérifie alors facilement que les hypothèses sont vérifiées mais qu'aucune famille ne peut être formée.
(ii) Oui ! L'exercice 3 nous permet d'affirmer qu'il existe un couplage parfait entre les hommes et les femmes. On veut désormais réappliquer le théorème de Hall aux couples homme-femme et aux matheux. Soit h et f un couple. Puisque h et f apprécient au moins $frac3n4$ matheux chacun, ils en apprécient au moins $\frac{n}{2}$ en commun. En outre, chaque matheux déprécie au plus $\frac{n}{4}$ hommes et au plus $\frac{n}{4}$ femmes, donc apprécie au moins $\frac{n}{2}$ couples. L'exercice 3 nous permet de conclure.

Solution de l'exercice 8
Supposons par l'absurde que le résultat soit faux. On construit un graphe G, dont les sommets sont les lignes du tableau, et pour chaque $1 \leqslant i \leqslant n$, on relie deux lignes a et b du tableau qui sont identiques lorsque l'on retire la colonne i. Puisque G possède n arêtes et n sommets, il possède un cycle, noté $a_1, \ldots, a_k, a_{k+1} = a_1$, où pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$, a_i et a_{i+1} ne diffèrent que sur la colonne de numéro C_i. Puisque les C_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ sont tous distincts, on sait que les lignes a_1 et a_k diffèrent exactement sur les colonnes de numéro $C_1, \ldots, C_{k-1}$. Mais elles sont égales si on cache la colonne de numéro C_k, ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 9
On pose $2019 = n$. Montrons que la réponse est $\frac{2n}{3} = 1346$. Commençons par choisir un $m \in \mathbb{N}$ pour lequel il existe une compétition vérifiant les hypothèses, et soit G le graphe correspondant. Il existe alors un sommet v de degré m. Puisque G ne contient pas de copies de K_3, les m voisins de v ne sont reliés à aucun autre voisin de v, et sont donc de degré $\leqslant n-m$. Ainsi, G possède $\leqslant 2\cdot(n-m)$ degrés distincts. Et on sait que G possède au plus $m+1$ degrés distincts. Donc G possède au plus $\lfloor \frac{2\cdot(n-m)+2\cdot(m+1)}{3} \rfloor = \frac{n}{3}$ degrés distincts. Donc $m \leqslant \frac{n}{3}$.
Réciproquement, on construit un graphe G de sommets $v_1,\dots,v_n$. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{3}$, on relie v_i aux sommets $v_{\frac{n}{3}+1},\dots,v_{\frac{n}{3}+i}$. Puis on relie tout sommet d'indice $\frac{n}{3}+1 \leqslant j \leqslant \frac{2n}{3}$ avec tout sommet d'indice $\frac{2n}{3}+1 \leqslant k \leqslant n$. Ainsi, si $1 \leqslant i \leqslant \frac{n}{3}$, on a $deg(v_i) = i$, et $deg(v_{\frac{n}{3}+i}) = \frac{n}{3} - i + 1 + \frac{n}{3} = \frac{2n}{3} - i + 1$, et $deg(v_{\frac{2n}{3}+i}) = \frac{n}{3}$. Donc $m = \frac{2n}{3}$ est bien atteignable.

Solution de l'exercice 10
Montrons que la réponse est $2n-2$. Il est possible d'atteindre cette borne en coupant un seul morceau pour les $n-1$ premières lignes (en laissant un espace entre deux morceaux consécutifs), puis en recollant une à une les n cases restantes pour constituer la dernière ligne (on peut aussi couper en 2 morceaux pour chaque ligne sauf la première).
Réciproquement, on commence par réduire les nombres de 1 à n^2 modulo n. On construit un graphe G dont les sommets sont les restes modulo n, et on ajoute une arête entre a et b pour chaque morceau qui commence en a et finit en $b-1$, de sorte que les morceaux que l'on coupe dans les entiers entre 1 et n^2 forment un chemin dans G. Par hypothèse, G est une union disjointe de n cycles basés sur chacun des n sommets. On sait en outre que G est connexe par construction en suivant les morceaux de 1 à n^2 (qui passent par tous les sommets). Ainsi, en retirant une arête pour chacun de ces cycles, G reste connexe et possède donc encore au moins $n-1$ arêtes. On sait donc que G possède au moins $2n-1$ arêtes. Il y avait donc au moins $2n-1$ morceaux, donc au moins $2n-2$ coupes.

Solution de l'exercice 11
L'idée principale est de considérer (s'il existe !) un cycle de longueur maximale, et de remarquer qu'alors tout autre sommet bat tous - ou est battu par tous - les sommets du cycle. Cela permet de partitionner les sommets en cycles disjoints qui battent tous les cycles suivants, puis de montrer que ces cycles sont tous de longueur au plus M.
Cfr Aops : https ://artofproblemsolving.com/community/c6h289586p1566054

Solution de l'exercice 12
Cfr le $C6$ de l'année 2020 : https ://www.imo-official.org/problems/IMO2020SL.pdf

3 Théorème des restes chinois (Emile)

Ce cours présente le théorème des restes chinois et ses applications. On pourra retrouver son énoncé et une preuve dans la section la section 3.4 du très complet cours d'arithmétique de Pierre Bornstein, disponible sur le site de la POFM.

Bien souvent, on s'intéresse à la partie "existence" du théorème : "il existe une solution à un système de congruences bien posé". Le calcul de la solution est rarement utilisé dans l'exercice.

Exercice 1
Soient a, b deux entiers strictement positifs premiers entre eux. Montrer qu'il existe des entiers $m, n \geq 1$ tels que

$$a^m + b^n \equiv 1[ab].$$

Exercice 2
Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe un entier $n \geq 0$ tel que p divise $2024^n - n$.

Exercice 3
Soit p un nombre premier et $a \in \mathbb{Z}$. Montrer qu'il existe un entier n tel que

$$n^n \equiv a \pmod{p}.$$

Exercice 4
Montrer que pour tout entier n, il existe n entiers positifs consécutifs dont aucun n'est squarefree.

Exercice 5
Montrer qu'il existe une bijection $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telle que pour tout entier $n \geq 1$, on a

$$n \mid f(1) + f(2) + \ldots + f(n).$$

Exercice 6 (Olympiade Brésilienne 2013 P2)
Emile et Maena jouent à un jeu. Emile choisit un ensemble fini $\mathcal{A}$ d'entiers positifs qu'il montre à Maena. Ensuite, il choisit secrètement un nombre a appartenant à $\mathcal{A}$. Maena choisit alors un entier b positif et demande à Emile le nombre de diviseurs du produit ab. Montrer que Maena peut choisir ce nombre b de manière à pouvoir retrouver le choix de a d'Emile.

Exercice 7
Soit P un polynôme à coefficients entiers. Supposons que l'on ait des entiers $a_1, a_2, \ldots, a_m$ tels que pour tout $n \in \mathbb{Z}$, un des a_i divise $P(n)$. Montrer qu'il existe un a_i qui divise tous les $P(n)$ pour $n \in \mathbb{Z}$.

On rappelle que pour un polynôme P à coefficients entiers, pour tous entiers $a, b \in \mathbb{Z}$, on a $a - b \mid P(a) - P(b)$.

Exercice 8 (USAMO 1991)
Soit $n \geq 1$. Montrer que la suite

$$2, 2^2, 2^{2^2}, 2^{2^{2^2}}, \ldots$$

est constante modulo n à partir d'un certain rang.

Exercice 9 (APMO 2009 P4)
Montrer que pour tout entier $k > 0$, on peut trouver une suite arithmétique de rationnels

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_k}{b_k}$$

telle que chaque fraction soit sous forme réduite, et telle que les nombres $a_1, a_2, \ldots, a_k, b_1, \ldots, b_k$ soient deux-à-deux distincts.

Exercice 10
Soient $a > b > c \geq 3$ des entiers. On suppose que

$$\begin{cases} a \mid bc + b + c \\ b \mid ca + c + a \\ c \mid ab + a + b \end{cases}$$

Montrer que a, b, c ne sont pas tous les trois des nombres premiers.

Exercice 11
Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que pour tout $n \geq 2024$, on ait

$$P(n) \mid n^{n-1} - 1.$$

Solution de l'exercice 1
D'après le théorème des restes chinois, le fait que $a^m + b^n \equiv 1 \pmod{ab}$ est équivalent au fait que cette même congruence soit vérifiée modulo a et modulo b à la fois. On cherche donc à avoir

$$\begin{cases} a^m + b^n \equiv 1 \pmod{a} \\ a^m + b^n \equiv 1 \pmod{b} \end{cases}$$

ou encore, comme $m, n \geq 1$,

$$\begin{cases} b^n \equiv 1 \pmod{a} \\ a^m \equiv 1 \pmod{b} \end{cases}.$$

Maintenant, on sait que comme a et b sont premiers entre eux, on peut trouver des entiers m et n tels que les deux congruences précédentes sont satisfaites (par exemple $n = \varphi(a)$ et $m = \varphi(b)$).

Solution de l'exercice 2
Supposons d'abord que p divise 2024. Dans ce cas, il suffit de prendre $n = 2024$. Sinon, p est premier avec 2024. On ne sait pas quelles valeurs 2024^n peut prendre modulo p, mais on sait que nécessairement, si $p - 1 \mid n$, alors $2024^n \equiv 1 \pmod{p}$. Il faut alors que $n \equiv 1 \pmod{p}$. Mais comme p et $p - 1$ sont premiers entre eux, par le théorème des restes chinois, on sait que l'on peut en effet trouver n tel que

$$\begin{cases} n \equiv 0 \pmod{p-1} \\ n \equiv 1 \pmod{p} \end{cases}$$

et d'après l'analyse précédente, ce n convient.

Solution de l'exercice 3

On raisonne similairement à l'exercice précédent. Cette fois-ci, on ne peut pas prendre $p-1 \mid n$ car sinon $n^n \equiv 1 \pmod{p}$. Une autre idée est de prendre $n \equiv 1 \pmod{p-1}$, dans ce cas on aura $n^n \equiv n \pmod{p}$. Il suffit alors de prendre n qui satisfait ces deux congruences

$$\begin{cases} n \equiv 1 \pmod{p-1} \\ n \equiv a \pmod{p} \end{cases}$$

Par le théorème des restes chinois, ceci est possible, et ce n convient alors.

Solution de l'exercice 4

On veut essayer de trouver n entiers consécutifs $k+1, k+2, \ldots, k+n$ dont aucun n'est squarefree. Pour cela, pour chaque i, on veut trouver un nombre premier p_i tel que $p_i^2 \mid k+i$. Une manière de faire cela est de prendre des nombres premiers $p_1, \ldots, p_n$ deux-à-deux distincts, et de demander à ce que $k+i \equiv 0 \pmod{p_i^2}$, c'est-à-dire $k \equiv -i \pmod{p_i^2}$. Comme les p_i^2 sont deux-à-deux premiers entre eux, on peut trouver un tel k par le théorème des restes chinois.

Solution de l'exercice 5

On construit une telle bijection en commençant par $f(0) = 0$ et $f(1) = 1$, et en déterminant successivement $f(2), f(3), \ldots$. En faisant cette construction, il est facile d'assurer que $n \mid f(1) + \ldots + f(n)$. Cependant, la difficulté de l'exercice est qu'il faut s'assurer que f soit une bijection. Pour faire cela, on va choisir à chaque étape $f(2n)$ de manière à pouvoir prendre $f(2n+1)$ comme voulu. Supposons avoir déjà choisi $f(0), f(1), f(2), \ldots, f(2n-1)$, et soit k le plus petit entier naturel qui n'est égal à aucun d'entre eux. On souhaite choisir $f(2n)$ afin que l'on puisse prendre $f(2n+1) = k$. Pour cela, il faut que

$$\begin{cases} f(1) + f(2) + \ldots + f(2n-1) + f(2n) \equiv 0 \pmod{2n} \\ f(1) + f(2) + \ldots + f(2n-1) + f(2n) + k \equiv 0 \pmod{2n+1} \end{cases}.$$

Mais par le théorème des restes chinois, comme $2n$ et $2n+1$ sont premiers entre eux, il est possible de choisir $f(2n)$ de manière à avoir le système ci-dessus et avoir $f(2n)$ différent de $f(1), f(2) \ldots, f(2n-1)$ et k. On pose alors $f(2n+1) = k$ et on continue la construction comme ceci. Cette construction assure que la fonction f est injective, surjective, et qu'elle satisfait la divisibilité dans l'énoncé comme voulu.

Solution de l'exercice 6

Pour un entier n dont la décomposition en facteurs premiers s'écrit $p_1^{k_1} \ldots p_t^{k_t}$, le nombre de diviseurs de n vaut $(k_1+1) \ldots (k_t+1)$. Ceci nous amène à écrire tous les éléments de $\mathcal{A}$ sous sa décomposition en facteurs premiers : en numérotant $a_1, a_2, \ldots, a_N$ les éléments de $\mathcal{A}$, on pose pour tout i,

$$a_i = p_1^{k_{i,1}} p_2^{k_{i,2}} \ldots p_t^{k_{i,t}}$$

où les $k_{i,t}$ sont positifs ou nuls (de façon à ce que chaque a_i s'écrive avec une décomposition faisant intervenir les mêmes nombres premiers $p_1, \ldots, p_t$). Les a_i sont deux-à-deux distincts, donc les suites $(k_{i,1}, \ldots, k_{i,t})$ sont deux-à-deux distinctes. On va décider de choisir b de la forme

$$b = p_1^{l_1} p_2^{l_2} \ldots p_t^{l_t}$$

et ainsi le nombre de diviseurs de $a_i b$ sera

$$(k_{i,1} + l_1 + 1)(k_{i,2} + l_2 + 1) \ldots (k_{i,t} + l_t + 1).$$

On cherche des l_j tels que tous ces nombres sont deux-à-deux distincts lorsque l'on fait varier i. Notons K un entier tel que tous les $k_{i,j}$ sont strictement inférieurs à K. On considère, pour chaque $1 \leq j \leq t$ et $0 \leq k < K$, un nombre premier $q_{i,k}$ supérieur à K. On utilise alors le théorème des nombres chinois pour choisir des l_j de manière à ce que

$$\begin{cases} \forall j, k, \quad l_j + k + 1 \equiv 0 \pmod{q_{j,k}} \\ \forall j \neq j', k, \quad l_j \equiv 0 \pmod{q_{j',k}} \end{cases}$$

La deuxième ligne sert à dire que aucun des $l_j + k_{i,j} + 1$ ne peut être divisible par un $q_{j',k}$ dès lors que $j' \neq j$ (car $q_{j',k} > K$). La première ligne sert à dire que $l_j + k_{i,j} + 1$ est divisible par $q_{j,k}$ si et seulement si $k_{i,j} = k$.

Ainsi, étant donné le nombre de diviseurs de $a_i b$, on s'interroge pour chaque j, k si $q_{j,k}$ divise ce nombre. D'après ce qui a été dit précédemment, c'est le cas si et seulement si $k_{i,j} = k$. Ainsi, la donnée du nombre de diviseurs de $a_i b$ permet de retrouver la valeur de tous les $k_{i,j}$, et donc de retrouver la valeur de a_i.

Solution de l'exercice 7

Supposons par l'absurde qu'il n'existe aucun a_i divisant tous les $P(n)$ à la fois. Alors pour chaque i, on peut trouver un n_i tel que $a_i \nmid P(n_i)$. Il existe alors un nombre premier p_i et un entier $k_i \geq 1$ avec $p_i^{k_i} \mid a_i$ et $p_i^{k_i} \nmid P(n_i)$. On considère la liste des $p_i^{k_i}$. Dans cette liste il y a potentiellement des nombres premiers p_i qui apparaissent plusieurs fois, dans ce cas on enlève de la liste tous les p_i^k, sauf celui avec le k minimal, on écrit la nouvelle suite $p_{i_1}^{k_{i_1}}, \ldots, p_{i_r}^{k_{i_r}}$, où les p_{i_j} sont deux-à-deux distincts. L'idée est la suivante : si $n \equiv n_{i_j} \pmod{p_{i_j}^{k_{i_j}}}$, alors $p_{i_j}^{k_{i_j}} \mid P(n) - P(n_{i_j})$, et donc $p_{i_j}^{k_{i_j}} \nmid P(n)$. Mais par le théorème des restes chinois, on peut toujours trouver n tel que toutes ces congruences soient vérifiées, et donc aucun des $p_{i_j}^{k_{i_j}}$ ne divise $P(n)$. Par construction des $p_{i_j}^{k_{i_j}}$, chaque a_i est divisible par un de ces nombres, et donc aucun a_i ne peut diviser $P(n)$, absurde.

Solution de l'exercice 8

On montre le résultat par récurrence forte sur n. Pour $n = 1$, le résultat est clair. Supposons donc $n > 1$ et le résultat vrai jusqu'au rang $n - 1$. On écrit alors $n = 2^k m$ avec m impair. Comme 2^k et m sont premiers entre eux, le théorème des restes chinois nous assure qu'il suffit de montrer le résultat pour 2^k et pour m. Si $2^k > 1$ et $m > 1$, on a le résultat par l'hypothèse de récurrence. Sinon, on se ramène au cas où n est une puissance de 2 et au cas où n est impair.

Supposons que n soit une puissance de 2. Alors comme l'exposant de 2 dans la suite tend vers l'infini, la suite vaut éventuellement 0 modulo n et l'exercice est montré.

Supposons maintenant que n soit impair. Dans ce cas, 2 est premier avec n, et la congruence de 2^k modulo n est obtenue à partir de la congruence de k modulo $\varphi(n)$. Or, comme $\varphi(n) < n$, on peut appliquer l'hypothèse de récurrence pour obtenir que l'exposant dans la suite est constant modulo $\varphi(n)$ à partir d'un certain rang. On en déduit que la suite est constante modulo n à partir d'un certain rang.

Solution de l'exercice 9

Une suite arithmétique de rationnels s'écrit nécessairement sous la forme

$$\frac{a+r}{n}, \frac{a+2r}{n}, \dots, \frac{a+kr}{n}$$

pour certains a, n, r. L'idée est la suivante : pour chaque i, on va prendre deux nombres premiers $p_i > k$ et $q_i > k$ de façon à ce qu'il soient tous distincts. On va faire en sorte que pour chaque i, p_i divise a_i mais aucun des autres a_j, et q_i divise tous les b_j avec $j \neq i$ mais pas b_i. Pour faire cela, on pose $r = 1$ et $n = q_1 q_2 \dots q_k$. On utilise le théorème des restes chinois pour trouver a solution du système

$$\begin{cases} \forall i, & a \equiv -i \pmod{p_i} \\ \forall i, & a \equiv -i \pmod{q_i} \end{cases}.$$

De cette façon, pour chaque i, $a+i$ est divisible par p_i et q_i, mais aucun des autres nombres premiers. Alors dans $\frac{a+i}{n}$, sous forme simplifiée, le numérateur $a_i = \frac{a+i}{q_i}$ sera divisible par p_i mais aucun des autres p_j, et le dénominateur $b_i = \frac{n}{q_i}$ sera divisible par tous les q_j avec $j \neq i$ mais pas q_i. De cette manière, tous les a_i sont deux-à-deux distincts, et les b_i aussi. Enfin, pour tous i, j, on a que p_i divise a_i mais pas b_j, donc tous les a_i, b_j sont deux-à-deux distincts.

Solution de l'exercice 10

On réécrit les divisibilités sous forme de modulos. Par exemple, la première devient

$$bc + b + c \equiv 0 \pmod{a}.$$

On reconnait une factorisation

$$(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{a}.$$

Enfin, l'astuce consiste à multiplier ceci par $a+1$ qui vaut simplement 1 modulo a, pour obtenir

$$(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{a}.$$

On a la même identité modulo b, c. Si jamais a, b, c sont tous les trois des nombres premiers, ils sont donc premiers entre eux deux-à-deux, et on a donc, par le théorème des restes chinois,

$$(a+1)(b+1)(c+1) \equiv 1 \pmod{abc}$$

et donc

$$ab + bc + ca + a + b + c \equiv 0 \pmod{abc}.$$

Mais cependant, on a $a \geq 7, b \geq 5$ et $c \geq 3$, donc on peut écrire

$$0 < ab + bc + ca + a + b + c \leq \frac{1}{3}abc + \frac{1}{7}abc + \frac{1}{5}abc + \frac{1}{15}abc + \frac{1}{21}abc + \frac{1}{35}abc = \frac{86}{105}abc < abc$$

d'où l'absurdité.

Solution de l'exercice 11
Soit P un polynôme comme dans l'énoncé. On va montrer le fait suivant : si q est un nombre premier divisant $P(n)$, alors q divise $n-1$. Soit alors n un entier, et q un nombre premier divisant $P(n)$. On sait alors que q divise tous les $P(m)$ avec $m \equiv n \pmod{q}$ (car P a des coefficients entiers). On prend alors $m \geq 2024$ tel que

$$\begin{cases} m \equiv n \pmod{q} \\ m-1 \equiv 1 \pmod{q-1} \end{cases}.$$

C'est possible par le théorème des restes chinois, et on a alors

$$q \mid m^{m-1} - 1 \equiv n - 1 \pmod{q}$$

et donc $q \mid n-1$.

Montrons maintenant que P est nécessairement de la forme $\pm(X-1)^k$ pour un certain k. Comme P fonctionne si et seulement si $-P$ fonctionne, on suppose à partir de maintenant que P est de coefficient dominant positif. Alors si q est un nombre premier, on sait que $P(q+1)$ doit nécessairement valoir plus ou moins une puissance de q. Pour q assez grand, ce sera une puissance de q : $P(q+1) = q^{k_q}$. Pour q assez grand, k_q est borné par le degré de p, donc par le principe des tiroirs une infinité de k_q sont égaux, disons à un nombre k. Alors $P(X)-(X-1)^k$ a une infinité de racines, donc $P(X) = (X-1)^k$.

Il reste à trouver les k qui fonctionnent. Pour $k=0$ et $k=1$, c'est clair. Pour $k=2$, on a

$$n^{n-1} - 1 = (n-1)(1 + n + n^2 + \ldots + n^{n-2})$$

et

$$1 + n + n^2 + \ldots + n^{n-2} \equiv 1 + 1 + \ldots + 1 \equiv 0 \pmod{n-1}$$

donc $k=2$ fonctionne aussi.

Supposons maintenant que $k \geq 3$ et montrons que $P(X) = (X-1)^3$ ne fonctionne pas (alors $(X-1)^k$ ne fonctionnera pas non plus). Une manière simple de voir ceci est d'utiliser le LTE avec $n = p+1$ et $p \geq 2023$ premier. En effet, dans ce cas, on a

$$v_p((p+1)^p - 1) = v_p(p) + v_p(p) = 2$$

alors que $v_p(p^3) = 3$.

Ainsi, les solutions du problème sont les polynômes $\pm 1, \pm(X-1), \pm(X-1)^2$.

4 Problèmes de grilles (Baptiste)

Une partie des exos de ce cours ont été tirés du cours donné par Emile Avérous au stage de Valbonne 2022.

Exercice 1
(Classique) Soit n un entier positif. Une case quelconque d'une grille $2^n \times 2^n$ est retirée. Déterminer si il est toujours possible de paver cette grille avec des L-triominos (composés de trois carrés unités adjacents et non-alignés).

Exercice 2
(OIM 2017 C1) On considère un rectangle à côtés entiers impairs. On divise celui-ci en plus petits rectangles dont les côtés sont toujours entiers. Montrer qu'il existe un des petits rectangles dont les distances aux quatre côtés du grand sont toutes de même parité.

Exercice 3
(OIM P4 2018) Un site est un point (x, y) du plan tel que x et y sont des entiers strictement positifs inférieurs ou égaux à 20. Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre. Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière dont Bernard place ses pierres bleues.

Exercice 4
(TST Suisse 2022) Soit $n \geqslant 2$ un entier positif. Une grille $n \times n$ est coloriée de la même manière qu'un échiquier. Il est alors possible d'effectuer une opération en choisissant une case de l'échiquier et de changer la couleur des toutes les cases de sa ligne et de sa colonne (on change donc également la couleur de cette case). Trouver toutes les valeurs de n telle qu'il soit possible de faire en sorte que toutes les cases soient de la même couleur après une certaine suite d'opération.

Exercice 5
(Folklore) On considère un rectangle $a \times b$ dans le plan. On le pave par des rectangles semi-entiers (c'est-à-dire des rectangles dont au moins un des côtés est entier). Montrer que le rectangle de départ est aussi semi-entier.

Exercice 6
(MOCK IMO ?) Une grille $2024k \times 2024k$ est pavé par des rectangles de dimensions $1 \times k$ et $k \times 1$. Montrer qu'il existe une sous-grille de dimension $k \times k$ qui est parfaitement pavé par k rectangles.

Exercice 7
(OIM 2016 P2) Trouver tous les entiers n pour lesquels chaque cases d'une grille $n \times n$ peut être remplie par une des lettres O, I et M de telle sorte que :

— dans chaque ligne et dans chaque colonne, les lettres O, I et M sont représentées à part égales.

— dans chaque diagonale qui contient un nombre de cases divisible par 3, alors les lettres O, I et M sont représentées à part égales.

Exercice 8
(TST France 2017 P3) Dans les cases d'un tableau rectangulaire à n lignes et m colonnes sont écrits des nombres réels. On suppose que pour toute ligne ou colonne, la somme des nombres écrits sur cette ligne ou colonne est un entier. Montrer qu'il est possible de remplacer chaque réel x par l'entier $\lfloor x \rfloor$ ou $\lceil x \rceil$ de sorte que les sommes de chaque colonne et de chaque ligne demeurent inchangées.

Exercice 9
(OIM C4 2014) On construit un tetramino en attachant deux dominos 2×1 le long de leurs côté le plus long de telle sorte que le milieu du côté d'un domino corresponde au coin de l'autre domino. Cette construction donne lieu à deux types de tetraminos. Appelons les S- et Z-tetraminos. On suppose qu'un polygone P dont tous les sommets se trouvent sur une grille et dont tous les côtés coïncident avec une grille puisse être pavé par des S-tetraminos. Montrer que peut importe la manière dont on pave P en utilisant des S- et Z-tetraminos, il y aura toujours un nombre pair de Z-tetraminos.

Exercice 10
(Chine 2017 TSTST 3 Jour 2 P3) Soit n un entier impair. On colorie les cases d'une grille $n \times n$ en rouge ou en bleu. On suppose que les cases d'une couleur donnée forment un chemin, c'est-à-dire que l'on peut numéroter les cases de la couleur C_1, ...,C_m afin que C_i et C_j aient un côté en commun si et seulement si $|i - j| = 1$. Montrer que le centre de la grille est une extrémité d'un des deux chemins.

Exercice 11
Les cellules d'un carré 2011×2011 sont remplis avec les chiffres $1, 2, \ldots, 2011^2$, de telle sorte que chaque chiffre apparaisse une fois exactement. On identifie la côté de gauche avec celui de droite ainsi que celui du haut et du bas, de telle sorte à former un tore. Trouver le plus grand entier M tel que, quelque soit la manière de mettre les numéros, il existe deux cellules adjacentes dont la différence est au moints M.

(Les cases de coordonnées (x, y) et (x', y') sont adjacente si $x = x'$ et $y - y' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$, ou bien si $y = y'$ et $x - x' \equiv \pm 1 \pmod{2011}$.)

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
On va montrer que quelque soit le carré unité qui est enlevé de la grille, il existe toujours une manière de paver la grille avec des L-triominos. Pour cela on va procéder par récurrence.

Initialisation : Pour $n = 0$, on a une grille $2^0 \times 2^0$, lorsque l'on retire une case, il ne reste plus rien. Il est donc possible de paver cette grille avec aucun L-triominos.

Hérédité : On suppose que l'énoncé est vrai au rang n et on va en déduire l'énoncé au rang $n+1$. Pour cela on sépare la grille $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ en quarts, chaque quart est donc un carré de côté 2^n. Supposons que la carré unité retiré soit dans le quart en haut à gauche. Dans ce cas, il est possible de paver ce quart avec des L-triominos. On retire maintenant du quart en bas à gauche (resp. en haut à droite et en bas à droite) le carré unité qui est dans le coin en haut à droite (resp. en bas à gauche et en haut à gauche). Chacun de ces quarts à maintenant un carré en moins et est donc pavable avec des L-triominos. On peut maintenant finalement placer un L-triominos qui recouvre exactement les 3 carrés que l'on vient de retirer.

Solution de l'exercice 2
Cet exercice est corrigé dans le cours donné par Emile Avérous (disponible dans le poly de Valbonne 2022).

Solution de l'exercice 3
Cet exercice est corrigé dans le cours donné par Emile Avérous (disponible dans le poly de Valbonne 2022).

Solution de l'exercice 4
On va montrer que les seuls $n \geqslant 2$ pour lesquels il est possible de partir d'un pavage en forme d'échiquier et d'arriver à une grille coloriée par une seule couleur uniquement sont les entiers pairs.

On montre dans un premier temps que pour les entiers n pairs, une telle suite d'opération existe. Pour cela on va même montrer que tous les configurations sont atteignables. Pour cela il suffit de montrer que pour chaque case (i, j), il est possible de changer uniquement la couleur de cette case et pas des autres, ainsi on pourrait changer une par une les couleurs des cases pour obtenir n'importe quelle configuration. Pour cela il suffit de faire changer de couleur toutes les cases de la forme (i, k) ou (k, j). On fait une disjonction de cas pour montrer que cela fonctionne.

- La cases (i, j) va changer de couleur $2n + 1$ fois donc va changer de couleur,
- le reste des cases de la forme (k, i) ou (k, j) va changer de couleur n fois donc ne va pas changer de couleur et
- le reste des cases va changer de couleur exactement 2 fois donc ne va pas changer de couleur.

Cela conclut cette partie de l'exercice.

Supposons maintenant que n est impair, et montrons que dans de cas une telle suite d'opérations n'existe pas. Pour cela il suffit d'exhiber un invariant des opérations. Soit I le nombre de cases noires sur les deux premières lignes considéré modulo 2. Au tout début, il y a exactement n cases noires sur les deux premières lignes donc S est impair. Chaque opération va changer exactement 2 cases ou $2 + (n-1) = n+1$ cases des deux premières lignes (selon que le carré choisi pour l'opération est en dehors des deux premières lignes ou bien dans les deux premières lignes). Cela implique bien que la parité de S ne vas pas changer après notre suite d'opération. À la fin on voudrait $S = 0$ ou $2n$ est pair. Cela est la contradiction recherchée.

Solution de l'exercice 5
Cet exercice est corrigé dans le cours donné par Emile Avérous (disponible dans le poly de Valbonne 2022). On va cependant donner une solution alternative, cette solution est tirée de l'excellent livre "*Problems for mathematicians, young and old*" de Paul Halmos.

Soit $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d]$ un rectangle du plan muni des coordonnées x et y. On considère l'integrale de la fonction $e^{2\pi i(x+y)} = e^{2\pi ix} \times e^{2\pi iy}$. Ainsi, d'après les formules d'intégration des intégrales doubles.

$$\begin{aligned}\int_{\mathcal{R}} e^{2\pi i(x+y)}\mathrm{d}x\mathrm{d}y &= \int_{[a,b]} e^{2\pi ix}\mathrm{d}x \int_{[c,d]} e^{2\pi iy}\mathrm{d}y.\\ &= \left(\frac{1}{2\pi i}\right)^2 (e^{2\pi ib} - e^{2\pi ia})(e^{2\pi id} - e^{2\pi ic}).\end{aligned}$$

est nul si et seulement si $e^{2\pi ib} = e^{2\pi ia}$ ou $e^{2\pi id} = e^{2\pi ic}$, c'est-à-dire si et seulement si $\mathcal{R}$ est un rectangle semi-entier. On peut maintenant facilement conclure, comme l'intégrale de $e^{2\pi i(x+y)}$ sur le grand rectangle est la somme des intégrales sur les petits rectangles qui sont toutes nulles, ainsi l'intégrale sur le grand rectangle est nul en particulier c'est un rectangle semi-entier.

Remarque 1. Le lecteur attentif aura remarqué que la preuve dans le poly de Valbonne 2022 est très similaire à celle-là, on a juste remplacé la fonction $e^{2\pi ix}$ par la fonction qui vaut -1 si x est entre un entier n et $n + 1/2$ et 1 si x est entre un entier n et $n - 1/2$.

Solution de l'exercice 6
On utilise le lemme suivant :

Lemme 2. Supposons que l'énoncé ne soit pas vérifié, soit un rectangle $1 \times k$ du pavage. Alors, il existe un autre rectangle $1 \times k$ de telle sorte que leur bords longs se touchent sur une longueur d'au moins un segment unité. Par symétrie, on peut remplacer les rectangles $1 \times k$ par des rectangles $k \times 1$.

Démonstration. On part d'un pavage du carré $2024k \times 2024k$ qui ne contienne pas de carré $k \times k$ parfaitement pavés. Supposons qu'il existe un rectangle $1 \times k$ qui ne vérifie pas les hypothèses de l'énoncé. On peut supposer sans perte de généralité que le rectangle $1 \times k$ ne touche pas le bord droit, dans ce cas chacun des rectangles qui touche le bord droit est un rectangle $k \times 1$. Ces k rectangles forment donc un pavage parfait d'un rectangle $k \times k$, ce qui est la contradiction recherchée. □

Par l'absurde, partons d'un pavage qui ne vérifie pas la conclusion de l'énoncé, il existe alors forcément un rectangle $1 \times k$ et un rectangle $k \times 1$ (sinon le pavage est unique et contient bien un carré $k \times k$ parfaitement pavé). D'après le lemme précédent, depuis le rectangle $1 \times k$ il existe un rectangle $1 \times k$ qui lui est adjacent, en appliquant ce lemme $2024k - 1$ fois on construit un chemin qui va du bord gauche au bord droit et qui est composé de rectangles $1 \times k$ adjacents. De la même manière, il existe un chemin qui va du bord haut au bord bas et qui est composé de rectangles $k \times 1$ adjacents. Ce deux chemins doivent donc se recontrer mais cela n'est pas possible, c'est la contradiction recherchée.

Solution de l'exercice 7
On renvoie à la preuve officielle de cet exercice.

Solution de l'exercice 8
On va utiliser ici une technique très importante dans la résolution des problèmes de grille (et de graphe) qui nécessite de se balader sur la grille d'une certaine manière. On va rendre tous les nombres entiers un par un sans changer les valeurs des sommes des lignes et des colonnes par le moyen d'un algorithme.

Soit (i, j) une des cases dont la valeur x est la plus proche d'un entier qui n'en est pas un (cet élément existe comme le tableau est fini). On suppose que l'entier le plus proche est $\lfloor x \rfloor$. On note $\varepsilon = x - \lfloor x \rfloor$, l'algorithme est maintenant le suivant :

(i) On remplace la valeur v de la case (k, ℓ) où on est par $v - \varepsilon$,

(ii) On part de la colonne k et on se balade dessus jusqu'à trouver une autre valeur qui n'est pas entière et que l'on n'a pas encore visité (cela existe sinon la somme n'était pas entière sur la colonne k),

(iii) On remplace la valeur v' de la case (k, ℓ') sur laquel on a atteri par $v + \varepsilon$.

(iv) On part de la ligne ℓ' et on se balade dessus jusqu'à trouver une autre valeur qui n'est pas entière et que l'on n'a pas encore visité (cela existe sinon la somme n'était pas entière sur la ligne ℓ').

À partir de l'étape (iv) on recommence à l'étape (i). On commence cet algorithme sur la case (i, j) et on l'applique jusqu'à retomber sur la case (i, j) de départ. L'algorithme a donc transformé la case (i, j) en case $\lfloor x \rfloor$. Chacune des sommes des lignes et des colonnes ne change pas comme chaque valeur à laquelle on soustrait ε et compensé par une valeur à laquelle on ajoute ε. De plus, chacune des valeurs que l'on a modifiées reste entre sa partie entière inférieure et sa partie entière supérieure comme on a choisi x la valeur la plus proche d'un entier.

Solution de l'exercice 9
On renvoie à la shortlist des IMO de 2014.

Solution de l'exercice 10
Cet exercice est corrigé dans le cours donné par Emile Avérous (disponible dans le poly de Valbonne 2022).

Solution de l'exercice 11
On renvoie à la preuve officielle de la compétition.

5 Arithmétique : Problèmes de taille (Paul A)

En arithmétique, on peut nous demander de trouver tous les n-uplets d'entiers vérifiant telle ou telle propriété. Il arrive souvent que de tels problèmes aient un nombre fini de solutions, et qu'un argument de taille permette de se limiter à un nombre fini de cas à tester. C'est typiquement le genre de problèmes où on dit que la propriété ne peut plus être vérifiée "à partir d'un certain rang".
Plus généralement, les arguments de taille sont souvent importants en arithmétique, et savoir manipuler des inégalités, des encadrements ou d'autres outils d'analyse se révèle souvent utile.

Arguments arithmétiques importants

Proposition 1.
Les relations de divisibilité donnent déjà un certain nombre d'inégalités intéressantes :

— Si $a \mid b$ et a et b sont non-nuls, alors $|a| \leqslant |b|$
  Attention cependant la condition de non-nullité de b est **indispensable** !

— Si $a, b > 0$, que $a \neq b$ et $a \mid b$, alors $2a \leqslant b$

— Si $a \mid b$ alors pour tout nombre premier p, $v_p(a) \leqslant v_p(b)$

Théorème 2 (Formule de Legendre)**.**
Soit n un entier naturel et p un nombre premier. Alors :

$$v_p(n!) = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor$$

Démonstration.

$$\begin{aligned} v_p(n!) &= \sum_{l=1}^{n} v_p(l) \\ &= \sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{p^k \mid l} \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \underbrace{\sum_{l=1}^{n} \mathbb{1}_{p^k \mid l}}_{\left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor} = \sum_{k=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{n}{p^k} \right\rfloor \end{aligned}$$

□

Proposition 3.
Il peut souvent être utile d'encadrer un entier entre des puissances. En particulier, il peut être utile de remarquer que :

— Entre deux carrés consécutifs, il n'y a pas d'autre carré parfait. Ainsi, si $n^2 < a < (n+1)^2$, alors a n'est pas un carré parfait.

— Plus généralement, si $n^k < a < (n+1)^k$, alors a n'est pas une puissance k-ième.

Arguments plus analytiques

Proposition 4 (Inégalité de Bernoulli).
Soit $r > 1$, alors pour tout réel $x \geqslant -1$, on a l'inégalité

$$(1 + x)^r > 1 + rx$$

Proposition 5 (Comparaison de puissances).
Soient $p > q > 0$. Alors les puissances p-ièmes croissent plus rapidement que les puissances q-ièmes. Autrement dit, si les conditions du probème donnent une contrainte de la forme $x^p \leqslant Cx^q$ avec $C > 0$ alors elle ne peut être vérifiée que pour des valeurs de x suffisemment petites.

Proposition 6 (Croissances comparées).
Il faut toujours garder à l'esprit les croissances relatives de differentes fonctions : Les puissances croissent moins vite que les exponentielles, qui croissent moins vite que les factorielles. Ainsi, si $a > 1$, alors à partir d'un certain rang, on aura toujours

$$n! > a^n > n^a$$

En particulier, dès lors que dans un problème, une condition donne une condition du type $n! < a^n$, alors on sait qu'à partir d'un certain rang, aucune valeur de n ne conviendra.

Proposition 7 (Formule de Stirling (moins importante)).
Pour préciser la croissance de la factorielle, la formule de Stirling affirme que

$$n! \sim \sqrt{2n\pi}\left(\frac{n}{e}\right)^n$$

Autrement dit, la factorielle se comporte asymptotiquement comme le membre de droite, c'est à dire que le rapport des deux tend vers 1 quand n tend vers l'infini.

Remarque 8.
Pour utiliser ces arguments "à partir d'un certain rang", on peut démontrer les inégalités à partir de ce rang par récurrence ou directement à partir d'inégalités connues.
Ensuite il faut traiter les premiers cas à la main !

Remarque 9.
Un compétence importante à maitriser est donc la majoration (plus ou moins brutale) de différentes quantités.

Exercices

Les exercices n'ont pas tous été traités, et n'ont pas été donnés dans cet ordre. Ils sont réordonnés ici par difficulté croissante (plus ou moins).

Exercice 1 (Coupe Animath d'Automne 2021)
Anna a écrit un nombre N à 100 chiffres au tableau, dont le premier chiffre est non nul. Ces 100 chiffres forment 100×99 couples, et Anna calcule la somme des deux chiffres dans chacun de ces couples. Enfin, elle calcule le produit des 100×99 sommes ainsi obtenues. Est-il possible que ce produit soit égal au nombre N de départ ?

Solution de l'exercice 1
Notons $n_{100}, \ldots, n_1$ les chiffres de N tels que $n_{100} \neq 0$ et

$$N = \overline{n_{100} \ldots n_1}$$

Le produit en question s'écrit

$$P = \prod_{i=1}^{100} \prod_{j=1, j \neq i}^{100} (n_i + n_j)$$

On remarque maintenant que N est non-nul et que si au moins deux des n_i sont nuls, P doit être nul, donc $P \neq N$. Ainsi, au moins $99 \times 98 = 9702$ des sommes dans P sont supérieures ou égales à 2. On peut donc maintenant effectuer des majorations brutales :

$$P \geqslant 2^{9702} > (2^4)^{2425} > 10^{2425} > 10^{100} > N$$

car N n'a que 100 chiffres. La réponse est donc NON.

Exercice 2
Trouver tous les couples (x, y) d'entiers positifs tels que $x^2 = y^2 + 7y + 6$

Solution de l'exercice 2
Remarquons que pour $y > 3$, on a

$$(y+3)^2 = y^2 + 6y + 9 < y^2 + 7y + 6 = x^2 < y^2 + 8y + 16 = (y+4)^2$$

Donc on doit avoir $y \in \{0, 1, 2, 3\}$. On peut alors tester tous les cas pour constater que la seule solution est donnée par $x = 6$ et $y = 3$.

Exercice 3
Trouver tous les entiers relatifs x tels que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ soit un carré parfait.

Solution de l'exercice 3
L'astuce ici est de remarquer que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est un carré parfait si et seulement si $4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1)$ l'est. On remarque ensuite que $(2x^2 + x)^2 = 4x^4 + 4x^3 + x^2$. Ainsi, comme $4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) - (2x^2 + x)^2 = 2x^2 + (x+2)^2 > 0$, on a une première inégalité

$$4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) > (2x^2 + x)^2$$

Puis, on a

$$4(x^4 + x^3 + x^2 + x + 1) < (2x^2 + x)^2 \iff x^2 - 2x - 3 > 0 \iff (x < -1 \text{ ou } x > 3)$$

Ainsi, les seules solutions potentielles sont pour $x \in [\![-1, 3]\!]$. Reste alors à tester toutes ces possibilités pour trouver que les solutions sont $-1, 0$ et 3.

Exercice 4
Trouver tous les entiers naturels vérifiant $x! = x^3 - 11x + 4$

Solution de l'exercice 4
Intuitivement, on se doute qu'il ne va pas y avoir beaucoup de solutions, puique la factorielle croit beaucoup plus rapidement qu'un polynome de degré 3.

Plus précisement, on remarque que pour $x \geqslant 4$, on a $x! \geqslant x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ d'où

$$x! - (x^3 - 11x + 4) \geqslant x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 5x - 4 = (x-4)(x^3 - 3x^2 - x + 1)$$

Enfin, on remarque que pour $x \geqslant 5$, on a $x^3 - 3x^2 - x + 1 > 0$ ce qui rend l'égalité recherchée impossible. Reste alors à vérifier les entiers de 0 à 4, ce qui donne une unique solution : $x = 4$.

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \longrightarrow \mathbb{N}^*$ telles que :

$$\forall (n,m) \in (\mathbb{N}^*)^2, \quad m^2 + f(n) \mid mf(m) + n$$

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
La substitution $m = f(n)$ donne

$$f(n)^2 + f(n) \mid f(n)f(f(n)) + n$$

Puis, en factorisant le membre de gauche et en ne gardant qu'un des deux termes, on trouve

$$f(n) \mid n$$

Ce qui nous donne finalement $f(n) \leqslant n$, ce qui donne en particulier $f(1) = 1$.
Puis, on prend plutot $n = m$ pour trouver $n^2 + f(n) \mid nf(n) + n$ ce qui pour $n \geqslant 2$ donne $f(n) \geqslant n$.
Finalement, la seule solution est l'identité.

Exercice 6 (Indian Olympiad Qualifier in Mathematics 2020, Q13)
Trouver tous les couples (n, x) d'entiers naturels tels que

$$2^n + 5^n = x^2 + 65$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
On commence par regarder modulo 3 : $x^2 + 2 \equiv 2 \times (-1)^n$. Or, modulo 3 les carrés sont 0 et 1, donc n est pair. On peut alors écrire $n = 2k$, puis $x^2 = 5^{2k} + 4^k - 65$, et pour $k \geqslant 4$, on a $4^k - 65 > 0$ d'où $(5^k)^2 < x^2 = 5^{2k} + 4^k - 65 < 5^{2k} + 2 \times 5^k + 1 = (5^k + 1)^2$.
Ainsi, il ne nous reste plus qu'à traiter les entiers de 0 à 3 pour k et la seule solution est alors donnée par $n = 4$ et $x = 24$

Exercice 7 (N1 SL IMO 2021)
Déterminer tous les entiers naturels n tels qu'il existe $(a, b) \in \mathbb{N}^2$ verifiant qu'aucun cube de nombre premier ne divise $a^2 + b + 3$ et

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n$$

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>
On commence par remarquer que $b \equiv -a^2 - 3 \pmod{a^2 + b + 3}$. On peut ensuite injecter cette relation dans le numérateur pour trouver que

$$ab + 3b + 8 \equiv a(-a^2 - 3) + 3(-a^2 - 3) + 8 \equiv -(a+1)^3 \pmod{a^2 + b + 3}$$

Ainsi, pour que la fraction soit un entier, il faut que $-(a+1)^3 \equiv 0 \pmod{a^2+b+3}$, ou encore comme aucun cube de nombre premier ne divise a^2+b+3, il faut que a^2+b+3 divise $(a+1)^2$. Or, on remarque que $(a+1)^2 < 2(a^2+b+3)$. Ainsi, on a directement $(a+1)^2 = a^2+b+3$ ou encore $b = 2a-2$ et $n = 2$. Réciproquement, en prenant $a = b = 2$, on a bien $n = 2$ comme solution.

Exercice 8 (IMO 2019 P4)
Trouver tous les couples (k, n) d'entiers strictement positifs tels que

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{n-1})$$

Solution de l'exercice 8
Avec tant de facteurs 2 dans le membre de droite, on aimerait étudier la valuation 2-adique :
— A droite, elle vaut

$$0 + 1 + \ldots + (n-1) = \frac{n(n-1)}{2}$$

— A gauche, on peut utiliser la formule de Legendre pour obtenir que la valuation vaut :

$$\sum_{l=1}^{\infty} \left\lfloor \frac{k}{2^l} \right\rfloor \leqslant \sum_{l=1}^{k} \frac{k}{2^l} = \frac{k}{2} \frac{1 - (\frac{1}{2})^{k+1}}{1 - 1/2} < k$$

Ainsi, $k > \dfrac{n(n-1)}{2}$, donc $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! < (2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{n-1}) < 2^{n^2}$.
C'est ici que va intervenir l'argument de croissance : la factorielle croit beaucoup plus vite que la puissance (et même que le membre de droite ici). En fait, pour $n \geqslant 6$, on a $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! > 2^{n^2}$ et donc une contradiction. Reste à le montrer par récurrence :

— Pour $n = 6$, on a $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! = 15! > 12^4 \times 8^4 \times 4^4 \times 3 \times 2 = 3^5 \times 2^{29} = 243 \times 2^{29} > 128 \times 2^{29} = 2^{36}$

— Supposons que $\left(\dfrac{n(n-1)}{2}\right)! > 2^{n^2}$. Alors :

$$\begin{aligned}
2^{(n+1)^2} &= 2^{n^2} \times 2^{2n+1} \\
&< \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! \times 2^{2n+1} \\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)! \times \frac{2^{2n+1}}{\left(\frac{n(n-1)}{2} + 1\right) \times \ldots \times \left(\frac{n(n-1)}{2} + n\right)} \\
&< \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)! \times \frac{2^{2n+1}}{\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$

On conclut ensuite en remarquant que pour $n \geqslant 6$, $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right) \geqslant 15$, et donc que

$$2^{(n+1)^2} < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)! \times 2\left(\frac{4}{15}\right)^n < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!$$

Pour terminer, il faut traiter les entiers de 1 à 5 à la main :

- Pour $n = 1$, la seule solution est $k = 1$.
- Pour $n = 2$, on veut $k! = 6$, donc la seule solution est $k = 3$
- Pour $n = 3$, on veut $k! = 168$, donc il n'y a pas de solution
- Pour $n = 4$, on doit avoir un facteur 7 dans $k!$ donc $k \geqslant 7$, mais alors $9 \mid k!$, ce qui aboutit à une contradiction.
- Pour $n = 5$, on doit avoir un facteur 31 dans $k!$ donc $k \geqslant 31$, mais alors $k! > 31 \times (2^n - 1)(2^n - 2)\dots(2^n - 2^{n-1}) = k!$, ce qui aboutit à une contradiction.

Exercice 9
Déterminer le plus petit entier naturel $n \geqslant 2$ tel qu'il existe des entiers strictement positifs $a_1, \dots, a_n$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^2 \mid \left(\sum_{i=1}^{n} a_i\right)^2 - 1$$

Solution de l'exercice 9
Une solution peut être trouvée dans https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2020/04/corrig%C3%A9-comment%C3%A9-envoi-5.pdf

Exercice 10 (IMO 2022 P5)
Trouver tous les triplets (a, b, p) d'entiers naturels avec p premier tels que

$$a^p = b! + p$$

Solution de l'exercice 10
Il faut clairement avoir $a > 1$. On peut alors traiter 3 cas :

- Si $a < p$, alors $a > b$ car sinon $a \mid p$, impossible car $a \notin \{1, p\}$. Cependant, on a alors $b! < a! < a! < a^p - p = b!$, ce qui est aussi une contradiction !
- Si $a > p$, alors $b! = a^p - p > p^p - p \geqslant p!$ d'où $b > p$. Ainsi, a doit être divisible par p, et $b! = a^p - p$ n'est pas divisible par p^2, donc $b < 2p$.
  Maintenant, si $a < p^2$, alors $\frac{a}{p}$ est un diviseur de a^p et $b!$ car $\frac{a}{p} < p < b$, et donc $\frac{a}{p}$ divise p, absurde. Ainsi, $a \geqslant p^2$, mais c'est également impossible car alors :

$$\begin{aligned} b! + p &< p + (2p-1)! \\ &= (1 \times (2p-1)) \cdot (2 \times (2p-2)) \cdot \ldots \cdot ((p-1) \times (p+1)) \cdot p + p \\ &< \left(\frac{2p}{2}\right)^{2(p-1)} \times p + p \\ &< p^{2p} \leqslant a^p \end{aligned}$$

- Reste alors le cas $a = p$, qui donne $b! = p^p - p$. On peut traiter les cas $p = 2, 3, 5$ et constater que seuls $p = 2$ et $p = 3$ sont solutions.
  Maintenant si $p \geqslant 7$, alors $b! = p^p - p > p!$ donc $b \geqslant p + 1$, d'où :

$$v_2((p+1)!) \leqslant v_2(b!) = v_2(p^{p-1}-1) \underbrace{=}_{LTE} 2v_2(p-1)+v_2(p+1)-1 = v_2\left(\frac{p-1}{2} \times (p-1)(p+1)\right)$$

Or, ces trois facteurs distincts apparaissent dans $(p+1)!$, mais comme $p+1 \geqslant 8$, il y a au moins un des autres facteurs qui est pair, ce qui nous apporte une contradiction.

Les seules solutions sont donc données pour $a = p = 2$ ou $a = p = 3$.

Exercice 11 (France TST 2019)
Soit u un entier naturel non-nul. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de triplets d'entiers naturels (a, b, n) tels que $n! = u^a - u^b$

Solution de l'exercice 11
Une solution peut être trouvée à la page 6 de https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/04/Test-20-03-Corrig%C3%A9-web.pdfTST français mars 2019

6 Combinatoire : TD 1 (Melvil)

Combinatoire - Exercices divers

L'objectif de ce TD est de s'entraîner à réaliser des problèmes d'une difficulté comparable à celle d'un $P1$ d'Olympiade Internationale de Mathématiques. Les exos ont été choisis car ils présentaient des idées intéressantes, instructives où tout simplement jolies.

Exercice 1
Soit A un ensemble de 2022 entiers strictement positifs, dont tous les diviseurs premiers sont inférieurs à 30. Montrer qu'il existe a, b, c, d distincts dans A tel que $abcd$ soit un carré parfait.

Exercice 2
Considérons $4n$ points dans le plan trois à trois non alignés. Montrer que l'on peut former n quadrilatères non croisés disjoints dont les sommets sont ces points

Exercice 3
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ Parmi une classe de n élèves numérotés de 1 à n, certains sont amis et d'autres ne le sont pas (la relation d'amitié est réciproque, et on ne peut être ami ou non ami avec soi même). Existe-t-il un entier $N \geqslant 1$ et une façon de donner à chaque élève un entier (noté a_i pour l'élève i) tel que i et j sont amis si et seulement si N divise $a_i a_j$.

Exercice 4
Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice écrit un entier strictement positif au tableau. A chacun de ses tours, Bob choisit un entier $a \geqslant 1$, et remplace l'entier n écrit au tableau par $n - a^2$. A chacun de ses tours, Alice choisit un entier $k \geqslant 1$, et remplace l'entier m par m^k. Bob commence : il gagne si au bout d'un nombre fini de tours, il réussit à écrire 0 au tableau, sinon Alice gagne. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?

Exercice 5
On dispose de 2^m morceaux de papier. Initialement, on écrit le nombre 1 sur chacun d'entre eux. On exécute l'opération suivante : à chaque étape on choisit 2 morceaux de papier sur lequels il est écrit a et b et on les remplace par 2 bouts de papier avec écrit $a + b$ sur chacun d'entre eux. Montrer qu'après $m2^{m-1}$ opérations, la somme des nombres inscrits sur les bouts de papier vaut au moins 4^m.

Exercice 6
Soit $n \geq 1$: on place dans le plan $2n$ points, trois quelconques non alignés. On en colorie n en bleu et n en rouge. Montrer qu'il est possible de tracer n segments qui ne se croisent pas, chaque segment reliant un point bleu à un point rouge, de telle manière que chaque point soit utilisé une seule fois.

Exercice 7
Bérénice dispose de $n \geq 2$ lampes $L_1, L_2, \cdot, L_n$ alignées de gauche à droite. Initialement la lampe L_1 est allumée, et les $n-1$ autres lampes sont éteintes. Puis, chaque minute, elle modifie simultanément l'état de ses n lampes en procédant comme suit : si la lampe L_i est dans le même état (allumée ou éteinte) que l'ensemble de ses voisines (une voisine si $i = 1$ ou $i = n$, et deux voisines si $2 \leq i \leq n - 1$), Bérénice éteint la lampe L_i ; sinon, elle allume la lampe L_i.

1. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geq 2$ pour lesquels, à un moment donné, toutes les lampes de Bérénice seront simultanément éteintes.
2. Démontrer qu'il existe une infinité d'entiers $n \geq 2$ n'ayant pas la propriété précédente.

Exercice 8
Soit $n \geqslant 100$. Ivan écrit les nombres $n, n+1, \ldots, 2n$ sur différentes cartes. Il mélange les cartes, et les divise en deux tas. Montrer qu'au moins une des piles contient 2 cartes dont la somme des numéros est un carré parfait.

Exercice 9
Soit $\mathcal{S}$ un ensemble infini d'entiers naturels non nuls contenant quatre entiers a, b, c, d deux à deux distincts tels que $\operatorname{pgcd}(a,b) \neq \operatorname{pgcd}(c,d)$. Démontrer que $\mathcal{S}$ contient trois entiers x, y, z deux à deux distincts tels que $\operatorname{pgcd}(x,y) = \operatorname{pgcd}(y,z) \neq \operatorname{pgcd}(z,x)$.

Exercice 10
On considère un tableau $n \times n$ dans lequel on place tous les entiers de 1 à n chacun exactement n fois. Montrer qu'il existe une colonne ou ligne possédant au moins $\sqrt{n}$ nombres différents.

Solution de l'exercice 1
Notons qu'il y a 10 nombres premiers inférieurs ou égaux à 30. En particulier, à chaque nombre a dans A, on lui associe le 10-uplet composé des restes modulo 2 des $V_p(a)$ pour p premier inférieur à 30. Il y a $2^{10} = 1024$ possibilités donc par principe des tiroirs deux éléments de A qu'on note a et b ont le même 10-uplet, donc ab est un carré (car pour tout $p < 30$ premier, $V_p(ab) \equiv V_p(a) + V_p(b) \equiv 2V_p(a) \equiv 0 \pmod 2$).

Ensuite il suffit d'enlever a et b de A, réappliquer le même raisonnement permet de trouver c et d dont le produit est un carré. Ainsi $abcd$ est bien un carré.

Solution de l'exercice 2
On utilise ici une technique classique dans les problèmes de géométrie combinatoire : quitte à faire une rotation, on peut considérer que tous les points ont une abscisse distincte, on les regarde alors par abscisse croissante. Si les points triés comme ceci sont $A_1, ..., A_{4n}$, on considère des quadrilatères non croisés formés par les $A_{4k+1}, A_{4k+2}, A_{4k+3}, A_{4k+4}$ $(1 \leq k \leq n)$. Ces quadrilatères sont compris entièrement entre les abscisses de A_{4k+1} et A_{4k+4} et sont alors deux-à-deux disjoints.

Solution de l'exercice 3
On trace le graphe dont les sommets sont les entiers de 1 à n et deux sommets sont reliés si les élèves sont amis. On note $e_1, \ldots, e_k$ les arêtes du graphe complémentaire, et $p_1, \ldots, p_k$ des nombres premiers distincts. On pose $N = p_1 \ldots p_k$ et pour tout $1 \leqslant i \leqslant k$ a_i le produit des p_j tels que i n'est pas une extrémité de l'arête e_j.

Montrons que cela marche : soit e_l une arête non présente dans le graphe, i et j ses extrémités, p_l ne divise aucune des valeurs affectées aux extrémités de l'arête, donc N ne divise pas $a_i a_j$.

Soit e une arête du graphe, i, j ses extrémités, et $l \in \{1, \ldots, k\}$. Comme i et j ne peuvent être les deux extrémités de e_l (sinon $e_l = e$), p_l divise a_i ou a_j, donc p_l divise $a_i a_j$ pour tout l. Ainsi N divise $a_i a_j$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4
Ici une bonne idée est de décomposer tout entier strictement positif n comme un carré fois

un nombre squarefree : on remplace chaque valuation p adique de n par le plus petit entier pair inférieur ou égal à celle-ci pour obtenir un carré noté a^2 qui divise n et tel que $\frac{n}{a^2}$ est squarefree. De plus cette décomposition est unique : si $n = a^2 \times b = c^2 \times d$ avec b et d squarefree, on a $V_p(d) \equiv V_p(n) \equiv V_p(b) \pmod 2$ pour tout p premier, donc comme b et d sont squarefree $b = d$ et $a^2 = c^2$. On notera maintenant pour tout $n \geqslant 1$, $sf(n)$ sa partie squarefree.

Ici, si $m > 0$ est écrit au tableau les mouvements d'Alice peuvent soit transformer $s(m)$ en 1 si k est pair, soit en $s(m)$ si k est impair car $m^k = m \times \left(m^{(k-1)/2}\right)^2$, et le nombre sera toujours strictement positif. Il suffit donc à Bob de réussir à diminuer à chaque fois la partie squarefree du nombre écrit (et de garder le nombre strictement positif : ainsi au but d'un nombre fini de tour, la partie squarefree vaudra 1, et donc le nombre sera un carré, Bob pourra alors juste retirer le nombre lui-même. Pour cela, si $m = a^2 b$ est écrit au tableau, avec b sa partie squarefree et $b > 1$ (sinon Bob gagne directement en enlevant a^2), Bob peut retirer a^2 et obtenir $a^2(b-1) = a^2 \times \frac{b-1}{sf(b-1)} sf(b-1)$ dont la partie squarefree est donc $sf(b-1) \leqslant b-1 < b$, ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

Dans un tel problème, il est nécessaire de faire apparaître un variant. Pour ce faire, une bonne idée est de s'intéresser au produit des nombres inscrits sur les morceaux de papier pour les raisons suivantes :

1. Par IAG on sait que minorer le produit nous donnera une minoration de la somme
2. Le produit est une quantité assez simple, et se laisse mieux manipuler que la somme lors d'une opération

On notera P et S respectivement le produit et la somme des nombres inscrits sur les morceaux de papier. Ainsi, si on effectue l'opération sur les nombres a et b, le produit est multiplié par $\dfrac{(a+b)^2}{ab} \geq 4$ par IAG. Donc au bout de $m2^{m-1}$ opérations, on a $P \geq 4^{m2^{m-1}} = 2^{m2^m}$. Finalement, comme annoncé en appliquant l'IAG aux 2^m bouts de papier, on obtient

$$S \geq 2^m \cdot P^{\frac{1}{2^m}} \geq 4^m$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

On propose deux solutions : une solution utilisant des techniques classiques de géométriecombinatoire et une solution courte mais astucieuse.

<u>Solution 1 :</u> On procède par récurrence forte. Pour $n = 1$, le résultat est trivial. Supposons le vrai jusqu'au rang $n-1$ et montrons le au rang n. L'idée de la solution est classique et consiste à étudier l'enveloppe convexe des points. On a deux possibilités :

— Si l'enveloppe convexe contient deux points de couleurs différentes, alors on peut trouver deux tels points A et B qui se suivent sur l'enveloppe convexe. A et B sont en dehors de l'enveloppe convexe des autres $2(n-1)$ points restants. On relie ces points avec l'hypothèse de récurrence et on peut ensuite relier A et B pour obtenir une configuration qui marche avec les $2n$ points.

— Sinon, l'enveloppe convexe ne contient que des points d'une même couleur, disons bleu. Encore une fois, on effectue une rotation du plan afin que tous les points aient une abscisse différente, alors les points avec les abscisses les plus petite et grande sont bleus. On fait glisser une droite verticale (d) de gauche à droite de la figure. Juste après avoir dépassé le premier point, on a un point bleu de plus que de rouge à gauche de (d), et juste avant de dépasser le dernier, c'est le contraire. Ainsi, il existe une position intermédiaire de (d) tel que chaque côté possède autant de points bleus que rouges. On relie les points de chaque côté de (d) par l'hypothèse de récurrence forte, et on a ainsi relié les $2n$ points du plan comme voulu.

Solution 2 : Soit T un tracé de n segments entre des points bleus et rouges, de façon à ce que chaque point appartienne à un unique segment. On définit $p(T)$ comme la somme des longueurs des segments de T . L'ensemble de ces tracés T étant fini, il en existe un T_0 minimisant $p(T)$. Mais alors si $[B_1, R_1]$ et $[B_2, R_2]$ sont deux segments distincts de T_0 qui s'intersectent (avec les B_i bleus et les R_i rouges), on peut les remplacer par $[B_1, R_2]$ et $[B_2, R_1]$ qui ne s'intersectent pas et dont on vérifie aisément que la somme des longueurs est strictement inférieure à celle d'avant (faire un dessin et appliquer l'inégalité triangulaire 2 fois). Ainsi, c'est absurde et les segments de T_0 ne s'intersectent pas.

Solution de l'exercice 7
Ci-dessous, nous représenterons chaque lampe allumée par un 1 et chaque lampe éteinte par un 0. On notera également 1^x une suite de x lampes allumées, et 0^x une suite de x lampes éteintes. Enfin, on notera $\mathsf{c}(a)$ la suite des états des a premières lampes après $a-1$ opérations et on notera $\mathsf{rev}(s)$ le miroir d'une suite s, c'est-à-dire la suite obtenue à partir de s en échangeant gauche et droite.

Remarquons tout d'abord que, après $a - 1$ opérations, toute autre lampe que les a premières est nécessairement éteinte.

Démontrons maintenant, pour tout entier $k \geqslant 0$, la propriété $\mathcal{P}_k$ selon laquelle $\mathsf{c}(2^k) = 1^{2^k}$. Tout d'abord, la propriété $\mathcal{P}_0$ est immédiate. Soit ensuite un entier $k \geqslant 1$ pour lequel $\mathcal{P}_{k-1}$ est vraie, et posons $\ell = 2^{k-1}$. Puisque $\mathsf{c}(\ell) = 1^\ell$, on sait que $\mathsf{c}(\ell + 1) = 0^{\ell-1}11$. Une récurrence immédiate montre alors que $\mathsf{c}(\ell + i) = 0^{\ell-i}\mathsf{rev}(\mathsf{c}(i))\mathsf{c}(i)$ lorsque $1 \leqslant i \leqslant \ell$, de sorte que $\mathsf{c}(2\ell) = \mathsf{rev}(\mathsf{c}(\ell))\mathsf{c}(\ell) = 1^{2\ell}$, et donc que $\mathcal{P}_{k+1}$ est vraie.

Forts de cette propriété, on en déduit déjà que, si $n = 2^k$, toutes les lampes seront allumées après $n - 1$ opérations, donc éteintes à partir de la $n^{\text{ème}}$ opération.

Au contraire, si $n = 2^k + 1$, seule la dernière lampe est allumée après $n - 1$ opérations : on est donc revenu dans la situation de départ, à ceci près que l'on a échangé gauche et droite ainsi qu'états allumés et éteints. En particulier, aussi loin qu'aille Bérénice, et après $\ell(n - 1)$ opérations, elle aura toujours une lampe extrémale éteinte et les autres allumées. Or, si toutes les lampes avaient été simultanément éteintes à un moment donné, elles seraient restées éteintes pour toujours. Elles ne seront donc jamais toutes éteintes au même moment.

Remarque : On peut en fait démontrer que seules les puissances de 2 satisfont la propriété mentionnée en question 1 en s'appuyant sur les deux lemmes suivants. Dans ceux-ci, on note $\ell(k, t, n)$ l'état de la lampe L_k lors de la $t^{\text{ème}}$ minute, lorsque l'on a n lampes en tout.

Lemme 1 : Pour tous les entiers k, t et n tels que $k \leqslant n - 1$, si $\ell(k, t, n) \neq \ell(k + 1, t, n)$, alors $k \equiv t \pmod 2$.

Démonstration : Procédons par récurrence sur t. Tout d'abord, ce résultat est immédiat lorsque $t = 1$. Puis, s'il est vrai pour un entier $t \geqslant 1$ donné, soit k un entier pour lequel $\ell(k, t + 1, n) \neq \ell(k + 1, t + 1, n)$:

- si $\ell(k, t+1, n) = 0$, alors $k+2 \leqslant n$ et $\ell(k, t, n) = \ell(k+1, t, n) \neq \ell(k+2, t, n)$, donc $k+1 \equiv t \pmod 2$ et $k \equiv t + 1 \pmod 2$;

▷ si $\ell(k, t+1, n) = 1$, alors $k \geqslant 2$ et $\ell(k, t, n) = \ell(k+1, t, n) \neq \ell(k-1, t, n)$, donc $k - 1 \equiv t \pmod 2$ et $k \equiv t + 1 \pmod 2$. □

	L_{k-1}		L_k		L_{k+1}	
t	•		0		0	
$t+1$	•		0		?	
	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	•	•	0	0	0	0
$2t+1$	•	•	0	0	0	?
$2t+2$	•	•	0	0	?	?

	L_{k-1}		L_k		L_{k+1}	
t	•		0		1	
$t+1$	•		1		?	
	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	•	•	0	0	1	1
$2t+1$	•	•	0	1	1	?
$2t+2$	•	•	1	1	?	?

	L_{k-1}		L_k		L_{k+1}	
t	0		0		0	
$t+1$	?		0		?	
	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	0	0	0	0	0	0
$2t+1$	?	0	0	0	0	?
$2t+2$	?	?	0	0	?	?

	L_{k-1}		L_k		L_{k+1}	
t	0		0		1	
$t+1$	?		1		?	
	M_{2k-3}	M_{2k-2}	M_{2k-1}	M_{2k}	M_{2k+1}	M_{2k+2}
$2t$	0	0	0	0	1	1
$2t+1$	?	0	0	1	1	?
$2t+2$	?	?	1	1	?	?

Lemme 2 : Pour tous k, t et n, on a $\ell(k, t, n) = \ell(2k-1, 2t, 2n) = \ell(2k, 2t, 2n)$.
Démonstration : Nous allons démontrer ce résultat par récurrence sur t. Tout d'abord, il est vrai pour $t = 1$. Ci-dessous, on notera M_k la $k^{\text{ème}}$ lampe lorsque l'on a $2n$ lampes. Puis, s'il est vrai pour une valeur de t donnée, suivons en parallèle les lampes L_{k-1} à L_{k+1} ainsi que les lampes M_{2k-3} à M_{2k+2}.

Ci-après, on considère l'ensemble des états de départ possibles pour les lampes L_{k-1} à L_{k+1}, à symétrie gauche-droite près et quitte à changer l'état de départ de nos lampes en l'état opposé (ce qui n'influe en rien sur la suite de notre système dynamique) ; notons ici que, si $2 \leqslant k \leqslant n-1$, et en vertu du lemme 1, la lampe L_k est nécessairement dans le même état qu'une des deux lampes L_{k-1} et L_{k+1}. On représente également par • une lampe inexistante (en position $k \leqslant 0$). Ceci conclut la récurrence. □

On conclut enfin, en considérant comme *solution* un entier n pour lequel les lampes finiront par être toutes éteintes, état dont elles ne sortiront alors jamais. Le lemme 2 indique que n est solution si et seulement si $2n$ est solution, et puisque 1 est solution, toute puissance de 2 est également solution.

Par ailleurs, si $n \geqslant 3$ est une solution impaire, la première fois où les lampes sont toutes dans le même état, à un instant t, elles sont toutes allumées, et s'apprêtent à être toutes éteintes. En particulier, puisque $\ell(1,t,n) = \ell(n,t,n) = 1$, on sait que $\ell(1,t-1,n) \neq \ell(2,t-1,n)$ et que $\ell(n-1,t-1,n) = \ell(n,t-1,n)$, donc que $1 \equiv n-1 \equiv t-1 \pmod 2$, ce qui est impossible. Ainsi, nul entier impair $n \geqslant 3$ n'est solution, et nul entier qui n'est pas une puissance de 2 n'est solution.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

On regarde le graphe dont les sommets sont les numéros de n à $2n$, qu'on relie si leur sommet est un carré. L'existence de deux tels cas est équivalent au caractère biparti du graphe, donc à l'inexistence de cycle de longueur impaire. On cherche donc des cycles de longueur impair, le plus simple étant un triangle, i.e. des entiers $a < b < c$ tels que $a+b, b+c, c+a$ sont des carrés ce qui suffira. La somme des 3 étant divisible par 2, il semble bon de supposer $a+b$ et $b+c$ sont impairs.

$(a+b) = (2k-1)^2$, $b+c = (2k+1)^2$ et $a+c = (2k)^2$ est équivalent à

$$a = \frac{(2k-1)^2 + (2k+1)^2 - 4k^2}{2} = 2k^2 + 1 \ \ , \ \ b = 2k^2 - 4k,$$

$$c = \frac{(2k+1)^2 + 4k^2 - (2k-1)^2}{2} = 2k^2 + 4k.$$

(l'implication est claire, et la réciproque se calcule facilement), on veut donc montrer qu'il existe $k \geqslant 1$ tel que $2k^2 + 4k \leqslant 2n$ et $2k^2 - 4k \geqslant n$. Il suffit pour cela d'avoir $2(k+2)^2 \leqslant 2n+4$ donc $k \leqslant \sqrt{n+2} - 2$ et $2(k-2)^2 \geqslant n+8$, donc $k \geqslant 2 + \sqrt{(n+8)/2}$, on cherche donc à savoir quels sont les n tels que

$$\sqrt{n+2} - 2 - 2 - \sqrt{(n+8)/2} \geqslant 1,$$

donc tels que $\sqrt{n+2} \geqslant 5 + \sqrt{(n+8)/2}$, i.e. $n+2 \geqslant 25 + (n+8)/2 + 5\sqrt{2(n+8)}$ donc $n \geqslant 54 + 10\sqrt{2(n+8)}$. Donc il suffit d'avoir $(n-54)^2 \geqslant 200(n+8)$, soit $n^2 + 1316 - 308n \geqslant 0$, donc $(n-158)^2 \geqslant 22400$. Or $22400 \leqslant 150^2$ donc il reste juste à traiter $100 \leqslant n \leqslant 308$.

On calcule désormais les valeurs de $4k^2 - 2k$ et $4k^2 + 4k$: pour $k = 9$, on obtient 126 et 198, donc tout n entre 100 et 126 vérifie l'énoncé. Pour $k = 10$, on obtient 160 et 240 donc l'énoncé est vraie pour n entre 120 et 160. Pour $k = 11$, on obtient 198 et 286 donc l'énoncé est vrai entre 143 et 198. Pour $k = 12$, on obtient 240 et 336, donc l'énoncé est vrai entre 168 et 240. Pour $k = 13$, on obtient 286 et 390 donc l'énoncé est vrai entre 195 et 286. Pour $k = 14$, on obtient 336 et 448, donc l'énonc est vrai entre 224 et 336 ce qui conclut les cas restants.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Soit k le PGCD des éléments de $\mathcal{S}$. Si l'on divise chaque élément de $\mathcal{S}$ par k, on obtient un ensemble $\mathcal{S}'$ qui vérifie toujours l'énoncé et, réciproquement, si $\mathcal{S}'$ vérifie l'énoncé, $\mathcal{S}$ le vérifie aussi. On remplace donc $\mathcal{S}$ par $\mathcal{S}'$, c'est-à-dire que l'on suppose désormais que $k = 1$.

Soit x et y deux éléments de $\mathcal{S}$ tels que $x \wedge y \neq 1$. Il suffit, par exemple, de choisir $(x, y) = (a, b)$ ou $(x, y) = (c, d)$. Si $\mathcal{S}$ admet un élément z premier avec x et y, on a $x \wedge z = y \wedge z = 1 \neq x \wedge y$, ce qui constitue le résultat souhaité.

Sinon, parmi les facteurs premiers de xy, il en existe au moins un, disons p, qui divise une infinité d'éléments de $\mathcal{S}$. Notons $\mathcal{S}_p$ l'ensemble des éléments de $\mathcal{S}$ qui sont divisibles par p. Puisque $k = 1$, il existe un élément t de $\mathcal{S}$ qui n'appartient pas à $\mathcal{S}_p$. Comme $\mathcal{S}_p$ est infini, et puisque la fonction $n \mapsto t \wedge n$ ne prend qu'un nombre fini de valeurs lorsque n varie, il existe deux éléments u et v de $\mathcal{S}_p$ tels que $t \wedge u = t \wedge v$. Puisque p divise $u \wedge v$ mais pas $u \wedge v$, on en conclut que $t \wedge u = t \wedge v \neq u \wedge v$, ce qui donne de nouveau le résultat souhaité.

Solution de l'exercice 10

Face à un tel problème, une bonne idée est de traduire l'énoncé par un graphe bipartite dont les 2 ensembles de sommets indépendants X et Y représentent respectivement les n nombres de 1 à n et les $2n$ lignes et colonnes. Il reste à montrer que l'un des sommets de Y est de degré au moins $\sqrt{n}$.

Il suffit de démontrer que le graphe contient au moins $2n\sqrt{n}$ arrêtes. La clé de l'exercice est alors de remarquer que chaque $x \in X$ est de degré au moins $2\sqrt{n}$. En effet, pour $x \in X$ on note respectivement $l(x)$ et $c(x)$ le nombre de lignes et le nombre de colonnes reliées à x. Le nombre de cases remplies par le nombre associé à x est alors borné par $l(x)c(x)$. Ainsi, on obtient $l(x)c(x) \geq n$. Finalement par IAG, on a $d(x) = l(x) + c(x) \geq 2 \cdot \sqrt{l(x)c(x)} \geq 2\sqrt{n}$.

7 Combinatoire : TD 2 (Gaëtan)

Exercice 1
Pour $n \geq 2$, les nombres $1, ..., n$ sont écrits dans cet ordre au tableau. On s'autorise à échanger deux nombres si et seulement si leur somme est un carré parfait. Trouver tous les n tels qu'on peut ainsi générer chaque ordre possible.

Exercice 2
17 lutins sont assis en cercle. 5 parmi eux sont des lutins maléfiques. Montrer qu'il existe un ensemble de 7 lutins consécutifs dont 3 sont maléfiques.

Exercice 3
Soient n droites en position générale dans le plan. P'tit Rémi se balade sur ces droites. Lorqu'il croise une première droite, il change de droite en tournant à gauche. Au deuxième croisement il tourne à droite, puis au troisième à gauche et ainsi de suite. Montrer que P'tit Rémi ne peut pas revenir à son point de départ dans le sens inverse de celui dont il est parti.

Exercice 4
2009 cartes sont rangées côte à côte sur une table. Chaque carte a une face noire et une face blanche. Au début, chaque carte a sa face blanche visible. Martin le Malin et Théo le Costaud jouent au jeu suivant : chacun leur tour à commencer par Martin, ils choisissent un bloc de 50 cartes côte à côte dont la carte la plus à gauche est blanche et ils retournent chaque carte du bloc.
a) Le jeu se termine-t-il nécessairement ?
b) Existe-t-il une stratégie gagnante pour l'un des joueurs ?

Exercice 5
Un rectange R dont les longueurs des côtés sont toutes des entiers impairs est divisé en plus petits rectangles, tous à côtés entiers. Montrer qu'il existe au moins un des petits rectangles dont les distances à chaque côté de R sont toutes de même parité.

Exercice 6
Un site est un point (x, y) du plan où x, y sont des entiers compris entre 1 et 20 inclus.
Initialement, chacun des 400 sites est inoccupé. Alice et Bernard placent chacun leur tour des pierres, en commençant par Alice. À son tour, Alice place une nouvelle pierre rouge sur un site inoccupé de sorte que la distance entre deux sites occupés par des pierres rouges soit différente de $\sqrt{5}$. À son tour, Bernard place une nouvelle pierre bleue sur un site inoccupé. (Un site occupé par une pierre bleue peut se trouver à une distance quelconque d'un site occupé.) Ils s'arrêtent dès qu'un joueur ne peut plus placer de pierre.
Déterminer le plus grand nombre K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges, quelle que soit la manière de laquelle Bernard place ses pierres bleues.

Exercice 7
Soit P un polygone convexe à n côtés avec $n \geq 3$. On appelle "triangulation" de P un ensemble de $n - 3$ diagonales qui ne s'interdectent pas à l'intérieur de P.
Trouver tous les n tels qu'un n-gone régulier admet une triangulation constituée uniquement de triangles isocèles.

Exercice 8
Soit $n > 0$ un entier. On commence avec n tas de cailloux, chacun contenant initialement un caillou. On peut alors effectuer des mouvements de la forme suivante : on choisit deux tas, on prend un même nombre de cailloux dans chaque tas, puis on forme un nouveau tas avec ces cailloux. Trouver le plus petit nombre de tas qu'il est possible d'obtenir ainsi.

Exercice 9
Soit X un ensemble de cardinal n. Étant donnés $k > 2$ sous-ensembles de X, chacun avec au moins r éléments, montrer qu'on peut toujours en trouver deux A et B parmi eux tels que $|A \cap B| \geq r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$.

Exercice 10
Dans une compétition, il y a a participants et b juges, où $b \geq 3$ est un entier impair. Chaque juge donne à chaque partcipant une mention "succès" ou "échec". Soit k un entier tel que pour deux juges quelconques, leurs jugements coïncident pour au plus k participants. Montrer que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Exercice 11
Soit $\leftarrow$ la touche flèche vers la gauche sur un clavier d'ordinateur. Si on ouvre l'éditeur de texte et on écrit "ab$\leftarrow$ cd $\leftarrow\leftarrow$ e $\leftarrow\leftarrow$ f", on verra "faecdb" s'afficher.
On dit qu'un mot B est atteignable depuis un mot A si il est possible d'insérer un certain nombre de $\leftarrow$ dans A afin de produire B. Par exemple on a montré que "faecdb" est atteignable depuis "abcdef".
Montrer que pour deux mots A et B, A est atteignable depuis B si et seulement si B est atteignable depuis A.

Exercice 12
Théo le Costaud anime un quiz de culture générale. Tu te sais incabable de gagner loyalement donc tu décides de tricher. À chaque question, tu peux jeter un oeil à la réponse des $n > 1$ autres participants avant d'écrire la tienne. Pour chaque question, lorsque tous les participants ont soumis leur réponse, Théo annonce la bonne réponse. Une bonne réponse rapporte 0 points. Une mauvaise rapporte -2 points aux autres participants, mais seulement -1 point pour toi car tu as piraté le système des scores. Après avoir annoncé la bonne réponse, Théo passe à la prochaine question. Montre que si tu as une avance de 2^{n-1} points à n'importe quel moment, alors tu peux certainement te débrouiller pour remporter la première place.

Solution de l'exercice 1
Source : BMOSL 2023 C2

Solution de l'exercice 2
Par TVI discret, on se ramène à invalider les cas suivants : pour tous 7 lutins consécutifs, au plus 2 sont maléfiques, pour tous 7 lutins consécutifs, au moins 4 sont maléfiques. Le deuxième cas est impossible car dans les 14 premiers lutins il y en aurait au moins 8 maléfiques, or il n'y a que 5 lutins maléfiques. Intéressons nous donc au premier cas.
Si on prend n'importe quel groupe de 3 lutins consécutifs, il y en a au plus 4 maléfiques parmi les 14 autres ; ainsi il y a au moins un lutin maléfique dans 3 lutins consécutifs. Considérons deux lutins consécutifs dont l'un au moins est maléfique. Il y a au moins $15/3 = 5$ lutins maléfiques parmi les lutins restant d'après ce qui précède. Cela fait 6 lutins, absurde.

Solution de l'exercice 3
On colorie les régions délimitées par les droites en noir et blanc de sorte à ce que deux régions consécutives soient de couleurs différentes (on peut montrer par récurrence que cela est possible). On constate que la couleur de la case à droite de P'tit Rémi est invariante par les virages de P'tit Rémi : on en déduit qu'il ne peut pas revenir dans le sens inverse au point de départ car ladite couleur aurait changé.

Solution de l'exercice 4
Source : IMOSL 2009 C1

Solution de l'exercice 5
Source : IMOSL 2017 C1

Solution de l'exercice 6
Source : IMO 2018 P4

Solution de l'exercice 7
Source : USAMO 2008 P4

Solution de l'exercice 8
Source : IMOSL 2022 C6

Solution de l'exercice 9
On note les k ensemble : $X_1, X_2, \dots X_n$ on prend T est le nombre de triples (X_i, X_j, a) t.q $a \in X_i$ et $a \in X_j$ On suppose par absurde que $\forall i, j \in [k] : |X_i \cap X_j| < r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$ Alors si on fixe X_i et X_j d'abord alors il y'a au plus $r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$ façons de choisir a , on déduit que $T < \dbinom{k}{2}\left(r - \dfrac{nk}{4(k-1)}\right)$. On note d_i le nombre des ensembles qui contient le i-iem élément de X alors pour si on fixe a d'aborde il'y a $\binom{d_x}{2}$ façons pour choisir X_i et X_j (on note $\binom{0}{2} = \binom{1}{2} = 0$) on sait que $\sum d_i = \sum X_i$ (la somme des cellules de la matrice d'incidence) . alors

$$T = \sum_{i=1}^{n} \binom{d_i}{2} \geq n\binom{\frac{\sum d_i}{n}}{2} = n\binom{\frac{\sum X_i}{n}}{2} \geq n\binom{\frac{kr}{n}}{2}$$

car la fonction $x \mapsto \dfrac{x(x-1)}{2}$ convexe sur $\mathbb{R}$. alors on conclure que $n\dbinom{\frac{kr}{n}}{2} < \dbinom{k}{2}\left(r - \dfrac{nk}{4(k-1)}\right) \iff \dfrac{kr^2}{n} + \dfrac{nk}{4} < kr$ et on a par AM-GM $kr \leq \dfrac{kr^2}{n} + \dfrac{nk}{4}$ alors $kr < kr$ ce qui absurde . alors on peut toujours trouver au moins deux ensembles A, B t.q : $|A \cap B| \geq r - \dfrac{nk}{4(k-1)}$

Solution de l'exercice 10
Source : IMO 1998 P2

Solution de l'exercice 11
Source : USATSTST 2014 P1

Solution de l'exercice 12
Source : USATST 2017 P1

8 Arithmétique : TD de shortlist (Mano et Martin)

Le but de ce TD est de démystifier les exercices de niveau $1-4$ des Olympiades Internationales. Bien souvent, il s'agit d'utiliser des idées astucieuses et ingénieuses mais simples, et non l'application de recettes de cuisines. C'est à force de pratique que l'on finit par comprendre ce qu'un problème 1-4 d'Olympiade Internationale attend de nous. Le TD suivant fournit, après quelques exercices de démarrage, une liste d'exercices du niveau décrit (et un peu plus pour les derniers exercices) et présentant un large panel d'idées différentes. Bien sûr, on conseille de travailler plusieurs heures sur les exercices avant de regarder la solution.

Exercices

Exercice 1
Rémi écrit n entiers strictement positifs $a_1, ..., a_n$ au tableau. Toutes les minutes, Rémi peut remplacer un entier a écrit au tableau par N/a, où N désigne le ppcm des entiers écrits au tableau. Montrer que Rémi peut faire en sorte que tous les nombres écrits au tableau soient des 1 après un nombre fini d'opérations.

Exercice 2
Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une permutation $a_1, \ldots, a_{p-1}$ de $1, \ldots, p-1$ telle que les nombres $a_1, a_1a_2, \ldots, a_1a_2\ldots a_{p-1}$ donnent $p-1$ restes distincts modulo p.

Exercice 3
Soit p un nombre premier et $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ des entiers de $\{1, \ldots, p-1\}$. Montrer qu'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $a_ib_j - a_jb_i$ est divisible par p.

Exercice 4
(IMO 2023 P1) Déterminer tous les entiers strictement positifs n composés avec la propriété suivante : si $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ sont les diviseurs de n, alors $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Exercice 5
(IMO 2017 P1) Pour tout entier $a_0 > 1$, on définit la suite $a_0, a_1, \ldots$ par

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } a_n \text{ est un carré parfait} \\ a_n + 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer toutes les valeurs de a_0 pour lesquelles il existe un nombre A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs de n.

Exercice 6
(Olympiade Francophone 2020) Soit $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ et soit m un entier. On suppose que pour tout sous-ensemble fini non vide S de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier.

Montrer que parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, seul un nombre fini possède moins de m facteurs premiers distincts.

Exercice 7
(IMO 2016 P4) Un ensemble d'entier naturels est dit *parfumé* s'il contient au moins deux éléments et si chacun de ses éléments possède un facteur premier en commun avec au moins l'un des autres éléments. Soit $P(n) = n^2 + n + 1$. Déterminer le plus petit entier strictement positif b pour lequel il existe un entier positif a tel que l'ensemble

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

soit parfumé

Exercice 8
(IMO SL 2007 N2) Soient $b, n > 1$ des entiers. Supposons que pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que k divise $b - a_k^n$. Montrer qu'il existe A un entier tel que $b = A^n$.

Exercice 9
(IMO SL 2009 N2) Un entier strictement positif N est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x+a)(x+b)$.

a) Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ sont jolis.

b) Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$

Exercice 10
(IMO SL 2011 N2) Soit $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_9)$ avec $d_1, \ldots, d_9$ des entiers distincts. Montrer qu'il existe N un entier tel que pour tous les entiers $x \geqslant N$ le nombre $P(x)$ est divisible par un nombre premier plus grand que 20.

Exercice 11
(USAMO 2021 P4) Un ensemble fini S d'entiers strictement positifs possède la propriété que pour tout entier $s \in S$ et tout diviseur d de s, il existe un unique élément t de S tel que $\gcd(s, t) = d$. Déterminer toutes les valeurs que peut prendre $|S|$.

Exercice 12
(EGMO 2023 P5) Soit $s \geqslant 2$ un entier. Pour tout entier k, on définit son twist k' de la façon suivante : si $k = as + b$ est la division euclidienne de k par s, alors $k' = bs + a$. Pour un entier strictement positif n, on définit (d_i) par $d_1 = n$ et d_{i+1} est le twist de d_i pour tout $i \geqslant 1$.

Montrer que la suite contient 1 si et seulement si le reste de la division de n par $s^2 - 1$ est 1 ou s.

Exercice 13
(IMO SL 2006 N3) On définit pour tout entier n strictement positif $f(n)$ par

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor \right)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

(a) Montrer que $f(n+1) > f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

(a) Montrer que $f(n+1) < f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

Exercice 14
(China TST 2021) Soit f et g deux polynomes à coefficients entiers. On sait que pour une infinité de nombres premiers p, il existe un entier m_p tel que pour tout entier a, $f(a)$ est congru à $g(a+m_p)$ modulo p. Montrer qu'il existe un rationnel r tel que $f(x) = g(x+r)$.

Solutions

Exercice 1
Rémi écrit n entiers strictement positifs $a_1, ..., a_n$ au tableau. Toutes les minutes, Rémi peut remplacer un entier a écrit au tableau par N/a, où N désigne le ppcm des entiers écrits au tableau. Montrer que Rémi peut faire en sorte que tous les nombres écrits au tableau soient des 1 après un nombre fini d'opérations.

Solution de l'exercice 1
Notons N_k le ppcm des entiers écrits au tableau après k étapes. Soient $a_{1,k}, ..., a_{n,k}$ sont les entiers écrits après k étapes. Montrons qu'on peut faire diminuer strictement N_k au bout d'un nombre fini d'étapes. Pour ce faire, on prend p le plus grand facteur premier de N_k et on fait des opérations sur tous les $a_{i,k}$ vérifiant $v_p(a_{i,k}) = v_p(N_k) = \max\{v_p(a_{j,k}), 1 \leqslant j \leqslant n\}$. Après ces opérations, on aura diminué strictement la valuation p-adique de N_k et diminué (pas forcément strictement) les autres valuations $q-$adiques. Donc on peut faire décroître strictement N_k en un nombre fini d'opérations, et on peut donc obtenir $N_k = 1$ au bout d'un nombre fini d'opérations, ce qui est la propriété attendue.

Exercice 2
Soit p un nombre premier. Montrer qu'il existe une permutation $a_1, \dots, a_{p-1}$ de $1, \dots, p-1$ telle que les nombres $a_1, a_1a_2, \dots, a_1a_2 \dots a_{p-1}$ donnent $p-1$ restes distincts modulo p.

Solution de l'exercice 2
On peut être très optimiste sur cet exercice et vouloir que $a_1a_2 \cdots a_k \equiv k \mod p$ pour tout k compris entre 1 et p. Il faut donc que $a_1 = 1$ et pour tout $k \neq 1$:

$$a_k \equiv \frac{a_1 \cdots a_k}{a_1 \cdots a_{k-1}} \equiv \frac{k}{k-1} \mod p$$

où l'on note $\dfrac{a}{b}$ tout nombre entier dont le reste c par la division euclidienne par p vérifie $cb \equiv a \mod p$, qui existe toujours dès que b est non nul. Ainsi, pour $k \neq 1$, on peut poser a_k l'élément de $\{1, \dots, p\}$ vérifiant $(k-1)a_k \equiv k \mod p$.

Il reste juste à vérifier que tous les nombres a_k que l'on a formés sont bien deux à deux distincts, et ainsi que $\{a_1, \dots, a_p\}$ est bien une permutation de $\{1, \dots, p\}$. Supposons qu'il existe $i < j$ tels que $a_i \equiv a_j$. Si $i = 1$, pour tout $j \geq 2$, $\frac{j}{j-1} \neq 1 \mod p$. Sinon $\frac{i}{i-1} \equiv \frac{j}{j-1}$ implique que $ij - j \equiv ij - i$, soit $i \equiv j \mod p$, ce qui est en contradiction avec notre hypothèse de départ.
Ainsi tous les a_k sont différents modulo p. Etant donné qu'il y a p termes dans la suite et p éléments dans $\{1, 2, \cdots, p\}$, $(a_1, a_2, \cdots, a_p)$ est une permutation de $(1, 2, \cdots p)$.

Exercice 3
Soit p un nombre premier et $a_1, \ldots, a_p, b_1, \ldots, b_p$ des entiers de $\{1, \ldots, p-1\}$. Montrer qu'il existe deux indices $i \neq j$ tels que $a_i b_j - a_j b_i$ est divisible par p.

Solution de l'exercice 3
Deux indices $i \neq j$ satisfaisant l'énoncé vérifient, étant donné que b_i et b_j sont inversibles modulo p,

$$0 \equiv a_i b_j - a_j b_i \equiv b_i b_j (a_i b_i^{-1} - a_j b_j^{-1}) \mod p$$

et donc

$$0 \equiv a_i b_i^{-1} - a_j b_j^{-1} \mod p.$$

On a de fait "découplé" la condition. Les p nombres $\overline{a_i b_i^{-1}}$ sont à valeur dans $\{1, \ldots, p-1\}$. D'après le principe des tiroirs, il existe deux indices i et j distincts tels que $a_i b_i^{-1} \equiv a_j b_j^{-1} \mod p$ et ainsi

$$a_i b_j - a_j b_i \equiv b_i b_j (a_i b_i^{-1} - a_j b_j^{-1}) \equiv 0 \mod p$$

comme voulu.

Exercice 4
(IMO 2023 P1) Déterminer tous les entiers strictement positifs n composés avec la propriété suivante : si $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_k = n$ sont les diviseurs de n, alors $d_i \mid d_{i+1} + d_{i+2}$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Solution de l'exercice 4
Montrons qu'il s'agit des puissances de nombres premiers. On vérifie tout d'abord que ces entiers sont bien solutions du problème. En effet, si $n = p^k$ avec p un nombre premier et $r \geqslant 2$, on a $d_i = p^i$ pour $1 \leqslant i \leqslant k$. On vérifie que si $i \leqslant k-2$,

$$d_i = p^i \mid p^{i+1} + p^{i+2} = d_{i+1} + d_{i+2}.$$

Montrons à présent qu'il s'agit des seules solutions. L'idée est que si d_i, d_{i+1} et d_{i+2} sont trois diviseurs consécutifs de n, $n/d_{i+2}, n/d_{i+1}$ et n/d_i le sont également.

On observe que $d_{k-2} \mid d_{k-1} + d_k - n = d_{k-1}$ donc $d_{k-2} \mid d_{k-1}$. Ainsi, $d_2 = n/d_{k-1} \mid n/d_{k-2} = d_3$. A partir de là, on peut montrer de proche en proche que $d_2 midd_i$ pour tout i, ce que nous faisons ci après par récurrence double.

Initialisation : Celle-ci a déjà été faite au paragraphe précédent, puisqu'on a montré que $d_2 \mid d_3$ et qu'on a déjà que $d_2 \mid d_2$.

Hérédité : Supposons que $d_2 \mid d_{i-1}$ et d_i pour un certain $i \geqslant 3$. D'après la condition de l'énoncé,

$$d_2 \mid d_{i-1} \mid d_i + d_{i+1}.$$

Mais alors puisque $d_2 \mid d_i$, $d_2 \mid d_i + d_{i+1} - d_i = d_{i+1}$. Ceci achève la réccurence.

On conclut que d_2, correspondant au plus petit facteur premier de n, divise tous les diviseurs de n. Ainsi, n ne peut avoir d'autres facteurs premiers que d_2, sinon ceux-ci seraient divisibles par d_2, ce qui est absurde. Ainsi, n est une puissance de d_2.

Exercice 5
(IMO 2017 P1) Pour tout entier $a_0 > 1$, on définit la suite $a_0, a_1, \dots$ par

$$a_{n+1} = \begin{cases} \sqrt{a_n} & \text{si } a_n \text{ est un carré parfait} \\ a_n + 3 & \text{sinon} \end{cases}$$

Déterminer toutes les valeurs de a_0 pour lesquelles il existe un nombre A tel que $a_n = A$ pour une infinité de valeurs de n.

Solution de l'exercice 5
On regarde les valeurs de la suite pour les petites valeurs de a_0 pour deviner la réponse.

On remarque alors par exemple que si $a_0 \equiv 2 \mod 3$, alors a_0 n'est pas un carré parfait, donc $a_1 = a_0 + 3 \equiv 2 \mod 3$. On déduit que a_1 n'est pas un carré parfait non plus. Un récurrence immédiate nous donne alors que $a_{n+1} = a_n + 3$ pour tout entier n, de sorte que la suite est strictement croissante, elle ne peut donc pas prendre une même valeur une infinité de fois.

Si $a_0 \equiv 0 \mod 3$**,** on remarque après quelques essais que la suite finit par "boucler" et prendre consécutivement les valeurs $3, 6$ et 9 à partir d'un certain rang. Montrons-le.

Soit j tel que a_j est le minimum de l'ensemble des valeurs prises par la suite (a_n). Supposons que $a_j > 9$. Soit k tel que $[3(k-1)]^2 < a_j \leqslant (3k)^2$. On a alors $k \geqslant 2$. La suite $(a_{j+n})_n$ parcourt tous les multiples de 3 jusqu'à atteindre $9k^2$, disons au rang N. On a alors, puisque $k \geqslant 2$,

$$a_{n+1} = 3k < 9(k-1)^2 < a_j$$

ce qui contredit la minimalité de a_j. On déduit que $a_j \leqslant 9$. Mais alors $a_j \in \{0, 3, 6, 9\}$. Dans chaque cas, la suite (a_{j+n}) est périodique à partir du rang j, de sorte qu'elle vérifie la propriété de l'énoncé.

Si $a_0 \equiv 1 \mod 3$ **:** Montrons qu'il existe un terme de la suite congru à 2 modulo 3. C'est le cas si $a_0 = 4$ ou 7. Supposons que $a_0 \geqslant 10$ et prenons à nouveau j tel que a_j est le minimum de la suite (a_n). Supposons que $a_j \geqslant 10$. Prenons t^2 le plus petit carré supérieur ou égal à a_j. Alors la suite (a_{j+n}) prend l'une des valeurs $t^2, (t+1)^2, (t+2)^2$, disons au rang N. Mais alors

$$a_{N+1} \leqslant t + 2 \leqslant (t-1)^2 < a_j$$

ce qui contredit la minimalité de a_j. Ainsi, $a_j \leqslant 7$, ce qui nous ramène aux cas traités. Comme la suite prend une valeur congrue à 2 mod 3, elle est strictement croissante à partir d'un certain rang et ne vérifie pas la propriété de l'énoncé.

Les valeurs recherchées sont donc les multiples de 3.

Exercice 6
(Olympiade Francophone 2020) Soit $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $a_1, a_2, a_3, \dots$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$ et soit m un entier. On suppose que pour tout sous-ensemble fini non vide S de $\mathbb{N}_{\geqslant 1}$, le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier.

Montrer que parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, seul un nombre fini possède moins de m facteurs premiers distincts.

Solution de l'exercice 6
Nous allons montrer qu'étant donné un nombre premier p, il existe un entier $N \geqslant 1$ tel que p divise tous les termes a_k pour $k \geqslant N$, ce qui nous donnera le résultat voulu.

On suppose par l'absurde qu'il existe une infinité d'entiers a_k qui ne sont pas divisibles par p. Alors d'après le principe des tiroirs, il en existe une infinité qui possède le même reste modulo p. On dispose donc de $p-1$ indices $i_1, \ldots i_{p-1}$ tels que $a_{i_1}, \ldots a_{i_{p-1}}$ possède le même reste modulo p, on note a ce reste. Puisqu'on en dispose d'une infinité, on peut choisir $a_{i_{p-1}}$ supérieur strictement à p. En prenant $S = \{i_1, \ldots, i_{p-1}\}$, on obtient que le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier. Or d'après notre choix de $a_{i_{p-1}}$, ce nombre est strictement supérieur à p et d'après le théorème de Fermat :

$$\prod_{k \in S} a_k \equiv a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

donc le nombre $-1 + \prod_{k \in S} a_k$ est divisible par p. Comme il est strictement plus grand que p, ce n'est pas un nombre premier ce qui donne la contradiction.

Exercice 7
(IMO 2016 P4) Un ensemble d'entier naturels est dit *parfumé* s'il contient au moins deux éléments et si chacun de ses éléments possède un facteur premier en commun avec au moins l'un des autres éléments. Soit $P(n) = n^2 + n + 1$. Déterminer le plus petit entier strictement positif b pour lequel il existe un entier positif a tel que l'ensemble

$$\{P(a+1), P(a+2), \ldots, P(a+b)\}$$

soit parfumé

Solution de l'exercice 7
Réponse : $b = 6$.

Commençons par regarder les facteurs premiers communs aux nombres $P(n)$ et $P(n+k)$ pour des petites valeurs de k.

Pour $k = 1$: Soit d un diviseur premier de $P(n)$ et de $P(n+1)$. Alors $d \mid P(n+1) - P(n) = 2n+2$ donc d divise $2P(n) - n(2n+2) = 2$. Mais $P(n)$ est impair n car $2 \mid n(n+1)$. Donc $d = 1$ et $P(n)$ et $P(n+1)$ sont premiers entre eux.

Pour $k = 2$: De la même façon que précédemment, on trouve que si d est un diviseur de $P(n)$ et de $P(n+2)$, alors $d \mid P(n+2) - P(n) = 4n+6$. Comme $P(n)$ est impair, d divise même $2n+3$. Donc $d \mid n(2n+3) - 2P(n) = n-2$. Donc $d \mid 2n+3-2(n-2) = 7$. Ainsi $PGCD(P(n), P(n+2)) \in \{1, 7\}$. Notons que si $PGCD(P(n), P(n+2)) = 7$, alors 7 divise $n-2$ par nos calculs précédents. Réciproquement, si $n \equiv 2 \mod 7$, alors $PGCD(P(n), P(n+2)) = 7$.

Pour $k = 3$: Cette fois-ci, si d divise $P(n)$ et $P(n+3)$, alors $d \mid P(n+3) - P(n) = 6n + 12$, de sorte que $d \mid 3n+6$. Ensuite, $d \mid 3P(n) - n(3n+6) = 3 - 3n$. Ainsi, $d \mid 9$. Donc

$PGCD(P(n), P(n+3)) \in \{1, 3, 9\}$. On vérifie alors que si $n \equiv 0, 2 \mod 3$, alors 3 ne divise pas $P(n)$ donc $PGCD(P(n), P(n+3)) = 1$ et si $n \equiv 1 \mod 3$, alors $3 \mid PGCD(P(n), P(n+3))$.

Soit b tel qu'il existe a tel que $\{P(a), \ldots, P(a+b)\}$, soit parfumé. Notons que $P(a)$ et $P(a+1)$ sont premiers entre eux, de même que $P(a+1)$ et $P(a+2)$, donc $b \geqslant 3$ (si $b = 3$, alors $P(a+1)$ n'a de facteur commun ni avec $P(a)$ si avec $P(a+2)$). Si $b = 3$, $P(a+1)$ ne peut avoir de facteur commun qu'avec $P(a+3)$. On a vu plus haut que ce seul facteur possible est 7, ce qui force $a+1 \equiv 2 \mod 7$. De même, $P(a+2)$ ne peut avoir de facteur commun qu'avec $P(a)$, donc $a \equiv 2 \mod 7$. Les deux congruences ne peuvent être satisfaites en même temps. Donc $b \geqslant 4$.

Si $b = 4$, $P(a+2)$ ne peut avoir de facteur commun qu'avec $P(a)$ et $P(a+4)$, ce qui implique là aussi que $a \equiv 2 \mod 7$ et $a+2 \equiv 2 \mod 7$, ce qui est absurde. Donc $b \geqslant 5$.

Réciproquement, exhibons un a tel que $\{P(a), \ldots, P(a+5)\}$ est parfumé. La raisonnement précédent peut nous convaincre qu'il faut chercher un facteur commun à $P(n)$ et $P(n+4)$.

Si $k = 4$: Soit d divisant $P(n)$ et $P(n+4)$. Alors $d \mid P(n+4) - P(n) = 8n + 20$, soit $d \mid 2n+5$. Donc $d \mid n(2n+5) - 2P(n) = 3n - 2$. Donc $d \mid 3(2n+5) - 2(3n-2) = 19$. Ainsi, $PGCD(P(n), P(n+4)) \in \{1, 19\}$. De plus, si $PGCD(P(n), P(n+4)) = 19$, $19 \mid 3n - 2$, ce qui a lieu si et seulement si $n \equiv 7 \mod 19$.

Cherchons alors a tel que $PGCD(P(a), P(a+4)) > 1$, $PGCD(P(a+1), P(a+3)) > 1$ et $PGCD(P(a+2), P(a+5) > 1$, de sorte que l'ensemble $\{P(a), \ldots, P(a+5)\}$ est parfumé. D'après les calculs ci-dessus, cela exige que

$$a \equiv 7 \mod 19\,, \quad a+1 \equiv 2 \mod 7 \quad a+2 \equiv 1 \mod 3.$$

Ce système admet une solution d'après le théorème des restes chinois, ce qui garantit l'existence d'un entier a tel que l'ensemble $\{P(a), \ldots, P(a+5)\}$ est parfumé et conclut que le plus petit entier est $b = 5$.

Il est facile de montrer que $PGCD(P(n), P(n+1))|1$, $PGCD(P(n), P(n+2))|7$, $PGCD(P(n), P(n+3))|3$, $PGCD(P(n), P(n+4))|19$.

Si $b \leqslant 5$, Il est facile de voir avec ce qui précède que l'on obtient une contradiction.

Pour $b = 6$, on résoud le système modulaire par le théorème des restes chinois et on obtient $a = 196$.

Exercice 8

(IMO SL 2007 N2) Soient $b, n > 1$ des entiers. Supposons que pour tout $k > 1$, il existe un entier a_k tel que k divise $b - a_k^n$. Montrer qu'il existe A un entier tel que $b = A^n$.

Solution de l'exercice 8

Pour montrer que b est une puissance $n-$ème, on montre que pour tout nombre premier p, n divise $v_p(b)$. On fixe donc un nombre premier p et on pose $a = v_p(b)$.

On teste l'hypothèse de l'énoncé pour des valeurs particulières et intelligentes de k.

Pour $k = p$, on obtient qu'il existe une entier a_p tel que p divise $b - a_k^n$. Malheureusement, on ne peut rien conclure de cette substitution.

On teste alors pour $k = p^a$, ce qui ne nous apporte pas d'informations non plus.

Pour $k = p^{a+1}$, il existe un entier $a_{p^{a+1}}$ tel que p^{a+1} divise $b - a_{p^{a+1}}^n$. On déduit que

$$b \equiv a_{p^{a+1}}^n \mod p^{a+1}$$

Or p^a divise b donc $a^n_{p^{a+1}}$ est divisble par p^a mais pas par p^{a+1}. Comme $a^n_{p^{a+1}}$ est une puissance $n-$ème, cela implique que p^a soit aussi une puissance $n-$ ème donc n divise a, ce que l'on désirait.

Exercice 9
(IMO SL 2009 N2) Un entier strictement positif N est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ sont jolis.

b) Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$

Solution de l'exercice 9
a) On désire trouver des entiers a et b tels que le nombre de facteurs premiers des entiers $x + a$ et $x + b$ ont la même parité. Cela revient à trouver deux suites de 50 entiers consécutifs $a + 1, \ldots, a + 50$ et $b + 1, \ldots, b + 50$ tels que le nombre de facteurs premiers de $a + 1$ et $b + 1$ aient la même parité, le nombre de facteurs premiers de $a + 2$ et $b + 2$ aient la même parité, etc...

Si on pose $f(x) = 0$ si le nombre de facteurs premiers de x est pair et $f(x) = 1$ s'il est impair, on constate qu'il n'y a que 2^50 suites de 0 ou 1 possibles pour la suite $f(a+1), \ldots, f(a+50)$.

Ainsi, parmi les suites $(f(1), \ldots, f(50))$; $(f(51), \ldots, f(100))$; . . . ; $(f(2^{50}+1), \ldots f(2^{50}+50))$, il y a deux suites égales. On dispose donc de deux entiers a et b tels que $(f(a+1), \ldots f(a+50))$ et $(f(b + 1), \ldots, f(b + 50))$ soient égales. Les entiers a et b conviennent donc.

b) On peut se convaincre, à la lumière de la question précédente, que la fonction $f(x)$ introduite à la question précédente n'est as périodique à partir d'un certain rang et donc que les entiers a et b ne peuvent pas être distincts, mais on propose un raisonnement rigoureux :

On suppose par l'absurde que $a \neq b$. On observe que $P(k(b - a) - a) = k(k + 1)(b - a)^2$ pour k un entier suffisamment grand pour que $k(b-a)-a$ soit strictement positif. Le nombre $P(k(b - a) - a)$ admet cond un nombre pair de facteurs premiers si et seulement si $k(k + 1)$ admet un nombre pair de facteurs premiers. Comme par l'absurde c'est le cas pour tout entier k suffisamment grand, cela implique que $f(k) = f(k + 1)$ pour tout entier k suffisamment grand et donc que la fonction f soit constante à partir d'un certain rang. Mais pour tout nombre premier p, $f(p) = 1$ et pour tout entier k, $f(k^2) = 0$. La fonction n'est donc pas constante donc on a obtenu la contradiction désirée.

Exercice 10
(IMO SL 2011 N2) Soit $P(x) = (x+d_1)(x+d_2)\cdot\ldots\cdot(x+d_9)$ avec $d_1, \ldots, d_9$ des entiers distincts. Montrer qu'il existe N un entier tel que pour tous les entiers $x \geqslant N$ le nombre $P(x)$ est divisible par un nombre premier plus grand que 20.

Solution de l'exercice 10
L'idée est de remarquer qu'il y a 8 nombres premiers inférieurs ou égaux à 20 et d'appliquer le principe des tiroirs puisque qu'il y a 9 facteurs.

Pour deviner l'entier N à choisir, on commence naïvement par procéder par l'absurde : On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ n'admet que des facteurs premiers inférieurs ou égaux à 20. Pour un tel entier n, on dispose donc de deux indices i et j et d'un nombre premier p parmi les nombres $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, 19$ tels que p divise $n + d_i$ et $n + d_j$. Ainsi, p divise $d_i - d_j$.

A partir de cette remarque, on propose la preuve suivante.

On suppose par l'absurde que l'on dispose d'une suite (x_n) d'entiers strictement positifs tels que les nombres $P(x_n)$ n'admettent pas de facteurs premiers strictement supérieurs à 20.

La suite $(x_n + d_1)_n$ n'est pas bornée, on dipose donc d'un nombre premier $p_1 < 20$ tel que la suite $(v_{p_1}(x_n + d_1))_n$ ne soit pas bornée non plus. Quitte à extraire une sous-suite y_n de la suite x_n telle que la suite $(v_{p_1}(y_n + d_1))_n$ tende vers $+\infty$, on peut supposer que la suite (x_n) satisfait déjà cette propriété.

A nouveau, quitte à extraire de la suite (x_n), on peut supposer que l'on dispose de nombres premiers $p_2, \ldots p_9$ tels que la suite $(v_{p_i}(x_n + d_i))_n$ tende vers $+\infty$ pour tout entier i.

D'après le principe des tiroirs, on dispose de deux indices i et j tels que $p_i = p_j$, que l'on note désormais p. Ainsi, les suites $(v_p(x_n + d_i))_n$ et $(v_p(x_n + d_j))_n$ tendent toutes les deux vers $+\infty$. En particulier, on dispose d'un entier N tel que $v_p(x_n + d_i) > v_p(d_i - d_j)$ et $v_p(x_n + d_j) > v_p(d_i - d_j)$. Ceci constitue la contradiction désirée puisque si p^k divise $x_n + d_j$ et $x_n + d_i$, il divise également $d_i - d_j$ pour tout entier k.

Exercice 11
(USAMO 2021 P4) Un ensemble fini S d'entiers strictement positifs possède la propriété que pour tout entier $s \in S$ et tout diviseur d de s, il existe un unique élément t de S tel que $\gcd(s,t) = d$. Déterminer toutes les valeurs que peut prendre $|S|$.

Solution de l'exercice 11
Réponse : les puissances de 2.

On suppose que S est non vide et contient au moins deux éléments.

Notons que 1 n'est pas dans S car il est premier avec tous les autres nombres de S (y compris lui-même), donc on n'a pas unicité du t tel que $\gcd(1,t) = 1$.

Ensuite, on remarque que $|S| \geqslant d(a)$ pour tout a, puisque pour chaque diviseur de a, on peut associer de façon injective un élément t de S. Si $|S| > d(a)$, par principe des tirois on a deux éléments t et s vérifiant $\gcd(s,a) = \gcd(t,a)$. Donc $|S| = d(a)$ pour tout a.

Soit p diviseur premier de a et $\beta = v_p(a)$. La condition implique alors qu'il y a exactement $d(a/p^\beta)$ éléments de S non divisibles par p. Comme $\dfrac{d(a/p^\beta)}{d(a)} = \dfrac{1}{\beta+1}$, inversement, exactement $\beta/(\beta+1)$ des éléments de S sont divisibles par p. Comme on doit pouvoir mettre par pair les éléments premiers entre eux, on a $\beta/(\beta+1) \leqslant 1/2$, donc $\beta \leqslant 1$. On déduit que $\beta = 1$. Ainsi, a est un produit de nombres premiers distincts et $d(a) = 2^k$.

Réciproquement, si $|S| = 2^k$, on prend $a_1, \dots, a_k$ des nombres premiers, et $b_1 \dots, b_k$ d'autres nombres premiers distincts et on vérifie que l'ensemble $S = \{\prod_{i\in I} a_i \prod_{i \in J} b_j, I \sqcup J = \{1, \dots, n\}\}$ satisfait les conditions de l'énoncé.

Exercice 12
(EGMO 2023 P5) Soit $s \geqslant 2$ un entier. Pour tout entier k, on définit son twist k' de la façon suivante : si $k = as + b$ est la division euclidienne de k par s, alors $k' = bs + a$. Pour un entier strictement positif n, on définit (d_i) par $d_1 = n$ et d_{i+1} est le twist de d_i pour tout $i \geqslant 1$.

Montrer que la suite contient 1 si et seulement si le reste de la division de n par $s^2 - 1$ est 1 ou s.

Solution de l'exercice 12
La forme de l'énoncé pousse à regarder l'opération du twist modulo s^2-1. Notons que $s^{-1} \equiv s \mod s^2 - 1$ puisque $s^2 \equiv 1 \mod s^2 - 1$. En particulier

$$bs + a \equiv s^{-1}(b + as) \equiv s(as + b) \mod s^2 - 1.$$

Ainsi, on a $d_{i+1} \equiv sd_i \mod s^2 - 1$. Encore mieux, $d_{i+2} \equiv s^2 d_i \equiv d_i \mod s^2 - 1$. Ainsi, la suite (d_i) prend uniquement deux valeurs modulo $s^2 - 1$, à savoir d_1 et sd_1. En particulier, si il existe un rang d_j tel que $d_j = 1$, alors $1 \equiv d_1$ ou $1 \equiv sd_1$. Ceci impose que $d_1 \equiv 1$ ou $d_1 \equiv s$.

Réciproquement, si $n \equiv 1$ ou $n \equiv s \mod s^2 - 1$, montrons que 1 appartient à la suite. L'opération *twist* semble faire décroître la suite (puisque $b \leqslant s - 1$), essayons de rendre cette intuition rigoureuse.

Cas 1 : Si $d_i \geqslant s^2$, alors $d_{i+1} < d_i$. En effet, posons $d_i = as + b$ avec $b \leqslant s - 1$. Puisque $d_i \geqslant s^2$, on a $a \geqslant s$. Mais alors on vérifie que

$$d_{i+1} = bs + a \leqslant (s-1)s + a \leqslant as \leqslant as + b = d_i.$$

La première inégalité est une égalité lorsque $b = s - 1$, et la dernière lorsque $b = 0$. Ces deux conditions sont incompatibles, on a donc $d_{i+1} < d_i$.

Cas 2 : Si $d_i < s^2$, alors $d_{i+1} < s^2$ et $d_{i+2} = d_i$. En effet, écrivons $d_i = as + b$, avec $b \leqslant s - 1$. COmme $d_i < s^2$, $a \leqslant s - 1$. Ainsi, $d_{i+1} = bs + a \leqslant (s - 1)s + (s - 1) < s^2$. On a de même $d_{i+2} \leqslant s^2 - 1$. Comme $d_{i+2} \equiv d_i \mod s^2 - 1$ et que $1 \leqslant d_i, d_{i+2} \leqslant s^2 - 1$, on a $d_i = d_{i+2}$.

De ces deux cas on déduit que la suite (d_i) est périodique de période 2 à partir d'un certain rang N, prenant alternativement les valeurs d_N et sd_N modulo $s^2 - 1$. Si $n \equiv 1, s \mod s^2 - 1$, alors d_N ou sd_N vaut n modulo $s^2 - 1$. On déduit que d_N ou d_{N+1} vaut 1 modulo $s^2 - 1$. Comme d_N et d_{N+1} sont compris dans $\{1, \ldots, s^2 - 1\}$, d_N ou d_{N+1} vaut 1.

Exercice 13
(IMO SL 2006 N3) On définit pour tout entier n strictement positif $f(n)$ par

$$\frac{1}{n} \cdot \left(\lfloor \frac{n}{1} \rfloor + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor + \ldots + \lfloor \frac{n}{n} \rfloor \right)$$

où $\lfloor x \rfloor$ est la partie entière de x.

(a) Montrer que $f(n+1) > f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

(a) Montrer que $f(n+1) < f(n)$ pour une infinité d'entiers n.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>
L'énoncé nous invite à étudier $f(n+1) - f(n)$. Etant donné que les facteurs $\frac{1}{n}$ et $\frac{1}{n+1}$ sont génants et au fond ne sont pas vraiment différents, on se contente de noter $f(n) = \frac{1}{n} S_n$ et de regarder $S_{n+1} - S_n$.

$$S_{n+1} - S_n = \lfloor \frac{n+1}{n+1} \rfloor + \sum_{i=1}^{n} \left(\lfloor \frac{n+1}{i} \rfloor - \lfloor \frac{n}{i} \rfloor \right) = 1 + \sum_{i=1}^{n} 1_{i|n+1} = \sum_{i=1}^{n} 1_{i|n+1} = d(n+1)$$

avec $d(n)$ le nombre de diviseurs de n. On déduit par récurrence immédiate que $S_n = d(1) + \ldots + d(n)$. Ainsi, $f(n) = \frac{d(1)+\ldots+d(n)}{n}$. Ainsi :

$$nS_{n+1} - (n+1)S_n = n(d(1)+\ldots+d(n)+d(n+1)) - (n+1)(d(1)+\ldots+d(n)) = (n+1)d(n+1) - d(1) - \ldots - d(n)$$

On résoud à présent l'exercice.

1) On cherche des entiers n tels que $(n+1)d(n+1) - d(1) - \ldots - d(n) > 0$. Pour cela, il suffit de choisir un entier n tel que pour tout $i \leqslant n$, $d(n+1) \geqslant d(i)$. Pour cela, notons que la fonction $d(n)$ est non bornée. En particulier, pour tout entier N, on dispose d'un entier $k \leqslant N$ tel que pour tout $i \leqslant k$, $d(i) \leqslant d(k)$. L'entier k convient donc. Pour en construire un nouveau, on utilise le fait que la fonction $d(n)$ est non bornée pour produire un entier M tel que $d(M) > d(k)$. Alors on dispose d'un entier $k' > k$ tel que pour tout entier $i \leqslant k'$, $d(i) < d(k')$ et on a trouvé un nouvel entier qui convient. On en dispose donc d'une infinité.

2) On cherche des entiers $n+1$ tels que $(n+1)d(n+1) - d(1) - \ldots - d(n) > 0$. Pour cela, on intuite que l'on doit choisir des entiers n avec peu de diviseurs. Les nombres premiers semblents de bons candidats. Pour tout nombre premier $p > 7$, on a d'une part $d(p) = 1$ et d'autre part

$$d(1)+d(2)+d(3)+d(4)+d(5)+d(6)+\ldots+d(p-1) \geqslant 1+1+1+2+1+2+\ldots+1 = p+1 > pd(p)$$

On en déduit que les nombres premiers satisfont la propriété.

Exercice 14
Soit f et g deux polynomes à coefficients entiers. On sait que pour une infinité de nombres premiers p, il existe un entier m_p tel que pour tout entier a, $f(a)$ est congru à $g(a+m_p)$ modulo p. Montrer qu'il existe un rationnel r tel que $f(x) = g(x+r)$.

Solution de l'exercice 14
On considère le polynome en X, à coefficient polynomiaux en Y défini par $P(Y)(X) = g(X+Y) - f(X)$. On prend p premier très grand. Il existe un m_p tel que $P(m_p)(X)$ à p racines dans F_p et donc, comme pour p suffisamment grand, le degré de $P(m_p)(X)$ est plus petit que p, $P(m_p)(X)$ est identiquement nul. cela prouve déjà que $deg(f) = deg(g)$.

On s'intéresse au coefficient suivant de $P(Y)(X)$ (celui devant $X^{\deg(g)-1}$).

Il s'écrit $aY+b$. Posons $r = -\frac{b}{a}$. Alors, m_p est congru à r modulo p pour tout p suffisamment grand. Ainsi, $g(x+r) - f(x)$ est un polynome nul modulo tout p suffisamment grand. Il est donc globalement nul.

2 Entraînement de mi-parcours

Exercice 1
On écrit les nombres de 1 à $n \geq 2$ dans un certain ordre autour d'un cercle. Ensuite, pour chaque paire de points adjacents a et b, on calcule $|a-b|$, et on note S la somme de ces nombres. Trouver la valeur minimale de S en fonction de n.

Exercice 2
Pour un entier $n \geq 1$, on note $f(n)$ le plus petit entier $m \geq 1$ tel que n divise la somme $1+2+\ldots+m$. Trouver tous les n tels que $f(n)=n-1$.

Exercice 3
Soit $k \geqslant 2$. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^\star \to \mathbb{N}^\star$ telles que pour tous entiers strictements positifs $x_1, ..., x_k$, on ait

$$x_1! + ... + x_k! \mid f(x_1)! + ... + f(x_k)!$$

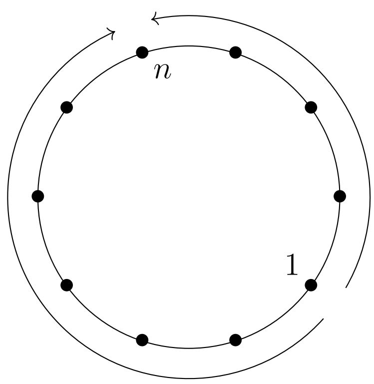
Exercice 4
Soit G un graphe. On colorie chaque sommet de G de manière à ce que pour chaque arête, les deux extrémités soient de couleurs différentes. On suppose avoir fait ce coloriage de manière à utiliser le moins de couleurs possible, et on note χ ce nombre minimal de couleurs. Montrer qu'il existe un chemin de χ sommets dans G dont les couleurs sont deux-à-deux distinctes.

Solution de l'exercice 1
Commençons par mettre les nombres de 1 à n dans l'ordre autour du cercle. Alors parmi les n paires de points consécutifs, il y en a $n-1$ qui contribuent 1 à la somme S, et une qui contribue $|n-1| = n-1$ à S, et ainsi on obtient une somme de $2(n-1)$ pour S.

Montrons maintenant que $2(n-1)$ est minimal. Considérons une configuration quelconque des nombres $1, \ldots, n$ autour du cercle. Alors on regarde où sont placés les nombres 1 et n, et on considère séparément chacun des deux arcs de cercles entre 1 et n. Sur un de ces arcs de cercle, notons $1 = a_1, a_2, \ldots, a_k = n$ les nombres dans le sens de parcours de 1 à n. Alors la contribution de cet arc de cercle à S est de

$$|a_1 - a_2| + |a_2 - a_3| + \ldots + |a_{k-1} + a_k| \geq |a_k - a_1| = n-1.$$

Comme il y a deux tels arcs de cercle, on aboutit à $S \geq 2(n-1)$, et donc $2(n-1)$ est bien le minimum voulu.



Solution de l'exercice 2

L'ensemble des n qui satisfait l'énoncé est l'ensemble des puissances de nombres premiers impairs. Tout d'abord, pour qu'un tel n fonctionne, il faut que n divise $1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \frac{(n-1)n}{2}$, ou encore que $\frac{n-1}{2}$ soit entier. Ainsi, n doit nécessairement être impair pour que $f(n) = n - 1$, et si n est impair on a $f(n) \leq n - 1$.

Supposons maintenant que n soit une puissance p^k d'un nombre premier impair p. Alors si $m \leq n - 1$, on a $1 + 2 + \ldots + m = \frac{m(m+1)}{2}$. Si n divise ceci, comme m et $m + 1$ sont premiers entre eux, il faut que $n = p^k$ divise soit m, soit $m + 1$, et donc que $m + 1 \geq n$, ou encore $m \geq n - 1$. Ainsi, dans ce cas, on a $f(n) = n - 1$.

Supposons au contraire que n soit impair, mais ne soit pas une puissance d'un nombre premier. Alors il est possible d'écrire n comme $n = ab$, avec a et b deux entiers strictement supérieurs à 1 et premiers entre eux. On va trouver un m tel que n divise $\frac{m(m+1)}{2}$. Pour ceci, on va chercher à ce que a divise m et b divise $m + 1$, ou encore à ce que

$$\begin{cases} m \equiv 0 \pmod a \\ m \equiv -1 \pmod b \end{cases}.$$

Par le théorème des restes chinois, il existe une unique solution de ce système modulo $ab = n$, et il existe donc un m entre 1 et n tel que ceci soit satisfait. Pour ce choix de m, on a par construction que $n \mid m(m + 1)$, et donc comme n est impair, $n \mid \frac{m(m+1)}{2}$.

Il reste à vérifier que ce m ne vaut ni n, ni $n - 1$. Mais ceci vient du fait que $n \equiv 0 \pmod b$ et $n-1 \equiv -1 \pmod a$, et donc vu le système vérifié par m, ceci implique que m ne peut valoir ni n, ni $n - 1$ (car a et b sont strictement supérieurs à 1). Ainsi, si n n'est pas une puissance d'un nombre premier, on a $f(n) < n - 1$.

On en déduit que les n qui satisfont l'énoncé sont précisément les puissances de nombres premiers impairs (sauf $n = 1$ pour qui $f(1) = 1$).

Solution de l'exercice 3

Réponse : La seule fonction est la fonction identité.

Soit f une solution éventuelle. En prenant $x_1 = \ldots = x_k = x$, la relation donne que $k \cdot x! \mid k \cdot f(x)!$, ce qui implique que $x! \mid f(x)!$. On déduit que $x \leqslant f(x)$ pour tout entier x strictement positif.

Fixons désormais un nombre premier $p > f(1)$, $x_1 = 1, x_2 = p - 1$ et $x_3 = \ldots = x_k = N$ avec $N \geqslant p$. Puisque $f(N) \geqslant N \geqslant p$, $p \mid f(N)!$ et $p \mid N!$. De plus, d'après le théorème de Wilson, $p \mid (p - 1)! + 1$. Ainsi, la relation de l'énoncé implique que

$$p \mid 1 + (p - 1)! + (k - 2)N! \mid f(1)! + f(p - 1)! + (k - 2)f(N)!$$

Comme p divise $f(N)!$, on a $p \mid f(1)! + f(p - 1)!$. Mais $p > f(1)$ donc p ne divise pas $f(1)!$. Donc p ne divise pas non plus $f(p - 1)!$. On a donc $f(p - 1) \leqslant p - 1$ et $f(p - 1) = p - 1$ pour tout entier $p > f(1)$.

Prenons alors n un entier strictement positif et $p > f(1)$ un nombre premier. On pose $x_1 = n, x_2 = \ldots = x_k = p - 1$. La relation de l'énoncé donne

$$n! + (k - 1) \cdot (p - 1)! \mid f(n)! + (k - 1) \cdot f(p - 1)! = f(n)! + (k - 1) \cdot (p - 1)!.$$

Mais alors

$$n! + (k-1)\cdot(p-1)! \mid f(n)! + (k-1)\cdot(p-1)! - (n! + (k-1)\cdot(p-1)!) = f(n)! - n!.$$

Cette relation de divisibilité étant vraie pour tout nombre premier $p > f(1)$, le nombre $f(n)! - n!$ admet une infinité de diviseurs, il est donc nul. On a bien $f(n) = n$ pour tout entier n.

Réciproquement, on vérifie que la fonction f vérifie la relation de récurrence.

Solution de l'exercice 4

Solution 1 Numérotons les couleurs utilisées de 1 à χ. On va en fait montrer le résultat plus fort suivant : il existe un chemin dans G dont les sommets ont les couleurs $1, 2, \ldots, \chi$ dans cet ordre. Pour montrer ceci, on va supposer par l'absurde que aucun tel chemin n'existe et on va modifier les couleurs des sommets du graphe de manière à obtenir un coloriage à $\chi - 1$ couleurs (ce qui contredira la minimalité de χ).

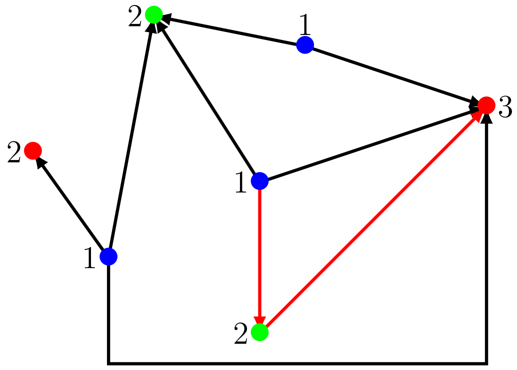
Considérons tous les chemins qui suivent les couleurs dans l'ordre, c'est-à-dire dont les couleurs sont $1, 2, 3, \ldots, i$ pour un certain $i \geq 1$. Par hypothèse, aucun de ces chemins n'atteint la couleur χ. Considérons S l'ensemble des sommets de G qui appartiennent à un tel chemin (notamment, S contient tous les sommets de couleur 1 et aucun des sommets de couleur χ). Considérons alors le coloriage obtenu en augmentant de 1 la couleur de tous les sommets de S. Comme S ne contient pas de sommets de couleur χ, toutes les couleurs restent dans $1, 2, \ldots, \chi$, et comme S contient tous les sommets de couleur 1, la couleur 1 n'apparaît plus dans le nouveau coloriage. Ainsi, le nouveau coloriage possède au plus $\chi - 1$ couleurs. Pour conclure à une absurdité, il suffit alors de montrer que dans ce nouveau coloriage, pour toute arête (uv), les sommets u et v n'ont pas la même couleur.

Prenons donc une telle arête. Si u et v sont tous les deux en dehors de S, leur couleur ne change pas donc le résultat vient de la propriété pour le coloriage initial. De même, si u et v sont tous les deux dans S, leur couleur augmente de 1 chacun, donc elle est égale si et seulement si elle était égale dans le coloriage initial, donc elle est différente par la propriété du coloriage initial. Enfin, supposons que l'un est dans S mais pas l'autre. Supposons que leurs couleurs sont égales dans le nouveau coloriage, disons à une valeur $i + 1$, et sans perte de généralité supposons que u soit dans S et v soit en dehors de S. Alors dans le coloriage initial, u a la couleur i et v a la couleur $i + 1$. Par définition de S, il existe un chemin dont les couleurs sont $1, 2, \ldots, i$ se terminant en u. Mais alors comme u est relié à v qui a une couleur $i+1$, on peut rajouter v au chemin pour obtenir un chemin dont les couleurs sont $1, 2, \ldots, i+1$ dans cet ordre se terminant en v, ce qui contredit le fait que v n'appartienne pas à S.

On a abouti à un coloriage de $\chi - 1$ couleurs et vérifiant la propriété de l'énoncé, ce qui est absurde. Ainsi, il existait bien un chemin passant par les couleurs $1, 2, \ldots, \chi$ dans cet ordre.

Commentaire sur la solution : Expliquons l'intuition derrière cette solution. Une grande difficulté de l'exercice est de penser à non pas chercher un chemin passant une et une seule fois par toutes les couleurs, mais spécifiquement à chercher un chemin passant par les couleurs $1, 2, \ldots, \chi$ dans l'ordre. Une preuve par l'absurde est la plus naturelle, puisque sinon on ne voit pas comment utiliser la minimalité, on suppose donc la non existence du chemin et on cherche à modifier le coloriage afin de perdre une couleur. On cherche un chemin de couleurs $1, 2, \ldots, \chi$ donc il est naturel de partir d'un sommet de couleur 1, puis de suivre les couleurs dans l'ordre $2, 3, \ldots, i$. Si on ne peut plus continuer, alors le sommet de couleur i n'a pas de voisin de couleur $i+1$, et on peut donc augmenter sa couleur de i à $i+1$. On essaye de répéter l'argument, en augmentant petit à petit toutes les couleurs aux bouts de tels chemins pour conclure. Cependant, en faisant ceci, on peut créer des chemins dont les couleurs sont $1, 2, \ldots, \chi$ dans l'ordre, et alors l'hypothèse de non existence de tels chemins n'est plus valide. Pour éviter ceci, à chaque étape, on choisit un sommet de couleur i maximale parmi tous les chemins $1, 2, \ldots, i$ et on augmente sa couleur de 1. De cette manière, on est sûr de ne pas créer de chemin $1, 2, \ldots, \chi$ donc on peut répéter la construction jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de sommet de couleur 1. Cet algorithme fournit précisément la construction explicitée dans la solution précédente.

<u>*Solution 2*</u> Numérotons les couleurs utilisées de 1 à χ (sur la figure, on prendra 1 pour bleu, 2 pour vert et 3 pour rouge). Ensuite, on oriente chaque arête de G de manière à ce que chaque arête soit orientée de sa plus petite extrémité à sa plus grande (les deux extrémités ne peuvent pas avoir la même couleur).



Alors pour chaque sommet x, on considère $N(x)$ la taille maximale d'un chemin orienté arrivant en x (c'est-à-dire un chemin suivant les arêtes dans le bon sens), ce sont les nombres indiqués sur la figure. Remarquons la chose suivante : si x et y sont voisins, alors $N(x) \neq N(y)$. En effet, sans perte de généralité, l'arête (xy) est orientée de x à y, mais alors tout chemin orienté arrivant en x se prolonge en un chemin orienté arrivant en y de longueur strictement supérieure, d'où $N(y) > N(x)$. Ainsi, N est un coloriage du graphe G. Par hypothèse de minimalité de χ, il existe donc un sommet X de couleur $N(X) \geq \chi$. Mais alors il y a un chemin orienté arrivant en X de longueur χ, c'est-à-dire un chemin dans G de taille χ dont les couleurs sont strictement croissantes, et donc ce chemin passe par des couleurs deux-à-deux distinctes, ce qui conclut.

3 Deuxième partie : Algèbre et Géométrie

1 Similitudes (Anna)

Éléments de cours

Une similitude directe de centre O est la composée d'une rotation et d'une homothétie de centre O. Si α est l'angle de la rotation et r est le rapport de l'homothétie, α et r sont appelés respectivement l'angle et le rapport de cette similitude.

Une similitude directe conserve :

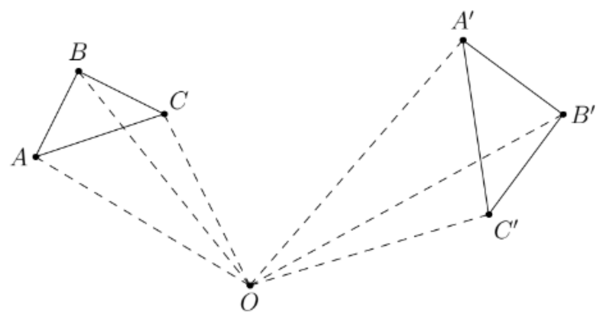
— les rapports de longueurs ;

— les angles orientés ;

— les cercles, droites etc.

Proposition 1.
La composée $\mathcal{S}_1 \circ \mathcal{S}_2$ de deux similitudes directes est une similitude directe. Son rapport est le produit des rapports de $\mathcal{S}_1, \mathcal{S}_2$, et son angle est la somme des angles de $\mathcal{S}_1,\ \mathcal{S}_2$.

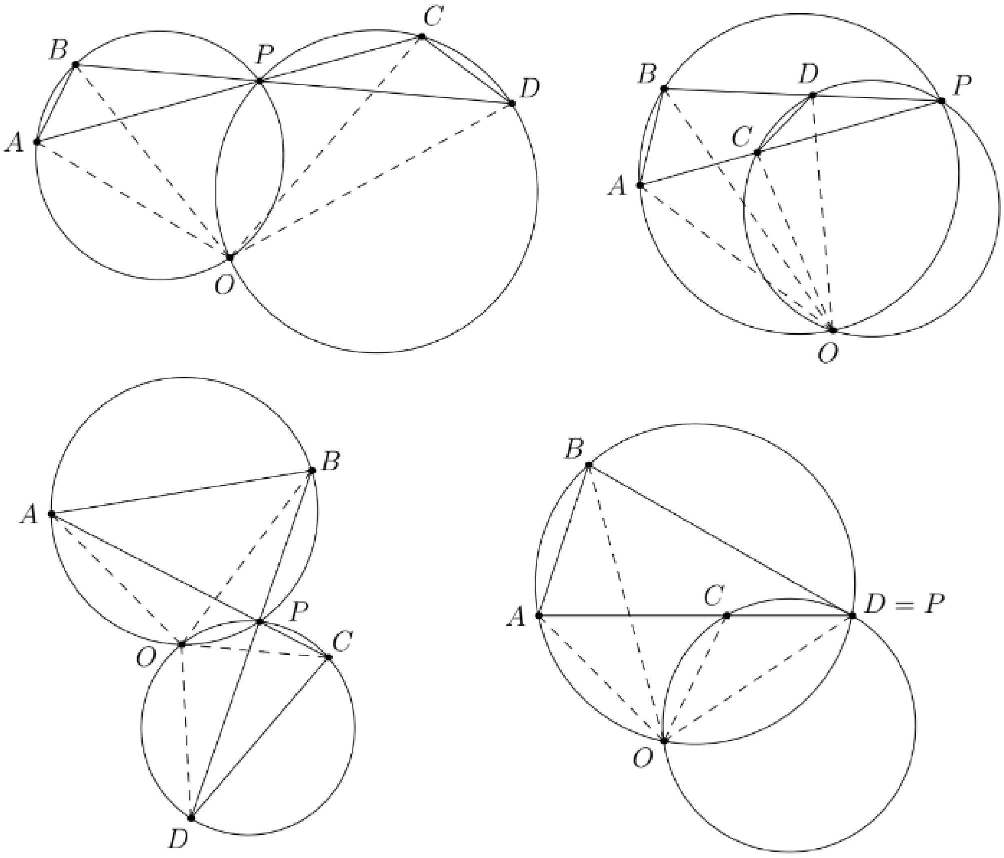
Proposition 2.
Soient A, A', B, B' quatre points tels que $A \neq A', A' \neq B', B' \neq B, B \neq A$. Alors, il existe une unique similitude, disons de centre O, qui envoie A sur A' et B sur B'. De plus, O est aussi le centre de l'unique similitude directe qui envoie A sur B et A' sur B'. Le triangle OAB est semblable au triangle $OA'B'$, le triangle OAA' est semblable au triangle OBB'.



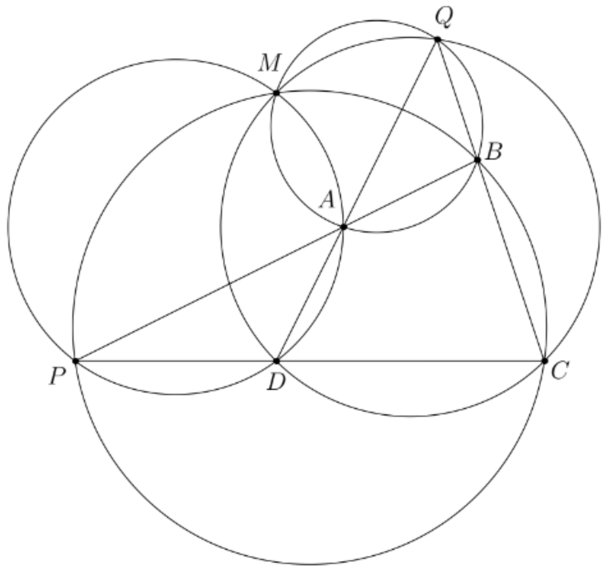
Question. Étant donné quatre points A, B, C, D comment trouver le centre de la similitude directe qui envoie A sur C et B sur D ?

Proposition 3.
Soient A, B, C, D quatre points distincts. On note P l'intersection des droites (AC) et (BD). Alors, le centre O de la similitude ci-dessus se trouve à l'intersection des cercles circonscrits de PCD et PAB. Dans le cas où, par exemple $D = P$, on prend à la place du cercle circonscrit de PCD le cercle tangent à (BD) et passant par C.

Visuellement,



Proposition 4.
Soit $ABCD$ un quadrilatère. On nomme P, Q les intersections des droites (AB) et (CD), et des droites (AD) et (BC). Alors, les cercles circonscrits des triangles QAB, QDC, PAD et PBC se coupent en un même point M, appelé le point de Miquel du quadrilatère $ABCD$. M est le centre de la similitude directe qui envoie A sur B et D sur C, ainsi que de la similitude qui envoie A sur D et B sur C.



Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle et N le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ qui contient A. Un cercle passant par A et N intersecte les droites (AB) et (AC) en X et Y respectivement. Montrer que $XB = YC$.

Exercice 2
Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles qui s'intersectent en A et D. La tangente en A au cercle Γ_1 coupe Γ_2 en B et la tangente en A au cercle Γ_2 coupe Γ_1 en C. Soit E le point sur $[A, B)$ tel que $AB = BE$. La droite (CA) coupe le cercle circonscrit de ADE en F. Montrer que $CA = AF$.

Exercice 3
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O, P le point d'intersection de (AB) et (CD), Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PAD et PBC. Montrer que $\widehat{OQP} = 90°$.

Exercice 4
Soit ABC, PQR deux triangles tels que $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$, $R \in [AB]$ et ABC est semblable à PQR. Montrer que l'orthocentre de PQR est le centre du cercle circonscrit de ABC.

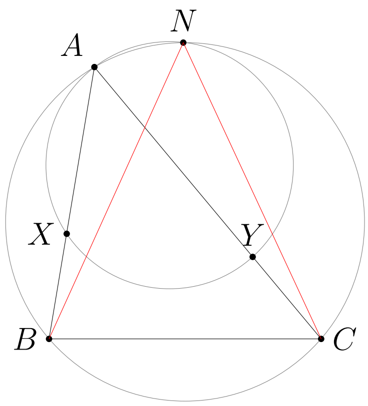
Exercice 5
Soit ABC un triangle acutangle, O le centre de son cercle circonscrit, M le milieu du segment $[BC]$. Soit P, Q les projetés orthogonaux de M sur $[AB]$, $[AC]$. Soit N le milieu de $[PQ]$. Montrer que (AO) est parallèle à (MN).

Exercice 6
(APMO 2017) Soit ABC un triangle tel que $AB < AC$. On note Z l'intersection de la médiatrice de [AC] avec le bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$. Soit D l'intersection de la bissectrice intérieure de $\widehat{BAC}$ et le cercle circonscrit de ABC et M le milieu de $[AB]$. Montrer que Z, A, M, D sont cocycliques.

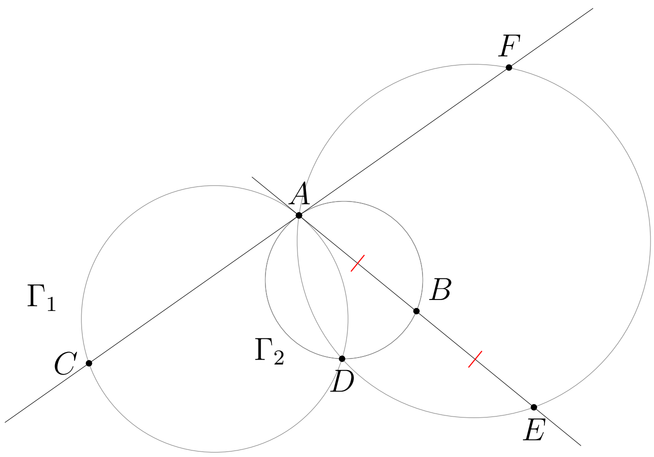
Exercice 7
(USA TSTST 2012) Soient A, B, C, D quatre points distincts tels que $AC = BD$. On note P l'intersection de (AC) et (BD). Soient ω_1, ω_2 les cercles circonscrits de APB et DCP, et Q leur deuxième point d'intersection. (BC) coupe ω_1, ω_2 une deuxième fois en S, T respectivement. Soient M le milieu de l'arc $\widehat{PS}$, et N le milieu de l'arc $\widehat{TP}$. Montrer que (MN) est parallèle à (O_1O_2), où O_1, O_2 sont les centres de ω_1 et ω_2.

Solutions des exercices

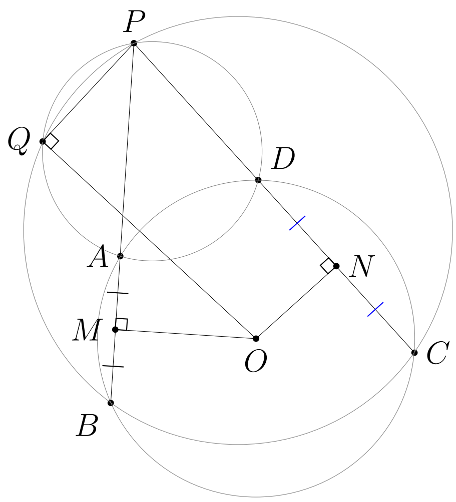
Solution de l'exercice 1
N est le centre de la similitude directe qui envoie X sur Y et B sur C. Or, $NB = NC$. Donc, cette similitude est en fait une rotation et conserve les longueurs. Donc $BX = CY$.



Solution de l'exercice 2
D est le centre du'une similitude qui envoie C en F et A en E. Donc D est aussi le centre d'une similitude directe $\mathcal{S}_1$ de centre D qui envoie C en A et F en E. Il existe aussi une similitude $\mathcal{S}_2$ de centre D, qui envoie C en A et A en B. Les deux similitudes ont pour centre D et envoient C en A. Il s'agit donc de la même similitude, qui envoie C, A, F sur A, B, E respectivement. Puisque $AB = BE$, et la similitude conserve les rapports de longueurs, on a $CA = AF$.

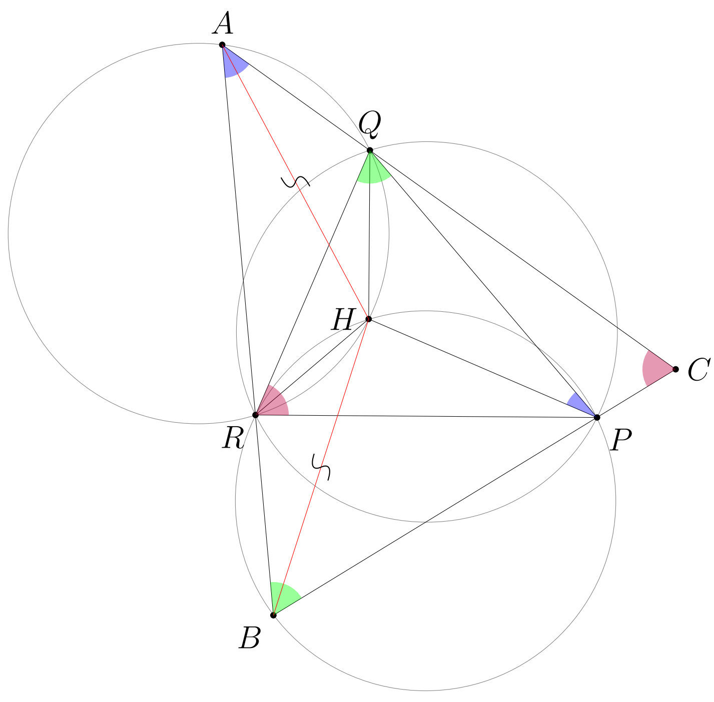


Solution de l'exercice 3



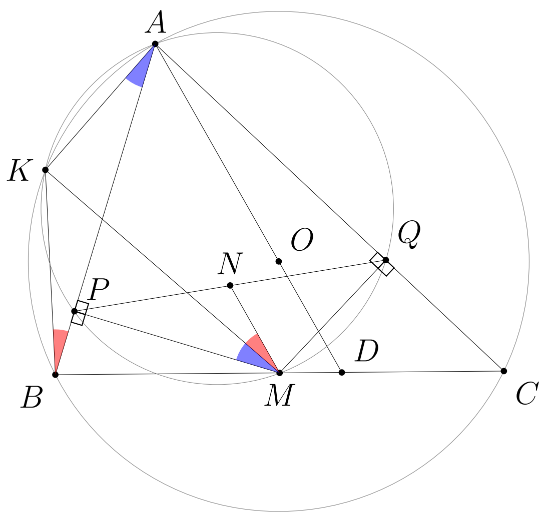
Soient M, N les milieux de $[AB]$, $[DC]$ respectivement. O étant sur les médiatrices des segments $[AB]$ et $[DC]$, les angles $\widehat{PMO}$ et $\widehat{PNO}$ sont droits, donc P, N, O, M sont cocycliques. Par construction, Q et le centre de la similitude qui envoie A sur D, B sur C, et donc aussi M sur N. Donc le cercle circonscrit de PMN passe par Q. Ainsi, Q, P, M, N, O sont cocycliques et donc $\widehat{PQO}$ est droit.

Solution de l'exercice 4



Soit H l'orthocentre de PQR. Nous voulons démontrer que H est équidistants des points A, B, C. Montrons d'abord que B, R, H, P sont cocycliques. Effectivement, par une chasse aux angles classique, $\widehat{RHP} = 180° - \widehat{RQP} = 180° - \widehat{ABC} = 180° - \widehat{RBP}$. Donc $HPBR$ est cyclique. De plus, il est connu que le cercle sur lequel se trouvent R, H, P, B est symétrique au cercle circonscrit de QPR, et donc les deux cercle possèdent le même rayon, disons r. De même manière, A, Q, H, R se trouvent sur un cercle de rayon r. On note que H est le centre de la similitude qui envoie A sur B et le cercle circonscrit de $AQHR$ sur le cercle circonscrit de $RHPB$. Comme les rayons des deux cercle sont égaux, le rapport de la similitude est 1, et donc $HA = HB$. De même manière, $HB = HC$.

Solution de l'exercice 5



Soit D l'intersection de (AO) avec (BC). Nous allons montrer que $\widehat{ODB} = \widehat{NMB}$. Puisque les angles $\widehat{MQA}$, $\widehat{MPA}$ sont droits, les points A, Q, M, P sont cocycliques. Nommons K l'intersection du cercle circonscrit de $AQPM$ avec le cercle circonscrit de ABC. Il existe une similitude directe qui envoie P, N, Q sur B, M, C. Le point K est le centre de cette similitude. Donc, le triangle KMN est semblable à KBP et $\widehat{KMN} = \widehat{KBP}$. De plus, par cocyclicité, $\widehat{KMP} = \widehat{KAB}$. Donc, on a $\widehat{NMP} = \widehat{KAB} + \widehat{KBA} = 180° - \widehat{AKB} = \widehat{ACB}$. De plus, $\widehat{PMB} = 90° - \widehat{ABC}$. Donc, $\widehat{NMB} = 90° - \widehat{ABC} + \widehat{ACB}$. On peut calculer que $\widehat{ADB} = 180° - \widehat{BAO} - \widehat{ABC} = 180° - (90° - \widehat{ACB}) - \widehat{ABC} = 90° - \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \widehat{NMB}$, (napisat pro similitude ? ?) comme voulu.

Solution de l'exercice 6

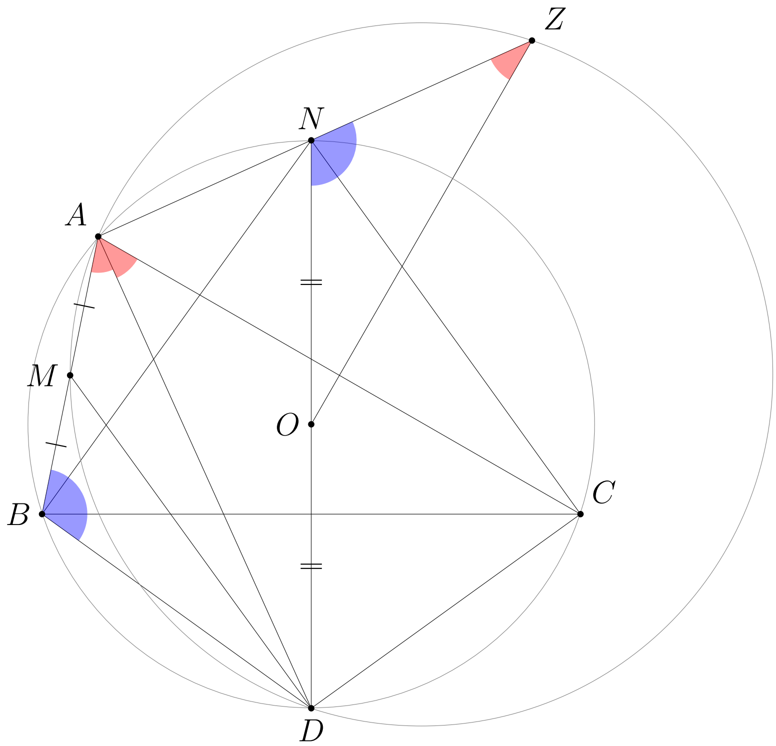
Soit O le centre du cercle circonscrit de ABC. On note N le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ qui contient A. Notons que N est sur la droite (AZ) et D est le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. De plus, N, O, D sont alignes. Nous allons montrer que la similitude directe $\mathcal{S}$ de centre D qui envoie B sur M, et le cercle circonscrit de DBA sur le cercle passant par D, A, M, envoie N sur Z. Ceci suffit pour montrer que Z se situe sur le cercle circonscrit de D, A, M.

Pour cela, nous montrerons que le triangle DNZ est semblable à DBM. D'abord, notons que DBA est semblable à ONZ. Effectivement, par cocyclicité, $\widehat{DBA} = \widehat{ONZ}$. De plus,

$\widehat{AZO} = 90° - \widehat{CAZ} = \widehat{DAC} = \widehat{DAB}$. Donc, DBA est semblable à ONZ. Ainsi, on a

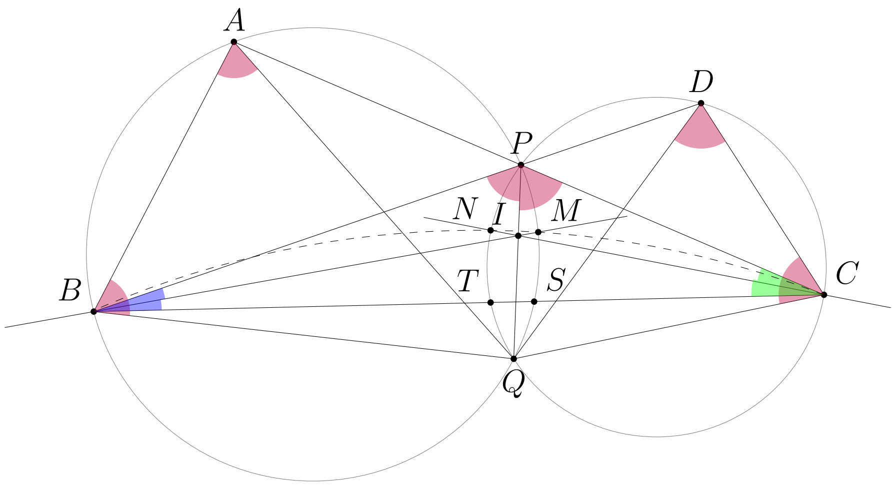
$$\frac{NZ}{NO} = \frac{BA}{BD} \Leftrightarrow \frac{NZ}{2NO} = \frac{BA/2}{BD} \Leftrightarrow \frac{NZ}{ND} = \frac{BM}{BD}.$$

Donc $DNZ \sim DBM$ et on a terminé.



Solution de l'exercice 7

Q est le centre de la similitude directe qui envoie ω_1 sur ω_2, A sur C, B sur D. Donc QBA est



semblable à QDC. De plus, Q est le centre de la similitude envoyant B sur A et D sur C. Cette similitude a pour rapport 1 et donc $QA = QB$, $QD = QC$. Par chasse aux angles, on peut en déduire que (PQ) est la bissectrice de $\widehat{BPC}$. Effectivement, $\widehat{BPQ} = \widehat{BAQ} = \widehat{ABQ} = \widehat{QDC} = \widehat{QPC}$. Donc, $(BM), (CN), (PQ)$ s'intersectent en le centre I du cercle inscrit de BPC. Il nous suffit de montrer que $(PQ) \perp (NM)$. Notons que puisque I se situe sur l'axe radical de ω_1, ω_2, $IN \cdot IC = IM \cdot IB$. Donc N, M, T, S sont cocycliques. On calcule par chasse aux angles que l'angle sous lequel se coupent les droites (PI) et (NM) est :

$$180° - (\widehat{NMI} + \widehat{PIM}) = 180° - (\widehat{NMB} + \widehat{PIM}) = 180° - (\widehat{NCB} + \widehat{PIM})$$

$$= 180° - (\widehat{ICB} + \widehat{BPI} + \widehat{PBI}) = 90°.$$

Ceci montre que (PI) et (MN) se coupent sous un angle droit.

Sources et endroits où trouver des exercices supplémentaires

Voici quelques sites additionnelles pour s'entraîner sur ce thème

— Cours de stage de Montpellier 2014 (groupe C)

— Cours Stage d'hiver de préparation au Canada 2022, 2020 par exemple. (Les images du cours sont tirées du cours de la fiche de Howard Halim, Canada 2020).

2 Equations fonctionnelles (Rémi)

Le but de ce TD (repris de 2022) est de montrer plusieurs idées d'abord classiques puis assez évoluées, pour donner de nouvelles clés en vue de la résolution d'équations fonctionnelles avancées. En particulier, nous allons voir dans quelle mesure le fait de deviner les solutions d'une équation fonctionnelle peut aider à la résoudre, en donnant un plan de résolution ou un changement de fonction. De manière plus générale, le but est d'apprendre à prendre du recul sur les équations fonctionnelles, d'essayer de mieux visualiser les équations et de voir ce que l'on peut en déduire sans se lancer dans des substitutions à tout va. Il faut essayer de comprendre comment l'exercice a été inventé : avoir l'intuition de quels sont les termes qui vont poser problème, comment interpréter la présence d'une symétrie etc. Tous les exercices ci-dessous sont difficiles mais requièrent très peu de substitutions pour être résolus. Voici en vrac une liste de choses auxquelles on peut penser :

— Deviner les solutions (toujours utile, tester les constantes, les affines, regarder en termes de degré si un polynôme peut marcher, etc), tous les exercices sont rédigés

— Regarder l'ensemble de définition, et si ce n'est pas $\mathbb{R}$ et essayer de comprendre pourquoi (par exemple pour $\mathbb{R}_+^*$, se demander pourquoi 0 a été retiré, peut-être qu'un inverse va traîner quelque part...).

— Si on voit une variable isolée en dehors d'une parenthèse, dans 90% des cas on aura la surjectivité assez directement, et très souvent l'injectivité aussi, il faut que ce soit un réflexe.

— En général, il y aura plusieurs termes de la forme $f(\ldots)$ dans l'équation. Dans ce cas, il faut essayer de faire toutes les substitutions qui permettent de rendre deux termes dans des parenthèses égaux, cela permettra de supprimer des termes.

Exercices

Exercice 1
Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) + y \leq f(f(f(x)))$$

Exercice 2
(IMO 2022, P2) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}_+^*$, il existe exactement un $y \in \mathbb{R}_+^*$ tel que :

$$xf(y) + yf(x) \leqslant 2$$

Exercice 3
(BMO 2007) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x)+y) = f(f(x)-y) + 4f(x)y$$

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que $f(0) = 0$, et pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$(x-y)\left(f(f(x)^2) - f(f(y)^2)\right) = (f(x)+f(y))\,(f(x)-f(y))^2$$

Exercice 5
(Suisse 2011) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \longrightarrow \mathbb{R}_+^*$ telles que, pour tous réels positifs a, b, c, d vérifiant $abcd = 1$,

$$(f(a) + f(b))(f(c) + f(d)) = (a + b)(c + d)$$

Exercice 6
(BMO SL 2021) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$, telles que pour tout $x \in \mathbb{R}^*$ et tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^2 + y) \geqslant \left(\frac{1}{x} + 1\right) f(y)$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
On commence par poser $y = f(f(x)) - x$, qui donne $f(f(x)) \leq x$, et donc l'équation donne $f(x + y) + y \leq f(x)$, en posant $z = x + y$, on obtient $f(z) + z \leq f(x) + x$, cela étant valable quelque soit x et z, on doit avoir $f(x) + x$ constant, donc $f(x) = C - x$, qui convient.

Solution de l'exercice 2
Cet exercice est là car c'est l'exemple qui a inspiré ce TD. Il a été corrigé par exemple sur la chaîne YouTube de la POFM : https ://www.youtube.com/watch?v=G4z6g3P8abQ.

Solution de l'exercice 3
Avec un peu de réflexion et d'expérience, on peut reconnaître quelque chose qui ressemble à une nouvelle identité remarquable déguisée, le $4f(x)y$ correspondant à deux fois le double produit. Cela marche en effet bien si f est la fonction carré. Un peu de tâtonnement laisse deviner que les solutions sont $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 0$. Cela nous donne envie de poser la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x^2$ pour éliminer les termes parasites. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve simplement $g(g(x) + x^2 + y) = g(g(x) + x^2 - y)$.
Ici, il faut prendre le temps de bien interpréter : cette équation nous indique que la droite d'équation $x = g(z) + z^2$ est un axe de symétrie vertical de g pour toute valeur de z. On se rappelle que $g(z) + z^2 = f(z)$, donc si f n'est pas constante, alors $g(z) + z^2$ prend au moins deux valeurs différentes. La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation, donc le graphe de g est invariant par translation, autrement dit g est périodique. Pour tout y, on a plus précisément $g(y) = g(y + (f(x) - f(z))$, en composant les symétries d'axes $f(x)$ et $f(z)$, pour n'importe quels x et z. Prenons le temps d'apprécier toutes les informations obtenues sans la moindre substitution pour l'instant !
Procédons à notre seule substitution nécessaire : soit T la période de g, on pose $x = z + T$. Alors $f(x) - f(z) = g(z + T) + (z + T)^2 - g(z) - z^2 = 2Tz + T^2$. On voit donc que g est périodique de période n'importe quel réel, puisqu'on peut choisir z arbitrairement. On peut par exemple choisir formellement z tel que $2Tz + T^2 = -y$ et on aura alors $g(y) = g(0)$ pour tout y, donc g est bien constante. En réinjectant, on trouve que la constante doit être nulle, donc les solutions sont bien celles trouvées au début.

Solution de l'exercice 4
On devine une identité remarquable déguisée, donc on se doute que les solutions seront les fonctions linéaires. On pose $y = 0$ pour trouver $f(f(x)^2) = f(x)^3$. Cela va permettre

de linéariser l'équation et de la rendre plus jolie. On peut réécrire $(x-y)\left(f(x)^3-f(y)^3\right) = \left(f(x)+f(y)\right)\left(f(x)-f(y)\right)^2$. A ce stade, on doit être tentés de développer puisque des termes vont s'éliminer. On trouve après simplification

$$xyf(x)f(y)(f(x)+f(y)) = y^2f(x)^3 + x^2f(y)^3. \quad (\star)$$

On constate que cette équation est polynomiale en $f(x)$, donc on fixe $y=1$ pour ne garder que la variable x et on appelle $f(1)=c$. On obtient en réordonnant les termes :

$$f(x)^3 - cxf(x)^2 - c^2xf(x) + c^3x^2 = 0.$$

Or on veut que $f(x)=cx$ soit solution de notre équation fonctionnelle, donc on peut probablement factoriser par $f(x)-cx$. En effet, cela donne $(f(x)-cx)(f(x)^2-c^2x)=0$. Pour $x<0$, on a $f(x)^2-c^2x>0$, ce terme ne peut pas être nul, donc $f(x)=cx$. La meilleure manière de conclure est en montrant l'imparité de la fonction, ce que l'on fait en remplaçant y par $-x$ dans l'équation $(\star)$. En effet, en factorisant par $(f(x)+f(-x))$ et en regroupant les termes, on trouve $(f(x)+f(-x))^3=0$, donc $f(x)=-f(-x)$. Les solutions sont donc bien les fonctions linéaires, qui conviennent réciproquement.

Solution de l'exercice 5

Une fois encore, on cherche à deviner les solutions : on trouve facilement l'identité, mais la condition $abcd=1$ nous pousse à chercher un peu plus loin. En effet, comme les substitutions possibles seront d'exprimer une variable en fonction de l'inverse des autres, on pense à la fonction inverse, qui est bien solution aussi. Montrons que $x \mapsto x$ et $x \mapsto \frac{1}{x}$ sont les seules solutions.

On va noter (a,b,c,d) les substitutions que l'on fait dans l'équation initiale. $(x,\frac{1}{x},1,1)$ donne $f(x)+f\left(\frac{1}{x}\right) = x+\frac{1}{x}$. D'autre part, $(x,1,\frac{1}{x},1)$ donne après simplification grâce à l'équation précédente $f(x)f\left(\frac{1}{x}\right) = x\cdot\frac{1}{x}=1$.

Les relations de Viète nous indiquent donc que $f(x)$ et $f\left(\frac{1}{x}\right)$ sont les racines du polynôme $X^2-\left(x+\frac{1}{x}\right)X+1$. En résolvant, on trouve que $f(x)=x$ ou $f(x)=\frac{1}{x}$. Il reste à montrer que l'on ne peut pas avoir de solutions multigraphes. On suppose donc qu'il existe a et b tels que $f(a)=a$ et $f(b)=\frac{1}{b}$. La dernière équation nous indique que $f\left(\frac{1}{a}\right)=\frac{1}{a}$ et $f\left(\frac{1}{b}\right)=b$. On fait alors la substitution $(a,b,\frac{1}{a},\frac{1}{b})$, qui se simplifie en $(a-1)(b-1)=0$, donc $a=1$ ou $b=1$. Mais pour ces valeurs on a de toute façon $a=\frac{1}{a}$ et $b=\frac{1}{b}$, donc il n'existe effectivement pas de solutions multigraphes.

Solution de l'exercice 6

En tâtonnant un peu avec x très petit, on se rend compte que le $\frac{1}{x}$ pose problème, les valeurs juste après $f(y)$ doivent être beaucoup trop grandes. On devine donc que la seule solution est probablement la fonction nulle (qui convient bien), montrons-le. On suppose par l'absurde qu'il existe y_0 tel que $f(y_0)\neq 0$. La première étape est de poser $x=-2$ et $y=y_0$ ce qui donne $f(y_0+4)\geqslant -f(y_0)>0$, donc quitte à remplacer y_0 par y_0+4 on peut supposer $f(y_0)>0$.

On fixe un $\varepsilon>0$. On a $f(y_0^2+\varepsilon^2)\geqslant\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)f(y_0)$. On itère cette relation par récurrence, et on a pour $n\in\mathbb{N}$, $f(y_0^2+n\varepsilon^2)\geqslant\left(1+\frac{1}{\varepsilon}\right)^n f(y_0)$. Il ne reste plus qu'à choisir un ε intelligent pour aboutir à une absurdité : on choisit $\varepsilon=\frac{1}{\sqrt{n}}$, ce qui donne $f(y_0^2+1)\geqslant\left(1+\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^n f(y_0)$. Le membre de gauche est donc supérieur à une quantité non bornée, d'où l'absurdité.

3 Introduction aux nombres complexes (Aline)

Définition de l'ensemble $\mathbb{C}$, opérations algébriques

Il existe plusieurs manières de créer les nombres complexes, on propose ici de les définir de la façon suivante :

Définition 1 (Nombres complexes)**.**
On se donne un élément i (qui n'est pas un nombre réel) et on définit les nombres complexes comme des combinaisons de la forme $z = a + ib$ avec a, b des réels. On dit que a est la **partie réelle** et b la **partie imaginaire** de z, ce qui se note souvent

$$a = \mathfrak{Re}(z) \qquad \text{et} \qquad b = \mathfrak{Im}(z)$$

Cette écriture est unique et univoque : deux nombres complexes sont égaux si et seulement si ils ont même partie réelle et même partie imaginaire.

Pour que les complexes soient des "nombres", on voudrait pouvoir faire des opérations dessus. Comme on dispose déjà d'opérations sur $\mathbb{R}$, une façon naturelle de les prolonger consiste à opérer sur les coefficients (parties réelle et imaginaire). Il faut cependant pour cela se donner des conventions :

Définition 2 (Opérations algébriques dans $\mathbb{C}$)**.**
Pour $a, b, a', b' \in \mathbb{R}$, on pose les complexes $z = a + ib$ et $z' = a' + ib'$. On définit deux opérations sur $\mathbb{C}$ de la façon suivante :

Addition $+$: la somme des complexes z et z' vaut

$$z + z' = (a + a') + i(b + b')$$

Multiplication $\times$: le produit des complexes z et z' vaut

$$zz' = (aa' - bb') + i(ab' + a'b)$$

On peut le retrouver plus simplement en développant le produit :

$$zz' = (a + ib)(a' + ib') = aa' + iba' + ib'a + i^2bb'$$

et en appliquant la convention $i^2 = -1$.

Remarque 3 ($\mathbb{R} \subset \mathbb{C}$)**.**

On remarque que les complexes de la forme $a + ib$ quand $b = 0$ se comportent exactement comme des réels. On identifie ainsi $\mathbb{R}$ à une partie de $\mathbb{C}$. En particulier, $\mathbb{C}$ contient 0 (neutre pour l'addition, absorbant pour la multiplication) et 1 (neutre pour la multiplication) : autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{C}$, $0 + z = z$, $0 \times z = 0$ et $1 \times z = z$.

Mentionnons quelques propriétés de $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$:

Proposition 4 (Propriétés de $\mathfrak{Re}$ et $\mathfrak{Im}$)**.**
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a les propriétés suivantes :

$\mathbb{R}$-linéarité $\mathfrak{Re}(\lambda z + \mu z') = \lambda \mathfrak{Re}(z) + \mu \mathfrak{Re}(z')$ (idem pour $\mathfrak{Im}$). En particulier, pour $\lambda = \mu = 1$, on retrouve la règle d'additivité et pour $\mu = 0$, la R-homogénéité $\mathfrak{Re}(\lambda z) = \lambda \mathfrak{Re}(z)$ (idem pour $\mathfrak{Im}$).

Multiplication par i $\mathfrak{Im}(iz) = \mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Re}(iz) = -\mathfrak{Im}(z)$

Règle du produit $\mathfrak{Re}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Re}(z') - \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Im}(z')$ et $\mathfrak{Im}(zz') = \mathfrak{Re}(z)\mathfrak{Im}(z') + \mathfrak{Im}(z)\mathfrak{Re}(z')$

En particulier, en général $\mathfrak{Re}(zz') \neq \mathfrak{Re}(e)\mathfrak{Re}(z')$.

Proposition 5 (Opposé, inverse)**.**

(i) Tout complexe z possède un **opposé** noté $-z \in \mathbb{C}$, tel que $z + (-z) = 0$. Si on note $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $-z = -a + i(-b)$. Autrement dit, $\mathfrak{Re}(-z) = -\mathfrak{Re}(z)$ et $\mathfrak{Im}(-z) = -\mathfrak{Im}(z)$.

(ii) Tout complexe $z \neq 0$ possède un **inverse** $z^{-1} \in \mathbb{C}$, tel que $zz^{-1} = 1$. On verra un peu plus loin les expressions de $\mathfrak{Re}(z^{-1})$ et $\mathfrak{Im}(z^{-1})$.

Tout comme on note $\mathbb{R}^* = \mathbb{R} \setminus \{0\}$, on note $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.

Remarque 6 (Structure algébrique de $\mathbb{C}$)**.**
Ces propriétés font de $\mathbb{C}$ un **corps de nombres**, tout comme $\mathbb{R}$: on peut y faire des additions, soustractions, produits, et divisions par ce que l'on veut, à l'exception des divisions par 0 qui n'ont pas de sens.

Transformations et applications spécifiques aux complexes

On a déjà introduit deux applications (fonctions) sur les complexes : les fonctions ($\mathbb{C} \to \mathbb{R}$) "partie réelle" $\mathfrak{Re}$ et l'opérateur "partie imaginaire" $\mathfrak{Im}$. Deux autres fonctions sont très couramment utilisées et à connaître : la conjugaison et le module.

Définition 7 (Conjugaison)**.**
La conjugaison est une transformation $\mathbb{C} \to \mathbb{C}$, qui associe à un complexe z un autre complexe noté $\overline{z}$ et appelé **(complexe) conjugué** de z. $\overline{z}$ est défini par

$$\mathfrak{Re}(\overline{z}) = \mathfrak{Re}(z) \quad \text{et} \quad \mathfrak{Im}(\overline{z}) = -\mathfrak{Im}(z)$$

Autrement dit, si $z = a + ib$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, alors $\overline{z} = a - ib$.
On dit souvent "z barre" au lieu de "le conjugué de z".

On verra dans la partie suivante comment tout cela devient limpide sur un dessin.

Définition 8 (Module)**.**
Le module d'un nombre complexe z est un nombre réel positif, noté $|z|$, et donné par

$$|z|^2 = z\overline{z} = \mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2$$

Grâce à la conjugaison, on peut exprimer les fonctions $\mathfrak{Re}$, $\mathfrak{Im}$ et $z \mapsto z^{-1}$ de manière plus commode (souvent plus facile à calculer) :

Proposition 9 (Formules à connaître)**.**
Soit $z \in \mathbb{C}$. On a les relations suivantes :

(i) $\mathfrak{Re}(z) = \frac{z+\overline{z}}{2}$

(ii) $\mathfrak{Im}(z) = \frac{z-\overline{z}}{2}$

(iii) $\frac{1}{z} = z^{-1} = \frac{\overline{z}}{z\overline{z}} = \frac{\overline{z}}{|z|^2}$

Le plan complexe

Toutes ces règles d'addition, soustraction, réflexion et norme commencent à nous faire penser à des vecteurs dans un plan (2 dimensions). Détaillons un peu.

Une façon commode de représenter les complexes est de les identifier à des points du plan (x, y), ou plus exactement, des vecteurs : le complexe $z = a + ib$ correspond ainsi au point (vecteur) de coordonnées (a, b). Les réels se trouvent sur l'axe de x, les **imaginaires purs** (complexes dont la partie réelle est 0) sur l'axe des y.

On vérifie alors (faire un dessin est encouragé) que :

(a) L'addition correspond à une addition de vecteurs classique : on additionne les abscisses entre elles, les ordonnées entre elles.

(b) L'opération $z \mapsto -z$ est une **symétrie par rapport au point** 0 (l'origine).

(c) La conjugaison $z \mapsto \overline{z}$ est une **symétrie par rapport à l'axe des** x.

(d) Le **module** d'un complexe z est exactement la **norme** du vecteur qui le représente dans le plan.

Cette interprétation permet de rendre assez immédiates les propriétés suivantes (à connaître) :

Proposition 10 (Propriétés de $z \mapsto \overline{z}$)**.**
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$. On a :

Involutivité : $\overline{(\overline{z})} = z$

Multiplicativité : $\overline{zz'} = \overline{z} \cdot \overline{z'}$

Identité sur $\mathbb{R}$ **:** $\overline{z} = z \Leftrightarrow z \in \mathbb{R}$

Opposé sur $i\mathbb{R}$ **:** (ensemble des imaginaires purs) $\overline{z} = -z \Leftrightarrow z$ imaginaire pur

R**-linéarité :** $\overline{\lambda z + \mu z'} = \lambda\overline{z}+\mu\overline{z'}$. En particulier, pour $\lambda = \mu = 1$, $\overline{z + z'} = \overline{z} + \overline{z'}$, et pour $\mu = 0$, $\overline{\lambda z} = \lambda\overline{z}$

Commutativité : avec $(z \mapsto z^{-1} = 1/z)$: $\overline{z}^{-1} = (\overline{z})^{-1}$ (pour $z \neq 0$).

Proposition 11 (Propriétés de $z \mapsto |z|$)**.**
Soit $z, z' \in \mathbb{C}$, $\lambda \in \mathbb{R}$. On a :

Valeur absolue sur $\mathbb{R}$ **:** $|\lambda|$ est la valeur absolue (réel positif) de λ (réel), ce qui justifie d'ailleurs d'utiliser la même notation pour la valeur absolue et pour le module.

Multiplicativité : $|zz'| = |z| \cdot |z'|$. En particulier, si on remplace z' par λ et que l'on suppose $\lambda > 0$, $|\lambda z| = \lambda|z|$

Sous-additivité : (ou inégalité triangulaire) $|z + z'| \leqslant |z| + |z'|$

Conservation : par conjugaison $|\overline{z}| = |z|$

Commutativité : avec l'inverse $z \mapsto z^{-1} = \frac{1}{z}$: $|z^{-1}| = |z|^{-1} = \frac{1}{|z|}$

En particulier, on évitera d'écrire que le module est additif et que "$|z + z'| = |z| + |z'|$".

Notation exponentielle

S'il est clair, géométriquement, ce que signifient l'addition, le module, etc, la multiplication est un peu moins intuitive. Elle le devient davantage quand on passe par une autre représentation des complexes, qui requiert de parler un peu d'exponentielle complexe.

On peut définir la fonction exponentielle $x \mapsto e^x$ sur $\mathbb{R}$ de différentes manières (équivalentes, c'est-à-dire que quelque soit la définition adoptée, e^x a toujours la même valeur à x donné). Par exemple, $\exp$ peut se voir comme solution d'une équation différentielle ($f' = f$). Une définition très utile est de dire que e^x est la limite quand $n \longrightarrow +\infty$ de la somme

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{x^k}{k!}$$

Cette définition a l'avantage d'être calculable aussi lorsque x n'est plus réel mais complexe (puisque l'on peut aussi faire des puissances, des divisions, des sommes, dans $\mathbb{C}$). On obtient ainsi un **prolongement analytique** de l'exponentielle à $\mathbb{C}$, qui se note de la même façon ($\exp(z)$ ou e^z).

Proposition 12 (Exponentielle complexe)**.**

La fonction $\exp\colon z \in \mathbb{C} \mapsto e^z \in \mathbb{C}$ vérifie les propriétés suivantes :

(i) Si $z, z' \in \mathbb{C}$, $e^{z+z'} = e^z \cdot e^{z'}$

(ii) $\exp$ est **surjective** dans $\mathbb{C}^*$: autrement dit, pour tout $z \in \mathbb{C}^*$, il existe un $u \in \mathbb{C}$ tel que $z = e^u$. Un tel antécédent n'est **jamais unique** (même lorsque z est dans $\mathbb{R}_+^*$, puisqu'en plus de son antécédent bien connu $\ln(z)$, il possède plusieurs antécédents complexes).

Rappel 13 (Restriction de $\exp$ à $\mathbb{R}$, logarithme népérien)**.**
L'exponentielle d'un réel $x \in \mathbb{R}$ est un réel strictement positif (élément de $\mathbb{R}_+^*$). Dans le cadre réel, $\exp\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ est une **bijection** dont la réciproque est le logarithme népérien $\ln$. Comme l'exponentielle $\exp\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}^*$ n'est pas bijective, il n'y a pas de fonction logarithme "naturelle".

En particulier, l'exponentielle d'un imaginaire pur est, dans le plan complexe, sur le cercle trigonométrique :

Définition 14 (Cercle unité $\mathbb{U}$, argument)**.**

Pour un $\theta \in \mathbb{R}$, on a

$$e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$$

On appelle **cercle unité** et on note $\mathbb{U}$ l'ensemble des complexes de la forme $e^{i\theta}$ pour un $\theta \in \mathbb{R}$. Le nom vient de ce qu'il s'agit exactement des complexes de module égal à 1.

Pour $z \in \mathbb{C}^*$, le complexe $u = \frac{z}{|z|}$ est de module 1 et donc sur le cercle unité. Il existe donc un $\theta \in \mathbb{R}$ tel que $u = e^{i\theta}$. θ est alors appellé **(un) agument** de z.

Remarque 15 (Argument principal)**.**

Si $z = 0$, n'importe quel réel est un argument de z.

Si $z \neq 0$ et θ est un argument de z, l'ensemble des arguments de z est exactement l'ensemble (infini)

$$\arg(z) = \{\theta + 2k\pi \mid k \in \mathbb{Z}\}$$

Lorsque $z \neq 0$, l'unique argument de z dans l'intervalle $[0, 2\pi[$ (ou $]-\pi, \pi]$ selon les conventions) est souvent appelé "argument principal" et noté $\mathrm{Arg}(z)$.

Pour éviter les confusions, il est préférable autant que possible de se limiter à prendre "un argument de z" en précisant éventuellement dans quelle intervalle on le choisit, plutôt que l'utiliser la fonction (mal définie) Arg.

Définition 16 (Représentation exponentielle)**.**
Soit $z \in \mathbb{C}$ et θ un argument de z. Alors z peut s'écrire

$$z = re^{i\theta} \qquad \text{avec} \qquad r = |z| \in \mathbb{R}_+$$

Contrairement à la représentation par partie réelle et partie imaginaire, cette représentation n'est pas unique (l'argument peut prendre plusieurs valeurs). En revanche, elle permet de visualiser mieux ce que représente la multiplication de des complexes $z = |z|e^{i\theta}$ et $z' = |z'|e^{i\theta'}$:

$$zz' = (|z|e^{i\theta})(|z'|e^{i\theta'}) = |z| \cdot |z'| \cdot e^{i\theta} \cdot e^{i\theta'} = |z| \cdot |z'| \cdot e^{i(\theta+\theta')}$$

Ainsi, géométriquement, on a multiplié les distances (normes des vecteurs) et additionné les angles (entre l'axe des x et chacun des vecteurs). En particulier, multiplier un complexe z par un élement de $\mathbb{U}$ de la forme $e^{i\theta}$ revient à faire "tourner le vecteur (représentant) z d'un angle θ".

La conjugaison s'exprime aussi facilement en notation exponentielle :

$$\overline{z} = \overline{re^{i\theta}} = re^{-i\theta}$$

Autrement dit, le complexe conjugué a même module et un argument opposé (ou congru à $-\theta$ modulo 2π).

Remarque 17 (Encore quelques formules utiles)**.**

On passe assez facilement de la représentation exponentielle à la représentation en parties réelle et imaginaire :

$$\mathfrak{Re}(z) = |z|\cos\theta \qquad \text{et} \qquad \mathfrak{Im}(z) = |z|\sin\theta$$

Dans l'autre sens, s'il est assez facile d'exprimer le module, trouver un argument est moins aisé mais on peut prendre :

$$|z| = \sqrt{\mathfrak{Re}(z)^2 + \mathfrak{Im}(z)^2} \qquad \text{et} \qquad \theta = 2\arctan\frac{\mathfrak{Im}(z)}{|z| + \mathfrak{Re}(z)}$$

lorsque z n'est pas dans $\mathbb{R}_-$, auquel cas l'argument vaut π.

Notons que la formule d'addition en notation exponentielle n'est pas très jolie, on laissera le lecteur réfléchir à la bonne combinaison de $\cos$ et $\sin$ à utiliser.

On peut retenir :

a) Quand on **additionne** deux complexes, on **additionne les parties réelles** (resp. imaginaires) entre elles.

b) Quand on **multiplie** deux complexes, on **multiplie les modules** et on **additionne les arguments**.

Remarque 18 (Définition analytique de $\cos$ et $\sin$)**.**
Pour $\theta \in \mathbb{R}$, les relations

$$\cos\theta = \mathfrak{Re}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} + e^{-i\theta}}{2} \qquad \text{et} \qquad \sin\theta = \mathfrak{Im}(e^{i\theta}) = \frac{e^{i\theta} - e^{-i\theta}}{2i}$$

fournissent une définition analytique des fonctions trigonométriques.

Polynômes à coefficients réels sur $\mathbb{C}$

On supposera que le lecteur est déjà familier de la notion de polynôme sur $\mathbb{R}$, ou pourra consulter le cours très complet sur le site de la POFM (parties 1-5). On restera en outre dans le cadre des polynômes d'une variable.

Rappel 19 (Polynôme à coefficients réels)**.**

Un polynôme à coefficients réels de degré $n \in \mathbb{N}$ est un objet de la forme

$$P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_{n-1}X^{n-1} + a_n X^n$$

avec $a_0, \ldots, a_n$ des réels et a_n non nul. Lorsque tous les coefficients sont nuls, on dit que P est le polynôme nul (qui n'a pas de degré, ou est de degré $-\infty$).

On note $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients réels.

On peut faire des additions, soustractions, multiplications dans $\mathbb{R}[X]$.

Regardons pour le moment toujours des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, évalués sur des réels. Lorsque $a_n = 1$, on dit que P est **unitaire**. On peut toujours se ramener à un polynôme unitaire en divisant tous les coefficients par a_n, donc on énonce souvent les résultats uniquement sur des polynômes unitaires pour simplifier.

Rappel 20 (Racines de polynômes)**.**

On dit que $x \in \mathbb{R}$ est **racine** du polynôme P lorsque $P(x) = 0$. Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}$ a au plus n racines, à l'exception du polynôme nul qui vaut 0 partout.

Tout polynôme unitaire à coefficients réels de degré n peut s'écrire sous la forme d'un poduit de facteurs irréductibles sur $\mathbb{R}$ (les polynômes irrédutibles sont ceux qui n'ont pas de forme factorisée) :

$$P(X) = \prod_{j=1}^{s}(X - r_j)\prod_{k=0}^{t}(X^2 - b_k X + c_k)$$

où $n = s + 2t$, les r_j sont les racines de P (pas nécéssairement distinctes) et les facteurs $(X^2 - b_k + c_k)$ sont des polynômes de degré 2 sans racines réelles (ce qui revient encore à dire que le discriminant $\Delta = b_k^2 - 4c_k$ est négatif). Les polynômes irréductibles sur $\mathbb{R}$ sont ainsi les polynômes de degré 1 et certains polynômes de degré 2.

Lorsque $n = s$, on dit que P est **scindé sur** $\mathbb{R}$.

Une même racine peut apparaître plusieurs fois : le nombre de fois qu'elle figure dans la décomposition de P en facteurs irréductibles est appelé **multiplicité** de la racine.

Si maintenant on évalue un polynôme P sur $\mathbb{C}$ tout entier, on imagine que l'on peut lui trouver plus de racines que lorsque l'on se limite à $\mathbb{R}$. Plus précisément, puisque $\mathbb{C}$ est intègre (un produit de facteurs vaut 0 si et seulement si un des facteurs vaut 0) et que les facteurs $(X - r)$ n'ont manifestement qu'une seule racine (réelle) on peut chercher si les facteurs $X^2 - bX + c$ n'auraient pas de racine complexe.

En fait, on a un résultat systématique :

Proposition 21 (Polynôme réel de degré 2 à racines complexes)**.**

Soit $P(X) = X^2 - bX + c$ un polynôme unitaire de degré 2. Lorsque le discriminant $\Delta = b^2 - 4c$ de P est négatif, P possède deux racines dans $\mathbb{C}$:

$$z_{\pm} = \frac{b \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

z_+ et z_- sont alors conjuguées l'une de l'autre.

Ceci nous dit que tout polynôme à coefficient réel de degré n a en fait exactement n racines dans $\mathbb{C}$. De plus, les racines non réelles sont systématiquement en nombre pair et telles que

$$z \text{ racine de } P \quad \Leftrightarrow \quad \overline{z} \text{ racine de } P$$

Polynômes à coefficients complexes

Puisque l'on peut faire les mêmes opérations algébriques dans $\mathbb{R}$ et dans $\mathbb{C}$, on peut naturellement faire des polynômes à coefficients complexes (évalués généralement sur $\mathbb{C}$). On note leur ensemble $\mathbb{C}[X]$ ($C_n[X]$ pour les polynômes de degré n au plus). Encore plus fort que le résultat établi au paragraphe précédent, on a en fait un monumental résultat, d'ailleurs connu sous le nom de "théorème fondamental de l'algèbre" :

Théorème 22 (Théorème de d'Alembert-Gauss)**.**

$\mathbb{C}$ est **algébriquement clos**, autrement dit, tout polynôme $P \in \mathbb{C}[X]$ non constant possède exactement autant de racines que son degré $n \geqslant 1$.

Il existe donc n nombres $z_1, \ldots, z_n \in \mathbb{C}$ (pas nécessairement ditincts) tels que (on suppose P unitaire) tel que

$$P(X) = \prod_{k=1}^{n}(X - z_k)$$

Ainsi, les polynômes irréductibles sur $\mathbb{C}$ sont exactement les polynômes de degré 1.

Il existe de nombreuses preuves élégantes de ce résultat, qui ont en commun de faire appel à plus ou moins d'éléments d'analyse (continuité, dérivée, topologie...) : il n'existe aucune preuve purement algébrique du théorème. Dans tous les cas, nous n'avons malheureusement pas le temps de dérouler la démonstration du résultat dans son intégralité.

On ne se privera en revanche pas d'utiliser ce résultat très puissant pour en obtenir beaucoup d'autres :

Corollaire 23 (Surjectivité des polynômes dans $\mathbb{C}$)**.**

Tout polynôme non constant est surjectif dans $\mathbb{C}$. Autrement dit, si $P \in \mathbb{C}[X]$ est non constant et $t \in \mathbb{C}$ quelconque, il existe $z \in \mathbb{C}$, $P(z) = t$.

Le corollaire s'obtient immédiatement en appliquant le théorème d'existence de racines au polynôme non constant $P - t$.

On a aussi le critère pour dire si des polynômes sont premiers entre eux :

Corollaire 24 (Polynômes premiers entre eux)**.**

Soit $P, Q \in \mathbb{C}[X]$. Alors on a équivalence entre

(i) P et Q sont premiers entre eux.

(ii) P et Q n'ont aucune racine en commun.

Pour faire le lien avec la factorisation des polynômes de $\mathbb{R}[X]$, on a le critère suivant :

Proposition 25 (Racines conjuguées et polynômes réels)**.**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire. Les deux propositions suivantes sont équivalentes :

(i) P est à coefficients réels

(ii) Pour toute racine z de P, $\overline{z}$ est aussi racine de P.

Avec la forme factorisée, on voit que les coefficients sont en fait des sommes de produits des racines. Ce sont les fameuses formules de Viète, ou relations coefficients-racines :

Proposition 26 (Formules de Viète - relations coefficients-racines)**.**
Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire de degré n et de coefficients $a_0, \dots, a_n = 1$. On note ses racines $z_1, \dots, z_n$ (peu importe l'ordre). On a alors les formules suivantes :

(i) Coefficient constant :

$$a_0 = (-1)^n \prod_{k=1}^{n} z_k$$

(ii) Coefficient de degré 1 :

$$a_1 = (-1)^{n-1} \sum_{k=1}^{n} \prod_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} z_j$$

(iii) Coefficient de degré $n-1$:

$$a_{n-1} = -\sum_{k=1}^{n} z_k$$

(iv) Cas général (coefficient de degré d) :

$$a_d = (-1)^{n-d} \sum_{1 \leqslant k_1 < \cdots < k_d \leqslant n} \prod_{j=1}^{d} z_{k_j}$$

Ces formules s'obtiennent en développant le produit des facteurs $(X - z_k)$.

Exemple 27 (Racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. On appelle **racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité** les n racines distinctes du polynôme $X^n - 1$. Ce sont toutes des éléments de $\mathbb{U}$.

On appelle **racine primitive $n^{\text{ème}}$ de l'unité** une racine $n^{\text{ème}}$ de l'unité ω telle que le plus petit entier k vérifiant $\omega^k = 1$ soit n. Pour une telle racine, l'ensemble $\{\omega, \omega^2, \ldots, \omega^n\}$ est égal à l'ensemble des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

On prend souvent comme racine primitive $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ de sorte que l'ensemble des racines soient les $\{\omega^k \, mid \, 1 \leqslant k \leqslant n\}$. Les autres racines primitives sont en fait les ω^k avec k premier avec n.

Les racines de l'unité apparaissent souvent dans des endroits inattendus. On remarquera que si l'on retire $1 = \omega^n$, on obtient les $n-1$ racines (toutes complexes) de $X^{n-1} + X^{n-2} + \cdots + X + 1$.

Géométriquement, les racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité forment un n-gone régulier dont 1 est l'un des sommets.

Exercices

Exercice 1 (Polynôme de conjugaison)

Existe-t-il un polynôme P tel que $P(z) = \overline{z}$ pour tout $z \in \mathbb{C}$?

Solution de l'exercice 1
La réponse est non. Il existe plusieurs manières de s'en rendre compte :

Variante 1 : Si un tel P existe, alors P a une seule racine (qui est 0) et est donc proportionnel à X, autrement dit $P(X) = kX$ pour un certain $k \in \mathbb{C}$. On teste ensuite sur deux valeurs de X qui donnent deux valeurs de k différentes pour aboutir à une contradiction. Par exemple, $X = 1$ donne $k = 1$ et $X = i$ donne $k = -1$.

Variante 2 : Si un tel P existe, alors $P(X) - X$ a une infinité de racines (tous les réels) donc c'est le polynôme nul, c'est-à-dire que $P(X) = X$. Mais manifestement la conjugaison n'est pas égale à l'identité sur $\mathbb{C}$, il suffit de regarder en i pour le voir.

Exercice 2 (Trigonométrie)

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Calculer :

(a)
$$\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{n}$$

(b)
$$\sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sin \frac{2(2k+1)\pi}{n}$$

Solution de l'exercice 2

(a) On utilise la formule $\cos x = \frac{e^{ix}+e^{-ix}}{2}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$) :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \cos \frac{2k\pi}{n} &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} e^{\frac{2ik\pi}{n}} + \sum_{k=1}^{n} e^{-\frac{2ik\pi}{n}}\right] \\ &= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{n} \omega^k + \sum_{k=1}^{n} \overline{\omega}^k\right] \\ &= 0\end{aligned}$$

d'après les propriétés des racines $n^{\text{èmes}}$ de l'unité.

(b) On raisonne un peu comme à la question précédente :

$$\sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sin \frac{2(2k+1)\pi}{n} = \sum_{k=1}^{n} \sin \frac{2k\pi}{n} - \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} \sin \frac{4k\pi}{n}$$

Le premier terme est nul (exact analogue de l'exercice précédent) et on développe le deuxième en utilisant $\sin x = \frac{e^{ix}-e^{ix}}{2i}$ (pour tout $x \in \mathbb{R}$).

$$\begin{aligned}2i \sum_{k=1}^{\lfloor (n-1)/2 \rfloor} \sin \frac{2(2k+1)\pi}{n} &= -\sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} e^{4ik\pi n} + \sum_{k=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} e^{-4ik\pi n} \\ &= \sum_{k=1}^{n} (\omega^k)^2 + \sum_{k=1}^{n} (\overline{\omega}^k)^2\end{aligned}$$

On utilise ensuite les formules de Viète pour calculer :

$$\sum_{k=1}^{n} (\omega^k)^2 = \left(\sum_{k=1}^{n} \omega^k\right)^2 - 2 \sum_{1 \leqslant k < \ell \leqslant n} \omega^k \omega^\ell = 0$$

Finalement, la somme cherchée vaut 0.

Exercice 3

Soit $P \in \mathbb{C}[X]$ unitaire, de coefficients $a_0, \ldots, a_n = 1$. Montrer que si $z \in \mathbb{C}$ est racine de P, alors

$$|z| \leqslant \max\left(1, \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|\right)$$

Solution de l'exercice 3

Supposons $z \neq 0$ racine de P. Si $|z| < 1$, z vérifie l'énoncé. Sinon, on écrit

$$z^n = -a_{n-1}z^{n-1} - a_{n-2}z^{n-2} - \cdots - a_1 z^1 - a_0$$

En passant au module et en appliquant l'inégalité triangulaire, on a

$$|z|^n \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} |a_k| \cdot |z|^k$$

On divise par $|z|^{n-1} \geqslant 1$ ce qui donne :

$$|z| \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} \frac{|a_k|}{|z|^{n-k}} \leqslant \sum_{k=0}^{n-1} |a_k|$$

ce qui termine la preuve.

Exercice 4 ($\mathbb{U}$-magic)
Soit $a, b, c \in \mathbb{U}$. Comparer $|a+b+c|$ et $|ab+bc+ac|$.

Solution de l'exercice 4
On utilise les deux propriétés suivantes : pour tout $u \in \mathbb{U}$, $|u| = 1$ et $\overline{u} = \frac{1}{u}$.
On réécrit alors :

$$|ab+bc+ac| = \frac{1}{|abc|}|ab+bc+ac| = \left|\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right| = |\overline{a} + \overline{b} + \overline{c}| = |a+b+c|$$

Exercice 5 (Cas d'égalité de l'inégalité triangulaire)

Dans quel cas peut-on écrire $|z+z'| = |z| + |z'|$, pour $z, z' \in \mathbb{C}$?

Solution de l'exercice 5

On s'inspire du cas d'égalité pour des vecteurs, ce qui donne : il y a égalité si et seulement si $z = 0$ ou bien il existe $\lambda \in \mathbb{R}_+$, $z' = \lambda z$.

Exercice 6 (Formule de Moivre)

Soit $\theta \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$. Calculer $(\cos\theta + i\sin\theta)^n$.

Solution de l'exercice 6

On utilise la forme exponentielle : $\cos\theta + i\sin\theta = e^{i\theta}$. La forme exponentielle est facile à mettre à la puissance n :

$$(e^{i\theta})^n = e^{i\theta\times n} = e^{i(n\theta)}$$

que l'on décompose à nouveau sous forme "partie réelle + partie imaginaire" :

$$(\cos\theta + i\sin\theta)^n = \cos(n\theta) + i\sin(n\theta)$$

Exercice 7 (Polynômes de Tchebychev)

Soit $n \in \mathbb{N}$. À partir de la formule de Moivre, trouver un polynôme T_n et un polynôme S_n tels que pour tout $\theta \in \mathbb{R}$:

$$\cos(n\theta) = T_n(cos\theta) \qquad \text{et} \qquad \sin(n\theta) = \sin\theta S_n(\cos\theta)$$

Avertissement : exercice un peu "calculatoire moche".

Solution de l'exercice 7

Il faut globalement développer au binôme de Newton la formule de Moivre et utiliser la relation $\cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$. On obtient normalement :

$$T_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k} (-1)^k X^{n-2k} (1-X^2)^k$$

$$S_n(X) = \sum_{k=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2k+1} (-1)^k X^{n-(2k+1)} (1-X^2)^k$$

Exercice 8 (Racines réelles ou complexes ?)

Montrer que le polynôme $(X-i)^n - (X+i)^n$ n'a que des racines réelles, sans calcul.

Solution de l'exercice 8

Si z est racine du polynôme, c'est que l'on a

$$\begin{aligned}(z-i)^n = (z+i)^n \Rightarrow |z-i|^n &= |z+i|^n \\ &\Leftrightarrow |z_i| = |z+i| \\ &\Leftrightarrow z \text{ est équidistant (dans le plan complexe) des points } i \text{ et } -i \\ &\Leftrightarrow z \text{ est sur la médiatrice du segment entre } i \text{ et } -i \\ &\Leftrightarrow z \text{ est sur la droite réelle}\end{aligned}$$

Exercice 9 (Théorème de Kronecker)
Soit $n \in \mathbb{N}$. On pose $\mathcal{E}_n$ l'ensemble des polynômes unitaires de degré n à coefficients entiers dont les racines sont de module au plus 1. Montrer que l'ensemble $\mathcal{R}_n$ des racines de polynômes de $\mathcal{E}_n$ ne contient que des racines de l'unité (racines de $X^k - 1$ pour un entier k) et 0.

Solution de l'exercice 9

On va montrer d'abord que $\mathcal{E}_n$ est fini. Pour cela, soit

$$P(X) = \sum c_k X^k = \prod (X - z_i) \in \mathcal{E}_n$$

Alors d'après les relations coefficients/racines :

$$|c_k| = |(-1)^{n-k} \sum_{(i_1,\dots,i_{n-k})} \prod_j z_{i_j}| \leqslant \sum_{(i_1,\dots,i_{n-k})} \prod_j |z_{i_j}| \leqslant \sum_{(i_1,\dots,i_{n-k})} 1 = \binom{n}{k}$$

Comme c_k est entier, il est à valeurs dans $[\![-\binom{n}{k}, \binom{n}{k}]\!]$. En particulier, c_k ne peut prendre qu'un nombre fini de valeurs, et ce pour tout k. Il y a donc un nombre fini de choix pour les coefficients d'un élément P de $\mathcal{E}_n$ donc $\mathcal{E}_n$ est fini. Comme chaque polynôme possède un nombre fini de racines, $\mathcal{R}_n$ est également fini.

Montrons ensuite que $\mathcal{R}_n$ est stable par mise au carré. Si $P \in \mathcal{E}_n$, considérons le polynôme $Q = P(X)P(-X)$. C'est un polynôme de degré $2n$ tel que $Q(X) = Q(-X)$, donc Q n'a que des monômes de degré pair. Ainsi, il existe $R \in \mathbb{C}[X]$ unitaire tel que $Q(X) = (-1)^n R(X^2)$. Les racines que Q sont les racines de P au signe près, donc les racines de R sont les carrés des racines de P.

On en déduit que $x \in \mathcal{R}_n \Rightarrow x^2 \in \mathcal{R}_n$.

Soit $x \in \mathcal{R}_n$. Alors x^{2^k} appartient à $\mathcal{R}_n$ pour tout k. Mais puisque $\mathcal{R}_n$ est fini, on dispose de deux indices k et j tels que $x^{2^k} = x^{2^j}$. Ceci implique que $x = 0$ ou que x est racine de l'unité comme annoncé.

Exercice 10 (Critère d'irréductibilité)

Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ unitaire, de degré $\deg P = d \geqslant 1$, et dont toutes les racines (complexes) $z_1, \dots, z_d$ sont de module strictement plus grand que 1. On suppose de plus que $P(0) = p$ est un nombre premier.

Montrer que P est irréductible dans $\mathbb{Z}[X]$, c'est à dire qu'il n'existe pas de polynômes $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ non constants tels que $P(X) = Q(X)R(X)$.

Solution de l'exercice 10

On suppose par l'absurde qu'il existe $Q, R \in \mathbb{Z}[X]$ non constants tel que $P(X) = Q(X)R(X)$. Notons $\ell = \deg Q$, $m = \deg R$ et $a_0, \dots, a_\ell \in \mathbb{Z}$ les coefficients de Q ainsi que $b_0, \dots, b_m$ ceux de R :

$$Q(X) = a_0 + \cdots + a_\ell X^\ell \qquad \text{et} \qquad R(X) = b_0 + \cdots + b_m X^m$$

On a alors par hypothèse $\ell + m = d$, $1 \leqslant \ell < d$ et $1 \leqslant m < d$.

Considérons le coefficient dominant de P, qui vaut $1 = a_\ell b_m$. On en déduit que quitte à remplacer Q, R par $-Q, -R$, on a $a_\ell = b_m = 1$. Ainsi, Q et R sont unitaires.

Regardons ensuite le coefficient constant, qui vaut $p = P(0) = a_0 b_0$. Comme p est premier, on en déduit que quitte à échanger Q et R, on a $a_0 = \epsilon p$ et $b_0 = \epsilon$ où $\epsilon \in \{-1, 1\}$. Or toutes les racines de R sont aussi des racines de P, notons les $t_1, \dots, t_m$. Par hypothèse, le module de leur produit est

$$|t_1 \dots t_m| = |t_1| \dots |t_m| > 1 epsilon$$

puisque pour chaque indice k, $|t_k| > 1$. Mais on a aussi (relation coefficients-racines)

$$1 = |b_0| = |t_1 \dots t_m|$$

ce qui constitue une contradiction et permet de rejeter l'hypothèse de réductibilité de P dans $\mathbb{Z}[X]$.

Exercice 11 (Distance à $\mathbb{U}$)

Montrer que pour tout $u \in \mathbb{U}$ et $z \in \mathbb{C}^*$, on a

$$\left| u - \frac{1}{z} \right| = \frac{|u - z|}{|z|}$$

Solution de l'exercice 11

On utilise le fait que $|u| = 1$ et l'invariance du module par conjugaison pour écrire :

$$\left|u - \frac{1}{\overline{z}}\right| = \left|\overline{u} - \frac{1}{z}\right| = \frac{|\overline{u}z - 1|}{|z|} = \frac{|u| \cdot |\overline{u}z - 1|}{|z|} = \frac{|u\overline{u}z - u|}{|z|} = \frac{|u - z|}{|z|}$$

Exercice 12 (Critère de divisibilité)

Pour quels entiers $n \in \mathbb{N}$ le polynôme $P(X) = X^2 + X + 1$ divise-t-il le polynôme $P_n(X) = X^{2n} + X^n + 1$, autrement dit pour quels n existe-t-il un polynôme $Q \in \mathbb{C}[X]$ tel que $P_n(X) = Q(X)P(X)$?

<u>*Solution de l'exercice 12*</u>

On remarque que $P_n(X) = P(X^n)$ et que "P divise P_n" signifie exactement que toutes les racines que P sont racines de P_n puisque P a deux racines distinctes (ce n'est pas une identité remarquable de carré d'un polynôme de degré 1).

Or, les racines de P sont :

$$z_\pm = -\frac{1}{2} \pm i\frac{\sqrt{3}}{2} = e^{\pm i\frac{2\pi}{3}}$$

Comme on a ici affaire à des polynômes réels, on sait que si z_+ est racine de P_n, $z_- = \overline{z_+}$ l'est aussi. Il suffit donc de regarder à quelle condition z_+^n est égal à z_+ ou z_- :

$$\begin{aligned} z_+^n = z_+ &\Leftrightarrow e^{i\frac{2n\pi}{3}} = e^{i\frac{2\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n\pi}{3} \equiv \frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow n \equiv 1\ [3] \\ z_+^n = z_- &\Leftrightarrow e^{i\frac{2n\pi}{3}} = e^{-i\frac{2\pi}{3}} \\ &\Leftrightarrow \frac{2n\pi}{3} \equiv -\frac{2\pi}{3}\ [2\pi] \\ &\Leftrightarrow n \equiv -1\ [3] \end{aligned}$$

Donc les n solution sont exactement tous les entiers non multiples de 3.

Exercice 13 (Trinôme du second degré complexe)

(a) En s'inspirant de la méthode pour le cas réel (réduction au cas où le coefficient b de degré 1 est nul), trouver une formule pour calculer les racines du polynôme du second degré $aX^2 - bX + c$, où $a, b, c \in \mathbb{C}$ et $a \neq 0$.

(b) Appliquer la démarche au polynôme $X^2 + X + 1 + i$.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>

(a) Lorsque $b = 0$, la solution est immédiate : les solutions sont les deux racines carrées du complexe $-\frac{c}{a}$. Contrairement au cas réel, cela n'a pas vraiment de sens d'écrire "$\sqrt{-\frac{c}{a}}$" puisqu'il n'y a en général pas une solution positive et une négative. En revanche, en

mettant le nombre sous forme exponentielle $-\frac{c}{a} = = re^{i\theta}$ ($r \in \mathbb{R}_+$ et $\theta \in \mathbb{R}$), on sait que les deux racines ont pour expression $\pm\sqrt{r}e^{i\frac{\theta}{2}}$.
Dans le cas général, on manipule un peu le polynôme pour faire apparaître un carré moins un terme constant :

$$aX^2 - bX + c = a\left[\left(X - \frac{b}{2a}\right)^2 - \left(\frac{b^2}{4a^2} - \frac{c}{a}\right)\right]$$

En prenant δ une racine carrée de $\Delta = b^2 - 4ac$, on retrouve bien la formule des racines $z_\pm$

$$z_\pm = \frac{b \pm \delta}{2a}$$

(b) On commence par calculer

$$\Delta = 1 - 4(1 + i) = -3 - 4i$$

Il faut ensuite en trouver une racine carrée. Pour cela, il y a plusieur méthodes. Par exemple, on peut résoudre le système sur les parties réelle et imaginaires d'une telle racine :

$$\begin{cases} a^2 - b^2 = -3 \\ 2ab = -4 \\ a^2 + b^2 = |3 + 4i| = 5 \end{cases}$$

On trouve une solution : $a = 1$, $b = 2$. Ainsi, $\delta = 1 - 2i$. Ensuite on déroule la formule pour trouver les racines :

$$z_+ = \frac{-1 + (1 - 2i)}{2} = -i \qquad \text{et} \qquad z_- = \frac{-1 - (1 - 2i)}{2} = i - 1$$

4 Loi des sinus (Antoine)

La loi des sinus permet de relier des informations d'angles et de longueurs dans une figure. Elle peut être très utile, et permet de résoudre facilement des exercices qui seraient beaucoup plus difficiles sans. Je ne vais pas réécrire un cours sur la loi des sinus puisqu'un excellent cours existe déjà : il s'agit du merveilleux poly de Martin Rakovsky disponible sur le site de la POFM : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2020/10/cours-gÃl'omÃl'trie-analytique.pdf. Sans plus tarder, lançons-nous dans les exercices !

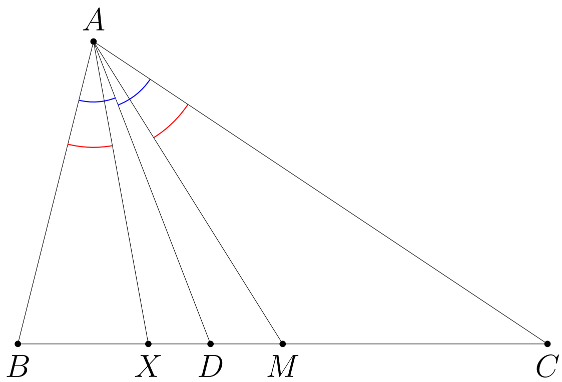
Exercice 1
Montrer le "lemme magique" : si ABC est un triangle et que D est un point de $[BC]$, alors

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{CAD}}.$$

En déduire les théorèmes de la bissectrice et de la symédiane : si D et X sont le pied de la bissectrice et de la symédiane issues de A, alors

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BA}{CA} \text{ et } \frac{BX}{CX} = \frac{BA^2}{CA^2}.$$

Solution de l'exercice 1



Pour la première partie, on applique la loi des sinus aux triangles BAD et CAD, pour obtenir

$$\frac{BD}{\sin \widehat{BAD}} = \frac{AB}{\sin \widehat{ADB}}$$

et

$$\frac{CD}{\sin \widehat{CAD}} = \frac{AC}{\sin \widehat{ADC}}$$

on divise les deux égalités, et en utilisant le fait que $\sin \widehat{ADC} = \sin \widehat{ADB}$ car $\sin(\pi - x) = \sin x$, on obtient bien

$$\frac{BD}{DC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{BAD}}{\sin \widehat{CAD}}.$$

Pour le pied de la bissectrice, on a directement $\widehat{BAD} = \widehat{CAD}$, donc c'est fini.
Pour le pied de la symédiane, on applique le lemme magique à X et M, pour obtenir

$$\frac{BX}{XC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{BAX}}{\sin \widehat{XAD}}$$

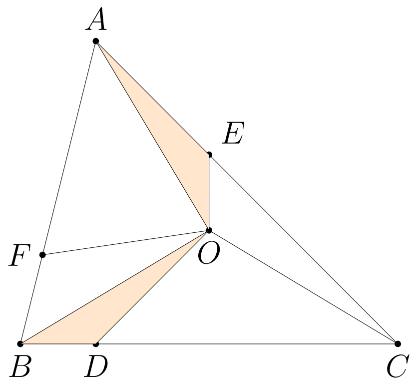
et

$$1 = \frac{BM}{MC} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{BAM}}{\sin \widehat{CAM}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{CAX}}{\sin \widehat{BAX}}$$

où la dernière égalité vient de la définition de la symédiane. En combinant les deux égalités on obtient bien ce qu'on veut.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, D, E et F les pieds respectifs des hauteurs issues des sommets A, B et C. Soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ABC. Montrer que les segments OA, OB, OC, OD, OE et OF coupent le triangle ABC en trois paires de triangles de même aire.

Solution de l'exercice 2



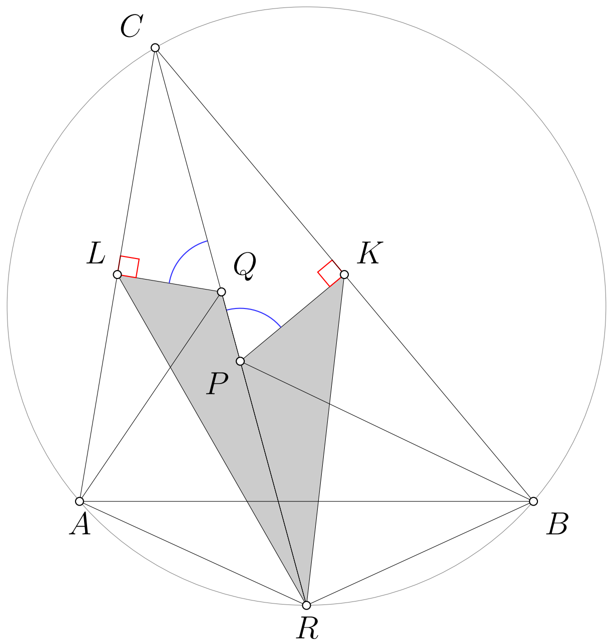
On pourrait être intelligent et faire des choses intelligentes pour cet exercice, mais on va voir que ce n'est pas vraiment nécessaire ici. On calcule l'aire S du triangle AEO, les autres se calculent de manière similaire.
On a

$$S = \frac{1}{2} AE \cdot AO \cdot \sin \widehat{OAE} = \frac{1}{2} \cdot AB \cos \alpha \cdot R \cdot \sin \left(90 - \frac{\widehat{AOC}}{2} \right) = R^2 \sin \gamma \cos \alpha \cos \beta.$$

On remarque que les autres valeurs d'aire vont être obtenues avec une permutation de α, β, γ, donc on peut effectivement les associer en trois paires de triangles d'aires égales.

Exercice 3
Soit ABC un triangle. La bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$ recoupe le cercle circonscrit du triangle ABC au point R, coupe la médiatrice du segment $[BC]$ au point P coupe la médiatrice du segment $[AC]$ au point Q. Soit K le milieu du segment $[BC]$ et L le milieu du segment $[AC]$. Montrer que les triangles RPK et RQL ont la même aire.

Solution de l'exercice 3
(Merci à Martin pour la correction de cet exercice)



On pourrait par exemple utiliser la formule de l'aire impliquant le sinus. Il faut encore trouver l'angle à privilégier dans chaque triangle. Dans la pratique, il faut envisager un peu chacun des trois angles.

Ici, on remarque que puisque les points P et Q sont respectivement sur les médiatrices des segments $[BC]$ et $[AC]$, les triangles CLQ et CKP sont droits. Puisque P et Q sont sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BCA}$, les angles $\widehat{LCQ}$ et $\widehat{KCP}$ sont égaux. Il vient alors que

$$\widehat{CQL} = \widehat{CPK}.$$

On a alors $\widehat{LQR} = \widehat{KPR}$ et

$$\frac{\mathcal{A}(RQL)}{\mathcal{A}(RPK)} = \frac{\frac{1}{2}QL \cdot QR \cdot \sin \widehat{LQR}}{\frac{1}{2}PK \cdot PR \cdot \sin \widehat{KPR}} = \frac{QL}{PK} \cdot \frac{QR}{PR}.$$

Puisque les triangles CLQ et CKP sont semblables, on a déjà

$$\frac{QL}{PK} = \frac{CL}{CK} = \frac{\frac{1}{2}AC}{\frac{1}{2}BC} = \frac{AC}{BC}.$$

D'autre part, les triangles CQA et CPB étant isocèles, on déduit que $\widehat{QAC} = \widehat{PBC} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$. De plus, le point R n'est autre que le pôle Sud du sommet C dans le triangle ABC, on déduit alors

$$\widehat{QAR} = \widehat{CAB} - \widehat{CAQ} + \widehat{BAR} = \widehat{CAB} - \frac{1}{2}\widehat{ACB} + \widehat{RCB} = \widehat{CAB} = \widehat{CRB} = \widehat{PRB}.$$

De même $\widehat{PBR} = \widehat{QRA}$. Le triangles QAR et PRB sont donc semblables. Puisque $AR = RB$, ils sont mêmes isométriques et

$$\frac{QR}{PR} = \frac{PB}{QA} = \frac{CP}{CQ} = \frac{CB}{CA}.$$

Il vient que

$$\frac{QL}{PK} \times \frac{QR}{PR} = \frac{AC}{BC} \times \frac{CB}{CA} = 1.$$

Cette conclusion marche si on est intelligent, mais que se passe-t-il si on ne l'est pas ? On peut juste essayer de calculer les deux longueurs restantes, PR et QR. Bien que ce soit possible explicitement, ce sera beaucoup plus simple de calculer CQ et CP, ainsi que CR. En effet, on a

$$CR = 2R \sin \widehat{CAR} = 2R \sin(\alpha + \gamma/2) = 2R \cos((\alpha - \beta)/2),$$

et

$$CP = \frac{CK}{\cos \gamma/2} = \frac{R \sin \alpha}{\cos \gamma/2}$$

et de même $CQ = \frac{R \sin \beta}{\cos \gamma/2}$.
Là encore, on pourrait simplement calculer $\frac{CR-CQ}{CR-CP}$, mais cela engendrerait beaucoup de calculs. Une autre manière de faire est de remarquer que ce qu'on veut montrer est que

$$\frac{QR}{PR} = \frac{BC}{AC} = \frac{PC}{QC},$$

ou encore $QC = PR$, et $PC = QR$. Mais cela arrive exactement quand $QC + PC = RC$! Or,

$$QC + PC = \frac{R(\sin \alpha + \sin \beta)}{\cos \gamma/2} = \frac{2R \cos((\alpha - \beta)/2) \sin((\alpha + \beta)/2)}{\cos \gamma/2} = 2R \cos((\alpha - \beta)/2) = CR$$

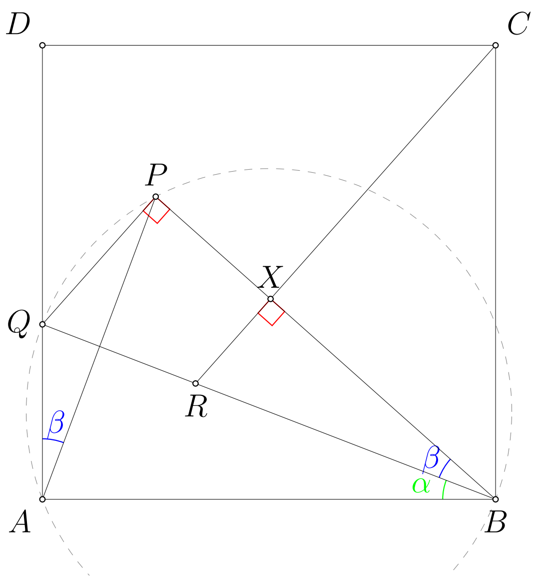
comme voulu.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un carré. Soit P un point à l'intérieur du carré tel que $\widehat{BAP} \geqslant 60°$. Soit Q le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (BP) passant par P avec le côté $[AD]$. Soit R le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (BP) passant par C avec la droite BQ.

1) Montrer que $BP \geqslant BR$.

2) Pour quelles positions du point P l'inégalité précédente est-elle une égalité ?

Solution de l'exercice 4
(Merci à Martin pour la correction de cet exercice.)



Puisqu'il y a un carré, on pourrait vouloir poser un repère et effectuer un calcul en coordonnées cartésiennes. Mais on peut aussi traiter cet exercice à l'aide du trigo/length bashing.

Première étape : combien y a-t-il de degrés de libertés ? Manifestement il y en a 2 donnés par la position du point P. Si l'on veut tenter le trigo/length bashing, on s'attend à exprimer toutes les longueurs et angles en fonction de deux paramètres.

Le fait que l'énoncé nous demande une inégalité de longueur pourrait nous donner envie de choisir deux longueurs en paramètre, mais on va vite se rendre compte que pour avancer, on aura plutôt besoin d'angles.

On rajoute les points dont on a besoin, notamment le point X, point d'intersection des droites (BP) et (CR). On remarque aussi que $\widehat{QPB} = 90° = \widehat{QAB}$ donc les points A, Q, P et B sont cocycliques, ce qui est indéniablement une information utile.

Les deux angles paramètres vont apparaître naturellement dans nos calculs.

D'une part :

$$BP = BQ \cos \widehat{QBP} = \frac{AB}{\cos \widehat{QBA}} \cos \widehat{QBP}$$

et d'autre part :

$$BR = \frac{BX}{\cos \widehat{QBP}} = \frac{BC \cos \widehat{XBC}}{\widehat{QBP}}$$

Les meilleurs candidats pour être des paramètres sont donc les angles $\widehat{QBA}$ et $\widehat{QBP}$ que l'on note respectivement α et β. La condition $\widehat{BAP} > 60°$ se réécrit $\widehat{QBP} = \widehat{QAP} < 30°$. De plus $\widehat{XBC} = 90° - \widehat{PBA}$ donc $\cos \widehat{XBC} = \cos(90° - (\alpha + \beta)) = \sin(\alpha + \beta)$. L'inégalité à démontrer se réécrit

$$\frac{\cos \beta}{\cos \alpha} \geqslant \frac{\sin(\alpha + \beta)}{\cos \beta}$$

ou encore

$$\cos^2\beta \geqslant \sin(\alpha+\beta)\cos(\alpha) = \frac{1}{2}\left(\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta\right)$$

Pour cette inégalité, on remarque que l'angle $2\alpha+\beta$ n'a pas beaucoup de signification géométrique, on peut donc tenter bêtement l'inégalité $\sin(2\alpha+\beta) \leqslant 1$. En revanche, puisque $\beta < 30°$, on a $\sin\beta \leqslant \sin 30° = \frac{1}{2}$ et $\cos\beta \geqslant \cos 30° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. On rentre toutes ces inégalités dans l'inégalité et on trouve

$$\cos^2\beta \geqslant \frac{3}{4} = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{2}\right) \geqslant \frac{1}{2}\left(\sin(2\alpha+\beta)+\sin\beta\right)$$

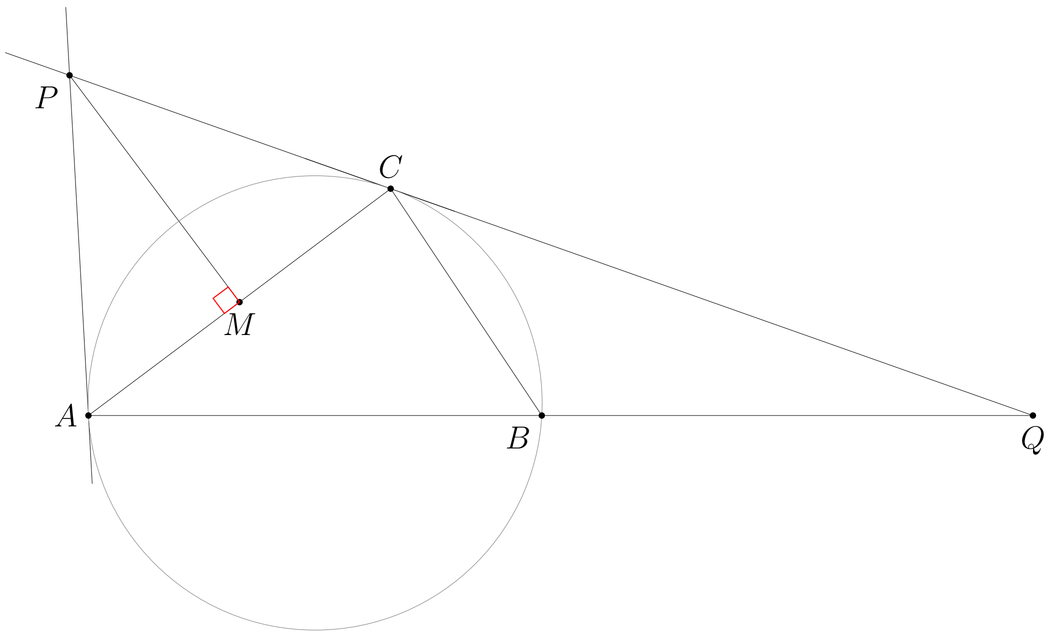
L'inégalité de la question 1) est donc démontrée. Le cas d'égalité demandé en question 2) est facile avec nos inégalités : il faut $\beta = 30°$ et $2\alpha + 30° = 90°$ soit $\alpha = 30°$. Ceci est satisfait si et seulement si $\widehat{BAP} = \widehat{ABP} = 60°$ donc lorsque le triangle ABP est équilatéral.

Exercice 5
Soit ABC un triangle, P le point d'intersection des tangentes au cercle circonscrit aux points A et C. La droite (PC) recoupe la droite (AB) au point Q. On suppose que

$$\mathcal{A}(ABC) = \mathcal{A}(ACP) = \mathcal{A}(BCQ).$$

Montrer que $\widehat{BCA} = 90°$.

Solution de l'exercice 5



On pourrait juste exprimer toutes les aires avec la formule $\frac{1}{2}ab\sin\gamma$, mais on peut aussi des fois être légèrement intelligent ! En effet, on remarque par puissance du point que les triangles QBC (hihi) et QCA sont semblables. L'hypothèse de l'énoncé dit que $\mathcal{A}(ACQ) = 2\mathcal{A}(QBC)$, autrement dit la similitude qui envoie QBC sur QCA a rapport $\sqrt{2}$. On en déduit que $b = \sqrt{2}a$, et en termes de sinus, $\sin\beta = \sqrt{2}\sin\alpha$.

Par manque d'inspiration, on calcule brutalement les deux autres aires pour pouvoir utiliser l'égalité. D'un côté,

$$\mathcal{A}(ABC) = \frac{1}{2}ab\sin\gamma = \frac{1}{2\sqrt{2}}b^2\sin\gamma,$$

et d'un autre côté si M désigne le milieu de $[AC]$, alors

$$\mathcal{A}(APC) = \frac{1}{2}AC \times PM = \frac{1}{2}b \times AM\tan\beta = \frac{1}{4}b^2\tan\beta.$$

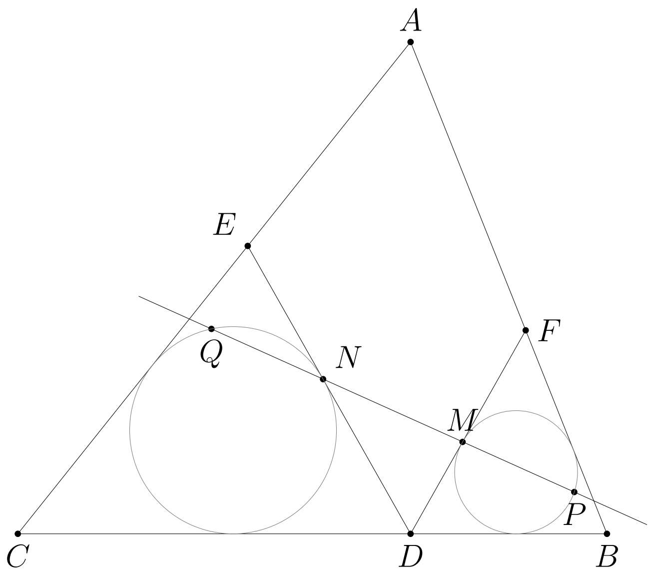
Ainsi les conditions de l'énoncé se traduisent par $\sin\beta = \sqrt{2}\sin\alpha$, et $\tan\beta = \sqrt{2}\sin\gamma$.
Si on triture ça assez il va bien y avoir un $\gamma = 90$ qui va sortir non ?
Oui :

$$\sqrt{2}\sin\alpha = \sqrt{2}(\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\sin\gamma) = \sqrt{2}\sin\beta\cos\gamma + \cos\beta\tan\beta = \sin\beta(1+\sqrt{2}\cos\gamma)$$

où on a utilisé $\sqrt{2}\sin\gamma = \tan\beta$. Mais on se retrouve donc à dire que $\sin\beta = \sin\beta(1+\sqrt{2}\cos\gamma)$! On doit donc avoir $\sin\beta = 0$ ou $\cos\gamma = 0$, et $\sin\beta = 0$ donne $\beta = 0$ ou 180, donc le triangle est dégénéré, ce qui est exclu. On a donc $\cos\gamma = 0$, ou $\gamma = 90$ comme attendu.

Exercice 6
Soit ABC un triangle acutangle, et D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. On pose ω_B et ω_C les cercles inscrits aux triangles BDF et CDE respectivement. On pose M (resp. N) le point de tangence de ω_B (resp. ω_C) avec DF (resp. DE). La droite (MN) rencontre à nouveau ω_B en P, et ω_C en Q.
Montrer que $MP = NQ$.

Solution de l'exercice 6



Par puissance d'un point dans $(BDEA)$, les triangles CDE et CAB sont semblables. De même, BFD et BCA sont semblables. De plus, on connaît le rapport de similitude, vu que $\frac{BD}{AB} = \cos\beta$. La similitude conserve bien sûr le cercle inscrit, et les points de contact, donc

$$MD = \frac{b+c-a}{2}\cos\beta \text{ et } ND = \frac{b+c-a}{2}\cos\gamma$$

.
Par ailleurs, par loi des sinus et angle tangentiel,

$$\frac{MP}{\sin \widehat{FMP}} = 2r\cos\beta,$$

où r est le rayon du cercle inscrit de ABC, et donc $r\cos\beta$ est le rayon de ω_B. De même, on trouve

$$\frac{NQ}{\sin \widehat{ENQ}} = 2r\cos\gamma,$$

et enfin

$$\frac{MP}{NQ} = \frac{\sin \widehat{FMP}}{\sin \widehat{ENQ}} \frac{\cos\beta}{\cos\gamma}.$$

Seulement, par loi des sinus dans le triangle MND, on a également

$$\frac{MD}{\sin \widehat{ENQ}} = \frac{ND}{\sin \widehat{FMP}},$$

et rappelons qu'on avait trouvé

$$MD = \frac{b+c-a}{2}\cos\beta, \text{ et } ND = \frac{b+c-a}{2}\cos\gamma,$$

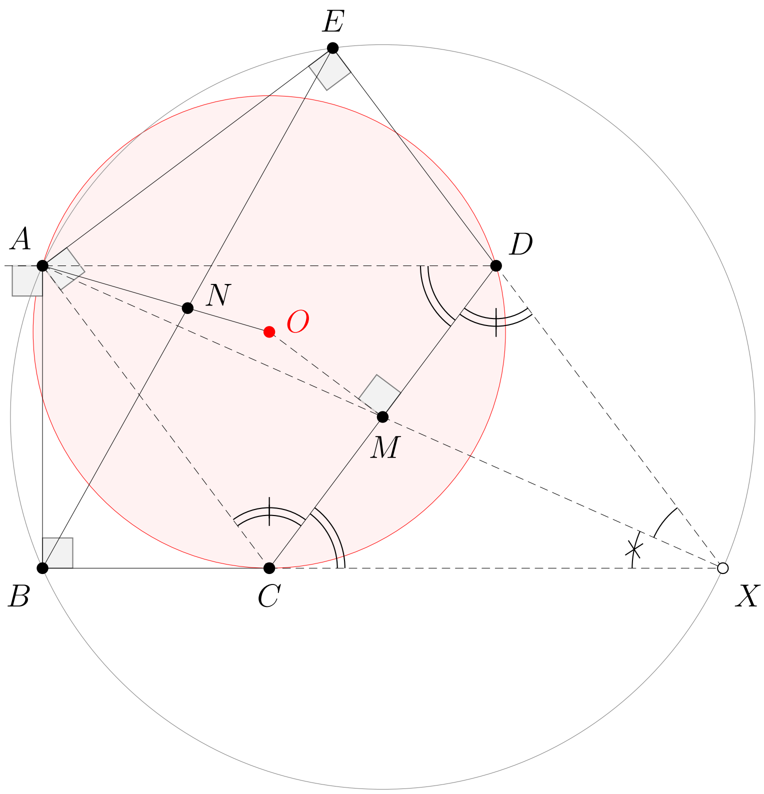
de sorte qu'on ait effectivement

$$\frac{\sin \widehat{FMP}}{\sin \widehat{ENQ}} = \frac{ND}{MD} = \frac{\cos\gamma}{\cos\beta}$$

et finalement $MP = NQ$.

Exercice 7
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADE} = 90$, soit O le centre du cercle circonscrit au triangle ACD.
On suppose que le milieu de $[CD]$ est le centre du cercle circonscrit à ABE, montrer que (AO) passe par le milieu du segment $[BE]$.

Solution de l'exercice 7
(Cette merveilleuse solution est empruntée à titre définitif du corrigé du test de février 2024.)



On pose M le milieu de $[CD]$ et X l'intersection de (ED) et (BC). Les angles droits de l'énoncé indiquent que AX est un diamètre du cercle circonscrit à ACD, et en particulier les diagonales du quadrilatère $ACXD$ se croisent en leur milieu, c'est un parallélogramme. Si on pose N l'intersection de (BE) et (AO), on veut montrer que $EN = BN$.
Posons $\alpha = \widehat{DXA}$, $\beta = \widehat{AXC}$, $\gamma = \widehat{XCD} = \widehat{DCA}$ et $\delta = \widehat{DCA} = \widehat{CDX}$. La loi des sinus indique que

$$BN = \frac{\sin(\widehat{BAN})AN}{\sin(\widehat{NBA})} = \frac{\sin(\widehat{BAO})AN}{\sin(\alpha)}.$$

Or,

$$\begin{aligned}\widehat{BAO} &= \widehat{BAC} + \widehat{CAO} = (90° - \widehat{ACB}) + (90° - \widehat{AOC}/2)\\ &= 180° - (180° - \widehat{XCA}) - \widehat{ADC} = (\gamma + \delta) - \gamma = \delta,\end{aligned}$$

et la loi des sinus indique également que

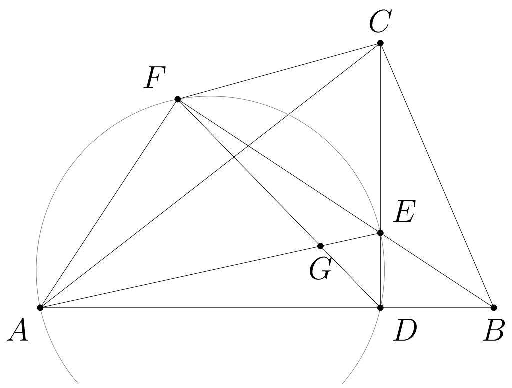
$$\frac{\sin(\delta)}{\sin(\alpha)} = \frac{\sin(\widehat{MDX})}{\sin(\widehat{DXM})} = \frac{MX}{MD}.$$

Ainsi, $BN = \dfrac{\sin(\delta)AN}{\sin(\alpha)} = \dfrac{MX \times AN}{MD}$. On démontre de même que $EN = \dfrac{MX \times AN}{MC}$, et on conclut en rappelant que $MC = MD$.

Exercice 8
Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit D le pied de la hauteur issue du sommet C.

La bissectrice de l'angle ABC coupe la droite (CD) au point E et recoupe le cercle circonscrit au triangle ADE au point F. On suppose que $\widehat{ADF} = 45°$. Montrer que la droite (CF) est tangente au cercle circonscrit au triangle ADE.

Solution de l'exercice 8
(Merci à Martin pour la correction de cet exercice.)



Si $\widehat{ADE} = 45°$, alors le point F est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{ADE}$ et du cercle circonscrit au triangle ADE. Le point F est donc le pôle Sud du sommet D dans le triangle ADE. Le triangle AFE est donc isocèle. Pour montrer que la droite (CF) est tangente au cercle circonscrit au triangle ADE, il suffit donc de montrer que les droites (AE) et (CF) sont parallèles.

Pour le faire nous allons utiliser le théorème de Thalès et introduire le point G, point d'intersection des droites (DF) et (AE).

Il suffit de montrer que $\frac{GD}{GF} = \frac{ED}{EC}$. On note que la condition supprime au moins un degré de liberté, on doit donc s'attendre à manipuler des expressions dépendant d'au plus deux paramètres (encore faut-il les trouver).

D'une part, par le théorème de la bissectrice, $\frac{ED}{EC} = \frac{BD}{BC} = \cos\widehat{ABC}$. On note $\beta = \widehat{ABC}$ qui nous donne un premier paramètre. Cela dit, comme la première fraction ne dépend que de β, on s'attend à ce que la deuxième fraction aussi. On doit donc exprimer tous les angles et toutes les longueurs en fonction de β.

Il n'y pas beaucoup d'autre solutions que d'utiliser la loi des sinus dans les triangles ADG et AFG pour avoir $\frac{GD}{GF}$. On calcule donc tous les angles dans ces triangles en fonction de β. Les triangles AFB et EDB sont semblables, donc $\widehat{FAD} = 90° - \frac{\beta}{2}$. Par le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{GAF} = 45°$ donc $\widehat{GAD} = 45° - \frac{\beta}{2}$. Enfin, $\widehat{AFD} = 90° - \widehat{DFA} = 90° - \widehat{DAE} = 45° + \frac{\beta}{2}$.

$$\frac{GD}{GF} = \frac{GD}{AG} \cdot \frac{AG}{GF} = \frac{\sin(45° - \beta/2)}{\sin 45°} \cdot \frac{\sin(45° + \beta/2)}{\sin 45°} = 2\sin(45° - \beta/2)\sin(45° + \beta/2)$$

On reconnaît ici la formule de l'angle double du sinus, on a donc

$$2\sin(45° - \beta/2)\sin(45° + \beta/2) = 2\sin(45° - \beta/2)\cos(45° - \beta/2) = \sin(90° - \beta) = \cos\beta.$$

On a donc l'égalité de rapport $\frac{GD}{GF} = \frac{ED}{EC}$, cela termine l'exercice.

5 Géométrie projective (Aurélien)

En stand-by...

6 Algèbre : TD pot pourri (Théo)

L'objectif de ce TD est de regarder des exos de type A1-A2, afin d'être paré aux tests de l'an suivant ! Les exercices 1 à 7 sont issus de diverses compétitions de niveau P1 facile à moyen, et les autres exercices sont issus de shortlists OIM.

Exercice 1
Déterminer le plus grand k vérifiant la propriété suivante : si $x_1, \ldots, x_{2024}$ sont des x_i vérifiant $x_1^2 = (x_1 + x_2)^2 = \cdots = (x_1 + \cdots + x_{2024})^2$, alors au moins k x_i sont égaux.

Exercice 2
Soit $a_0, \ldots, a_n$ des réels. Démontrer qu'il existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$,

$$a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \leqslant a_0 + \cdots + a_k.$$

Exercice 3
Soit $a_0, \ldots, a_{2024}$ des réels tels que $|a_i - a_{i+1}| \leqslant 1$ pour tout i vérifiant $0 \leqslant i \leqslant 2023$.

— Quelle est la valeur minimale que peut prendre $a_0 a_1 + \cdots + a_{2023} a_{2024}$?

— Existe-t-il une constante C telle que $a_0 a_1 - a_1 a_2 + \cdots + a_{2022} a_{2023} - a_{2023} a_{2024} \geqslant C$ quelle que soit les réels $a_0, \ldots, a_{2024}$ tels que $|a_i - a_{i+1}| \leqslant 1$?

Exercice 4
On dit qu'un quadruplet de réels positifs (a, b, c, d) est balancé si $a+b+c+d = a^2+b^2+c^2+d^2$. Déterminer tous les réels strictement positifs x tels que $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \geqslant 0$ pour tout (a, b, c, d) balancé.

Exercice 5
Déterminer tous les ensembles S dont le plus petit élément est 1 et tel que si x, y sont dans S et vérifient $x > y$, alors $\sqrt{x^2 - y^2} \in S$.

Exercice 6
Soit $a_1, \ldots, a_n$ n réels strictement positifs, on pose pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$ $b_i = \frac{a_{i-1} + a_{i+1}}{a_i}$ (où $a_0 = a_n$ et $a_{n+1} = a_1$). On suppose que pour tout i, j dans $\{1, \ldots, n\}$ $a_i \leqslant a_j$ si et seulement si $b_i \leqslant b_j$. Montrer que $a_1 = \cdots = a_n$.

Exercice 7
Pour une suite $a_1 < \cdots < a_n$ d'entiers. Une paire (i, j) d'entiers vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n$ est dite intéressante s'il existe une paire (k, ℓ) d'entiers vérifiant $1 \leqslant k < \ell \leqslant n$ tels que

$$\frac{a_\ell - a_k}{a_j - a_i} = 2.$$

Déterminer en fonction de n le nombre maximal de paires intéressantes.

Exercice 8
Soit $a_0, a_1, \ldots$ une suite d'entiers vérifiant $0 \leqslant a_i \leqslant i$ pour tout $i \geqslant 0$. On suppose que pour tout $n \geqslant 0$,

$$\binom{n}{a_0} + \binom{n}{a_1} + \cdots + \binom{n}{a_n} = 2^n.$$

Démontrer que chaque entier positif apparaît au moins une fois dans la suite.

Exercice 9
Soit n un entier strictement positif et S un sous-ensemble de $\{0, \ldots, 5^n\}$ avec $4n+2$ éléments. Démonter qu'il existe $a < b < c$ dans S tels que $c + 2a > 3b$.

Exercice 10
Déterminer tous les entiers n tels que l'égalité suivante est vraie :

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} \left\lfloor \frac{ij}{n+1} \right\rfloor = \frac{n^2(n-1)}{4}$$

Exercice 11
Soit $k \geqslant 2$ un entier. Déterminer le plus petit $n \geqslant k+1$ vérifiant la propriété suivante : il existe un ensemble S d'entiers de cardinal n tel que tout élément de S peut être écrit comme une somme de k autres éléments distincts de S.

Exercice 12
Déterminer tous les réels α tels que, pour tout entier n strictement positif, l'entier

$$\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + \ldots + \lfloor n\alpha \rfloor$$

soit un mutiple de n.

Exercice 13
Soit $u_1, \ldots, u_{2019}$ des réels tels que $u_1 + \cdots + u_{2019} = 0$, $u_1^2 + \cdots + u_{2019}^2 = 1$. On pose $a = \min(u_i)$ et $b = \max(u_i)$.

Montrer que

$$ab \leqslant \frac{-1}{2019}.$$

Exercice 14
Soit $\mathcal{A}$ l'ensemble des polynômes en trois indéterminées X, Y, Z à coefficients dans $\mathbb{Z}$. Soit B l'ensemble des polynômes en trois indéterminées X, Y, Z à coefficients dans $\mathbb{Z}$ qui peuvent s'écrire :

$$P(X,Y,Z)(X+Y+Z) + Q(X,Y,Z)(XY+YZ+XZ) + R(X,Y,Z)XYZ$$

pour P, Q, R des éléments de $\mathcal{A}$. Déterminer le plus petit n tels que si i, j, k sont des entiers positifs tels que $i + j + k \geqslant n$, alors $X^i Y^j Z^k$ est dans $\mathcal{B}$.

Exercice 15
Soit $x_1, \ldots, x_{2023}$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts tels que pour tout entier n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2023$, le nombre

$$a_n = \sqrt{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

est un entier. Démontrer que $a_{2023} \geqslant 3034$

Solution de l'exercice 1
Posons $s_k = x_1 + \cdots + x_k$ pour tout $k \in \{1, \ldots, 2024\}$. En particulier pour tout tel k, $s_k = x_1^2$, donc $s_k = \pm x_1$. En particulier, pour tout $k \geqslant 2$, $x_k = s_k - s_{k-1} \in \{0, 2x_1, -2x_1\}$. Il y a donc 2023 termes prenant au plus 3 valeurs, donc un prend au moins $\lceil \frac{2023}{3} \rceil = 675$ fois la même valeurs. Ainsi $k = 675$ vérifie la propriété de l'énoncé.

Considérons la suite $x_1 = 1$, $x_2 = x_4 = \cdots = x_{1350} = -2$, $x_3 = x_5 = \cdots = x_{1351} = 2$, et $x_{1352} = x_{1353} = \cdots = x_{2024} = 0$. En particulier, $s_1 = 1$, $s_2 = s_4 = \cdots = s_{1350} = -1$, $s_3 = s_5 = \cdots = s_{1351} = 1$ et $s_{1352} = \cdots = s_{2024} = 1$, donc tous les s_k^2 sont égaux, la suite vérifie bien les conditions de l'énoncé. De plus, les x_i prennent une fois la valeur 1, 675 fois la valeur 2, 675 fois la valeur -2, et 673 fois la valeur 0, donc si $k > 675$, k ne vérifie pas l'énoncé.

Ainsi le plus grand k vérifiant la propriété de l'énoncé est $k = 675$.

Solution de l'exercice 2
Pour tout $j \in \{0, \ldots, n\}$ on pose $s_j = a_0 + \cdots + a_j$. On a

$$\begin{aligned}
a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n &= s_0 + (s_1 - s_0)x + \cdots + (s_n - s_{n-1})x^n \\
&= s_0(1-x) + s_1 x(1-x) \cdots + s_{n-1}x^{n-1}(1-x) + s_n x^n \\
&\leqslant \max(s_k)(1 - x + x - x^2 + \cdots + x^{n-1} - x^n + x^n \\
&\leqslant \max(s_k)
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 3

— Montrons que si x, y vérifient $|x - y| \leqslant 1$, alors $xy \geqslant \frac{-1}{4}$. Si x et y sont de même signe c'est clair. Sinon supposons $x \geqslant 0$, $xy \geqslant x(x-1) = -x(1-x) \geqslant \frac{-1}{4}$ par IAG. Ainsi on obtient immédiatement que $a_0 a_1 + \cdots + a_{2023}a_{2024} \geqslant \frac{-2024}{4} = 506$. De plus on a égalité si pour i pair $a_i = \frac{1}{2}$ et pour i impair $a_i = \frac{-1}{2}$.

— Soit K un réel, prenons $a_i = K - i$ pour tout i qui vérifie l'énoncé. On a

$$a_0 a_1 - a_1 a_2 + \cdots + a_{2022}a_{2023} - a_{2023}a_{2024} = -2(a_1 + a_3 + \cdots + a_{2023}) \leqslant -2 \times 1012 \times K.$$

En prenant K arbitrairement grand, on obtient que la quantité de l'énoncé peut tendre vers $-\infty$, donc il n'existe aucun tel C.

Solution de l'exercice 4
Déjà en prenant $a = b = c = 1$ et $d = 0$, on obtient que $x \in]0, 1[$ n'est pas solution.

Essayons de voir quelle valeur au maximum peut prendre a dans un triplet balancé. La contrainte se réécrit $a^2 - a = b(1-b) + c(1-c) + d(1-c) \leqslant \frac{3}{4}$ car $b(1-b) \leqslant \frac{1}{4}$ par IAG si b est dans $[0, 1]$, sinon $b(1-b) \leqslant 0$. Ainsi $a^2 - a - \frac{3}{4} = (a + \frac{1}{2})(a - \frac{3}{2}) \leqslant 0$. On a donc que $a \in]0, \frac{3}{2}]$. En particulier si $x \geqslant \frac{3}{2}$, on a $P(x) = (x-a)(x-b)(x-c)(x-d) \geqslant 0$ pour tout (a, b, c, d) balancé.

Le quadruplet $(a,b,c,d) = (\frac{3}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ est balancé car $a+b+c+d = 3 = a^2+b^2+c^2+d^2$, donc on obtient que si $x \in]\frac{1}{2},\frac{3}{2}$, x n'est pas solution. Comme de plus si $x \in]0,1[$, x n'est pas solution, on obtient que les solutions sont exactement les x supérieurs ou égaux à $\frac{3}{2}$.

Solution de l'exercice 5
Fixons $x \in S$, qui est forcément positif. Montrons par récurrence que si $n < x^2$, alors $\sqrt{x^2-n} \in S$. Pour $n=0$ c'est évident, et si c'est vrai à un certain rang n, et que $x^2 > n+1$, alors $\sqrt{x^2-n} > 1$, donc $\sqrt{(\sqrt{x^2-n})^2-1^2} = \sqrt{x^2-n-1}$ est dans S ce qui conclut la récurrence. En particulier, si x^2 n'est pas un entier, on a $x^2 > \lfloor x^2 \rfloor$ donc $\sqrt{x^2-\lfloor x^2\rfloor} = \sqrt{\{x\}^2} \in S$. Or $\sqrt{\{x\}^2} < 1$ ce qui est absurde.

Ainsi si $x \in S$, x^2 est entier et supérieur ou égal à 1. Donc tout entier de S est de la forme $\sqrt{n}$ pour un certain $n \geqslant 1$. De plus si $\sqrt{k} \in S$, alors pour tout $n < k$, $\sqrt{n-k} \in S$, donc pour tout $0 < n < k$, $\sqrt{n} \in S$. Ainsi S est de la forme $\{\sqrt{k}|k \in \mathbb{N}^*\}$ ou $\{\sqrt{k}|k \in \{1,\dots,n\}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Réciproquement si S est d'une des deux formes suivante 1 est son plus petit élément et si x,y sont dans S et vérifient $x > y$, on peut poser $x = \sqrt{k}$ et $y = \sqrt{\ell}$ avec $1 \leqslant k < \ell$ (et $\ell \leqslant n$ dans le second cas), donc $\sqrt{x^2-y^2} = \sqrt{k-\ell} \in S$ car $1 \leqslant k-\ell$ (et $k-\ell \leqslant n$ dans le second cas.

Ainsi les ensembles solution sont ceux de la forme $\{\sqrt{k}|k \in \mathbb{N}^*\}$ ou $\{\sqrt{k}|k \in \{1,\dots,n\}\}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 6
Prenons i tel que a_i est minimal, en particulier b_i est minimal car inférieur ou égal à tous les autres b_k. Or $b_i = \frac{a_{i-1}+a_{i+1}}{a_i} \geqslant 2$. Prenons j tel que a_j est maximal, en particulier $b_j = \frac{a_{j-1}+a_{j+1}}{a_j} \leqslant 2$. Or $b_i \leqslant b_j$, donc $b_i = 2$. Ainsi pour tout $j \in \{1,\dots,n\}$ $b_j \geqslant b_i = 2$, donc $a_{j+1}+a_{j-1} \geqslant 2a_j$. En sommant on obtient $2(a_1+\cdots+a_n) \geqslant 2(a_1+\cdots+a_n)$, donc chaque inégalité est une égalité : tous les b_i sont égaux. Donc pour tout i,j $b_i \leqslant b_j$, donc $a_i \leqslant a_j$, donc tous les a_i sont égaux.

Solution de l'exercice 7

Si une paire (i,j) est intéressante, alors $a_j - a_i \leqslant \frac{a_n-a_1}{2}$. En particulier, si $1 < i < n$ et $(1,i)$ et (i,n) sont intéressants, alors $a_i - a_1 = a_n - a_i = \frac{a_n-a_1}{2}$. On a au plus un i pour lequel cela peut se produire. Comme il y a $n-2$ possibilités pour i et comme $(1,n)$ n'est pas intéressante, on a au plus $\binom{n}{2} - (n-2) = \binom{n-1}{2} + 1$ paires intéressantes.

En prenant $a_1 = 0$ et $a_i = 2^i$ pour tout $i \geqslant 2$, on obtient que toute paire (i,j) d'entiers vérifiant $1 \leqslant i < j \leqslant n-1$ est intéressante : en effet

$$\frac{a_{j+1}-a_{i+1}}{a_j-a_i} = 2.$$

De plus $(n-1,n)$ est intéressante car $\frac{a_n-a_1}{a_n-a_{n-1}} = \frac{2^n}{2^n-2^{n-1}} = 2$. Ainsi on a au moins $\binom{n-1}{2}+1$ paires intéressantes.

Donc le nombre maximal de paires intéressantes est $\binom{n-1}{2}+1$.

Solution de l'exercice 8
On voit en testant les petits cas que parmi $a_0, a_1, \dots, a_n$, on a deux fois chaque nombre entre 0 et un certain entier k_n, et une fois chaque entier jusqu'à $n-k_n-1$ (où k_n peut valoir -1, si on a tous les entiers de 0 à n) avec $n-k_n-1 \geqslant k_n$. Montrons cela par récurrence.

Pour $n=0$ c'est évident car $a_0=0$, il suffit de prendre $k_n=-1$.
Si c'est vrai au rang n, alors

$$\begin{aligned} 2^{n+1} &= \binom{n+1}{a_{n+1}}+\binom{n+1}{0}+\cdots+\binom{n+1}{n-k_n-1}+\binom{n+1}{n+1-0}+\cdots+\binom{n+1}{n+1-k_n} \\ &= \binom{n+1}{a_{n+1}}+2^{n+1}-\binom{n+1}{n-k_n}. \end{aligned}$$

Or à n fixé $\binom{n+1}{k}$ est strictement croissant jusqu'à $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$ et strictement décroissant de $\lceil\frac{n+1}{2}\rceil$ à n. En effet, ce fait classique découle du fait que

$$\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{k}}=\frac{n+1-k}{k+1}$$

donc $\frac{\binom{n+1}{k+1}}{\binom{n+1}{k}}<1$ équivaut à $n\leqslant 2k$ donc à $k+1\leqslant\frac{n}{2}+1$, donc bien strictement croissante jusqu'à $\lfloor\frac{n+1}{2}\rfloor$, et de même pour la stricte décroissance.

Ainsi l'équation $\binom{n+1}{x}=\binom{n+1}{n-k_n}$ a au plus deux solutions (et une seule si $n-k_n=\frac{n+1}{2}$) qui sont $n-k_n$ et $n+1-(n-k_n)=k_n+1$. Donc $a_{n+1}=n+1-k_n-1$ ou k_n+1.

Dans le premier cas, il suffit de poser $k_{n+1}=k_n$ et on a l'hypothèse de récurrence. Dans le second cas, il suffit de poser $k_{n+1}=k_n+1$ car $n+1-k_{n+1}-1=n-k_n-1$ et l'hypothèse de récurrence est vérifiée. La preuve de l'inégalité est claire : dans le premier cas le terme de gauche augmente de 1 et celui de droite reste constant, dans le second cas le terme de gauche ne change pas mais celui de droite augmente d'un, le seul cas litigieux est celui où $n-k_n-1=k_n$ (pour lequel la dernière inégalité n'est pas clairement vérifiée). En fait dans ce cas $k_n+1=n+1-k_n-1$, donc il faut se placer dans le premier cas, ensuite l'inégalité $n+1-k_{n+1}-1\geqslant k_{n+1}$ est claire car $k_{n+1}=k_n$, ce qui conclut la récurrence.

Notons que $k_n\leqslant\frac{n-1}{2}$ par hypothèse, donc $n-1-k_n\geqslant\frac{n-1}{2}$. Ainsi tout entier k apparaît parmi $a_0,\ldots,a_{2k+1}$, car dans ce cas tous les entiers entre 0 et $2k+1-1-k_{2k+1}\geqslant k$ apparaissent.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

On énumère $x_1<\cdots<x_{4n+2}$ les éléments de S. S'il existe $a<b<c$ dans S tels que $c+2a>3b$, posons $c=x_k, b=x_j$ et $a=x_i$ avec $i<j<k$.

En particulier $2x_i+x_k>3x_j$. Or $2x_i+x_{4n+2}\leqslant 2x_{j-1}+x_k$, donc $x_{4n+2}+x_{j-1}>3x_j$. Ainsi le plus intéressant semble être de prendre $i=j-1$ et $k=4n+2$.

Supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de a,b,c vérifiant l'énoncé. Alors $2x_i+x_{4n+2}\leqslant 3x_{i+1}$ pour tout i vérifiant $1\leqslant i\leqslant 4n$.

L'inégalité précédente se réécrit $2(x_i-x_{4n+2})\leqslant 3(x_{i+1}-x_{4n+2}$. En posant $b_i=x_{4n+2}-x_i$ pour tout i vérifiant $1\leqslant i\leqslant 4n$, on a $2b_i\geqslant 3b_{i+1}$.

En particulier, par récurrence immédiate, pour tout entier k vérifiant $1\leqslant k\leqslant 4n+1$, $b_k\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{k-1}b_1$. Pour $k=4n+1$, on a que

$$1\leqslant b_{4n+1}\leqslant\left(\frac{2}{3}\right)^{4n}b_1\leqslant\left(\frac{2^4\times 5}{3^4}\right)^n=\left(\frac{80}{81}\right)^n<1$$

ce qui est absurde, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 10

Posons S la somme de l'énoncé. On a

$$\begin{aligned} S &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor \frac{i(n+1-j)}{n+1}\right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \left\lfloor \frac{-ij)}{n+1}\right\rfloor \\ &= \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} i + \left\lfloor \frac{-ij)}{n+1}\right\rfloor \\ &= \frac{n^2(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} + \left\lfloor \frac{-ij)}{n+1}\right\rfloor \end{aligned}$$

Ainsi $S = \frac{n^2(n-1)}{4}$ si et seulement si

$$\frac{n^2(n-1)}{2} = 2S = \frac{n^2(n+1)}{2} + \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor \frac{ij)}{n+1}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{-ij)}{n+1}\right\rfloor$$

donc si et seulement si $-n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor \frac{ij)}{n+1}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{-ij)}{n+1}\right\rfloor$. Or $\lfloor x\rfloor + \lfloor -x\rfloor$ vaut 0 si x est entier, -1 sinon. Donc $-n^2 = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n}\left\lfloor \frac{ij)}{n+1}\right\rfloor + \left\lfloor \frac{-ij)}{n+1}\right\rfloor$ équivaut au fait que pour tout $i, j \in \{1, \dots, n\}$, $n+1$ ne divise pas ij. Si $n+1$ est premier c'est clairement vérifié, et si $n+1$ ne l'est pas, comme $n+1 \geqslant 2$, il existe $i, j \in \{1, \dots, n\}$ tels que $n+1 = ij$, donc ce n'est pas vérifié.

Ainsi les n solution sont exactement ceux tels que $n+1$ est premier.

Solution de l'exercice 11

Supposons que $n = k+1$ convient. Alors tout élément de S est somme des k autres éléments de S. Donc si on pose s la somme des éléments de S, alors pour tout $a \in S$, $a = s - a$, donc $a = s/2$ ce qui est absurde car S est de cardinal $k+1 > 1$.

Supposons que $n = k+2$ convient. En posant s la somme des éléments de S, pour tout a dans S, a est la somme de tous les autres éléments de S sauf 1. Ainsi il existe b_a dans S tel que $a = s - b_a - a$, donc $2a + b_a = s$. En prenant a le minimum de S, on a alors $s \leqslant 2\min(S) + \max(S)$, et en prenant a le maximum de S, on a $s \geqslant 2\max(S) + \min(S)$. Comme $|S| \geqslant 2$, $\max(S) > \min(S)$, donc

$$s \geqslant 2\max(S) + \min(S) > 2\min(S) + \max(S) \geqslant s$$

ce qui est absurde.

Supposons que $n = k+3$ convient. De même pour tout a dans S, il existe b_a et c_a distincts et distincts de a tels que $a = s - b_a - c_a - 2a$, donc $s = 2a + b_a + c_a$. En prenant a le minimum, on a que $s < 2\min(S) + 2\max(S)$ car soit b_a soit c_a est différent du maximum de S. En prenant a le maximum, on a que $s > 2\max(S) + 2\min(S)$ car soit b_a soit c_a est strictement plus grand que le minimum, on obtient donc une contradiction.

En essayant de faire le même raisonnement pour $n = k+4$, on n'obtient rien de probant, donc on essaie de montrer que $n = k+4$ convient.

Si k est pair posons $k = 2\ell$ avec $\ell \geqslant 1$, on pose $S = \{-\ell-2, \dots, -1, 1, \dots, \ell+2\}$. Pour montrer que cet ensemble convient, il suffit de montrer que pour tout entier $a \in S$, il existe b, c, d distincts dans S tels que $a = s - b - c - d - a$. Or ici $s = 0$, donc il suffit de montrer que pour tout a dans S, il existe b, c, d distincts dans S tels que $2a + b + c + d = 0$. Comme S est stable par multiplication pour -1, il suffit de traiter le cas où a est positif.

Si $a > 2$, alors $b = -a$, $c = -a + 1$ et $d = -1$ sont bien distincts, dans S et conviennent. Si $a = 1$, prendre $b = -2$, $c = \ell + 2$ et $d = -\ell - 2$ convient. Si $a = 2$, prend $b = 1$, $c = -2$ et $d = -3$ convient.

Si k est impair, on pose $k = 2\ell+1$ avec $\ell \geqslant 1$, et on prend $S = \{-\ell-2, \dots, -1, 0, 1 \dots, \ell+2\}$. Par le cas pair, on voit comme la somme des éléments de S est toujours nulle qu'il suffit de montrer que pour tout a dans S, il existe b, c, d distincts dans S tels que $2a + b + c + d = 0$. Or dans le cas pair, on l'a déjà fait, sauf pour $a = 0$. Pour $a = 0$, il suffit de prendre $b = 1, c = 2$ et $d = -3$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 12

Soit α un réel solution. Modulo 2, α est congru à un entier dans $[-1, 1[$, posons $\alpha = 2k + x$ avec $x \in [-1, 1[$ et k entier.

Pour tout entier n strictement positif, la quantité de l'énoncé vaut :

$$2k + \lfloor x \rfloor + 2 \times 2k + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + n \times 2k + \lfloor nx \rfloor = kn(n+1) + \lfloor x \rfloor \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor$$

Ainsi n divise $\lfloor x \rfloor \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor$ pour tout entier n strictement positif.

Si $x \in]0, 1[$, prenons $n \geqslant 1$ le plus petit n tel que $nx \geqslant 1$. On a $n \geqslant 2$, et $nx = (n-1)x + x < 1 + 1 = 2$, donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor = 0 + \cdots + 0 + 1 = n$$

qui n'est pas divisible par n donc α n'est pas solution.

Si $x \in]-1, 0[$, prenons $n \geqslant 1$ le plus petit n tel que $nx < -1$. On a $n \geqslant 2$, et $nx = (n-1)x + x \geqslant -1 + -1 = -2$, donc

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor 2x \rfloor + \cdots + \lfloor nx \rfloor = -1 + \cdots - 1 - 2 = -n - 1$$

qui n'est pas divisible par n donc α n'est pas solution.

Ainsi $x = 0$ donc α est de la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$. Réciproquement si α est de la forme $2k$ avec $k \in \mathbb{Z}$, pour tout n strictement positif la somme de l'énoncé vaut $\frac{n(n+1)}{2} \times 2k = kn(n+1)$ qui est divisible par n.

Les solutions sont donc les entiers pairs.

Solution de l'exercice 13

Notons que pour tout i, $(b - u_i)(u_i - a) \geqslant 0$. En sommant sur i, on obtient que

$$(b-a)(u_1 + \cdots + u_n) - (u_1^2 + \cdots + u_n^2) - 2019ab = -1 - 2019ab \geqslant 0.$$

Ainsi $ab \geqslant \frac{-1}{2019}$.

Solution de l'exercice 14

Soit (i, j, k) des entiers positifs. Si i, j, k sont supérieurs ou égaux à 1, en prenant $P = Q = 0$ et $R = X^{i-1}Y^{j-1}Z^{k-1}$, $X^iY^jZ^k$ est dans $\mathcal{B}$.

Notons que si S et T sont dans $\mathcal{B}$, alors $S+T$ aussi et $S-T$ aussi (il suffit de prendre la somme ou différence des P, Q, R correspondants). De plus si S est dans $\mathcal{B}$, pour tout T dans $\mathcal{B}$ ST est dans $\mathcal{B}$ (il suffit de multiplier les P, Q, R correspondants par T).

En prenant $P = X^2, Q = -X$ et $R = 1$, on a que X^3 est dans $\mathcal{B}$. En particulier, de même Y^3 et Z^3 sont dans $\mathcal{B}$, et si i, j ou k est supérieur ou égal à 3, alors $X^iY^jZ^k$ est dans $\mathcal{B}$.

Ainsi les seuls termes de la forme $X^iY^jZ^k$ qui sont susceptibles de ne pas être dans $\mathcal{B}$ sont les termes de la forme X, XY, X^2Y et X^2Y^2 (et ceux obtenus en permutant X, Y, Z).

Pour $P = 0, Q = XY$ et $R = -(X+Y)$, on obtient que X^2Y^2 et ceux obtenus en permutant X, Y, Z sont dans $\mathcal{B}$.

Ainsi $k = 4$ convient. Désormais essayons de montrer que X^2Y n'est pas dans $\mathcal{B}$.

Si $X^2Y = (X+Y+Z)P(X,Y,Z) + (XY+YZ+XZ)Q(X,Y,Z) + XYZR(X,Y,Z)$, alors on peut uniquement garder par identifications les termes de degré 2 de P, ceux de degré 1 de Q et ceux de degré 0 de R.

Posons $P = aX^2+bY^2+cZ^2+dXY+eYZ+fXZ$, $Q = gX+hY+iZ$ et $R = j$. En regardant les termes en X^3 dans l'égalité $X^2Y = (X+Y+Z)P(X,Y,Z)+(XY+YZ+XZ)Q(X,Y,Z)+XYZR(X,Y,Z)$, on obtient que $a = 0$. De même $b = c = 0$. L'égalité devient :

$$X^2Y = (d+g)X^2Y+(f+g)X^2Z+(d+h)Y^2X+(e+h)Y^2Z+(f+i)Z^2X+(e+i)Z^2Y+kXYZ$$

où k est une certaine constante. En identifiant, $d+g = 1$, $d+h = f+g = e+h = f+i = e+i = 0$.

Ainsi
$$0 = d+h+f+g+e+i = d+g+e+h+f+i = 1$$
ce qui est absurde. Ainsi X^2Y n'est pdans $\mathcal{B}$ donc tout k vérifiant $k \leqslant 3$ ne convient pas. Ainsi $k = 4$ est l'entier souhaité.

Solution de l'exercice 15

On propose deux solutions, une plus rapide, une moins astucieuse. Dans tous les cas on note $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ et $h_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ pour tout entier n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2023$. On a alors $a_n = \sqrt{s_n h_n}$.

Première solution : calculons $a_{n+2}^2 - a_n^2$ pour n un entier quelconque vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2021$. On a

$$\begin{aligned}
a_{n+2}^2 - a_n^2 &= (s_n + x_{n+1} + x_{n+2})\left(h_n + \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) - s_n h_n \\
&= (x_{n+1} + x_{n+2})h_n + \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)s_n + (x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \\
&\geqslant 2\sqrt{(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)}\sqrt{s_n h_n} + (x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)
\end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient d'une IAG.

Or par l'inégalité arithmético harmonique (ou mauvais élèves ou Cauchy-Schwarz),

$$(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \geqslant 4$$

On ne peut pas avoir égalité : si on a égalité, alors $x_{n+1} = x_{n+2}$ ce qui contredit l'énoncé. Ainsi on a

$$a_{n+2}^2 > a_n^2 + 2\sqrt{4}a_n + 4 = (a_n + 2)^2$$

Comme la suite ne prend quedes valeurs entières, $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. On en déduit par récurrence que $a_{1+2k} \geqslant a_1 + 3k \geqslant 3k + 1$ tant que $2k + 1 \leqslant 2023$. Pour $k = 1011$, $a_{2023} \geqslant 3034$ ce qui conclut.

Autre solution : on calcule $a_{n+1}^2 a - a_n^2$.

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 - a_n^2 &= (s_n + x_{n+1})\left(h_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - s_n h_n \\
&= x_{n+1}h_n + \frac{1}{x_{n+1}}s_n + 1 \\
&\geqslant 2\sqrt{s_n h_n} + 1 \\
&\geqslant 2a_n + 1
\end{aligned}$$

Ceci étant vrai par IAG. On a donc $a_{n+1}^2 \geqslant a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n + 1)^2$, donc $a_{n+1} \geqslant a_n + 1$. L'égalité vient si $x_{n+1}h_n = \frac{s_n}{x_{n+1}}$ i.e. $x_{n+1} = \sqrt{\frac{s_n}{h_n}}$

On va montrer que $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. Pour l'instant, on sait juste que $a_{n+2} \geqslant a_{n+1} + 1 \geqslant a_n + 2$, et donc que sauf si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$, on a $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$ vu que la suite prend des valeurs entières. Il suffit donc de montrer que si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$ on a une contradiction.

Si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$, alors

$$x_{n+2}^2 = \frac{s_{n+1}}{h_{n+1}} = \frac{s_n + \sqrt{\frac{s_n}{h_n}}}{h_n + \sqrt{\frac{h_n}{s_n}}} = \frac{s_n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{s_n h_n}}\right)}{h_n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{h_n s_n}}\right)} = \frac{s_n}{h_n} = x_{n+1}^2$$

On a donc une contradiction, ainsi $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. On conclut de même que dans l'autre solution.

7 Suites (Gaspard et Aimeric)

Exercice 1
Soit $n > 0$ et une suite $(a_k)_{0 \leqslant k \leqslant n}$ telle que $a_0 = a_n = 0$ et pour tout $k \in [1, n-1]$,

$$a_{k-1} - 2a_k + a_{k+1} \geqslant 0$$

Montrer que tous les termes de la suite sont négatifs.

Exercice 2

Soit n entier naturel. On dit que la suite (a_k) est jolie si $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$ et $(a_k + a_{k+1})(a_{k+1} + a_{k+2}) = a_k - a_{k+2}$ pour tout k. Déterminer le plus grand entier N tel qu'il existe une suite jolie $a_0, \ldots, a_N$.

Exercice 3
Trouver l'ensemble des $x_0, x_1 \in \mathbb{R}$ pour lesquels la suite (x_n) définie par

$$x_{n+1} = \frac{x_{n-1}x_n}{3x_{n-1} - 2x_n}$$

contient une infinité d'entiers positifs.

Exercice 4

Soit (a_n) une suite d'entiers positifs telle que pour $n > 0$, a_n est le plus petit entier tel que $\sum_{k=0}^{n} a_k$ soit divisible par n.
Montrer que (a_n) est stationnaire.

Exercice 5 (Inégalité de Kraft–McMillan)

Soit f une fonction qui code chaque lettre dans un alphabet Σ par une suite de symboles (finie) dans $[\![1, r]\!]$ avec r un entier naturel. Pour coder les mots, $f(ab)$ est la concaténation de $f(a)$ et $f(b)$. De plus f est injective de l'ensemble des mots Σ^* dans l'ensemble des suites finies de $[\![1, r]\!]$: chaque suite finie est uniquement décodable (ou pas du tout) et correspond à au plus un mot.
Montrer que

$$\sum_{c \in \Sigma} r^{-l(f(c))} \leqslant 1$$

où l est la longueur d'une suite.

Exercice 6
Soit (a_n) une suite vérifiant pour tout $n, m \in \mathbb{N}$,

$$|a_{n+m} - a_n - a_m| \leqslant \frac{1}{m+n}$$

Montrer que la suite est arithmétique.

Exercice 7 (Olympiades australiennes 2024)

On définit la suite (a_n) par $a_1 = 2^{2024}+1$ et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{n+1} est le plus grand diviseur premier de $a_n^2 - 1$. Calculer $a_{2024} + a_{2025}$.

Exercice 8
Trouver toutes les suites périodiques (x_n) de réels strictement positifs telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$x_{n+2} = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n\right)$$

Exercice 9
Soient $(a_n)_{n>0}$ une suite croissante d'entiers strictement positifs et k un entier strictement positif. Supposons que pour un certain $r \geqslant 1$, on a $\frac{r}{a_r} = k+1$. Montrer qu'il existe un entier $s \geqslant 1$ tel que $\frac{s}{a_s} = k$.

Exercice 10
Soit (a_n) une suite de réels strictement positifs telle que pour tout n,

$$a_{n+1}^2 = a_n + 1$$

Montrer que a_n contient des termes irrationnels.

Exercice 11

Pour f une permutation de $\mathbb{N}^*$ on définit $E_f = \{s \in \mathbb{R}^+ | \sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^s}$ est borné$\}$.

Montrer qu'il existe f telle que $E_f = \emptyset$

Exercice 12
Trouver toutes les suites d'entiers strictement positifs telles que pour tout $n \geqslant 1$,

$$a_{n+1}^2 = a_n(2021+n)+1$$

Exercice 13
Soit a_0, b_0 des entiers strictement positifs. Pour tout $i \geqslant 0$, on pose $a_{i+1} = a_i + \lfloor\sqrt{b_i}\rfloor$ et $b_{i+1} = b_i + \lfloor\sqrt{a_i}\rfloor$. Montrer qu'il exite n tel que $a_n = b_n$.

Exercice 14 (TSTST 2024)

Soit (a_n) une suite vérifiant pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{2n-1} + a_{2n} > a_{2n+1} + a_{2n+1}$ et $a_{2n} + a_{2n+1} < a_{2n+2} + a_{2n+3}$. Montrer que $a_n a_{n+1}$ est majoré.

Solution de l'exercice 1
Soit k minimal tel que $a_k > 0$, alors $a_n - a_{n-1} \geqslant a_{n-1} - a_{n-2} \geqslant \cdots \geqslant a_k - a_{k-1} > 0$. Donc $0 = a_n \geqslant a_{n-1} \geqslant \cdots \geqslant a_k > 0$, absurde.

Solution de l'exercice 2
Posons $b_k = a_{k-1} + a_k$. On a alors $b_1 = -\frac{1}{n}$ et $b_k b_{k+1} = b_k - b_{k+1}$, soit $b_{k+1}(b_k + 1) = b_k$. Ainsi, si $b_k \neq -1$, on a $b_{k+1} = \frac{b_k}{b_k + 1}$, d'où par récurrence immédiate $b_k = -\frac{1}{n+1-k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. En particulier, $b_n = -1$, et donc si $N > n$ on devrait avoir $b_{n+1}(b_n + 1) = b_n$, soit $0 = -1$, ce qui est absurde. Donc $N \leqslant n$. Réciproquement, avec $N = n$, si on pose $a_0 = 0$ et $a_k = -\frac{1}{n+1-k} - a_{k-1}$, la suite obtenue est clairement solution.

Solution de l'exercice 3
Si un terme de la suite est nul, on calcule que le suivant aussi, et ainsi le terme d'après n'est pas défini. On suppose donc que $x_n \neq 0$ pour tout n. En passant à l'inverse, on obtient la relation de récurrence $\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{3}{x_n} - \frac{2}{x_{n-1}}$. En posant donc la suite $(u_n) = (\frac{1}{x_n})$, on a donc une suite récurrente linéaire d'ordre 2 dont le polynôme caractéristique est $X^2 - 3X + 2 = (X-1)(X+2)$. Ainsi, par le théorème des suites récurrentes linéaires, il existe $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $u_n = a + b2^n$. Si $b \neq 0$, alors $|u_n| \to +\infty$ lorsque $n \to +\infty$, donc $x_n \to 0$ et ne contient donc qu'un nombre fini d'entiers positifs. Ainsi $b = 0$ et donc la suite contient une infinité d'entiers positifs si et seulement si $x_0 = x_1 \in \mathbb{N}^*$.

Solution de l'exercice 4
Pour tout $n \geqslant 1$, on note k_n l'entier strictement positif tel que $a_0 + \cdots + a_n = k_n n$. Notons alors que $a_{n+1} \leqslant k_n$, car $a_0 + \cdots + a_n + k_n = k_n(n+1)$ qui est divisible par $n+1$. Ainsi $k_{n+1}(n+1) = a_0 + \cdots + a_{n+1} \leqslant k_n(n+1)$, donc $k_{n+1} \leqslant k_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi la suite (k_n) est une suite d'entiers positifs décroissante, elle est donc stationnaire. Il existe donc deux entiers k, N tels que si $n \geqslant N$, $k_n = k$. En particulier si $n \geqslant N+1$, $a_n = k_{n+1}(n+1) - k_n n = k(n+1) - kn = k$, donc la suite (a_n) stationne.

Solution de l'exercice 5
La suite du nombre de messages différents a_n vérifie la relation de récurrence

$$a_n = \sum_{c \in \Sigma} a_{n-l(f(c))}$$

puisque on peut à chaque message valide ajouter la lettre c, avec les conditions initiales $a_{-L<n<0} = 0, a_0 = 1$ où L est le plus long code pour une lettre. Une telle suite se résout et peut s'écrire sous la forme

$$a_n = \sum_i c_i n^{k_i} \lambda_i$$

où les λ_i sont les racines du polynôme

$$P(X) = X^L - \sum_{c \in \Sigma} X^{L-l(f(c))}$$

comptées avec leurs multiplicités. De plus, tous les coefficients devant le terme en λ_0^n où λ_0 est la plus grande racine, ne peuvent pas être nuls, sinon on trouverait une relation de récurrence plus courte : vu les conditions initiales, c'est impossible (1 ne sera jamais une combinaison linéaire de zéros). Puisque la fonction f doit être injective, $a_n \leqslant r^n$: on doit donc avoir $\lambda_0 \leqslant r$. Comme $P(X)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, si

$$\sum_{c\in\Sigma} r^{-l(f(c))} > 1 \iff P(r) < 0$$

alors d'après le théorème des valeurs intermédiaires P admet une racine plus grande que r, impossible.

Solution de l'exercice 6
Soit $k, l \in \mathbb{N}$, on écrit l'égalité pour $n = k$ et $m = l + 1$, puis pour $n = k + 1$, $m = l$. Ceci donne en sommant,

$$\frac{2}{k+l+1} \geqslant |a_{k+l+1} - a_k - a_{l+1}| + |a_{k+l+1} - a_{k+1} - a_l| \geqslant |a_{k+1} - a_k - (a_{l+1} - a_l)|$$

. En faisant tendre k vers $+\infty$, on a que pour tout l, $a_{k+1} - a_k$ tend vers $a_{l+1} - a_l$, ce qui conclut par unicité de la limite.

Solution de l'exercice 7
Si à un moment $a_k = 2$, la suite va continuer en alternant $a_{k+1} = 3$, $a_{k+2} = 2$ etc. Sinon, a_k est un nombre premier donc impair, et a_{k+1} est le plus grand des diviseurs premiers de $a_k + 1$ et $a_k - 1$ qui sont tous les deux pairs, donc plus petit que $\frac{a_k+1}{2}$. D'où $a_2 \leqslant 2^{2023} + 1$, $a_3 \leqslant 2^{2022} + 1$ ... $a_{2024} \leqslant 3$. Donc dans tous les cas $a_{2024} + a_{2025} = 2 + 3 = 5$

Solution de l'exercice 8
Soit $n > 1$. En multipliant la relation de récurrence par x_{n+1}, on obtient que $x_{n+2}x_{n+1} = \frac{1}{2}(1+x_{n+1}x_n)$. Ainsi $(x_{n+2}x_{n+1}-1) = \frac{1}{2}(x_{n+1}x_n-1)$. En particulier, $x_{n+1}x_n-1 = \frac{1}{2^{n-1}}(x_2x_1-1)$. Si la suite (x_n) est périodique, la suite $x_{n+1}x_n - 1$ l'est aussi de même période, ce qui n'est possible d'après l'équation précédente que si $x_2x_1 - 1 = 0$. Dans ce cas pour tout $n > 1$, $x_{n+1}x_n - 1 = 0$, donc $x_{n+1} = \frac{1}{x_n}$. En réinjectant cela dans l'équation de récurrence, on obtient que pour tout $n > 1$, $x_{n+2} = \frac{1}{2}(x_{n+2} + x_n)$ donc $\frac{1}{2}x_{n+2} = \frac{1}{2}x_n$ soit $x_{n+2} = x_n$. En particulier (x_n) est 2-périodique et vérifie $x_2 = \frac{1}{x_1}$. On a donc $x_n = x_1$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{x_1}$ si n est pair. Réciproquement, soit $a \in \mathbb{R}_+^*$ et (x_n) telle que $x_n = a$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{a}$ si n est pair. Comme $\frac{1}{x_{n+1}} = x_n$, on a $\frac{1}{2}(\frac{1}{x_{n+1}} + x_n) = x_n = x_{n+2}$ pour tout $n > 1$. La suite (x_n) est donc 2-périodique et vérifie la relation de récurrence donnée. Les suites vérifiant l'énoncé sont les suites (x_n) avec (x_n) telle que $x_n = a$ si n est impair, $x_n = \frac{1}{a}$ si n est pair pour $a > 0$.

Solution de l'exercice 9
On pose $s_0 = r$, et $s_{n+1} = ka_{s_n}$. Par croissance de (a_n), comme d'après la condition sur r $s_1 < s_0$, on en déduit que (s_n) est décroissante donc stationnaire. À son stationnement $s = ka_s$.

Solution de l'exercice 10
Supposons que tous les termes de la suite sont rationnels, pour tout n on peut donc écrire $a_n = \frac{p_n}{q_n}$ avec p_n et q_n premiers entre eux. Alors $a_{n+1}^2 = a_n + 1 = \frac{p_n + q_n}{q_n}$. Ainsi, $q_{n+1}^2 = q_n$, ce

qui implique que $q_n = 1$ à partir d'un certain rang. On a donc n_0 tels que pour tout $n \geqslant n_0$, a_n est un entier. Si $a_n = 1$, on a $a_{n+1} = \sqrt{2}$, absurde. Donc $a_n \geqslant 2$ et alors $a_{n+1} < a_n$, et on a donc une suite strictement décroissante d'entiers positifs, absurde.

Solution de l'exercice 11

On va essayer de construire une fonction telle que pour tout s, il existe une infinité de termes $\frac{f(k)}{k^s} \geqslant 1$. Pour cela, on construit la suite (a_n) définie par $a_1 = 1$, $a_{n+1} = a_n^n + 1$. On pose ensuite $f(a_n) = a_n^n$, et $f(m \neq a_n)$ le plus petit entier qui n'est pas dans les $f(n < m)$. Par construction f est injective, et $[|1, a_n^n|]$ est envoyé sur lui-même, donc f est surjective donc une permutation de $\mathbb{N}^*$. De plus pour tout s :

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{f(k)}{k^s} &\geqslant \sum_{s \leqslant i, a_i \leqslant n} \frac{f(a_i)}{a_i^s} \\ &\geqslant \sum_{s \leqslant i, a_i \leqslant n} \frac{a_i^s}{a_i^s}\end{aligned}$$

qui n'est pas borné, donc $E_f = \emptyset$

Solution de l'exercice 12

On a $a_n \geqslant 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 > n$ donc la suite n'est bornée supérieurement.

On a donc n_0 tel que $a_{n_0+1} = a_{n_0}$. Or $a_{n+2}^2 - a_{n+1}^2 = (1 + (n+2022)a_{n+1}) - (1 + (n+2021)a_n) = (n+2021)(a_{n+1} - a_n) + a_{n+1}$ donc $a_{n+1} > a_n \Rightarrow a_{n+2} > a_{n+1}$. Donc a_n est strictement croissante pour $n > n_0$.

De plus, $a_{n+1} \geqslant a_n + 1 \Rightarrow a_{n+1} - (n+1) \geqslant a_n - n$ et donc $a_n - n$ est croissante pour $n > n_0$. Cependant, $a_{n+1} \geqslant a_n + 1 \Rightarrow a_{n+1}^2 \geqslant a_n^2 + 2a_n + 1 \Rightarrow 1 + (n+2021)a_n \Rightarrow a_n^2 + 2a_n + 1 \Rightarrow a_n - n \leqslant 2019$. Ainsi, $a_n - n$ est constante apcr, donc $a_n = n + c$ pour tout $n \geqslant n_1$ pour un certain n_1. En réinjectant, on trouve $c = 2019$.

Solution de l'exercice 13

On voit que $|a_{n+1} - b_{n+1}| = |a_n - b_n + \lfloor\sqrt{b_n}\rfloor - \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor|$ donc puisque les deux différences sont de signe opposé, $|a_n - b_n|$ décroît strictement si $\lfloor\sqrt{a_n}\rfloor - \lfloor\sqrt{b_n}\rfloor$ est non nul. On veut donc montrer que, si $a_n \neq b_n$, il existe un plus grand rang tel que $\lfloor\sqrt{a_N}\rfloor - \lfloor\sqrt{b_N}\rfloor \neq 0$. On suppose spdg $a_n > b_n$ et on écrit $a_n = \lfloor\sqrt{a_n}\rfloor^2 + r_n$: si $r_n < a_n - b_n$, on a la propriété demandée ; et jusque-là, $a_n - b_n > 0$ et est constante. Or $a_{n+2} = \lfloor\sqrt{a_n} + 1\rfloor^2 + r_n - 1$ donc à partir d'un certain rang on aura bien $\lfloor\sqrt{a_n}\rfloor - \lfloor\sqrt{b_n}\rfloor > 0$. Donc si $a_n \neq b_n$, à un certain rang $|a_n - b_n|$ diminuera strictement, et il existe un n tel que $a_n = b_n$

Solution de l'exercice 14

On pose $d_n = (-1)^{n-1}(a_{n+2} - a_n)$. D'après l'énoncé, d_n est strictement croissante.

Si à partir d'un certain rang $d_n > 0$, alors la somme des d_i impairs n'est pas majorée, et à partir d'un certain rang $a_{2n+1} = a_1 + (d_1 + d_3 + \ldots d_{2n-1}) > 0$ et de même $a_{2n} = a_2 - (d_2 + d_4 + \cdots + d_{2n-2}) < 0$ à partir d'un certain rang. Il n'y a donc qu'un nombre fini de $a_n a_{n+1}$ positifs. Au reste, vu la croissance de (d_i), la somme de ses termes pairs est bornée si et seulement si la somme de ses termes impairs est bornée. Si elle n'est pas borné, à partir d'un certain rang $a_{2n} > 0$ et $a_{2n+1} < 0$, et on conclut de la même manière. Si les sommes sont bornées, les a_n sont bornées et $a_n a_{n+1}$ aussi.

8 Géométrie : TD de shortlist (Serge)

Comme son nom l'indique, ce td est un pot-pourri de divers problèmes de géométrie de niveau P1/P4 IMO. L'objectif est de montrer un certain nombre d'idées qui reviennent souvent dans ce type d'exercice.

Rappelons d'abord qu'il est toujours important de tracer une figure précise à la règle et au compas. En effet, la base de la géométrie olympique est de repérer des propriétés qui ont l'air vrai sur une, voire 2 figures (points cocycliques, droites parallèles, points alignés, triangles semblables, ...) puis d'essayer de les démontrer par une chasse aux angles. Les exercices 1 et 2 illustrent cette idée.

Mais bien souvent, il ne suffit pas pour résoudre un problème de se limiter à ces idées. Il peut souvent s'avérer nécessaire d'avoir une idée supplémentaire, une bonne compréhension de la figure.

Les exercices 3, 4 et 5 abordent le thème de l'utilisation des milieux/symétriques.

Les exercices 6, 7 et 9 montrent l'idée du superpoint : il arrive souvent qu'un point de la figure qui n'est pas donné dans l'énoncé semble avoir de nombreuses propriétés. Il est alors très souvent utile d'introduire ce point car une fois qu'il est correctement introduit, le reste de la solution vient naturellement.

Les exercices 7 à 11 illustrent comment utiliser des conditions d'angles pour tracer une figure. Il arrive dans certains cas que l'on soit incapables de tracer directement une figure car elle contient une condition étrange. Dans ce cas, il est conseillé de faire d'abord une figure à la main pour réfléchir à une manière de tracer la figure à la règle, à l'équerre et au compas puis ensuite de tracer une belle figure.

Enfin, les exercices 10 à 13 reprennent toutes les idées vues précédemment mais sont d'un niveau un peu plus dur.

Exercices

Exercice 1 (G1 IMO SL 2019)
Soit ABC un triangle. Le cercle Γ passant par A, rencontre les segments AB et AC aux points D et E respectivement, et intersecte le segment BC aux points F et G tel que F soit entre B et G. Les tangentes aux cercles BDF en F et CEG en G s'intersectent en T. On suppose que A et T sont distincts.
Montrer que (AT) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2 (P1 EGMO 2022)
Soit ABC un triangle dont tous les angles sont aigus tel que BC soit le côté le plus court. Soit P un point du segment AB et Q un point du segment AC tels que $P \neq B$ et $Q \neq C$ et $BQ = BC = PC$. Soit T le centre du cercle circonscrit au triangle APQ, H l'orthocentre du triangle ABC, et S le point d'intersection des droites (BQ) et (CP). Montrer que T, H et S sont alignés.

Exercice 3 (P4 IMO 2014)
Les points P et Q appartiennent au côté BC du triangle ABC dont les angles sont aigus, de sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ), avec P milieu de $[AM]$ et Q milieu de $[AN]$. Prouver que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) est sur le cerlce circonscrit au triangle ABC.

Exercice 4 (P1 USAMO 2023)
Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$. Soit P le projeté orthogonal de C sur (AM). Soit Q le deuxième point d'intersection de la droite (BC) avec le cercle circonscrit à ABP. En notant N le milieu de $[AQ]$, montrer que $NB = NC$.

Exercice 5 (P4 IMO 2024)
Soit ABC un triangle vérifiant $AB < AC < BC$. On note ω le cercle inscrit au triangle ABC, et I le centre de ω. Soit X le point de la droite (BC), distinct de C, telle que la parallèle à (AC) passant par X soit tangente à ω. Similairement, soit Y le point de la droite (BC), distinct de B, telle que la parallèle à (AB) passant par Y soit tangente à ω. La droite (AI) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC en P (distinct de A). Soit K et L les milieux des segments $[AC]$ et $[AB]$ respectivement.
Démontrer que $\widehat{KIL} + \widehat{YPX} = 180°$

Exercice 6 (P4 IMO 2013)
Soit ABC un triangle d'orthocentre H dont tous les angles sont aigus ; soit W un point du côté BC, compris strictement entre B et C. Les points M et N sont, respectivement, les pieds des hauteurs issues de B et de C. On note ω_1 le cercle circonscrit au triangle BWN et X le point de ω_1 tel que $[WX]$ en soit un diamètre. De la même façon, on note ω_2 le cercle circonscrit au triangle CWM et Y le point de ω_2 tel que $[WY]$ en soit un diamètre. Montrer que les points X, Y et H sont alignés.

Exercice 7 (P1 USAMO 2021)
Les rectangles BCC_1B_2, CAA_1C_2 ET ABB_1A_2 sont construits à l'extérieur des côtés du triangle ABC de sorte à vérifier l'égalité :

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(B_1C_2), (C_1A_2)$ et (A_1B_2) sont concourantes.

Exercice 8 (P4 IMO 2022)
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point T situé à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD$, $TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{TEA}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersections respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE), et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre.
Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.

Exercice 9 (P1 IMO 2020)
On considère un quadrilatère convexe $ABCD$. Un point P est situé à l'intérieur de $ABCD$. On suppose que les égalités de rapports ci-dessous sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}.$$

Montrer que les trois droites suivantes se rencontrent en un point : la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 10 (All Russian MO 2021)
Soit ABC un triangle non-isocèle vérifiant $\widehat{ABC} = 60°$. On choisit le point T à l'intérieur de ce triangle tel que $\widehat{ATB} = \widehat{BTC} = \widehat{CTA} = 120°$. Soit G l'intersection des médianes de ABC. La droite (GT) réintersecte le cercle circonscrit à BTC en K. Trouver $\frac{GK}{GT}$.

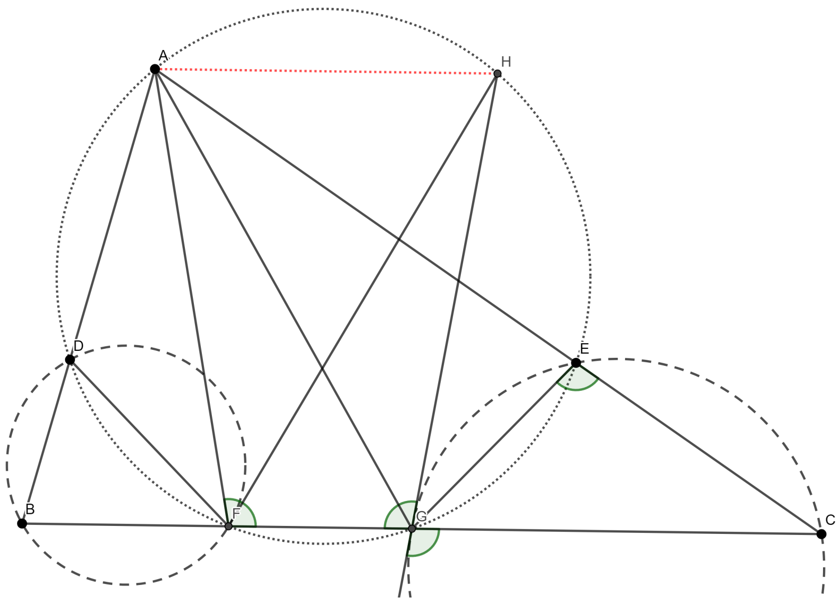
Exercice 11 (G3 IMO SL 2007)
Les diagonales du trapèze $ABCD$ se croisent au point P. Soit Q le point entre les droites parallèles (BC) et (AD) tel que $\widehat{AQD} = \widehat{CQB}$, et que la droite (CD) se trouve entre les points P et Q.
Montrer que $\widehat{BQP} = \widehat{DAQ}$.

Exercice 12 (G3 IMO SL 2020)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe avec $\widehat{ABC} > 90°$, $\widehat{CDA} > 90°$ et $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$. Soit E et F les symétriques de A par rapport aux droites (BC) et (CD), respectivement. Les segments $[AE]$ et $[AF]$ rencontrent la droite (BD) en K et L respectivement.
Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BEK et DFL sont tangents.

Exercice 13 (G4 IMO SL 2017)
Soit ω le A-cercle exinscrit dans le triangle ABC. Soit D, E et F les points de tangences de ω avec les côtés BC, CA et AB respectivement. Le cercle circonscrit à AEF intersecte (BC) en P et Q respectivement. Soit M le milieu de $[AD]$. Montrer que ω est tangent au cercle circonscrit à MPQ.

Solutions

Solution de l'exercice 1



Avec un belle figure, on conjecture que A, F, G et T sont cocycliques (T a été malencontreusement renommé H sur cette figure). On peut le montrer par chasse aux angles en montrant par exemple $\widehat{FAG} = \widehat{FTG}$. Cela équivaut à montrer que

$$180° - \widehat{AFG} - \widehat{AGF} = 180° - \widehat{TFG} - \widehat{TGF}$$

.

Il suffit au fait de montrer que $\widehat{AFG} = \widehat{TGF}$ et de manière analogue on aurait alors montré que $\widehat{AGF} = \widehat{TFG}$.

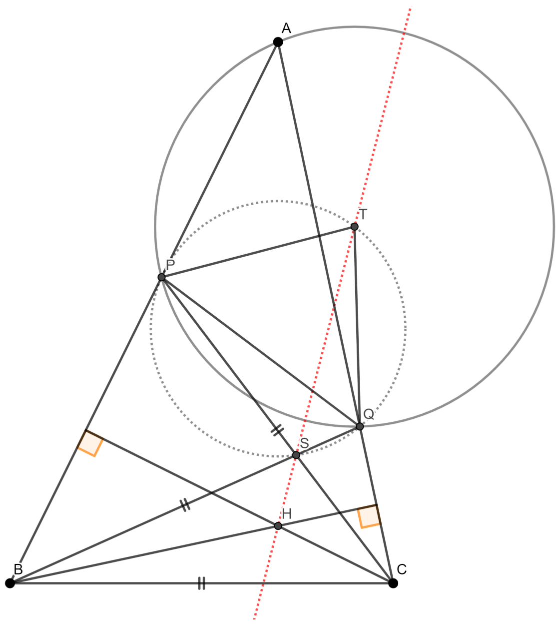
En utilisant (TG) tangent à $\mathcal{C}_{GEC}$ puis $AEGF$ cocycliques :

$$\widehat{TGF} = \widehat{TEC} = 180° - \widehat{AEG} = \widehat{AFG}$$

ce qui montre bel et bien que $T \in \Gamma$.

Enfin, par angle inscrit : $\widehat{ATG} = 180° - \widehat{AFG} = 180° - \widehat{TGF}$ Ces deux angles étant alterne-internes on conclut que (AT) et (GF) sont parallèles comme voulu.

Solution de l'exercice 2



On remarque que le triangle PCB est isocèle en C et que la médiatrice du segment $[PB]$ est la droite (HC), de sorte que la droite (HC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$. De même, la droite (HB) est la bissectrice de l'angle $\widehat{QBC}$. Mais alors on se rend compte que H est l'intersection des bissectrices issues de B et de C dans le triangle SBC. H est donc le centre inscrit de SBC, ce qui signifie que H est le centre inscrit de BSC ! Ainsi (SH) est la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BSC}$ et il suffit désormais de montrer que (ST) est la bissectrice intérieure de $\widehat{PSQ}$. On a donc simplifié le problème puisque l'on s'est débarassé du point H.

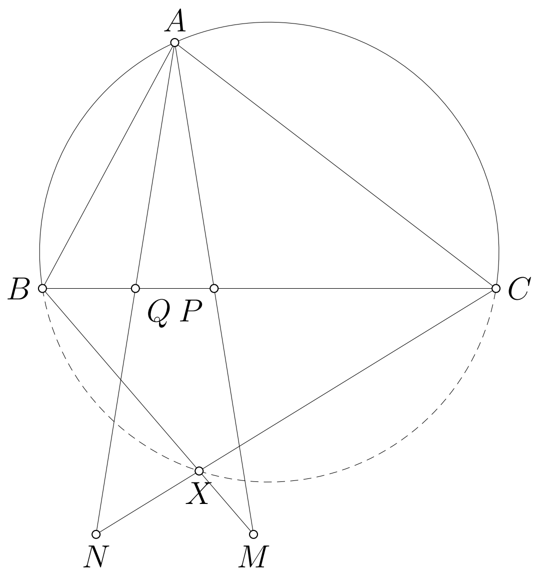
On remarque alors, une configuration connue : T est sur la médiatrice de PQ par définition et on veut montrer que (ST) bissecte $\widehat{PSQ}$, c'est-à-dire que T est le pôle Sud de S dans PSQ. Il suffit de montrer $PSQT$ sont cocycliques.

Par exemple, on peut calculer l'angle $\widehat{CSB}$ en fonction de α, β et γ (les angles du triangle ABC). On a alors :

$\widehat{CSB} = 180° - \widehat{QBC} - \widehat{PCB} = 180° - 2\widehat{HCB} - 2\widehat{HBC} = 180° - 2(90° - \beta) - 2(90° - \beta) = 180° - 2\alpha$

Cela signifie que $\widehat{QSP} = 180° - 2\alpha = 180° - \widehat{QTP}$ d'après le théorème de l'angle au centre dans le cercle $\mathcal{C}_{APQ}$. Les points T, P, S et Q sont donc cocycliques ce qui finit le problème.

Solution de l'exercice 3



Ici, il s'agit de réinterpréter les égalités qui sont données. Puisque $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, la droite (AB) est tangente au cercle circonscrit au triangle APC. Le centre du cercle ACP s'obtient comme le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A et la médiatrice du segment $[AC]$. Si on peut tracer le cercle APC, on peut tracer le point P. De même on trace le point Q. On peut alors tracer le reste de la figure. On note X le point d'intersection des droites (BM) et (CN).

Les égalités d'angles nous apportent que les triangles ABC, PBA et QCA sont semblables. En particulier on déduit que

$$\frac{NQ}{QC} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{PM}$$

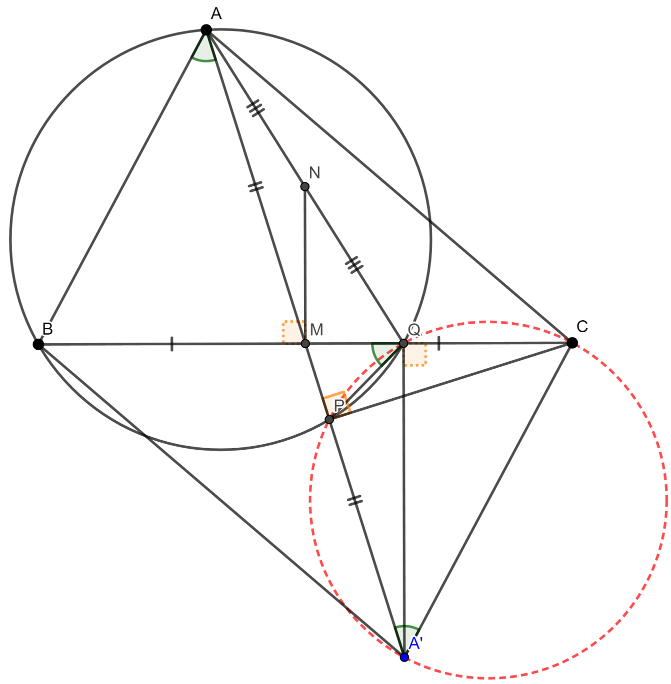
et puisque $\widehat{BPM} = 180° - \widehat{BPA} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{NQC}$, les triangles BPM et NQC sont semblables.

On a donc

$$\widehat{XBC} + \widehat{XCB} = \widehat{MBP} + \widehat{NCQ} = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} = \widehat{BPA} = \widehat{BAC}$$

donc $\widehat{BXC} = 180° - \widehat{BAC}$ et les points A, B, C et X sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Un bon réflexe pour commencer dans n'importe quel exercice est de trouver des énoncés équivalents à l'énoncé demandé. Dans cet exercice, on veut montrer que $NB = NC$. Mais ceci n'est pas la première égalité de longueur impliquant des points de l'énoncé puisque $MB = MC$ par hypothèse. Il suffit donc de montrer que (MN) est la médiatrice de BC, ou encore de montrer que les droites (NM) et (BC) sont perpendiculaires.

En gardant ces formulations de l'énoncé en tête on commence à chercher des angles impliquant les points B, M, N et C mais on se rend vite compte que l'on arrivera plus à avancer sans faire de nouvelles conjectures ou sans introduire de nouveaux points. Dans des exercices contenant des milieux assez difficiles à utiliser, une bonne idée est souvent d'introduire d'autres milieux/symétriques pour obtenir ainsi des droites parallèles (droite des milieux) et donc des égalités d'angle intéressantes. En particulier, l'idée la plus importante illustrée par cet exercice est celle de compléter un parallèlogramme lorsqu'on est en présence d'un milieu inutilisable (car les diagonales d'un parallèlogramme se coupent en leur milieu). On introduit donc A' le symétrique de A par rapport à M et il vient que $ABA'C$ est un parallèlogramme.

Pour se convaincre rapidement qu'on avance dans la bonne direction, on remarque que puisque M est le milieu de AA', et N le milieu de AQ, les droites $(A'Q)$ et (MN) sont parallèles d'après le théorème de la droite des milieux. Il suffit donc de montrer que les droites $(A'Q)$ et (BC) sont perpendiculaires, c'est à dire que $\widehat{A'QC} = 90°$.

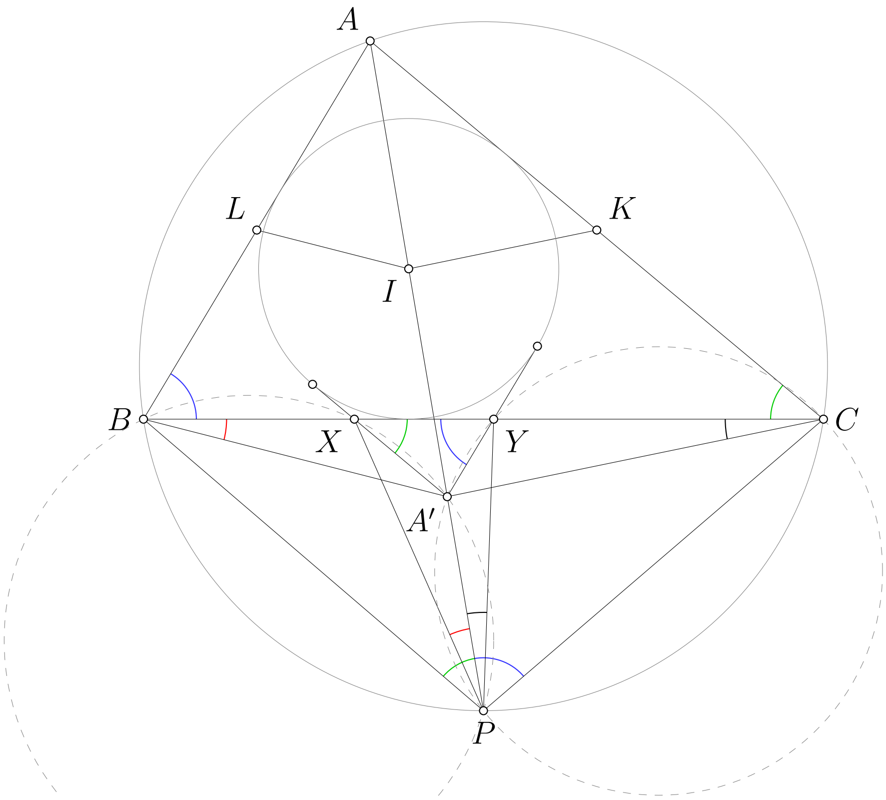
Or $\widehat{A'PC} = 90°$ par définition. Il suffit donc de montrer que les points A', P, Q et C sont cocycliques ! Ce dont on pouvait se rendre compte en traçant une bonne figure.

En remarquant que (AB) et $(A'C)$ sont parallèles et en utilisant $ABPQ$ cocycliques, on obtient par chasse aux angles :

$$\widehat{PA'C} = \widehat{AA'C} = \widehat{BAA'} = \widehat{BAP} = \widehat{BQP} = 180° - \widehat{PQC}$$

Ainsi les points A', P, Q et C sont cocycliques, ce qui finit le problème.

Solution de l'exercice 5



En reprenant les idées de l'exercice précédent, soit s la symétrie de centre I et soit $A' = s(A)$. Notons que $A' \in (AI)$. La symétrie s envoie la droite (AC) sur une tangente à ω parallèle à (AC). Il s'agit donc de la parallèle à (AC) passant par X. Puisque $A' \in s((AC))$, les droites (XA') et (AC) sont parallèles. De la même façon, les droites (AB) et (YA') sont parallèles. En utilisant l'alignement des points A, I, A' et P, on a d'après le théorème de l'angle inscrit

$$180° - \widehat{BXA'} = \widehat{A'XC} = \widehat{ACB} = \widehat{APB} = \widehat{A'PB} \quad \text{et} \quad 180° - \widehat{CYA'} = \widehat{A'YB} = \widehat{CBA} = \widehat{APC} = \widehat{A'PC}.$$

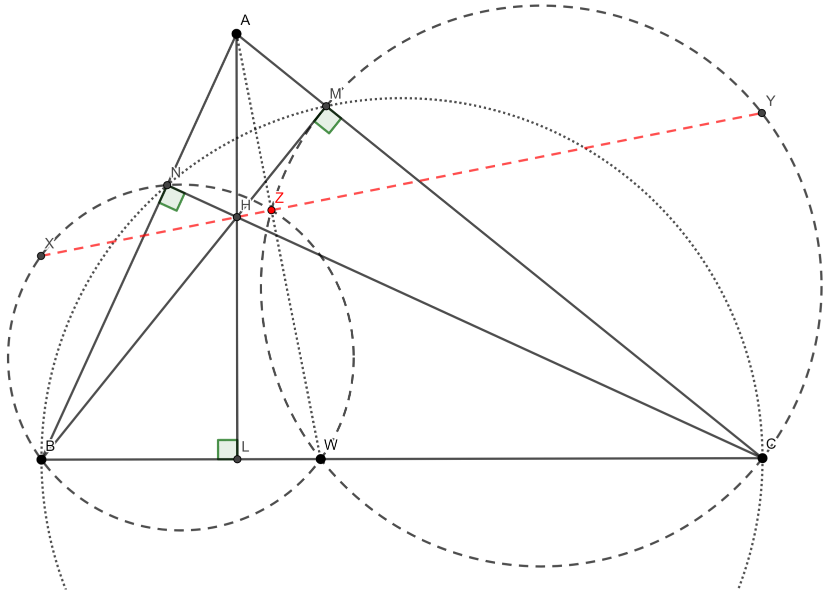
Les points B, X, A' et P sont donc cocycliques, de même que les points C, Y, A' et P.

Puisque les points K, L et I sont respectivement les milieux des segments $[AC], [AB]$ et $[AA']$, les droites (IK) et $(A'C)$ sont parallèles d'après le théorème de la droite des milieux, de même que les droites (IL) et $(A'B)$. Il en découle

$$\widehat{KIL} = \widehat{BA'C} = 180° - \widehat{A'BC} - \widehat{A'CB} = 180° - \widehat{A'BX} - \widehat{A'CY} = 180° - \widehat{XPA'} - \widehat{YPA'} = 180° - \widehat{XPY}$$

comme voulu.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>



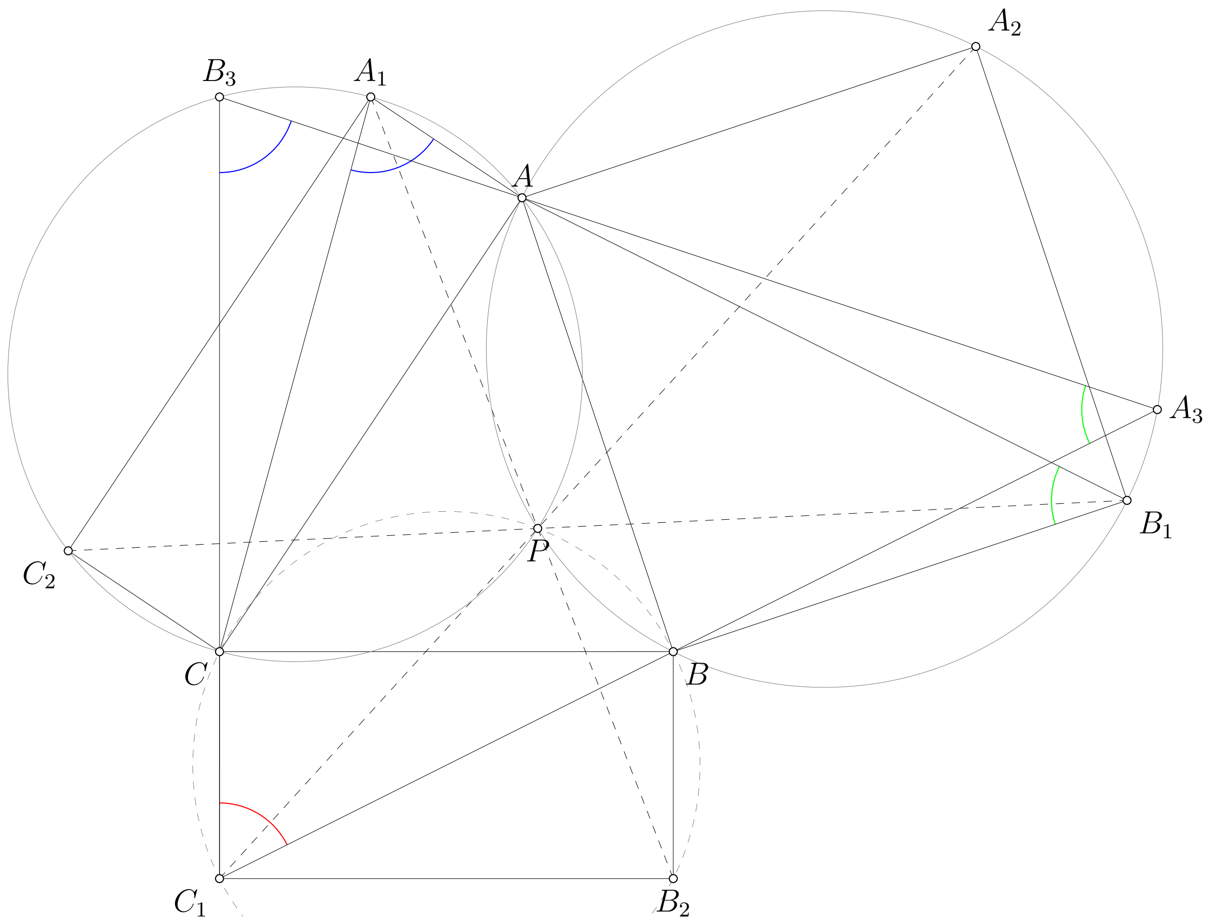
Il y a ici besoin d'une figure exacte pour pouvoir effectuer des conjectures.

Soit Z le second point d'intersection des cercles ω_1 et ω_2. Notons que puisque les segments $[WX]$ et $[WY]$ sont des diamètres des cercles ω_1 et ω_2 respectivement, $\widehat{YZW} + \widehat{XZW} = 90° + 90° = 180°$ donc les points X, Z et Y sont alignés. Il reste à montrer que par exemple les points Z, H et X sont alignés pour conclure.

Les points M, N, B et C sont cocycliques donc les droites $(WZ), (CM), (BN)$ sont les axes radicaux des cercles ω_1, ω_2 et $\mathcal{C}_{BCN}$. Elles sont donc concourantes au point A. Ainsi, les points A, Z et W sont alignés.

Soit L le pied de la hauteur issue du sommet A. Les points N, H, L et B sont cocycliques donc par puissance d'un point, $AH \cdot AL = AN \cdot AB = AZ \cdot AW$. D'après la réciproque de la puissance d'un point par rapport à un cercle, cela signifie que les points W, Z, H et L sont cocycliques. Ainsi, $\widehat{WZH} = 180° - \widehat{HLW} = 90°$. On a donc $\widehat{WZH} = 90° = \widehat{WZX}$ donc les points Z, H et X sont alignés comme désiré, ainsi que les points X, Y et H.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



Ici, comprendre comment construire la figure permet de terminer rapidement l'exercice.

Le fait que la somme des angles vaut $180°$ nous fait penser à un triangle. On doit donc essayer de créer un triangle ayant les angles $\widehat{BC_1C}, \widehat{CA_1A}$ et $\widehat{AB_1B}$. Pour cela on part du rectangle CBB_2C_1 et du rectangle AA_1C_2, C. On souhaite construire un point B_3 sur la droite (C_1C) tel que $\widehat{CB_3A} = \widehat{CA_1A}$. Le théorème de l'angle inscrit est tout indiqué, on choisit B_3 comme le second point d'intersection de la droite (CC_1) et du cercle (AA_1C_2C). On Prolonge ensuite les droites (B_3A) et (BC_1) pour obtneir un point A_3 vérifiant $\widehat{AA_3B} = 180° - \widehat{BC_1C} - \widehat{CA_1A}$. Pour construire le point B_1, on utilise encore une fois le théorème de l'angle inscrit et le point B_1 est le point d'intersection du cercle (AA_3B) et de la perpendiculaire en B à la droite (AB). On peut alors construire A_2.

Lorsque l'on trace les trois droites qui doivent concourir, on s'aperçoit qu'elles se coupent sur le second point d'intersection des deux cercles (AA_1C_2C) et (AA_2B_1B). On note P ce second point d'intersection.

La symétrie du problème suggère que le point P appartient aussi au cercle (CBB_2C_1). Or

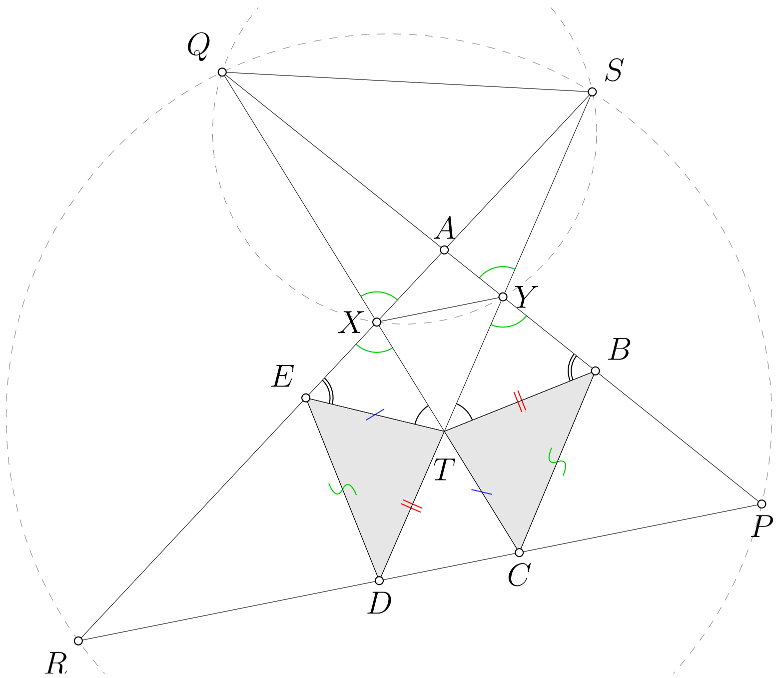
$$\widehat{CPB} = 360° - \widehat{BPA} - \widehat{CPA} = 180° - \widehat{BPA} + 180° - \widehat{CPA} = \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180° - \widehat{CC_1B}$$

comme voulu. On montre ensuite que P appartient aux trois droites demandées. Or

$$\widehat{A_1PB_2} = \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_2} = 90° + 90° = 180°$$

donc le point P appartient à la droite (A_1B_2). On procède de même pour les droites (C_2B_1) et (C_1A_2).

Solution de l'exercice 8



Pour tracer la figure, on commence par le segment $[AT]$. On prend un point B et on note B' son symétrique par rapport au segment $[AT]$. On peut alors choisir E sur le cercle circonscrit au triangle $AB'T$. On choisit ensuite un point C sur le cercle de centre T et de rayon TE. Le point D sera alors le point d'intersection du cercle de centre T de rayon TB avec le cercle de centre E de rayon BC.

Passons désormais à la résolution de l'exercice. Les triangles ETD et CTB sont isométriques d'après les conditions de longueur. On déduit que

$$\widehat{QTE} = 180° - \widehat{ETD} - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{BTC} - \widehat{DTC} = \widehat{STB}$$

Si on note X et Y les points d'intersection respectivement de (QT) avec (AE) et de (ST) avec (AB), alors on a

$$\widehat{EXT} = 180° - \widehat{XET} - \widehat{XTE} = 180° - \widehat{TYB} - \widehat{YTB} = \widehat{TYB}$$

de sorte que $\widehat{QXS} = \widehat{QYS}$ et les points Q, X, Y et S sont cocycliques.

D'autre part, puisque les triangles EXT et BYT partagent les mêmes angles deux à deux, il sont semblables et

$$\frac{XT}{YT} = \frac{ET}{BT} = \frac{TC}{TD}$$

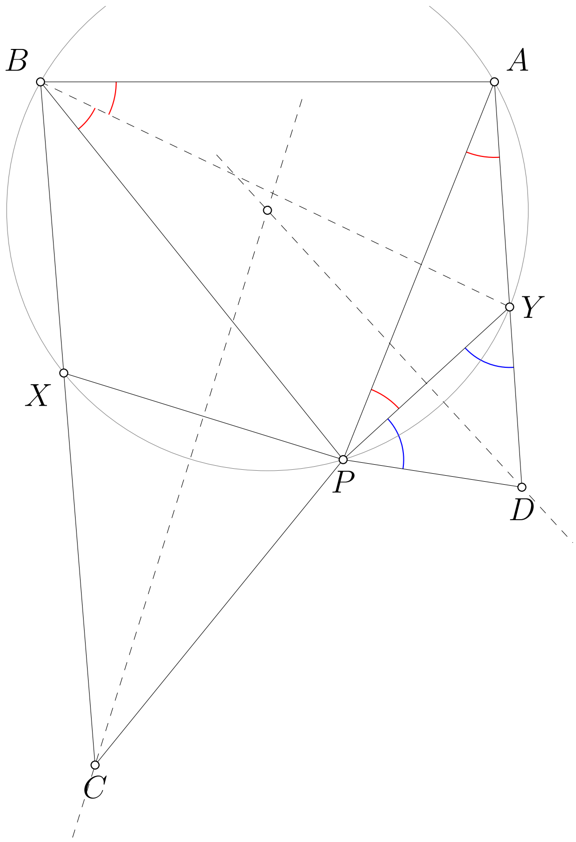
de sorte que d'après Thalès, les droites (XY) et (CD) sont parallèles.

On peut alors conclure

$$\widehat{PQS} = \widehat{YQS} = \widehat{YXS} = \widehat{YXA} = \widehat{PRA} = \widehat{PRS}$$

donc les points P, R, Q et S sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Comme dans l'exercice 7, résoudre l'exercice consiste à trouver comment tracer la figure.

Pour cela on prend le problème à l'envers en notant que l'angle $\widehat{PBA}$ détermine la position du point D. Ceci nous conduit à construire le triangle PBA puis construire les points C et D à partir de ce triangle. Pour construire le point D, il faut déterminer l'angle $\widehat{PBA} = 2\widehat{PAD}$. Ceci conduit à couper l'angle $\widehat{PBA}$ en deux et à tracer sa bissectrice.

Supposons le point D construit. Le point Y d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{PBA}$ avec la droite (AD) vérifie par hypothèse

$$\widehat{YAP} = \widehat{DAR} = \frac{1}{2}\widehat{PBA} = \widehat{YBA}$$

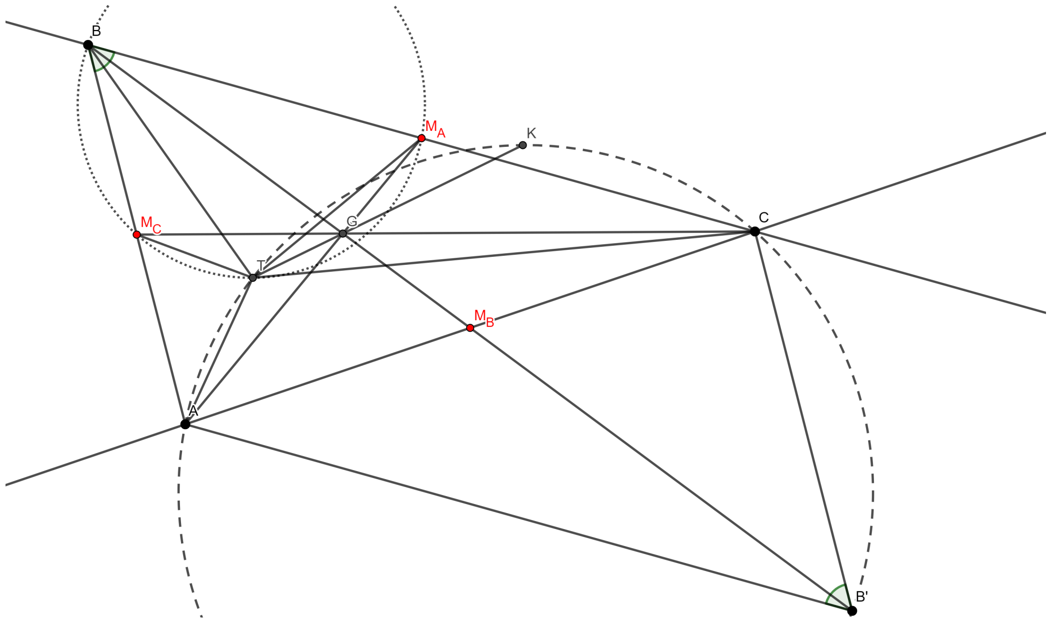
donc les points Y, A, B et P sont cocycliques. Le point Y est donc le pôle Sud du sommet B dans le triangle ABP. A l'inverse, le point D appartient donc à la droite (AY) avec Y le pôle Sud du sommet B dans le triangle PAB. On a alors

$$\widehat{DPY} = \widehat{DPA} - \widehat{YPA} = 3\widehat{PAD} - \widehat{PAD} = 2\widehat{PAD} = \widehat{PYD}$$

Le triangle PDY est donc isocèle en D. Le point D est donc le point d'intersection de la droite (AY) et de la médiatrice du segment $[PY]$. La bissectrice de l'angle $\widehat{PDA}$ est donc la médiatrice du segment $[PY]$.

De même la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ est la médiatrice du segment $[PX]$, où X est le pôle Sud du sommet A dans le triangle APB. Les bissectrices des angles $\widehat{PCB}$ et $\widehat{PDA}$ se coupent donc au point O le centre du cercle circonscrit au triangle APB. Celui-ci appartient bien à la médiatrice $[AB]$.

Solution de l'exercice 10



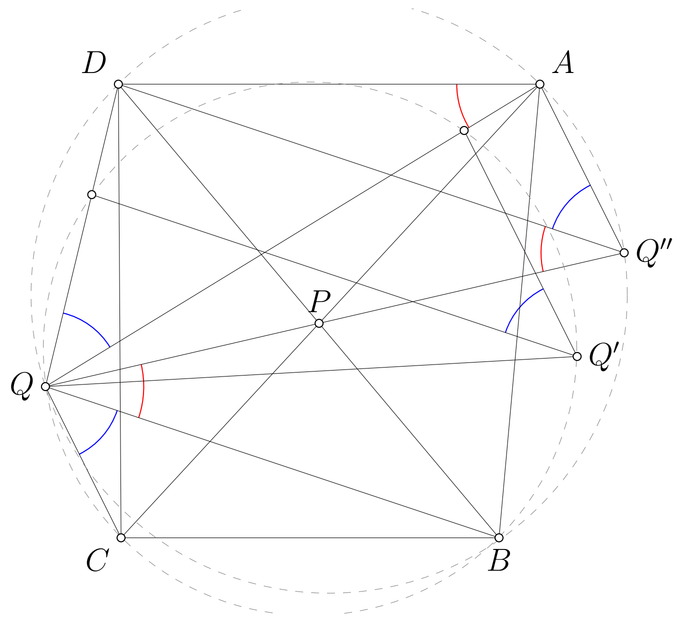
Intuitivement, un rapport de longueur entre des points alignés faisant intervenir G fait penser aux rapports de longueur sur la droite d'Euler. Or ces rapports ce démontrent par des homotéthies donc on peut se dire dès le début de l'exercice qu'une homotéthie pourrait s'avérer utile. Or en traçant une figure précise on peut conjecturer que ce rapport vaut 2. Cela tombe bien puisque l'on sait que $\frac{GA}{GM_A} = \frac{GB}{GM_B} = \frac{GC}{GM_C} = 2$ où M_A, M_B, M_C désignent les milieux de BC, CA, AB respectivement. Il suffit donc de montrer qu'il existe une homotéthie de centre G qui envoie M_A, M_B, M_C, T sur A, B, C, K respectivement.

Soit h l'homotéthie de centre G et de rapport -2. Il est connu que $h(M_A) = A, h(M_C) = C$ et on veut $h(T) = K$. Or par définition $h(T) \in (GT)$ et $h(T) \in h(\mathcal{C}_{M_A M_C T})$. Donc, si on montre que $h(\mathcal{C}_{M_A M_C T}) = \mathcal{C}_{ACTK}$, on aurait montré que $h(T) = (GT) \cap \mathcal{C}_{ACTK} = K$ ce qui finirait le problème. Il suffit donc de montrer que h envoie $\mathcal{C}_{M_A M_C T}$ sur $\mathcal{C}_{ACT}$.

Or on peut remarquer que $M_A B M_C T$ sont cocycliques. Pour cela on calcule quelques angles : $\widehat{TAB} = 180 - 120 - \widehat{TBA} = 60 - \widehat{TBA} = \widehat{TBC}$. On montre de manière analogue que $\widehat{TCB} = \widehat{TBA}$. Donc les triangles TAB et TBC sont semblables. En particulier, la similitude qui envoie TAB sur TBC envoie également M_C sur M_A. Donc les triangles TM_CB et TM_AC sont semblables. Ainsi, $\widehat{TM_CB} = \widehat{TM_AC} = 180° - \widehat{TM_AB}$. Donc les points M_ABM_CT sont cocycliques.

On pose $B' = h(B)$. Alors $GB' = 2GB = 4GM_B$. Donc $M_BB' = GB' - GM_B = 4GM_B - GM_B = 3GM_B = M_BB$. Donc $ABCB'$ est un parallèlogramme. Ainsi, $\widehat{AB'C} = \widehat{ABC} = 60° = 180° - 120° = 180° - \widehat{ATC}$. Donc $ATCB'$ sont cocycliques ! On a alors fini le problème puique cela implique bel et bien que $h(\mathcal{C}_{M_A M_C T}) = \mathcal{C}_{ATC}$ comme voulu.

Solution de l'exercice 11



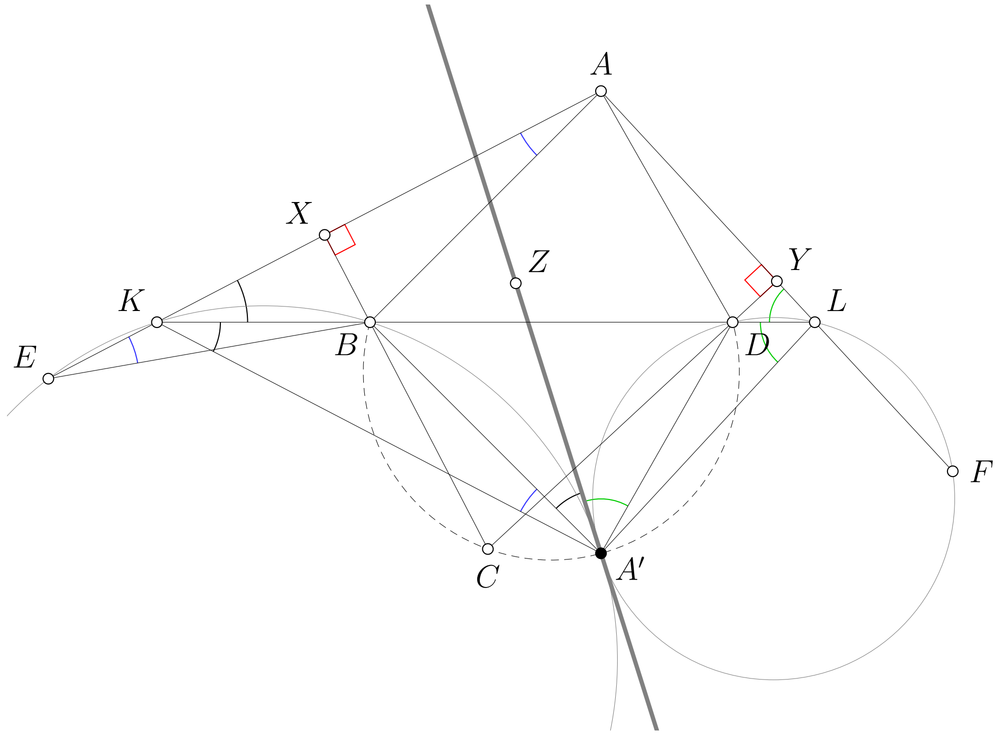
Pour construire la figure, on construit d'abord le point Q et le segment $[BC]$ et on construit le segment $[AD]$ ensuite. Pour transporter l'angle $\widehat{BQC}$, on utilise un point intermédiaire Q' sur le cercle (BCQ). On cherche à utiliser le théorème de l'angle inscrit dans ce cercle, mais pour cela il faut transporter l'angle $\widehat{BQC}$ pour obtenir un angle de même mesure issue du sommet Q'. On trace les parallèles aux droites (QB) et (QC) passant par Q'. Elles forment bien sûr un angle de mesure $\widehat{BQC}$. Elles recoupent le cercle (BQC) en deux points X et Y et d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{XQY} = \widehat{XQ'Y} = \widehat{BQC}$. Pour construire le segment $[AD]$, on choisit une parallèle quelconque à la droite (BC) passant par deux points appartenant respectivement aux droites (QX) et (QY) et ces deux points seront les points A et D.

Passons à la résolution de l'exercice. Malheureusement, notre construction ne nous aide pas beaucoup ici. Cependant, en présence d'un trapèze, il est toujours bon de considérer les deux homothéties qui envoyent une base sur la deuxième. Ici, l'homothétie à considérer est tout indiquée : il s'agit de celle de centre P envoyant B sur D et C sur A. Si Q'' est l'image de Q par cette homothétie, les paires de droites $((AQ''), (QC))$ et $((DQ''), (BQ))$ sont deux à deux parallèles. On en déduit que $\widehat{AQ''D} = \widehat{BQC} = \widehat{AQD}$ donc le point Q'' appartient au cerlce (ADQ). On en déduit par le théorème de l'angle inscrit et par le parallélisme des droites (DQ'') et (QB) que

$$\widehat{DAQ} = \widehat{DQ''Q} = \widehat{BQP}$$

comme voulu.

Solution de l'exercice 12



La manière la plus pratique de construire le point A est d'en construire tout d'abord son symétrique A' par rapport à (BD). En effet, puisque $\widehat{BA'C} = \widehat{BAD} = \widehat{BCD}$, les points A', B, C et D sont cocycliques.

En traçant le reste de la figure, on constate que A' est le point de tangence voulu. Nous allons donc montrer que A' est sur les cercle circonscrits aux triangles BEK et DLF puis que la tangente au cercle $\mathcal{C}_{BEK}$ en A' est également tangente au cercle $\mathcal{C}_{DFL}$.

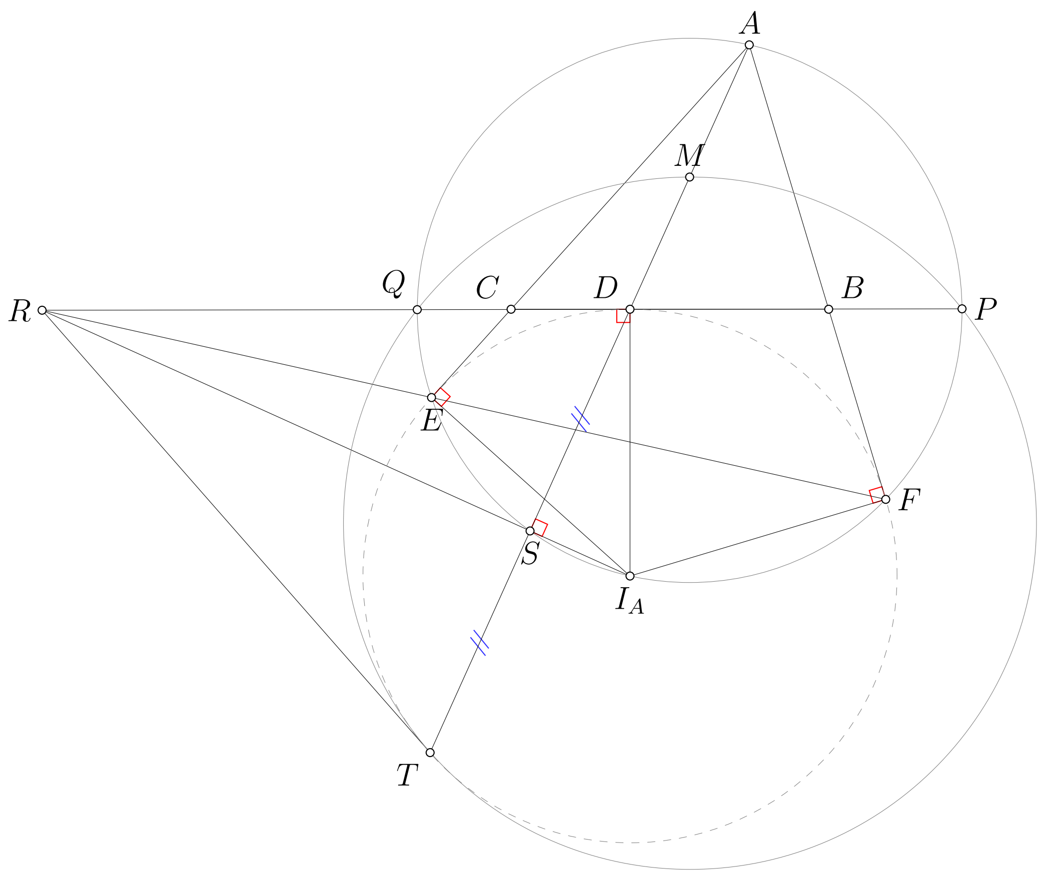
Puisque les points A et E sont symétriques par rapport à (BC), on a $\widehat{BEK} = \widehat{BEA} = \widehat{BAE} = \widehat{BAK}$. Puisque les points A et A' sont symétriques par rapport à la droite (BK), on a $\widehat{KA'B} = \widehat{KAB}$. En combinant, on déduit que $\widehat{KEB} = \widehat{KA'B}$, ce qui implique bien que A' est sur $\mathcal{C}_{BEK}$. De la même manière, on montre que A' est sur $\mathcal{C}_{CFL}$.

Pour la deuxième étape, notons t la tangente à $\mathcal{C}_{BEK}$ en A' et Z un point sur cette tangente tel que Z et A sont du même côté de $[BD]$. Notons également X le point d'intersection des droites (BC) et (AE) et Y le point d'intersection des droites (CD) et (AF). On a alors $\widehat{BKX} = 90° - \widehat{XBK} = 90° - \widehat{DBC}$ et de même $\widehat{ALD} = 90° - \widehat{BDC}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\widehat{ZA'D} &= \widehat{BA'D} - \widehat{BA'Z} \\
&= \widehat{BCD} - \widehat{A'KB} && \text{par angle tangentiel} \\
&= \widehat{BCD} - \widehat{BKX} && \text{par symétrie par rapport à l'axe } (BK) \\
&= \widehat{BCD} + \widehat{DBC} - 90° \\
&= 180° - \widehat{BDC} - 90° \\
&= 90° - \widehat{BDC} \\
&= \widehat{ALD} \\
&= \widehat{DLA'} && \text{par symétrie par rapport à l'axe } (DL)
\end{aligned}$$

Ceci permet de conclure que t est tangente à $\mathcal{C}_{DFL}$ en A', ce qui conclut l'exercice.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u>



La figure indique que le point de contact est également sur la droite (AD). Notons T le second point d'intersection de la droite (AD) avec le cercle $\mathcal{C}_{MPQ}$.

Soit également I_A le centre du cercle ω. Puisque $\widehat{I_A EA} = 90° = \widehat{AFI_A}$, les points A, Q, E, I_A, F et P sont sur un même cercle.

Soit alors S le second point d'intersection de la droite (AD) avec le cercle $\mathcal{C}_{AEF}$. D'après la puissance d'un point :

$$DT \times DM = DP \times DQ = DS \times DA = 2DS \times DM.$$

Ainsi, $DT = 2DS$, donc S est le milieu du segment $[DT]$. Puisque, de plus, $\widehat{ASI_A} = \widehat{AEI_A} = 90°$, la droite (SI_A) est la médiatrice du segment $[DT]$. On déduit que $I_A T = I_A D$, donc T est sur le cercle ω.

Soit R le point d'intersection des tangentes à ω en D et en T. En particulier, $RT = RD$, donc R est sur la médiatrice du segment $[DT]$, c'est-à-dire sur (SI_A). Puisque l'angle $\widehat{RDI_A}$ est droit, la relation d'Euclide nous donne

$$RT^2 = RD^2 = RS \times RI_A = \mathcal{P}_{\mathcal{C}_{AEF}} = RQ \times RP.$$

Ainsi, la droite (RT) est tangente au cercle $\mathcal{C}_{TPQ}$. Les cercle ω et $\mathcal{MPQ}$ ont donc une tangente commune en T, ils sont bien tangents.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle, dont on note Γ le cercle circonscrit. Les tangentes en B et en C au cercle Γ se coupent au point P. La parallèle à la droite (BC) passant par A recoupe le cercle Γ en un point X différent de A. Soit M le milieu du segment $[BC]$. La droite (AM) recoupe le cercle Γ en un point Y différent de A.

Montrer que les points X, Y et P sont alignés.

Exercice 2
Soit une suite $(a_n)_{n\geqslant 1}$ de réels strictement positifs vérifiant pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

(i) $a_k - 2a_{k+1} + a_{k+2} \geqslant 0$;

(ii) $\displaystyle\sum_{i=1}^{k} a_i \leqslant 1$.

Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$:

$$0 \leqslant a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}$$

Exercice 3
Soit ABC un triangle et $P \in [BC]$, $Q \in [CA]$, $R \in [AB]$. On note $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ les cercles circonscrits des triangles AQR, BRP et CPQ respectivement. La droite (AP) recoupe les cercles $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ en les points X, Y, Z respectivement.

Montrer que

$$\frac{YX}{XZ} = \frac{BP}{PC}.$$

Exercice 4

(a) Existe-t-il une partition de $\mathbb{Z}$ en 3 ensembles non vides A, B, C tels que $A+B$, $B+C$ et $C+A$ soient disjoints ?

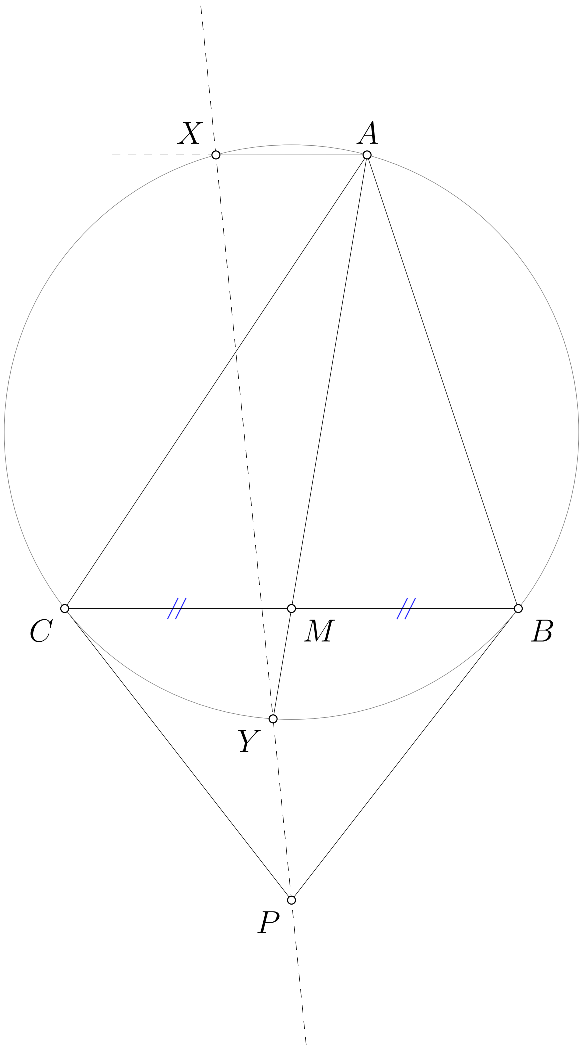
(b) Existe-t-il une partition de $\mathbb{Q}$ en 3 ensembles non vides A, B, C tels que $A+B$, $B+C$ et $C+A$ soient disjoints ?

Soit E un ensemble, on dit que A, B, C est une partition de E si A, B, C sont des sous-ensembles de E, deux à deux disjoints, et dont la réunion est E. Par exemple $\{1\}, \{2,4\}, \{3\}$ forme une partition de $\{1,2,3,4\}$, alors que $\{1\}, \{2,4\}, \{3,4\}$ et $\{1\}, \{2\}, \{3\}$ ne sont pas des partitions de $\{1,2,3,4\}$.

Étant donné E et F deux ensembles de réels, $E+F$ désigne l'ensemble des éléments qui s'écrivent comme somme d'un élément de E et d'un élément de F. Par exemple, si $E = \{0,1\}$ et $F = \{0,1,4,8\}$, $E+F = \{0,1,2,4,5,8,9\}$.

Solutions

Solution de l'exercice 1



Notons $\infty_{(BC)}$ le point à l'infini de la droite (BC). On a alors

$$-1 = b_{BCM\infty_{(BC)}}.$$

En projetant depuis A sur le cercle Γ, on déduit que

$$-1 = b_{BCM\infty_{(BC)}} \stackrel{A}{=} b_{(AB),(AC);(AM),(A\infty_{(BC)})} \stackrel{\Gamma}{=} b_{BCYX}.$$

Les points B, C, Y et X sont donc harmoniques sur le cercle Γ. Ceci implique que la droite (XY) passe par le point d'intersection des tangentes à Γ en B et en C.

Solution de l'exercice 2

Montrons le côté gauche de l'inégalité. L'hypothèse de convexité de la suite (a_n) donne que la suite des différences $(a_{n+1} - a_n)$ est croissante. Supposons qu'il existe k tel que $a_k < a_{k+1}$, alors en posant $x = a_{k+1} - a_k > 0$, pour tout $i \geqslant k$ on a $a_{i+1} - a_i \geqslant a_{k+1} - a_k = x$. Ainsi, pour tout $n > 0$,

$$a_{n+k+1} - a_k = \sum_{i=0}^{n} (a_{k+i+1} - a_{k+i}) \geqslant (n+1)x.$$

Donc pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $a_{n+k+1} \geqslant (n+1)x + a_k$ et $a_n \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} +\infty$ ce qui contredit que les sommes partielles soient bornées.

Pour le côté droit, on a par hypothèse $a_{k+1} > 0$. Alors de même

$$\begin{aligned} a_{k-i} &= \left(\sum_{j=0}^{i} a_{k-j} - a_{k-j+1} \right) + a_{k+1} \\ &> (i+1)(a_k - a_{k+1}) \end{aligned}$$

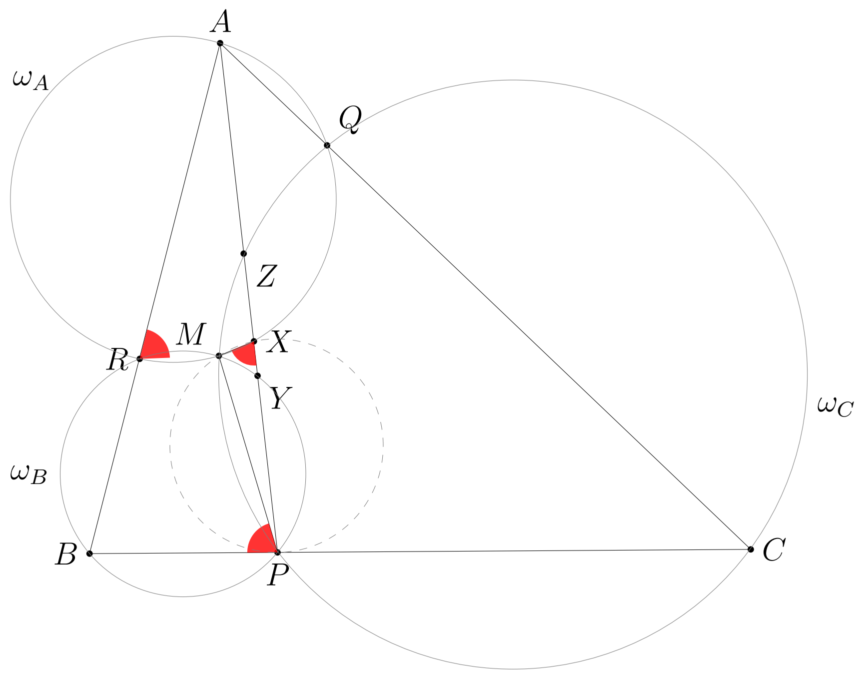
Mais on a aussi

$$\begin{aligned} 1 \geqslant \sum_{i=0}^{k} a_i &> \sum_{i=1}^{k+1} i(a_k - a_{k+1}) \\ &\geqslant \frac{(k+1)(k+2)}{2}(a_k - a_{k+1}) \end{aligned}$$

D'où

$$a_k - a_{k+1} < \frac{2}{k^2}$$

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>



Nous utiliserons plusieurs fois le lemme suivant qui se démontre par une chasse aux angles : Soit Γ et Γ' deux cercles s'intersectant en A et B. Soit $X \in \Gamma$. Alors la similitude de centre A qui envoie Γ sur Γ' envoie également X sur Y tel que Y est la deuxième intersection de (BX) avec Γ' (en cas de points confondus on prend la tangente).

Par le théorème de Miquel, les cercles $\omega_A, \omega_B, \omega_C$ se coupent en un même point M. (La preuve est une courte chasse aux angles.) Nous allons montrer qu'une similitude de centre M envoie X, Y, Z sur P, B, C respectivement. Puisque la similitude directe conserve les rapports de longueur, cela suffira pour conclure.

Montrons d'abord que M est le centre de la similitude envoyant Y, Z sur B, C. Effectivement, P est l'intersection de (YZ) et (BC) et M le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits de PZC et PYB. Puis, par cocyclicité de $RMXA$ et $RMPB$, nous avons $\widehat{MXY} = \widehat{ARM} = \widehat{MPB}$. Donc, le cercle circonscrit de MXP est tangent à (BP). Donc, M étant sur les cercles circonscrits de MXP et PBY, M est aussi le centre de la similitude qui envoie X sur P et Y sur B. Donc, M est bien le centre de la similitude qui envoie X, Y, Z sur P, B, C et on a terminé.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Pour $\mathbb{Z}$ il suffit de prendre A l'ensemble des nombres congrus à 0 modulo 3, B ceux congrus à 1 et C ceux congrus à 2. Ainsi $A + B$ est constitué d'éléments valant $1 \bmod 3$, $A + C$ valant $2 \bmod 3$ et $B + C$ valant $0 \bmod 3$.

Montrons que réciproquement, toute partition vérifiant l'énoncé est à permutation près de cette forme-là. Soit A, B, C une partition de $\mathbb{Z}$ en 3 ensembles disjoints non vide A, B, C tels que $A + B$, $B + C$ et $C + A$ soient disjoints. Notons que si on prend $(a, b, c) \in A \times B \times C$, alors $a + b - c$ est dans C. En effet, si c'est dans B, $a + b$ est dans $A + B$ et $B + C$, si c'est dans A, $a + b$ est dans $A + B$ et $A + C$. Ainsi si on prend a, a' dans A, b dans B et c dans C, $a + b - (a' + b - c) = a - a' + c$ est dans C.

Regardons la plus petite différence strictement positive entre deux nombres de A, de B ou de C. Comme parmi $0, 1, 2, 3$ deux sont dans le même ensemble, elle vaut au plus 3, notons la d. En particulier, C (et de même B) sont stables par addition ou soustraction de d. Cela prouve que $d = 1$ est impossible, car sinon $B = C = \mathbb{Z}$, idem pour $d = 2$ (sinon B et C contiennent chacun tous les nombres pairs ou impairs, donc comme ils sont disjoints contiennent tous les entiers). Ainsi $d = 3$, et B contient au moins tous les éléments d'une classe de congruence modulo 3, et C ceux d'une autre classe modulo 3. Comme C contient une différence de 3, A est stable par addition ou soustraction de $d = 3$, donc contient une troisième classe modulo 3. Ainsi comme ils sont disjoints, à permutation près A est l'ensemble des nombres congrus à 0 modulo 3, B ceux congrus à 1 et C ceux congrus à 2. Ainsi $A + B$ est constitué d'éléments valant $1 \bmod 3$.

Maintenant pour le cas de $\mathbb{Q}$, supposons qu'il existe de tels A, B, C, quitte à les renommer A contient 0. Soit a, b, c trois éléments de A, B, C, fixons d un entier strictement positif tel que da, db, dc soient entiers. Notons que dA, dB, dC vérifient l'énoncé car $d\mathbb{Q} = \mathbb{Q}$ et multiplier par d ne change pas le caractère disjoint de A, B, C et de $A + B, B + C, C + A$. En particulier, en définissant $A' = (dA) \cap \mathbb{Z}$, B' et C' de même, ils forment une partition de $\mathbb{Z}$ tels que $A' + B', A' + C', B' + C'$ sont disjoints. En particulier, quitte à échanger A, B, C, dA contient tous les entiers divisibles par 3, et aucun autre. Donc A contient 0.

Mais $3dA, 3dB, 3dC$ vérifie aussi l'énoncé, donc $3dA$ contient tous les entiers divisibles par 3, donc 3. Ainsi 1 est dans dA, ce qui est absurde.

Il n'existe donc pas de telle partition.

VII. Groupe E

Contenu de cette partie

1 Première partie

1 Utilisation d'arguments asymptotiques en arithmétique (Gaëtan)

Ce cours consistait à exploiter des problèmes de taille dans des exercices de théorie des nombres, et plus particulièrement avec des considérations asymptotiques.
On cherche généralement à exploiter le fait qu'une suite d'entiers convergente est stationnaire.

On peut par exemple souvent construire des suites d'entiers en exploitant les hypothèses de l'énoncé (par exemple une relation de divisibilité signifie que le quotient est entier).
On peut aussi réaliser des combinaisons linéaires ou des produits des termes de notre suite afin de construire d'autres suites entières, et chercher à l'aide de considérations asymptotiques une telle suite qui converge.
Voir par exemple l'exercice 2.

Une autre idée phare est celle de la densité. On considère les quantités $\frac{|A| \cap [1, n]}{n}$ pour certains ensembles A. On le comprendra plus facilement par l'exemple.
Voir l'exercice 11.

Il est aussi possible de montrer qu'une égalité diophantienne est asymptotiquement impossible en se ramenant à un problème de taille.
Voir par exemple l'exercice 14.

Dans tous les cas, il faut savoir faire quelques considérations asymptotiques.
On note $a_n = o(b_n)$ si a_n est négligeable devant b_n, c'est-à-dire si il existe (c_n) qui converge vers 0 tel que $a_n = c_n b_n$.
On note $a_n \sim b_n$ si a_n est équivalent à b_n, c'est-à-dire si il existe (c_n) qui converge vers 1 tel que $a_n = c_n b_n$.
Voici alors quelques exemples de considérations utiles :

- Pour tout $a > 0$ et tout polynôme non nul P on a $P(n) = o(a^n)$ si $a > 1$ et $a^n = o(P(n))$ sinon.
- Pour tout polynôme non constant P de degré d et de coefficient dominant c on a $P(n) \sim c \cdot n^d$.
- Le théorème des nombres premiers dit que la densité des premiers dans $[1, n]$ est équivalente à $\frac{n}{\ln n}$.
- On peut réaliser des estimations plus précises, parfois nécessaires, en sachant faire des développements limités.

Exercice 1
Trouver tous les nombres premiers p, q, r vérifiant :

$$p \mid qr - 1$$

$$q \mid pr - 1$$

$$r \mid pq - 1$$

Exercice 2
Soient $a_1, ..., a_k$ des réels strictement positifs tels que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $n \mid \lfloor na_1 \rfloor + ... + \lfloor na_k \rfloor$. Montrer que les a_i sont tous entiers.

Exercice 3
Trouver tous les réels α tels que pour tout n entier strictement positif, $\lfloor \alpha \rfloor + \lfloor 2\alpha \rfloor + ... + \lfloor n\alpha \rfloor$ soit divisible par n.

Exercice 4
Trouver un ensemble d'entiers strictement positifs tel que pour tous deux sous-ensembles distincts, il n'y en ait pas un dont la somme des éléments de l'un divise la somme des éléments de l'autre.

Exercice 5
Trouver tous les $P \in \mathbb{Z}[X]$ tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $P(n) > n$, et que la suite (x_n) définie récursivement par $x_1 = 1$ et $x_{i+1} = P(x_i)$ soit telle que pour tout $N \in \mathbb{N}^*$, il existe un x_i divisible par N.

Exercice 6
Pour k entier, on note $c(k)$ le plus grand cube d'entier inférieur ou égal à k. Trouver tous les entiers p tels que la suite définie par $a_0 = p$ et $a_{n+1} = 3a_n - 2c(a_n)$ pour $n \geq 0$ soit bornée.

Exercice 7
Soit (a_n) une suite d'entiers strictement positifs tels qu'il existe $C > 0$ tel que $\sum (\frac{1}{a_n})^C$ diverge.
Montrer que $\{p \in \mathbb{P} | \exists n \in \mathbb{N}, p \mid a_n\}$ est infini.
En déduire que la suite des $P(n)$ avec $P \in \mathbb{Z}[X]$ non constant vérifie cette dernière propriété (théorème de Schür).

Exercice 8
Soient a, b des entiers tels que $a \cdot 2^n + b$ est un carré parfait pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer que $a = 0$.

Exercice 9
Trouver tous les polynômes f à coefficients réels tels que pour tout n entier positif n'ayant que des 1 dans son écriture décimale, $f(n)$ vérifie ces mêmes propriétés.

Exercice 10
Existe-t-il $n > 1$ tel qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ et $d_1, ..., d_k$ des entiers strictement positifs non nécessairement distincts vérifiant $n^2 = d_1...d_k$ et $d_i^2 \mid n^2 + d_i$ pour tout $i = 1, .., k$?

Exercice 11
Soit $a_1, a_2, ...$ la suite des puissances parfaites dans l'ordre croissant et k un entier naturel impair. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n vérifiant $k \mid a_{n+1} - a_n$

Exercice 12
Trouver toutes les suites $(x_1, ..., x_{2024})$ vérifiant que pour tout entier strictement positif n il existe un entier a tel que $\sum_{j=1}^{2024} jx_j^n = a^{n+1} - 1$

Exercice 13
Montrer qu'il existe une infinité de $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^2 + 1$ est squarefree.

Exercice 14
Soit $u \in \mathbb{N}^*$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini de $n \in \mathbb{N}^*$ tels qu'il existe $\alpha > \beta \geq 0$ entiers vérifiant $n! = u^\alpha - u^\beta$.

Exercice 15
Soit $a_1, a_2, ...$ une suite d'entiers strictements positifs vérifiant $a_{n+2m} \mid a_n + a_{n+m}$ pour tous $m, n > 0$. Montrer que cette suite est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 16
Soit $a \in \mathbb{R}_+$ tel que $1^a, 2^a, 3^a, ...$ sont tous entiers. Montrer que a est entier.

Exercice 17
Montrer qu'il existe $c > 0$ vérifiant la propriété suivante : si a, b, n sont des entiers strictement positifs tels que $a + i$ et $b + j$ admettent un diviseur commun non trivial pour tous $i, j \in \{1, ..., n\}$ alors $\min(a, b) > c^n \cdot \sqrt{n^n}$

Solution de l'exercice 1
En faisant le produit on trouve $pqr \mid pq + pr + qr - 1$. On peut supposer $p \geq q \geq r$ et alors $pqr < pq + qr + pr \leq 3pq$ donc $r \leq 2$ donc $r = 2$. Ainsi $2pq \mid pq + 2(p + q) - 1$ donc $pq < 2(p + q) \leq 4q$ donc $q = 2$ ou $q = 3$. Ce premier cas est absurde car un nombre pair diviserait un nombre impair. Ce deuxième cas donne $p < 6$ donc $p = 3$ ou $p = 5$. ce premier cas est absurde car 3 diviserait un nombre non multiple de 3. On vérifie facilement que $(2, 3, 5)$ et ses permutations est solution.

Solution de l'exercice 2
L'identité $|\lfloor x \rfloor - x| \leq 1$ permet de déduire que $\dfrac{\lfloor na_1 \rfloor + ... + \lfloor na_k \rfloor}{n}$ converge vers $a_1 + ... + a_n$ en $+\infty$. Puisque c'est une suite d'entiers, elle est stationnaire : on en déduit l'égalité $\lfloor na_1 \rfloor + ... + \lfloor na_k \rfloor = n(a_1 + ... + a_n)$ pour tout n assez grand. Or pour tout i on a $\lfloor na_i \rfloor \leq na_i$ avec égalité ssi na_i est entier : ainsi pour tout n assez grand, na_i est entier. En particulier $a_i = (n + 1)a_i - na_i$ est entier.

Solution de l'exercice 3
Source : IMO 2024 P1

Solution de l'exercice 4
Source : MOSC 4/27/2017 AM Quiz

Solution de l'exercice 5
Source : Iran TST 2004 P6

Solution de l'exercice 6
Source : BxMO 2011 P3

Solution de l'exercice 7
On suppose $\{p \in \mathbb{P} | \exists n \in \mathbb{N}, p \mid a_n\}$ fini égal à $\{p_1, ..., p_k\}$. Alors $\sum (\dfrac{1}{a_n})^C \leq \sum (\dfrac{1}{p_1^{\alpha_1} ... p_k^{\alpha_k}})^C = \prod (1 + \frac{1}{p_i^C} + \frac{1}{p_i^{2C}} + ...) = \prod \dfrac{p_i^C}{p_i^C - 1}$ ce qui contredit l'hypothèse de divergence.
Pour un polynôme non constant il suffit de prendre $C = 2 \deg P$.

Solution de l'exercice 8
On suppose $a \neq 0$ et donc $a > 0$. On considère la suite d'entiers définie par $x_n = \sqrt{a \cdot 2^n + b}$.
On a $x_{n+2} - 2x_n = \sqrt{4a \cdot 2^n + b} - \sqrt{4a \cdot 2^n + 4b} = \dfrac{3b}{\sqrt{4a \cdot 2^n + b} - \sqrt{4a \cdot 2^n + 4b}}$ qui tend vers 0 en $+\infty$. Or $(x_{n+2} - 2x_n)$ est une suite d'entiers, donc elle est stationnaire. Ainsi pour n assez grand on a $x_{n+2} = 2x_n$ ce qui signifie $b = 0$ et donc a et $2a$ sont des carrés, absurde. D'où $a = 0$.

Solution de l'exercice 9
Source : Putnam 2007 A4

Solution de l'exercice 10
Source : EMC 2022 P2

Solution de l'exercice 11
Pour tout $l \in 2\mathbb{N} + 1$ on a $k \mid kl = (\frac{kl+1}{2})^2 - (\frac{kl-1}{2})^2$ donc il suffit de montrer qu'infiniment de fois on a $(\frac{kl+1}{2})^2$ et $(\frac{kl-1}{2})^2$ consécutifs dans la suite (a_n) ie il n'y a pas d'autres puissances parfaites entre les deux nombres. On peut montrer cela avec des arguments de densité. Pour n entier strictement positif, le nombre de puissances parfaites non carrées entre 1 et n est inférieur à $\sqrt[3]{n} + ... + \sqrt[\log_2(n)]{n} \leq \log_2(n)\sqrt[3]{n}$ qui est un $o(\sqrt{n})$ par croissance comparées entre un $\log$ et un polynôme. Or le nombre de $(\frac{kl+1}{2})^2$ va être de l'ordre de $\frac{\sqrt{n}}{2}$ et donc pour n assez grand, un nombre arbitrairement grand des intervalles entre $(\frac{kl+1}{2})^2$ et $(\frac{kl-1}{2})^2$ ne pourront pas être remplies avec d'autres puissances parfaites.

Solution de l'exercice 12
Source : IMOSL 2011 A2

Solution de l'exercice 13
Source : China TST 2015/3 P3

Solution de l'exercice 14
Source : China TST 2004 P2

Solution de l'exercice 15
Source : IMOSL 2021 N7

Solution de l'exercice 16
On rappelle la formule $(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0} \binom{\alpha}{k} x^k$ valable pour tout α réel et $|x| < 1$ où $\binom{\alpha}{k} = \frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(k-1))}{k!}$ ou encore $(1+x)^\alpha = \sum_{k \geq 0}^{n} \binom{\alpha}{k} x^k + O(x^{n+1})$.
On suppose a non entier et on prend $k \in \mathbb{N}$ tel que $k < a < k+1$.
Alors pour $n \in \mathbb{N}$ on a la dérivée discrète

$$\Delta^{k+1}(x^a)[n] = \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} (n+i)^a = n^a (\sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} (\sum_{j=0}^{k} \binom{a}{j} (\frac{i}{n})^j) + O(\frac{1}{n^{k+1}}))$$

$$= n^a (\sum_{j=0}^{k} \binom{a}{j} (\frac{1}{n})^j \sum_{i=0}^{k+1} (-1)^i \binom{k+1}{i} i^j + O(\frac{1}{n^{k+1}}))$$

En écrivant la même expression (sans l'erreur) avec $k+2$ au lieu de a (qui est un binôme de

Newton) et en la considérant comme une égalité polynomiale en $\frac{1}{n}$ on en déduit l'égalité

$$\sum_{i=0}^{k+1}(-1)^i\binom{k}{i}i^j = 0$$

pour tout $j < k+1$.
On a donc

$$\Delta^{k+1}(x^a)[n] = n^a O(\frac{1}{n^{k+1}}) = O(n^{a-k-1})$$

et donc, comme $0 > a-k-1$ on a que $\Delta^{k+1}(x^a)$ converge vers 0. Or par hypothèse $\Delta^{k+1}(x^a)$ ne prend que des valeurs entières. Ainsi éventuellement $\Delta^{k+1}(x^a)$ est nulle et alors, en réintégrant discrètement on trouve que n^a est éventuellement polynomiale ; mais alors n^a est équivalent en $+\infty$ à $c \cdot n^m$ avec c réel et m entier... c'est absurde.

Solution de l'exercice 17
Source : USAMO 2014 P6

2 Utilisation d'arguments asymptotiques en équations fonctionnelles (Théo)

L'objectif de ce TD était de regarder des équations fonctionnelles où la notion d'asymptotique est importante. Régulièrement, en équations fonctionnelles, il est utile de faire tendre des variables vers d'autres variables pour en déduire des égalités, ou des comportements de f. Souvent, le plus simple est de faire tendre des variables vers 0 ou $+\infty$. Attention, il faut néanmoins avoir réussi à prouver que les limites en questions existaient, sinon ce n'est pas du tout rigoureux.

Une notion importante est la monotonie de f : si f est croissante et définie sur I, alors si $x \in I$ n'est pas au bord, on peut définir $f(x^-)$ la limite de f à gauche en x et $f(x^+)$ celle à droite qui existent bien. De plus les limites de f au bord de I existent aussi.

Notons qu'une fonction définie sur un intervalle qui est à la fois continue et injective est monotone.

Une autre idée récurrente est d'essayer d'itérer. Que ce soit itérer une certaine propriété (par exemple si x point fixe, x^n point fixe pour tout n, etc), ou considérer les itérées de f.

Exercice 1
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ tel que pour tout y et pour tout $x \neq 0$,

$$f(x^2 + y) \geqslant \left(\frac{1}{x} + 1\right) f(y).$$

Exercice 2
Déterminer toutes les paires (f, g) de fonctions de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}$ telle que $f(x^2 + y^2) = g(xy)$ pour tout x, y strictement positifs.

Exercice 3
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $f(f(x) + y) = f(x) + 3x + yf(y)$ pour tout x, y strictement positifs.

Exercice 4
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que $f(af(b) + a)\,(f(bf(a)) + a) = 1$ pour tout $a, b > 0$.

Exercice 5
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout x, y, $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x))$

Exercice 6
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $f(0) > 0$ et $f(x+y) \geqslant f(x)+yf(f(x))$ pour tout x, y réels.

Exercice 7
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que

— $x + f(y + f(x)) = y + f(x + f(y))$ pour tout x, y.

— L'ensemble $I = \{\frac{f(x)-f(y)}{x-y} | x \neq y\}$ est un intervalle

Exercice 8
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\frac{f(x)+f(y)}{2} \geqslant f\left(\frac{x+y}{2}\right) + |x-y|$.

Exercice 9
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^{+*}$ dans $\mathbb{R}^{+*}$ telles que pour tout x, y strictement positifs,

$$f(yf(x)^3 + x) = x^3 f(y) + f(x).$$

Exercice 10
Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}^{*+}$ dans $\mathbb{R}^{*+}$ telles que pour tout x, y strictement positifs

$$f(x + f(xy)) + y = f(x)f(y) + 1.$$

Solution de l'exercice 1
En prenant $x = -1$, on obtient que $f(y+1) \geqslant 0$ pour tout y, donc f est à valeur positives ou nulles.

En itérant la propriété de l'énoncé,

$$f(y + nx^2) \geqslant \left(1 + \frac{1}{x}\right)^n f(y).$$

S'il existe y tel que $f(y) > 0$, en remplaçant x par $x/\sqrt{n}$ on obtient

$$f(x^2 + y) \geqslant \left(1 + \frac{\sqrt{n}}{x}\right)^n f(y)$$

En faisant tendre n vers $+\infty$, on a une contradiction puisque le terme de droite tend vers $+\infty$. Ainsi f est nulle, ce qui réciproquement convient.

Solution de l'exercice 2
Soit $\alpha > 0$, en prenant $y = \alpha/x$, on a que

$$f\left(x^2 + \frac{\alpha}{x^2}\right) = g(\alpha).$$

Déterminons les valeurs que peut prendre $x^2 + \frac{\alpha}{x^2}$. Déjà par IAG, toute valeur prise vaut au moins $2\sqrt{\alpha}$, et c'est atteint en prenant $x = \sqrt[4]{\alpha}$. De plus, comme $x \to x^2 + \frac{\alpha}{x^2}$ est continue sur $\mathbb{R}^{+*}$ et tend vers $+\infty$ en $+\infty$, $x^2 + \frac{\alpha}{x^2}$ prend toutes les valeurs entre $[2\sqrt{\alpha}, +\infty[$. Notons C_α la valeur de f sur $[2\sqrt{\alpha}, +\infty[$.

Comme C_α est la limite de f en $+\infty$ quelque soit α, C_α ne dépend pas de α. Ainsi pour tout $\alpha > 0$, pour tout $x > 2\sqrt{\alpha}$, on a que $f(x) = C_1$, donc en faisant tendre α vers 0, f est constante.

En posant $y = 1$, on a alors que $g(x) = C_1$ pour tout $x > 0$. ainsi g et f sont constantes et égales. Réciproquement si $g = f$ et f est constante, la paire (f, g) convient.

Solution de l'exercice 3
S'il existe $x > 0$ tel que $x > f(x)$, alors en prenant $y = x - f(x)$ on a $3x + yf(y) = 0$ ce qui est absurde. Ainsi $f(x) \geqslant x$. En remplaçant x par 1, et y par $z - f(1)$ pour $z > f(1)$, on a $f(z) \geqslant (z - f(1))f(z - f(1)) \geqslant (z - f(1))^2$. En particulier pour x assez grand, $f(x) \geqslant x^2/2 + x$.

En reprenant l'inégalité initiale, en prenant x assez grand (de sorte à ce que $f(x)$ soit aussi assez grand) et $y = 1$, on obtient que

$$f(x) + 3x + f(1) \geqslant f(x) + 1 + (f(x) + 1)^2/2 \geqslant f(x) + x^2/2.$$

Ainsi $x^2/2 \leqslant 3x + f(1)$ ce qui est faux en faisant tendre x vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 4
On a $0 < f(af(b) + a) \leqslant \frac{1}{a}$ donc $0 < f(a) \leqslant \frac{f(b)+1}{a}$ pour tout a. En faisant tendre a vers $+\infty$, f tend vers 0 en $+\infty$. En faisant tendre b vers $+\infty$ on a $f(a) \leqslant \frac{1}{a}$

En remplaçant b par $b/f(a)$, on obtient $f(af(b/f(a)) + a) = \frac{1}{f(b)+a}$. Soit $K > 0$, il existe y tel que $f(y) < K$. Posons $a = K - f(y)$ et $b = y$, on a $f(af(b/f(a)) + A = 1/K$. En particulier, f est surjective.

Supposons qu'il existe $b < b'$ tels que $f(b) = f(b')$. L'égalité de l'énoncé donne $f(bf(a)) = f(b'f(a))$ pour tout a. Donc comme f est surjective, $f(bz) = f(b'z)$ pour tout z, donc $f(z) = f(z \times b'/b)$. En particulier $f(z) = f(z \times (b'/b)^n)$ pour tout $n \geqslant 0$, et en faisant tendre n vers $+\infty$, on a que $f(z) = 0$ ce qui est contradictoire. Ainsi f est injective.

De plus on a $f(af(b)+a) = \frac{1}{f(bf(a))+a}$. Lorsque b parcourt $\mathbb{R}^{+*}$, le terme de gauche parcourt $f(]a, +\infty[)$. Le terme de droite parcourt $]0, \frac{1}{a}[$. Ainsi par injectivité on a $f(a) \geqslant \frac{1}{a}$. Donc $f(x) = 1/x$ pour tout $x > 0$.

Réciproquement la fonction inverse convient car

$$f(af(b) + a)\,(f(bf(a)) + a) = \frac{1}{\frac{a}{b} + a} \times \left(\frac{a}{b} + a\right) = 1.$$

Solution de l'exercice 5
Supposons qu'il existe $x > 0$ tel que $f(x) < 1$. Alors l'équation $x + yf(x) = y$ a une solution strictement positive : $y = \frac{x}{1-f(x)}$. En particulier, en prenant ce y, l'équation initiale devient $f(x) = 2$ ce qui est absurde. Ainsi $f(x) \geqslant 1$ pour tout $x > 0$.

Or $f(x)^2 = 2f(x + yf(x))$. Donc si $f(x) \geqslant M$ pour tout $x > 0$, alors $f(x) \geqslant \sqrt{2M}$ pour tout $x > 0$. Posons $M_0 = 1$, et $M_{n+1} = \sqrt{2M_n}$, on montre par récurrence que $f(x) \geqslant M_n$ pour tout $x > 0$ et tout $n \geqslant 0$.

Or on montre par récurrence que $0 \leqslant M_n \leqslant 2$, ainsi $M_{n+1} \geqslant \sqrt{M_n^2} = M_n$ pour tout $n \geqslant 0$, donc la suite $(M_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante, et converge vers une limite $\ell \geqslant 1$. Par théorème du point fixe $\ell = \sqrt{2\ell}$, donc $\ell^2 = 2\ell$, donc $\ell = 2$. ainsi $f(x) \geqslant 2$ pour tout $x > 0$.

En particulier, $2f(x+yf(x)) = f(x)f(y) \geqslant 2f(x)$, donc $f(x+yf(x)) \geqslant f(x)$. En remplaçant y par $y/f(x)$, on a $f(x + y) \geqslant f(x)$ pour tout $x, y > 0$, donc f est croissante.

Si f est strictement croissante

S'il existe $a < b$ tel que $f(a) = f(b)$, alors pour tout $\alpha \in [a, b]$, $f(\alpha) = f(a)$. En prenant $x = a$, et $y = t/f(a)$ avec $0 < t \leqslant b - a$, on a que $f(a)f(t/f(a)) = 2f(a + t) = 2f(a)$, donc $f(t/f(a)) = 2$, donc $f = 2$ sur $]0, \frac{b-a}{f(a)}]$.

Supposons que $f = 2$ sur $]0, M]$, alors en prenant $x = M$, $2f(y) = 2f(M + 2y)$. En prenant $y \in]0, M]$, on obtient que $f(M + 2y) = 2$, donc $f = 2$ sur $]0, 3M]$. Ainsi par récurrence immédiate $f = 2$ sur $]0, 3^n \frac{b-a}{f(a)}]$ pour tout $n \geqslant 0$. En faisant tendre n vers $+\infty$, on obtient que f est constante égale à 2. Réciproquement la fonction constante égale à 2 vérifie l'équation.

S'il n'existe pas $a < b$ tel que $f(a) = f(b)$, alors f est injective. Or $f(x)f(y) = 2f(x + yf(x)) = 2f(y + xf(y))$, donc $x + yf(x) = y + xf(y)$. En posant $x = 1$, on a alors que f

est affine. Notons A le coefficient en x de $f(x)$, en prenant $x = y$ dans l'équation initiale, on a deux polynômes de degré au plus deux égaux. Le terme de degré 2 du terme de gauche vaut A^2, celui de droite vaut $2A^2$, donc $A = 0$. Ainsi f est constante, et en réinjectant dans l'équation vaut 2.

Ainsi l'unique solution est $f = 2$.

Solution de l'exercice 6

Supposons qu'il existe x_0 tel que $f(f(x_0)) > 0$. Alors en prenant $x = x_0$ et en faisant tendre y vers $+\infty$, f tend vers $+\infty$ en $+\infty$. De même pour $f \circ f$, donc on peut même supposer $f(f(x_0)) \geqslant 2$. En remplaçant y par $y - x_0$ et x par x_0, on obtient $f(y) \geqslant 2y + C$ pour un certain C constant.

En posant $y = f(x) - x$ (qui est strictement positif pour x assez grand) et en prenant x assez grand pour que $f(x)$ et $f(f(x))$ soient strictement positifs, on obtient $f(f(x)) \geqslant f(x) + (f(x) - x)f(f(x)) > (f(x) - x)f(f(x))$, donc $f(x) \leqslant x + 1$ pour tout x assez grand, ce qui est incompatible avec $f(y) \geqslant 2y + C$ pour tout y grand.

Ainsi on a pour tout x $f(f(x)) \leqslant 0$. En prenant $y \leqslant 0$, cela implique f décroissante.

Or si $y \leqslant 0$, $f(y) \geqslant f(0) > 0$, donc pour tout y $f(y) > 0$ (car $f(f(y)) \leqslant 0$). Or ceci contredit que $f(f(y)) \leqslant 0$.

Ainsi il n'y a pas de telle solution.

Solution de l'exercice 7

Déjà 1 n'appartient pas à I, sinon on a $x \neq y$ tel que $f(x) - f(y) = x - y$, donc $x + f(y) = y + f(x)$, ce qui implique par la première propriété de l'énoncé que $x = y$.

De cette preuve, on tire aussi que pour tout $x \neq y$, $x + f(y) \neq y + f(x)$, donc l'élement suivant appartient à I :

$$\frac{f(x + f(y)) - f(y + f(x))}{x + f(y) - y - f(x)} = \frac{x - y}{x - y - f(x) - f(y)} = \frac{1}{1 - \frac{f(x) - f(y)}{x - y}}.$$

Ainsi I est stable par la transformation $t \to \frac{1}{1-t}$.

En particulier pour tout $t \in I$, $\frac{1}{1-t}$ est différent de 1, donc I ne contient pas 0. En composant deux fois $t \to \frac{1}{1-t}$, on obtient que si t est dans I,

$$\frac{1}{1 - \frac{1}{1-t}} = \frac{1-t}{-t} = 1 - \frac{1}{t}$$

est dans I. En particulier,

- Soit I contient un réel strictement positif t, alors il contient $1 - \frac{1}{t} < 1$. Comme I est un intervalle ne contenant par 1, alors I contient un élément inférieur à 1. En particulier pour tout t dans I, $1 - \frac{1}{t} < 1$, donc $t > 0$. Ainsi $I \subset]0, 1[$. Or l'image de $]0, 1[$ par $\frac{1}{1-t}$ est $]1, +\infty[$ ce qui est absurde.
- Soit I ne contient aucun réel strictement positif. On note $k \leqslant 0$ un élément de I, on sait que $\frac{1}{1-k} \in I$, or c'est un réel strictement positif contradiction.

Ainsi dans tous les cas, on obtient une contradiction, il n'existe pas de telle fonction.

Solution de l'exercice 8

Essayons d'itérer la relation donnée pour montrer qu'il n'y a pas de fonctions solutions.

Fixons $a \leqslant b$. En additionnant la propriété pour $(x, y) = \left(a, \frac{a+b}{2}\right)$ et $\left(\frac{a+b}{2}, b\right)$, on obtient :

$$\frac{f(x)+f(y)}{2}+f\left(\frac{x+y}{2}\right)\geqslant f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+2\times\frac{b-a}{2}=f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)+(b-a)$$

Or par la propriété de base appliquée à $\left(\frac{3a+b}{4},\frac{a+3b}{4}\right)$,

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\geqslant 2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2\frac{2(b-a)}{4}=2f\left(\frac{a+b}{2}\right)+(b-a).$$

En sommant les deux inégalité centrées,

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2(b-a)$$

En particulier $\frac{f}{2}$ vérifie la propriété de l'énoncé. Par récurrence immédiate, pour tout n, $\frac{f}{2^n}$ vérifie l'énoncé. On a donc si $a<b$

$$\frac{f(a)+f(b)}{2}\geqslant f\left(\frac{a+b}{2}\right)+2^n(b-a).$$

En faisant tendre n vers $+\infty$ le terme de droite tend vers $+\infty$, tandis que celui de gauche ne change pas : on aboutit à une contradiction.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Comme f est à valeurs positives, pour tout $x,y>0$, $f(yf(x)^3+x)>f(x)$. En remplaçant y par $y/f(x)^3$, on obtient que f est strictement croissante. On note alors pour tout $x\geqslant 0$, $f(x^+)$ la limite (finie par positivité de f) de f à droite en x. La stricte croissance de f implique que $x\to f(x^+)$ est aussi strictement croissante. On note de même $f(x^-)$ la limite de f à gauche en x pour $x>0$.

En faisant tendre x vers 0 et en prenant $y=1$, on obtient $f(0^+)=f((f(0^+)^3)^+)$, donc $0=f(0^+)^3$, donc $f(0^+)=0$.

En faisant tendre y vers 0 dans l'équation on obtient $f(x^+)=f(x)$, donc f est continue à droite.

En remplaçant y par $y/f(x)^3$, on obtient $f(y+x)=f(x)+x^3f(y/f(x)^3)$. Fixons $z>0$, en prenant $0<h<z$, $x=z-h$ et $y=h$, on obtient que $f(z)=f(z-h)+(z-h)^3f(h/f(z-h)^3)$. Lorsque h tend vers 0, $h/f(z-h)$ tend vers 0 car $f(z-h)$ tend vers $f(z^-)$ qui est non nul. Ainsi en passant à la limite on a $f(z)=f(z^-)$ donc f est continue à gauche.

Notons que si $x\geqslant 1$, l'équation $f(x)^3y+x=y$ ne peut avoir de solution strictement positive sinon cela impliquerait $f(x)\leqslant 0$ dans l'équation initiale. Ainsi $f(x)\geqslant 1$, ce qui implique $f(1)\geqslant 1$. Si $f(1)\neq 1$, comme f a limite 0 en 0 il existe $t\in]0,1[$ tel que $f(t)=1$. En prenant $x=t$, on obtient que $f(y+t)=t^3f(y)+1$. Ainsi $t^3f(y)+1>f(y)$, donc $f(y)\leqslant\frac{1}{1-t^3}$.

Cependant, en faisant tendre x vers $+\infty$ dans l'équation initiale on a que f est non bornée ce qui est absurde. Ainsi on a bel et bien $f(1)=1$.

En prenant $x=1$ on obtient que $f(y+1)=f(y)+1$ pour tout $y>0$, donc $f(n)=n$ pour tout entier n strictement positif. Soit x rationnel strictement positif, on pose $y=p/q$ avec $p,q>0$, en prenant $x=q$, on obtient $f(pq^2+q)=q^3f(y)+q$, donc $f(y)=y$. Par continuité f est donc la fonction identité qui réciproquement convient.

<u>*Solution de l'exercice 10*</u>
En prenant $x = 1$, on obtient $f(1+f(y))+y = f(1)f(y)+1$, qui implique immédiatement que f est injective : si $f(y) = f(y')$,

$$y = f(1 + f(y)) - f(1)f(y) - 1 = f(1 + f(y')) - f(1)f(y') - 1 = y'.$$

Notons que si $x \neq x'$, alors par injectivité pour tout $y > 0$, $f(x)f(y) + 1 \neq f(x')f(y) + 1$, donc $f(x+f(xy)) \neq f(x'+f(x'y))$, donc $x+f(xy) \neq x'+f(x'y)$. En particulier en remplaçant x par x/y et x' par x'/y (qui sont encore distincts), cela implique que $(x-x') \neq y(f(x')-f(x))$. Comme $f(x') \neq f(x)$, cela implique que $f(x') - f(x)$ est de signe inverse à $x - x'$, donc du signe de $x' - x$. Ainsi f est croissante, donc strictement croissante par injectivité.

On note alors $f(x^+)$ la limite de f à droite qui est définie pour tout $x \in \mathbb{R}^+$. En faisant tendre x vers 0, l'équation devient $1 + f(0^+)f(y) = f(f(0^+)^+)$. Si $f(0^+) = 0$, alors l'équation devient $1 = f(0^+) = 0$ ce qui est absurde, donc $f(0^+) \neq 0$, donc f est affine.

Réciproquement si f est de la forme $f(x) = Ax + B$, alors l'équation de l'énoncé devient $Ax+A^2xy+AB+B+y = A^2xy+ABx+ABy+B^2+1$, donc est équivalente à $Ax+y+AB+B = ABx + ABy + B^2 + 1$. C'est donc équivalent à $A = AB$, $1 = AB$ et $AB + B = B^2 + 1$, donc à $A = 1$ et $B = 1$. Ainsi l'unique solution est $f(x) = x + 1$ pour tout $x > 0$.

3 Introduction à l'algèbre linéaire (Martin)

Le but de ce cours est moins d'être une introduction à la théorie de l'algèbre linéaire en tant que tel que de donner les outils aux élèves pour affronter les quelques exercices d'Olympiades qui commencent à émerger et pour lesquels la théorie des systèmes linéaires s'avère utile, voire cruciale dans certains cas.

Ainsi, on étudiera la théorie des systèmes mais aussi, pour mieux la comprendre, la théorie des espaces vectoriels et de leur dimension, qui permet de faire le lien entre les systèmes linéaires et les situations concrètes. Le langage des matrices vient nouer ce lien.

Plusieurs des résultats présentés admettent une formulation et une preuve bien plus naturelle avec un meilleur formalisme que celui présent dans ce cours (notamment avec la notion d'application linéaire). Une fois encore, il ne s'agit pas de faire une présentation exhaustive de l'algèbre linéaire, mais bien de présenter les résultats importants ainsi qu'une preuve auto-contenue convaincante permettant de faire tenir le cours en 3h.

Théorie des systèmes

La théorie des systèmes veut systématiser et quantifier l'intuition "s'il y a beaucoup d'équations et peu d'inconnues, il existe des solutions".

Définition 1. On appelle *système linéaire de n équations à m inconnues $x_1, \ldots, x_m$* un ensemble de n équations de la forme

$$\mathcal{S} := \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & b_1 & (L_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n & (L_n) \end{cases} \tag{VII.1}$$

Un $m-$uplet de nombres $(x_1, \ldots, x_m)$ est *solution du système* s'il vérifie chacune des m équations.

Dans le cas où $b_1 = \ldots = b_n$, le système est dit *homogène* :

$$\mathcal{S}_h := \begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1m}x_m & = & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + a_{n2}x_2 + \ldots + a_{nm}x_m & = & 0 \end{cases} \tag{VII.2}$$

L'appelation "linéaire" renvoie au fait que toutes les équations sont de degré 1 en chacune des variables. Ainsi, si $x := (x_1, \ldots, x_m)$ et $x' := (x'_1, \ldots, x'_m)$ sont solution du système $\mathcal{S}_h$, alors $\lambda x + \mu x' := (\lambda x_1 + \mu x'_1, \ldots, \lambda x_m + \mu x'_m)$ est également solution du système $\mathcal{S}_h$. Cela peut s'interpréter comme le fait que la somme des causes induit la somme des conséquences.

L'enjeu, dans un premier temps, est de savoir comment résoudre un système linéaire. Le caractère linéaire se retrouve dans la propriété suivante, qui "ramène" la résolution au cas du système homogène.

Proposition 2. Soit $(x_1, \ldots, x_m)$ une solution particulière de (VII.1). Alors toute solution de (VII.1) s'écrit comme la somme de $(x_1, \ldots, x_m)$ et d'une solution de (VII.2).

Démonstration. Soit $(y_1, \ldots, y_m)$ une solution de (VII.1). Un calcul permet de montrer que $(y_1 - x_1, \ldots, y_m - x_m)$ est solution de (VII.2). $\square$

Autrement dit, pour résoudre un système, il suffit d'avoir une solution particulière et d'avoir les solutions du système homogène. Cela ne nous avance pas toujours, mais cela donne une idée de la strcture (ou de la forme si vous préférez) des solutions. Heureusement, Gauss a réfléchi pour nous et a donné un algorithme permettant de résoudre n'importe quel système liénaire de façon systématique (i.e sans astuce).

Commençons par un cas simple, le cas d'un système triangulaire.

Définition 3. Un système triangulaire un système de la forme suivante

$$\left\{\begin{array}{ccccccccccl} a_{11}x_1 & + & a_{12}x_2 & + & \dots & + & a_{1r}x_r & + & a_{1n}x_n & = & b_1 \quad (L_1) \\ & & a_{22}x_2 & + & \dots & + & a_{2r}x_r & + & a_{2n}x_n & = & b_2 \quad (L_2) \\ & & & & \ddots & \ddots & & & \vdots & & \vdots \\ & & & & & & a_{rr}x_r & + & a_{rn}x_n & = & b_r \quad (L_r) \\ & & & & & & & & \vdots & \vdots & \vdots \\ & & & & & & & & 0 & = & b_m \end{array}\right.$$

avec $a_{11}, \dots, a_{rr} \neq 0$.

Pour résoudre un système triangulaire, on *remonte* l'escalier : on commence par exprimer x_r en fonction de $x_{r+1}, \dots, x_n$ à l'aide de la ligne L_r. Puis on exprime x_{r-1} en fonction de $x_r, \dots, x_n$) l'aide de la ligne L_{r-1}. L'expression de x_r en fonction de $x_{r+1}, \dots, x_n$ nous permet d'exprimer à son tour x_{r-1} uniquement en fonction de $x_{r+1}, \dots, x_n$. On continue ainsi de suite, et l'ensemble des solutions est de la forme

$$(\underbrace{c_{1\,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{1n}x_n}_{x_1}, \underbrace{c_{2\,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{2n}x_n}_{x_2}, \dots, \underbrace{c_{r\,r+1}x_{r+1} + \dots + c_{rn}x_n}_{x_r}, x_{r+1}, \dots, x_n).$$

On voit que les variables $x_{r+1}, \dots, x_n$ déterminent toutes les autres inconnues. L'ensemble des solutions possède donc $n-r$ degrés de liberté.

Notons également que si $b_{r+1}, \dots, b_m$ ne sont pas tous nuls, alors le système n'a pas de solutions, il est dit *incompatible*.

Un cas légèrement différent mais tout aussi simple est le cas des systèmes échelonnés, c'est-à-dire les systèmes en escalier pas forcément régulier : la ligne L_{i+1} contient aumoins un coeefficient non nul à gauche que la ligne L_i. Dans ce cas, les degré de liberté ne sont pas forcément les dernières inconnues, mais la méthode de résolution reste la même (pour passer d'un système échelonné à un système triangulaire, on peut effectuer une suite de changement de variables de la forme $(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j \dots, x_n) \leftrightarrow (x_1, \dots, x_i, \dots, x_j \dots, x_n))$.

Voyons à présent comment, à partir d'un système, on peut se ramener au cas d'un système échelonné.

Définition 4. Deux systèmes sont dit équivalents s'ils ont le même ensemble de solutions.

Définition 5. Une opération est une manipulation algrébrique des lignes. Voici les trois opérations que nous utiliserons :

- La transposition t_{ij} : La transposition consiste à échanger deux lignes L_i et L_j :

$$\left\{\begin{array}{lcll} a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m & = & b_1 & (L_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\ldots+a_{im}x_m & = & b_i & (L_i)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m & = & b_j & (L_j)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nm}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m & = & b_1 & (L_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m & = & b_j & (L_j)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\ldots+a_{im}x_m & = & b_i & (L_i)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nm}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

- La dilatation $d_i(\lambda)$: on remplace une ligne L_i choisie par la ligne λL_i, avec λ non nul.

$$\left\{\begin{array}{lcll} a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m & = & b_1 & (L_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\ldots+a_{im}x_m & = & b_i & (L_i)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nm}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array}\right. \longrightarrow \left\{\begin{array}{lcll} a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m & = & b_1 & (L_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ \lambda a_{i1}x_1+\ldots+\lambda a_{im}x_m & = & \lambda b_i & (\lambda L_i)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nm}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

- La transvection $T_{ij}(\lambda)$: on remplace une ligne L_i par la ligne $L_i+\lambda L_j$:

$$\left\{\begin{array}{lcll} a_{11}x_1+\ldots+a_{1m}x_m & = & b_1 & (L_1)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{i1}x_1+\ldots+a_{im}x_m & = & b_i & (L_i)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{j1}x_1+\ldots+a_{jm}x_m & = & b_j & (L_j)\\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1+\ldots+a_{nm}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array}\right.$$

$$\longrightarrow \left\{\begin{array}{rcrcll} a_{11}x_1 & +\ldots+ & a_{1m}x_m & = & b_1 & (L_1)\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ (a_{i1}+\lambda a_{j1})x_1 & +\ldots+ & (a_{jm}+\lambda a_{im})x_m & = & b_i+\lambda b_j & (L_i+\lambda L_j)\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ a_{j1}x_1 & +\ldots+ & a_{jm}x_m & = & b_j & (L_j)\\ \vdots & & & \vdots & \vdots & \\ a_{n1}x_1 & +\ldots+ & a_{nm}x_m & = & b_n & (L_n) \end{array}\right. \qquad \text{(VII.3)}$$

Proposition 6. Si un système $\mathcal{S}'$ est obtenu à partir de $\mathcal{S}$ par une suite d'opérations de la forme t_{ij}, $D_i(\lambda)$ et $T_{ij}(\lambda)$, alors ils sont équivalents.

Démonstration. Il suffit de le montrer pour les systèmes $\mathcal{S}$ et $\mathcal{S}'=t_{ij}S$, $\mathcal{S}'=D_i(\lambda)\mathcal{S}$ ou $\mathcal{S}'=T_{ij}(\lambda)\mathcal{S}$. On montre que l'ensemble des solutions est le même par double inclusion. Soit X l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}$ et X' l'ensemble des solutions de $\mathcal{S}'$. On vérifie par le calcul qu'alors tout élément de X est solution de S'. Donc $X\subset X'$. On vérifie alors que les opérations sont en fait *réversibles*, i.e

- Si $\mathcal{S}' = t_{ij}(\mathcal{S})$ alors $\mathcal{S} = t_{ji}(\mathcal{S}')$.
- Si $\mathcal{S}' = D_i(\lambda)(\mathcal{S})$, alors $\mathcal{S} = D_i(\lambda^{-1})(\mathcal{S}')$.
- Si $\mathcal{S}' = T_{ij}(\lambda)(\mathcal{S})$, alors $\mathcal{S} = T_{ij}(-\lambda)(\mathcal{S}')$.

On déduit que dans chacun des cas $X' \subset X$, ce qui permet de conclure. □

Définition 7. L'algorithme suivant, appelé Pivot de Gauss, permet, à partir d'un système et des opérations décrites plus haut, d'obtenir un système échelonné, que l'on sait donc résoudre.

1. On choisit le plus petit j tel qu'il existe une ligne i telle que $a_{ij} \neq 0$. Si ce j n'existe pas, il n'y a rien à faire. Ce nombre a_{ij} sera notre *pivot*.
2. On applique la transposition $t_1 j$, de sorte que la ligne j est désormais tout en haut.

$$\begin{cases} a'_{1j}x_j + a'_{1\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a'_{1m}x_m & = & b'_1 & (L_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a'_{ij}x_j + a'_{i\,j+1}x_{j+1} \ldots + a'_{im}x_m & = & b'_i & (L_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a'_{nj}x_j + a'_{n\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a'_{nm}x_m & = & b'_n & (L_n) \end{cases}$$

3. On applique la dilatation $D_1(a_{1j}^{-1})$.

$$\begin{cases} x_j + a''_{1\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a''_{1m}x_m & = & b''_1 & (L_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a'_{ij}x_j + a'_{i\,j+1}x_{j+1} \ldots + a'_{im}x_m & = & b'_i & (L_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a'_{nj}x_j + a'_{n\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a'_{nm}x_m & = & b'_n & (L_n) \end{cases}$$

4. Applique successivement les opérations suivantes : pour chaque ligne L_i avec $i \neq 1$, on applique la transvection $T_{i1}(-a'_{i1})$. Le système obtenu devient

$$\begin{cases} x_j + a''_{1\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a''_{1m}x_m & = & b''_1 & (L_1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a''_{2\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a''_{2m}x_m & = & b''_2 & (L_2) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a''_{i\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a''_{im}x_m & = & b''_i & (L_i) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \\ a''_{n\,j+1}x_{j+1} + \ldots + a''_{nm}x_m & = & b''_n & (L_n) \end{cases}$$

5. On retourne à l''étape 1 en se restreignant uniquement aux ligne $L_2, \ldots, L_n$.

Définition 8. On appelle *rang* du système le nombre de lignes non nulles du système échelonné.

Il y a un non dit dans cette définition, c'est que le rang ne dépend pas du choix du pivot ni de la suite d'opérations choisies pour effectuer le pivot de Gauss. C'est à la fois intuitif (le nombre de degré de liberté des solutions du système ne devrait pas dépendre de la méthode de résolution) et en même temps c'est justement l'une des forces de la théorie des systèmes linéaires. La preuve de ce fait sera faite ultérieurement dans la théorie de la dimension. Notons que si le système échelonné obtenu est incompatible, cela signifie que dans le système de départ, il y avait un ensemble de lignes elle-mêmes incompatibles.

On déduit de toute cette discussion le théorème suivant, qui résume les différents cas possibles.

Théorème 9.
Un système de m équations à n inconnues admet soit

— Aucune solution si le système échelonné obtenu est incompatible (il y a une ligne de la forme $0 = b_i$).

— Une unique solution si son rang vaut n et le système échelonné n'admet aucune ligne incompatible.

— Une infinité de solutions si son rang est inférieur à $n-1$ et que le système échelonné associé n'admet aucune ligne incompatible.

Dans le cas d'un système de n équations à n inconnues, on déduit de 2 et 9 le résultat suivant :

Théorème 10.
Si le système homogène $\mathcal{S}_h$ admet une unique solution, alors tout système $\mathcal{S}$ dont le système associé est $\mathcal{S}_h$ admet une unique solution.

On pourra utiliser ce résultat pour traiter les exercices suivants :

Exercice 1
Soient $M_1, \dots, M_n$ des points du plan. Existe-t-il n points du plan $A_1, \dots, A_n$ tels que M_i soit le milieu du segment $[A_i, A_{i+1}]$ (avec $A_{n+1} = A_1$) ?

Exercice 2
Soit Q un polynôme réel. Montrer qu'il existe P tel que $Q(X) = P(X+1) - P(X)$.

Exercice 3
Soient A, B, C, D des polynômes tels que

$$A(X^5) + XB(X^5) + X^2C(X^5) = (1 + X + X^2 + X^3 + X^4)D(X)$$

Calculer $A(1)$.

Algèbre linéaire

L'objectif de la théorie de l'algèbre linéraire est de placer sous une même structure les différents objets vérifiant des propriétés de stabilité par combinaison linéaire.

Ainsi, les idées et les intuitions que l'on a sur les vecteurs en géométrie peuvent se transposer pour des objets un peu moins évidents, tels que les polynômes, les suites et les fonctions.

On définit un espace vectoriel de la façon suivante :

Définition 11. Un espace vectoriel est un ensemble E muni de deux opérations $+$ et $\cdot$ tel que

- La loi $+$ vérifie :
  - Si u et v sont deux éléments de E, alors $u+v$ est également un élément de E.
  - $u+v=v+u$.
  - $u+(v+w)=(u+v)+w$.
  - Il existe un élément de E, noté 0_E, tel que $u+0_E=0_E+u$.
- Si $u \in E$ et $\lambda \in \mathbb{R}$, alors $\lambda \cdot u \in E$.
- Les lois $+$ et $\cdot$ vérifient la propriété de distributivité suivante :

$$\lambda \cdot (u+v) = \lambda \cdot u + \lambda \cdot v.$$

Les éléments de E sont appelés *vecteurs* et les λ sont appelés *scalaires*.

Exemple 12. L'ensemble $\mathbb{R}^n$ des $n-$uplets est un espace vecotriel. Le 0 est le vecteur nul.

Exemple 13. L'ensemble $\mathbb{R}[X]$ des polynômes est un espace vectoriel. Le 0 est le polynôme nul.

Exemple 14. L'ensemble des fonctions continues de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est un espace vectoriel.

Exemple 15. L'ensemble des suites réelles est un espace vectoriel.

Exemple 16. L'ensemble des solutions d'un système homogène est un espace vectoriel.

Les questions naturelles que l'on se pose en manipulant ces ensembles sous le point de vue de l'algèbre linéaire sont :

- Une famille de vecteurs vérifie-t-elle une relation linéaire ?
- Peut-on trouver une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs telle que tous les vecteurs de E sont combinaison linéaire de vecteur de $\mathcal{F}$?
- Si oui, quel est le plus petit nombre de vecteurs nécessaires ?

Remarque 17.
On a pris des nombres réels pour les scalaires, mais on peut également prendre comme ensemble de scalaire l'ensemble des rationnales, l'ensemble des nombres complexes ou même, si cela s'y prête, l'ensemble $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Au sein d'un espace vectoriel, on peut trouver des espaces vectoriels plus petits.

Définition 18. On appelle sous-espace vectoriel de E un sous-ensemble F de E tel que

- $0_E \in F$.
- Si $u, v \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $\lambda u + \mu v \in F$.

Exemple 19. L'ensemble $\{(x,y,z), z=0\}$ est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exemple 20. L'ensemble des polynômes de degré inférieur ou égal à n est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}[X]$.

Exemple 21. L'ensemble des solutions d'un système homogène de m équations à n inconnues est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$.

Exemple 22. L'ensemble des solutions d'un système linéaire n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

Exemple 23. Les sous-espaces vectoriels de $\mathbb{R}^2$ sont $\{0\}, \mathbb{R}^2$ et toutes les droites passant par l'origine.

Proposition 24. L'intersection de deux sous-espaces vectoriels de E est un sous-espace vecotriel de E. L'union n'est en général pas un sous-espace vectoriel.

Proposition 25. Un sous-espace vectoriel de E est un espace vectoriel.

Exercice 4
Soit F un sous-espace vectoriel propre de E. Décrire $Vect(E \setminus F)$.

Définition 26. Soit $\mathcal{F}$ une famille de vecteurs de E. On appelle *espace engendré* par $\mathcal{F}$, note $Vect(\mathcal{F})$ le plus petit sous-espace vectoriel contenant $\mathcal{F}$. Il s'agit de l'ensemble des combinaisons linéaires des éléments de $\mathcal{F}$.

Définition 27. On appelle famille génératrice de E une famille $\mathcal{F}$ telle que $Vect(\mathcal{F}) = E$. Autrement dit, une famille génératrice est une famille qui engendre tous les vecteurs.

Exemple 28. La famille $(X^i)_{i\leqslant n}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$.
La famille $\{(0,1);(1,0)\}$ est une famille génératrice de $\mathbb{R}^2$.

Bien sûr, si l'on a un espace E, une famille génératrice de cet espace est l'espace tout entier. Mais cela ne nous apporte pas beaucoup d'informations sur la structure de cet espace. Il est donc intéressant de chercher des familles génératrices avec le moins de vecteurs possibles. En particulier, on voudrait trouver une famille génératrice dont aucun des éléments est combinaison linéaire des autres. Ceci appelle la notion de famille libre.

Définition 29. Une famille $\mathcal{F}$ de vecteurs est dite *libre* si, pour tout sous-ensemble I de $\mathcal{F}$ et toute famille $(\lambda_v)_v$ vérifie

$$\sum_{v\in I} \lambda_v v = 0 \Rightarrow \lambda_v = 0 \forall v \in I.$$

Une famille qui n'est pas libre est dite *liée*.

Autrement dit, une famille libre, aussi appelée famille linéairement indépendante, est une famille de vecteurs qui ne s'expriment pas les uns en fonction des autres.

Exemple 30. Les familles génératrices énoncées plus haut sont également libres.
Une famille orthogonale de vecteurs de $\mathbb{R}^n$ est libre.
Si ABC est un triangle, la famille $\{\overrightarrow{AB}, \overrightarrow{BC}, \overrightarrow{CA}\}$ n'est pas libre car il existe une relation linéaire non triviale entre ces trois vecteurs, à savoir $\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA} = \overrightarrow{0}$.

Définition 31. Une famille à la fois libre et génératrice est une *base* de E.

L'intérêt de trouver une base, c'est qu'avec une base on peut engendrer tous les vecteurs, et de façon unique :

Proposition 32. Soit e une base de E. Alors tout vecteur s'écrit de façon unique comme combinaison linéaire des vecteurs de e.

Un espace vectoriel peut admettre plusieurs bases différentes.

Exemple 33. La famille $\{(1,0);(1,1)\}$ est une base de $\mathbb{R}^2$.
La famille $(2X^i)_{i\leqslant n}$ est une base de $\mathbb{R}[X]$.

Dimension

La force de la théorie de la dimension réside dans la proposition suivante :

Théorème 34.
Supposons que E admette une base de taille finie n. Alors cette taille ne dépend pas du choix de la base. Cette taille est appelée *dimension* de E.

Exemple 35. La famille $(1, X, \dots, X^n)$ est une famille libre et génératrice de $\mathbb{R}_n[X]$. Il s'agit donc d'une base, de taille $n+1$. La dimension de $\mathbb{R}_n[X]$ est donc $n+1$.

La famille $(1, X^2, X^4, \dots, X^{100})$ est une famille libre et génératrice de l'ensemble des polynômes pairs. Il s'agit donc d'une base, de taille 51, ce qui donne la dimension de l'espace des polynômes pairs.

La suite u^0 définie par $u^0_0 = 1, u^0_1 = 0$ et $u^0_{n+2} = au^0_{n+1} + bu^0_n$ pour $n \geqslant 0$ et la suite u^1 définie par $u^1_0 = 0, u^1_1 = 1$ et $u^1_{n+2} = au^1_{n+1} + bu^1_n$ forment une famille libre et génératrice de l'espace des suites (u_n) vérifiant $u_{n+2} = au_{n+1} + bu_n$. Cet espace est donc de dimension 2. On retrouve l'intuition qu'il y a deux degrés de liberté, correspondant au choix des deux premiers termes de la suite.

La dimension de l'ensemble des solutions d'un système homogène de rang r est $n - r$.

Montrons le théorème.

Démonstration. Soit $(e_1, \dots, e_n)$ une base de E et soit $(f_1, \dots, f_m)$ une autre base de E. Nous allons montrer que $m \geqslant n$. Supposons que $n > m$. On écrit les vecteurs $e_1, \dots, e_n$ dans la base $(f_1, \dots, f_m)$:

$$e_i = \sum_{j=1}^{m} a_{ji} f_j.$$

Le système homogène

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{m1}x_1 + \ldots + a_{mn}x_n & = & 0 \end{cases}$$

admet une solution non nulle $(x_1, \dots, x_n)$ car $n > m$. Alors $\sum_{i=1}^n x_i e_i = 0$, ce qui contredit la liberté de la famille e.

On a montré que $m \geqslant n$ et de même on montre que $m \leqslant n$. $\square$

La première conséquence est que l'on montre le résultat annoncé tout à l'heure : le rang r du système échelonné ne dépend pas de la suite des opérations choisie, puisque $n-r$ correspond à la dimension de l'espace des solutions du système homogène associé.

La dimension formalise la notion de degré de liberté : la dimension d'un sous-espace vecotriel correspond au nombre d'objets qu'on peut faire varier indépendamment les uns des autres.

On notera la conséquence suivante :

Proposition 36. Soit E un sous-espace vecotriel de dimension n et soit e une famille de taille n.

- Si e est libre, alors e est une base.
- Si e est génératrice, alors e est une base.

mais aussi, et c'est la propriété que l'on utilisera le plus dans les exercices,

Proposition 37. Une famille de taille supérieure à $n+1$ de vecteurs d'un espace de dimension n est liée.

Définition 38. On appelle rang d'une famille de vecteur la dimension de son espace vectoriel engendré.

Exercice 5
Soit E fini de cardinal n, $X_1, \ldots, X_{n+1}$ des parties de E. Montrer qu'il existe deux parties I et J de $\{1, \ldots, n+1\}$ disjointes non vide telles que

$$\bigcup_{i \in I} X_i = \bigcup_{j \in J} X_j$$

Exercice 6
Traduire l'interpolation de Lagrange avec des termes d'algèbre linéaire.

Montrer que la famille $X^n, (X-1)^n, \ldots, (X-n)^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Représentation matricielle

Les matrices sont une façon ergonomique et pleine de sens de représenter un système linéaire (et pas que). On présente ici le calcul matricielle, les interprétations des systèmes linéaires et surtout l'intérêt pour représenter des données dans des problèmes combinatoires.

Définition 39. Une matrice de taille $m \times n$ est un tableau possédant m lignes et n colonnes. Le coefficient A_{ij} désigne le nombre inscrit à la i ligne et j ème colonne.

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \ldots & A_{mn} \end{pmatrix}$$

L'ensemble des matrices de taille $m \times n$ est noté $\mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$. On peut le munir d'une addition et d'une multiplication par un scalaire comme suit :

$$\begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} B_{11} & B_{12} & \dots & B_{1n} \\ B_{21} & B_{22} & \dots & B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ B_{m1} & B_{m2} & \dots & B_{mn} \end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix} A_{11}+B_{11} & A_{12}+B_{12} & \dots & A_{1n}+B_{1n} \\ A_{21}+B_{21} & A_{22}+B_{22} & \dots & A_{2n}+B_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1}+B_{m1} & A_{m2}+B_{m2} & \dots & A_{mn}+B_{mn} \end{pmatrix} \tag{VII.4}$$

$$\lambda \begin{pmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \dots & A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ A_{m1} & A_{m2} & \dots & A_{mn} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda A_{11} & \lambda A_{12} & \dots & \lambda A_{1n} \\ \lambda A_{21} & \lambda A_{22} & \dots & \lambda A_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda A_{m1} & \lambda A_{m2} & \dots & \lambda A_{mn} \end{pmatrix}$$

Le produit de deux matrices entre elles est plus délicat :

Définition 40. Soit $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$ et $B \in \mathcal{M}_{np}(\mathbb{R})$. Le produit AB est une matrice avec m lignes et p colonnes, de la forme

$$AB = \begin{pmatrix} C_{11} & C_{12} & \dots & C_{1p} \\ C_{21} & C_{22} & \dots & C_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ C_{m1} & C_{m2} & \dots & C_{mp} \end{pmatrix}.$$

avec $C_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ik}B_{kj}$.

On notera les deux cas particuliers suivants, qui sont les plus intéressants pour nous :

- Le produit d'une matrice de taille $m \times n$ et d'une colonne de taille n (i.e un matrice de taille $n \times 1$) est une colonne de taille m.
- Le produit d'une ligne (i.e une matrice de taille $1 \times n$) et d'une colonne de taille $n \times 1$ est une matrice de taille 1×1, souvent confondue avec le scalaire correspondant à son unique coefficient. Ce produit correspond en fait au produit scalaire :

$$(x_1, \dots, x_n) \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i y_i$$

En particulier, les systèmes admettent la réécriture suivante :

$$\left\{ \begin{array}{rcl} a_{11}x_1 + \ldots + a_{1n}x_n & = & b_1 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1}x_1 + \ldots + a_{nm}x_m & = & b_n \end{array} \right. \to \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1m} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2m} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nm} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_m \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} \to AX = B.$$

Exemple 41. L'opération $t_{i,j}(A)$ correspond à la multiplication de la matrice A à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & 1 & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & 1 & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & 1 & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}.$$

L'opération $D_i(\lambda)$ correspond à la multiplication de la matrice A à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 & \dots & 0\\
0 & 1 & \dots & 0 & \dots & 0\\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & 0\\
0 & 0 & \dots & \lambda & \dots & 0\\
\vdots & & & \vdots & & \vdots\\
0 & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}.$$

L'opération $T_{ij}(\lambda)$ correspond à la multiplication de la matrice A à gauche par la matrice

$$\begin{pmatrix}
1 & \dots & 0 & \dots & \dots & 0 & \\
\vdots & \ddots & \vdots & & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 1 & \dots & \lambda & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 1 & \dots & 0\\
\vdots & & \vdots & & \vdots & \ddots & \vdots\\
0 & \dots & 0 & \dots & 0 & \dots & 1
\end{pmatrix}.$$

où le λ se situe sur la $i-$ème ligne et la $j-$ème colonne.

On termine l'analogie matrice-système par la définition du rang.

Définition 42. Le rang d'une matrice A correspond au rang du système homogène associé $AX = 0$. Il s'agit également du rang de la famille de vecteurs composés des lignes de la matrice.

Le théorème d'échelonnement des systèmes donne la superbe conséquence suivante, appelée théorème du rang, permettant de calculer la dimension de l'espace des B tels que $AX = B$ admet au moins un solution.

Théorème 43.
Soit A une matrice de taille $n \times m$ de rang r. L'ensemble S des vecteurs $B \in \mathbb{R}^n$ tels que le système $AX = B$ admet au moins une solution est un espace vectoriel de dimension r.

Démonstration. On vérifie que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^n$, ce qui en fait un espace vectoriel.

Soient $M_1, \dots, M_s$ les matrices des opérations du pivot de Gauss permettant d'échelonner la matrice A et soient $M_1^{-1}, \dots, M_s^{-1}$ les matrices correspondant aux opérations réciproques. L'ensemble S est alors en bijection (via $M_s \dots M_1$ de bijection réciproque $M_1^{-1} \dots M_s^{-1}$) avec l'ensemble S' des vecteurs B' de la forme $(b_1', \dots, b_r', 0, \dots, 0)$ tels que le système $A'X = B'$ admet au moins une solution, où A' correspond à la matrice A échelonnée. Les espaces S et S' sont alors de même dimension : si $(e_1, \dots, e_r)$ est une base de S', alors $(M_1^{-1} \dots M_s^{-1} e_1, \dots, M_1^{-1} \dots M_s^{-1} e_s)$ est une base de S' (exercice), de sorte que S est bien de dimension r. □

On termine avec la définition de la matrice transposée, qui sera souvent utile dans les exercices.

Définition 44. Soit A une matrice de taille $m \times n$. On appelle *transposée de* A, notée ${}^tA$, la matrice de taille $n \times m$ et dont les coefficients vérifient

$$({}^tA)_{ij} = A_{ji}.$$

Voyons à présent un exemple de résolution d'un exercice via l'algèbre linéaire.

Exemple 45.
Dans un comité de $n+1$ clubs et n membres, chaque club contient 3 membres, pas deux clubs ont le même membership. Montrer que deux clubs ont exactement un membre en commun.

Démonstration. Posons $C_1, \dots, C_{n+1}$ les clubs et $M_1, \dots, M_n$ les membres du club. On pose $A_{ij} = 1$ si M_j est dans le club C_i et 0 sinon. Supposons par l'absurde que le résultat est faux. Considérons alors la famille de $n+1$ vecteurs $L_i = (A_{i1}, \dots, A_{in})$ vu comme des vecteurs de l'espace vectoriel $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^n$. D'après l'hypothèse, dès que $i \neq j$, on a

$$L_i \cdot L_j = \sum_{k=1}^{n} A_{ik} A_{jk} = |C_i \cap C_j| = 0 \mod 2$$

puisque $|C_i \cap C_j| \in \{0, 2\}$.

La famille (L_i) est orthogonale, elle est donc libre. Mais il s'agit d'une famille de taille $n+1$ dans un espace de dimension n, c'est absurde. □

Exercices

Exercice 1
(France TST 2020-2021) Soit $P_1, \dots, P_{2024}$ un polygone à 2024 sommets tel que, pour chaque sommet, les 2022 diagonales qui en sont issues coupent l'angle en 2022 angles égaux.

Montrer que le polygone est régulier.

Exercice 2
(Croatie MO) Soit S un ensemble de 100 entiers compris entre 1 et 200. Montrer qu'il existe un sous-ensemble non vide T de S dont le produit des nombres est un carré parfait.

Exercice 3
Soit n un entier pair. Un sous-ensemble T de $\{1, \dots, n\}$ est dit pair s'il contient un nombre pair

d'éléments. Soient $S_1, \ldots, S_n$ des ensembles pairs. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tel que $|S_i \cap S_j|$ est pair.

Exercice 4
(Inégalité de Fischer) Soit $A_1, \ldots, A_m$ des sous-ensembles distincts de $\{1, \ldots, n\}$. On suppose qu'il existe un entier $1 \leqslant \lambda < n$ tel que $|A_i \cap A_j| = \lambda$ pour tout $i \neq j$. Montrer que $m \leqslant n$.

Exercice 5
Soit G un graphe fini avec une lampe et un interrupteur à chaque sommet. Appuyer sur l'interrupteur d'un sommet change son état et celui de ses voisins. Au départ, toutes les lampes sont éteintes. Montrer qu'il est possible d'appuyer sur des interrupteur pour allumer toutes les lampes en même temps.

Exercice 6
(Iran 2006 round 3) Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^n$ vérifiant que si $(a_1, \ldots, a_n)$ et $(b_1, \ldots, b_n)$ sont des éléments de B, il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $a_i \equiv b_i + 1 \mod 3$.

Montrer que $|B| \leqslant 2^n$.

Exercice 7
(A5 2021) Une magicienne prévoit de réaliser le tour suivant. Elle annonce à l'audience un entier positif n, ainsi que $2n$ nombres réels $x_1 < \cdots < x_{2n}$. Un membre de l'audience choisit alors secrètement un polynôme $P(x)$ de degré n à coefficients réels, calcule les $2n$ valeurs $P(x_1), \ldots, P(x_{2n})$, et inscrit ces $2n$ valeurs au tableau dans l'ordre croissant. Après cela, la magicienne annonce le polynôme secret à l'audience. La magicienne peut-elle trouver une stratégie pour réaliser un tel tour ?

Exercice 8
(RMM 2024 P3) Étant donné un entier positif n, une collection $\mathcal{S}$ de $n-2$ triplets non ordonnés d'entiers dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est dite n-admissible si pour chaque $1 \leqslant k \leqslant n-2$ et chaque choix de k triplets distincts $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$, on a

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \geqslant k + 2.$$

Est-il vrai que pour tout $n > 3$ et pour chaque collection n-admissible $\mathcal{S}$, il existe des points $P_1, \ldots, P_n$ deux à deux distincts dans le plan tels que les angles du triangle $P_iP_jP_k$ soient tous inférieurs à 61° pour tout triplet $\{i, j, k\}$ dans $\mathcal{S}$?

Solutions des exercices

Exercice 1
Soient A, B, C, D des polynômes tels que

$$A(X^5) + XB(X^5) + X^2C(X^5) = (1 + X + X^2 + X^3 + X^4)D(X)$$

Calculer $A(1)$.

Solution de l'exercice 1
On évalue l'égalité en $\omega, \omega^2, \omega^3$ et ω^4, où $\omega = \exp(2i\pi/5)$ est une racine $5-$ème de l'unité. On obtient les quatre équations

$$\begin{cases} A(1) + \omega B(1) + \omega^2 C(1) = 0 \\ A(1) + \omega^2 B(1) + \omega^4 C(1) = 0 \\ A(1) + \omega^3 B(1) + \omega C(1) = 0 \end{cases}$$

En appliquant la méthode du pivot de Gauss, on obtient le système échelonné suivant :

$$\begin{cases} A(1) + \omega B(1) + \omega^2 C(1) = 0 \\ 0 + \omega(\omega-1)B(1) + \omega^2(\omega^2-1)C(1) = 0 \\ 0 + 0 + (1+2\omega(\omega+1))C(1) = 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système triangulaire (on vérifie que $1 + 2\omega(\omega + 1) \neq 0$), qui admet donc une unique solution, à savoir le triplet $(0, 0, 0)$. On déduit que $A(1) = 0$.

Exercice 2

Soient $M_1, \dots, M_n$ des points du plan. Existe-t-il n points du plan $A_1, \dots, A_n$ tels que M_i soit le milieu du segment $[A_i, A_{i+1}]$ (avec $A_{n+1} = A_1$) ?

Solution de l'exercice 2

Soient $m_1, \dots, m_n$ les affixes des sommets $M_1, \dots, M_n$. Les affixes $a_1, \dots, a_n$ des points $A_1, \dots, A_n$ vérifient le système

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_1 + 0 + \dots 0 + \frac{1}{2}a_n = m_1 \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \dots 0 + 0 = m_2 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + \dots \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = m_n \end{cases}$$

Résolvons le système homogène

$$\begin{cases} \frac{1}{2}a_1 + 0 + \dots 0 + \frac{1}{2}a_n = 0 \\ \frac{1}{2}a_1 + \frac{1}{2}a_2 + \dots 0 + 0 = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \quad \vdots \\ 0 + 0 + \dots \frac{1}{2}a_{n-1} + \frac{1}{2}a_n = 0 \end{cases}$$

On déduit de ces égalités que $a_i = (-1)^{i-1}a_1$ pour tout i.

Si n est impair, on obtient $a_1 = -a_1$ donc $a_1 = 0$ et toutes les coordonnées sont nulles. La seule solution du système homogène est donc $(0, \dots, 0)$, de sorte que le système est de rang n, et le système initial admet une unique solution, ce qui répond à l'exercice par l'affirmative.

Si n est pair, on obtient que tout n-uplet de la forme $(x, -x, \dots, x, -x)$, est solution du système homogène. Le système est donc de rang strictement plus petit que n, de sorte que les points $A_1, \dots, A_n$ n'existent pas toujours. Par exemple, pour $n = 4$, les points $A_1, \dots, A_4$ n'existent pas si $M_1M_2M_3M_4$ n'est pas un parallélogramme.

Exercice 3

Soit Q un polynôme réel. Montrer qu'il existe P tel que $Q(X) = P(X + 1) - P(X)$.

Solution de l'exercice 3
Soit $Q(X) = \sum_{i=0}^{n} q_i X^i$. On cherche un polynôme P de la forme $P(X) = \sum_{i=0}^{n+1} p_i X^i$ tel que $P(X+1) - P(X) = Q(X)$. Notons de plus que si P est solution, $P - c$ est solution pour tout c. On peut donc chercher P tel que $p_0 = 0$

L'identification coefficients à coefficients donne un système linéaire de n équations dont les n inconnues sont $p_n, \ldots, p_1$. On a alors deux possibilités :

Solution 1 : On remarque que le système posé est triangulaire, ce qui assure qu'il admet une solution.

Solution 2 : On résoud le système homogène associé et on montre qu'il est de rang n. La solution du système homogène satisfait $P(X+1) - P(X) = 0$, ce qui implique que P est un polynôme périodique, donc constant, de sorte que ses coefficients non constants sont nuls. La seule solution du système homogène est bien nulle, de sorte que le système est de rang n, ce qui conclut l'existence de P.

Exercice 4
Soit F un sous-espace vectoriel propre de E. Décrire $Vect(E \setminus F)$.

Solution de l'exercice 4
Montrons que $Vect(E \setminus F) = E$. On a déjà $Vect(E \setminus F) \subset E$. Soit alors $x \in E$. Si $x \in E \setminus F$, alors $x \in Vect(E \setminus F)$. Si $x \in F$, on prend $y \in E \setminus F$ et on remarque que $x - y$ n'est pas dans F. En effet, s'il l'était, par combinaison linéaire on aurait $y = x + (-1)(x - y) \in F$. Donc $x - y \in E \setminus F$, donc $x = x - y + y \in Vect(E \setminus F)$.

Exercice 5
Traduire l'interpolation de Lagrange avec des termes d'algèbre linéaire.

Montrer que la famille $X^n, (X-1)^n, \ldots, (X-n)^n$ est une base de $\mathbb{R}_n[X]$.

Solution de l'exercice 5
Soient $a_0, \ldots, a_n$ des réels. La famille de polynômes $(L_i)_{0 \leqslant i \leqslant n}$ définie par

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i} \frac{(X - a_j)}{(a_i - a_j)}$$

vérifie que $L_i(a_j) = 1_{i=j}$. Ainsi, cette famille est une famille libre de taille $n+1$ dans l'espace $\mathbb{R}_n[X]$ donc c'est une base. Ceci garantit, pour tout $(b_0, \ldots, b_n)$, l'unicité et l'existence de coefficients $c_0, \ldots, c_n$ tels que

$$\left\{\begin{array}{ccccccccc} c_n a_0^n & + & \ldots & + & c_1 a_0 & + & c_0 & = & b_0 \\ c_n a_1^n & + & \ldots & + & c_1 a_1 & + & c_0 & = & b_1 \\ \vdots & & \vdots & & \vdots & & & & \vdots \\ c_n a_n^n & + & \ldots & + & c_1 a_n & + & c_0 & = & b_n \end{array}\right.$$

Fort de cette remarque, on peut répondre à la question qui suit. Soient $x_0, \ldots, x_n$ tels que

$$\sum_{i=0}^{n} x_i (X - i)^n = 0$$

En développant et en réarrangeant chaque terme à l'aide de la formule du binôme, on a

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k}\binom{n}{k}\left(\sum_{i=0}^{n} x_i i^{n-k}\right)X^k = 0.$$

On déduit que les x_i vérifient le système

$$\begin{cases} x_0 & + & \dots & + & x_i & + & \dots & + & x_n & = & 0 & (L_0) \\ 0 & + & \dots & + & x_i i & + & \dots & + & x_n n & = & 0 & (L_1) \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & + & \dots & + & x_i i^k & + & \dots & + & x_n n^k & = & 0 & (L_k) \\ \vdots & & & & \vdots & & & & \vdots & & & \\ 0 & + & \dots & + & x_i i^n & + & \dots & + & x_n n^n & = & 0 & (L_n) \end{cases}$$

On fixe alors un entier j et on pose $P(X) = \sum_{i=0}^{n} \lambda_i X^i$ le polynôme d'interpolation de Lagrange vérifiant $P(i) = 1_{i\neq j}$. En regardant l'équation $\sum_{i=0}^{n} \lambda_i (L_i)$, on trouve

$$0 = \sum_{i=0}^{n} x_i P(i) = x_j.$$

On déduit que $x_j = 0$ pour tout j. La famille est donc libre.

Exercice 6
Soit E fini de cardinal n, $X_1, \dots, X_{n+1}$ des parties de E. Montrer qu'il existe deux parties I et J de $\{1, \dots, n+1\}$ disjointes non vide telles que

$$\bigcup_{i\in I} X_i = \bigcup_{j\in J} X_j$$

Solution de l'exercice 6
Numérotons les éléments de E par $E = \{a_1, \dots, a_n\}$. Soit f_i la fonction de E dans $\mathbb{R}$ définie par

$$f_i : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x_j & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } x_j \in X_i \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

La famille $(f_i)_{1\leqslant i\leqslant n+1}$ est donc une famille de taille $n+1$ de l'espace $\mathbb{R}^E$. Pour calculer la dimension de cet espace, on remarque que la famille $(g_1, \dots, g_n)$ de fonctions définies par

$$g_i : \begin{cases} E & \to & \mathbb{R} \\ x_j & \mapsto & \begin{cases} 1 & \text{si } i = j \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \end{cases}$$

est libre et génératrice, donc c'est une base de $\mathbb{R}^E$. Cet espace est donc de dimension n. La famille $(f_1, \dots, f_{n+1})$ est donc liée. Il existe $\lambda_1, \dots, \lambda_{n+1}$ des réels non tous nuls tels que

$$\lambda_1 g_1 + \dots + \lambda_{n+1} g_{n+1} = 0.$$

Notons $I = \{i, \lambda_i > 0\}$, $J = \{j, \lambda_j < 0\}$. Notons que I et J sont non tous les deux vides et disjoints. Montrons que $\bigcup_I X_i = \bigcup_J X_j$ par double inclusion.

Si $x \in \bigcup_I X_i$, alors x appartient à l'un des X_i, donc l'un des $g_i(x)$ est strictement positif, de sorte que $\sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) > 0$. Ainsi, $\sum_{j\in J}(-\lambda_j)g_j(x) = \sum_{i\in I} \lambda_i g_i(x) > 0$ donc l'un des $g_j(x)$ est strictement positif. Ainsi, $x \in \bigcup_J X_j$ et $\bigcup_I X_i = \bigcup_J X_j$.

Exercice 7
(France TST 2020-2021) Soit $P_1, \ldots, P_{2024}$ un polygone à 2024 sommets tel que, pour chaque sommet, les 2022 diagonales qui en sont issues coupent l'angle en 2022 angles égaux.

Montrer que le polygone est régulier.

Solution de l'exercice 7
Notons a_i l'angle $\dfrac{P_{i-1}P_iP_{i+1}}{2022}$. D'après l'hypothèse, en utilisant que la somme des angles du triangle $P_{i-1}P_iP_{i+1}$ vaut $180°$, on trouve le système d'équations

$$\begin{cases} a_{2024} + 2022a_1 + a_2 & = & 180 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{i-1} + 2022a_i + a_{i+1} & = & 180 \\ \vdots & & \vdots \\ a_{2023} + 2022a_{2024} + a_1 & = & 180 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système de 2024 équations à 2024 inconnues. On désire montrer que son unique solution est le $2024-$uplet $\left(\dfrac{180}{2024}, \ldots, \dfrac{180}{2024}\right)$, ce qui impliquerait notamment que tous les angles du polygone sont égaux.

On va donc montrer que le système homogène associé n'admet pas de solution non nulle. Le système s'écrit

$$\begin{cases} b_{2024} + 2022b_1 + b_2 & = & 180 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{i-1} + 2022b_i + b_{i+1} & = & 180 \\ \vdots & & \vdots \\ b_{2023} + 2022b_{2024} + b_1 & = & 180 \end{cases}$$

Soit $(b_1, \ldots, b_{2024})$ une solution et soit b_i vérifiant $|b_i| = \max_j |b_j|$. L'équation i non donne que

$$2022|b_i| = |b_{i-1} + b_{i+1}| \leqslant 2|b_i|$$

de sorte que $|b_i| = 0$. On déduit que $(b_1, \ldots, b_{2024}) = (0, \ldots, 0)$. Le système homogène associé a donc une unique solution. Donc notre système de départ aussi, et on vérifie que $\left(\dfrac{180}{2024}, \ldots, \dfrac{180}{2024}\right)$ est solution du système, c'est donc la seule.

Notre polygone a donc tous ses angles égaux. En regardant le triangle $P_{i-1}P_iP_{i+1}$, on remarque qu'il est alors isocèle car $a_{i_1} = a_{i+1}$. Tous les côtés du polygone sont donc égaux aussi. Il est donc régulier.

Exercice 8
(Croatie MO) Soit S un ensemble de 100 entiers compris entre 1 et 200. Montrer qu'il existe un sous-ensemble non vide T de S dont le produit des nombres est un carré parfait.

Solution de l'exercice 8
Soient $p_1, \dots, p_m$ les nombres premiers inférieurs ou égaux à 200. Pour tout entier $n = \prod p_i^{\varepsilon_i}$ de S, on pose $u_n = (\overline{\varepsilon_1}, \dots, \overline{\varepsilon_m}) \in \mathbb{Z}/2\mathbb{Z}^m$. Trouver un sous-ensemble T d'entiers dont le produit est un carré revient à trouver un sous-ensemble T d'entiers $n_1, \dots, n_r$ tels que $\sum_{i=1}^r u_{n_i} = 0$.

Autrement dit, on veut prouver que la famille $(u_n)_{n\in S}$ est liée. Pour cela, on remarque qu'elle est de taille $|S| = 100$ mais que la dimension de notre espace est $m = 46$. Donc on a une famille de taille plus grande que la dimension, elle est bien liée.

Exercice 9
Soit n un entier pair. Un sous-ensemble T de $\{1, \dots, n\}$ est dit pair s'il contient un nombre pair d'éléments. Soient $S_1, \dots, S_n$ des ensembles pairs. Montrer qu'il existe $i \neq j$ tel que $|S_i \cap S_j|$ est pair.

Solution de l'exercice 9
On propose deux solutions pour cet exercice. La première utilise la méthode des matrices incidentes, qui est une méthode relativement systématique, la deuxième, plus astucieuse, a l'avantage d'être plus élémentaire.

Solution 1 :

Supposons par l'absurde que le résultat est faux.
Posons A la matrice de taille n dont le coefficient A_{ij} correspond à $1_{i\in S_j}$.
Notons que la matrice A vue comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ est non inversible puisque

$$A\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}|S_1|\\ \vdots\\ |S_n|\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}.$$

On calcule alors ${}^tAA$, dont le coefficient i, j vaut

$$({}^tAA)_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{ki}A_{kj} = |S_i \cap S_j|.$$

Ainsi, la matrice ${}^tAA$ vue comme une matrice à coefficients dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ s'écrit

$${}^tAA = \begin{pmatrix}0 & 1 & \dots & 1\\ 1 & 0 & \dots & 1\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ 1 & 1 & \dots & 0\end{pmatrix} =: B$$

La contradiction va venir du fait que B est de rang n, mais pas ${}^tAA$.
D'une part, on a déjà vu que

$${}^tAA\begin{pmatrix}1\\ \vdots\\ 1\end{pmatrix} = {}^tA\begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ \vdots\\ 0\end{pmatrix}$$

donc le système ${}^tAAX$ de n équations à n inconnues admet une solution non nulle. Il n'est donc pas de rang n, donc la matrice ${}^tAA$ n'est pas de rang n non plus.

D'autre part, soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ une solution du système $BX = 0$. En effectuant le calcul matriciel, on trouve que pour tout i,

$$\sum_{j \neq i} x_i = 0$$

que l'on peut réécrire comme $S = x_i$, avec $S = x_1 + \ldots + x_n$. On déduit que tous les x_i sont égaux, et en sommant l'égalité $S = x_i$ pour tout indice i, on trouve $nS = S$, ou encore $(n-1)S = 0$. Puisque $n-1$ est impair, on trouve que $S = 0$ donc $x_i = S = 0$ pour tout indice i. Ainsi, la seule solution du système $BX = 0$ est la solution nulle, donc le système est de rang n. Ceci donne la contradiction.

Solution 2 :

Pour tout i, on note X_i le vecteur de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$ dont la $j-$ème coordonnée vaut 1 si $j \in S_i$ et 0 sinon. Commençons par remarquer les calculs de produit scalaire suivants :

$$X_i \cdot X_j = \sum_{k=1}^{n} 1_{k \in S_i} 1_{k \in S_j} = |S_i \cap S_j| = \begin{cases} 0 & \text{si } i = j \\ 1 & \text{si } i \neq j \end{cases}$$

Montrons alors que la famille (X_i) est libre. Soit $\lambda_1, \dots, \lambda_n$ des éléments de $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$ tels que

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i = 0.$$

Soit j un indice de $\{1, \dots, n\}$. En effectuant le produit scalaire avec X_j des deux côtés de l'équation, on obtient

$$\sum_{i \neq j} \lambda_i = 0.$$

En notant $S = \sum_{i=1}^{n} \lambda_i$, on déduit que $\lambda_j = S$ pour tout j. En sommant cette équation pour tout indice j, on trouve $S = nS$, ce qui implique, puisque n est pair, que $\lambda_j = S = nS = 0$. La famille (X_i) est donc libre.

Jusqu'ici, on n'a pas de contradiction. La dernière astuce consiste à remarquer que, si $Y = (1, \dots, 1)$, Y est orthogonal à tous les X_i. En effet,

$$Y \cdot X_i = \sum_{k=1}^{n} 1_{k \in S_i} = |S_i| = 0.$$

La famille $(X_1, \dots, X_n, Y)$ est donc libre. En effet, si $\lambda_1, \dots, \lambda_n, \mu$ vérifient

$$\sum_{i=1}^{n} \lambda_i X_i + \mu Y = 0,$$

alors en effectuant le produit scalaire par X_j des deux côtés de l'équation, on trouve $\sum_{i \neq j} \lambda_j = 0$, ce qui nous fait retrouver encore que $\lambda_1 = \ldots = \lambda_n = 0$, ce qui implique aussi que $\mu = 0$. La famille $(X_1, \dots, X_n, Y)$ est donc libre. Or elle est de taille $n + 1$, et ses vecteurs sont dans un espace de dimension n, ceci donne la contradiction.

Exercice 10
(Inégalité de Fischer) Soit $A_1, \dots, A_m$ des sous-ensembles distincts de $\{1, \dots, n\}$. On suppose qu'il existe un entier $1 \leqslant \lambda < n$ tel que $|A_i \cap A_j| = \lambda$ pour tout $i \neq j$. Montrer que $m \leqslant n$.

Solution de l'exercice 10
Supposons par l'absurde que $m > n$.

Une fois encore, introduisons la matrice A telle que $A_{ij} = 1_{i \in A_j}$. La matrice est de taille $n \times m$. On vérifie que

$$({}^t AA)_{ij} = |A_i \cap A_j|$$

Ainsi, on a l'égalité

$${}^t AA = \begin{pmatrix} |A_1| & \lambda & \dots & \lambda \\ \lambda & |A_2| & \dots & \lambda \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \lambda & \lambda & \dots & |A_m| \end{pmatrix} =: B.$$

Notons que la matrice B est de taille $m \times m$, et nous allons montrer qu'elle est de rang m. Soit $X = (x_1, \dots, x_n)$ une solution du système $BX = 0$. Le système devient pour tout j,

$$|A_j| x_j + \lambda \sum_{i \neq j} x_i = 0,$$

ou encore

$$(|A_j| - \lambda) x_j = -\lambda S,$$

où on a noté $S = \sum_{i=1}^n x_i$. On déduit que les $(|A_j| - \lambda)x_j$ sont tous égaux. Supposons que l'on ait j tel que $|A_j| - \lambda = 0$. Cela implique que $|A_j| = |A_j \cap A_i|$ pour tout i, de sorte que $A_j \subset A_i$ pour tout i. De plus, pour $i \neq k$, on a $A_j \subset A_i \cap A_k$ et $|A_j| = \lambda = |A_i \cap A_k|$, de sorte que $A_j = A_I \cap A_k$. Puisque les ensembles sont disjoints, on déduit que la famille $A_j, A_1 \setminus A_j, A_2 \setminus A_j, \dots, A_m \setminus A_j$ est une famille de $m > n$ sous-ensembles disjoints non vides de $\{1, \dots, n\}$, ce qui est impossible. On déduit que $|A_j| > \lambda$ pour tout j. Ainsi, x_j est du signe de $-\lambda S$, donc les x_j sont tous du même signe. S'ils sont tous positifs, alors $S \geqslant 0$ donc pour tout j, $0 \leqslant (|A_j| - \lambda)x_j = -\lambda S \leqslant 0$ donc $x_j = 0$. De la même façon, on montre que $X = 0$ si les x_j sont tous négatifs. Ainsi, la seule solution du système $BX = 0$ est $X = 0$ donc B est de rang m.

Soit alors X une solution du système $AX = 0$. En multipliant les deux côtés par ${}^t A$, on déduit que $BX =^t AAX = 0$, ce qui implique que $X = 0$. Ainsi, le système $AX = 0$ admet une unique solution. Or, ce système est un système de m équations à n inconnues avec $m > n$. On sait donc que l'espace des solutions de ce système est dimension au moins $m - n$, donc il est de cardinal strictement plus grand que 1, ce qui est absurde. Ceci conclut que $m \leqslant n$.

Exercice 11
Soit G un graphe fini avec une lampe et un interrupteur à chaque sommet. Appuyer sur l'interrupteur d'un sommet change son état et celui de ses voisins. Au départ, toutes les lampes sont éteintes. Montrer qu'il est possible d'appuyer sur des interrupteur pour allumer toutes les lampes en même temps.

Solution de l'exercice 11
On numérote les sommets de 1 à n et on note E l'ensemble des arêtes et A la matrice d'incidence du graphe, c'est-à-dire la matrice de taille $n \times n$ dans laquelle $A_{ij} = 1_{(i,j)\in E}$.

Une remarque importante est que ${}^tA = A$ (on dit alors que A est *symétrique*).

Notons a_i le nombre de fois que l'on appuie sur l'interrupteur du sommet i. On remarque que, puisqu'appuyer deux fois sur un même interrupteur ne change pas l'état de la lampe et que l'ordre des opérations ne change pas le résultat, on peut supposer que $a_i \in \{0, 1\}$ et se placer dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$. L'état du sommet i à la fin de la suite d'action correspond à la somme

$$\sum_{j=1}^{n} a_j 1_{(i,j)} \in E\}.$$

Ainsi, on cherche $(a_1, \dots, a_n)$ tel que

$$A \begin{matrix} a_1 \\ \dots \\ a_n \end{matrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} =: b.$$

Pour montrer que b est dans l'image de A, nous allons utiliser le théorème du rang, nous disant que l'espace I de l'image de A est de dimension r, et l'espace S des solutions de $AX = B$ est de dimension $n - r$. Prenons $(e_1, \dots, e_{n-r})$ une base de S et $(f_1, \dots, f_r)$ une base de I. Si $i \in \{1, \dots, r\}$, alors on a g_i tel que $f_i = Ag_i$. Alors pour tout $j \in \{1, \dots, n-r\}$, on a le calcul de produit scalaire suivant

$${}^te_j f_i =^t e_j A g_i =^t e_j^t A g_i =^t (Ae_j) g_i = 0 \cdot g_i = 0$$

La famille $(e_1, \dots, e_{n-r}, f_1, \dots, f_r)$ est donc libre, il s'agit donc d'une base de $(\mathbb{Z}/2\mathbb{Z})^n$.

La dernière étape consiste à écrire $b = \sum_{i=1}^{n-r} \lambda_i e_i + \sum_{i=1}^{r} \mu_i f_i$ dans cette base et montrer que $\lambda_i = 0$ pour tout i, de sorte que d est bien dans l'espace de l'image de A. Pour cela, il suffit de montrer que $b \cdot e_i = 0$ pour tout i. Or, en notant $e_i = (e_{i1}, \dots, e_{ik}, \dots, e_{in})$ les coordonnées de e_i, on a

$$b \cdot e_i = \sum_{k=1}^{n} e_{i,j}.$$

Mais

$$0 =^t e_i A e_i = \sum_{k=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} A_{kj} e_{ik} e_{ij} = \sum_{k=1}^{n} A_{kk} e_{ik}^2 + 2 \sum_{j<k} A_{kj} e_{ik} e_{ij} \equiv \sum_{k=1}^{n} e_{ik}^2 \equiv \sum_{k=1}^{n} e_{ik} \mod 2$$

Donc $b \cdot e_i = 0$, ce qui conclut.

Exercice 12
(Iran 2006 round 3) Soit B un sous-ensemble de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^n$ vérifiant que si $(a_1, \dots, a_n)$ et $(b_1, \dots, b_n)$ sont des éléments de B, il existe $1 \leqslant i \leqslant n$ tel que $a_i \equiv b_i + 1 \mod 3$.

Montrer que $|B| \leqslant 2^n$.

Solution de l'exercice 12
Pour $b \in B$, posons

$$P_b : \begin{cases} \mathbb{Z}/3\mathbb{Z}^n & \to \mathbb{Z}/3\mathbb{Z} \\ (x_1, \ldots, x_n) & \mapsto \prod_{i=1}^n (x_i - b_i - 1) \end{cases}$$

Dans quel espace vectoriel vivent ces fonctions ? On peut remarquer que les fonctions P_b sont des polynômes à n variables et de degré au plus n. La famille de polynômes

$$\{\prod_{i \in I} X_i, I \subset \{1, \ldots, n\}\}$$

est une famille libre et génératrice de l'espace des polynômes de degré n à n variables. Il s'agit donc d'une base, qui est de taille 2^n. Ainsi, la famille $(P_b)_{b \in B}$ est dans un espace vectoriel de dimension au 2^n.

On remarque alors $P_b(b') = 0$ pour $b' \neq b$ et $P_b(b) = (-1)^n$. On peut en déduire que la famille des (P_b) est libre. En effet, si (λ_b) est une famille de scalaires de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ telle que

$$\sum_{b \in B} \lambda_b P_b = 0,$$

alors en évaluant cette égalité en b', on trouve $\lambda_{b'}(-1)^n = 0$ donc $\lambda_{b'} = 0$ pour tout b'. Donc la famille (P_b) est libre et vit dans un espace de dimension 2^n, on a donc

$$|B| = |\{f_b, b \in B\}| \leqslant 2^n.$$

Exercice 13
(A5 2021) Une magicienne prévoit de réaliser le tour suivant. Elle annonce à l'audience un entier positif n, ainsi que $2n$ nombres réels $x_1 < \cdots < x_{2n}$. Un membre de l'audience choisit alors secrètement un polynôme $P(x)$ de degré n à coefficients réels, calcule les $2n$ valeurs $P(x_1), \ldots, P(x_{2n})$, et inscrit ces $2n$ valeurs au tableau dans l'ordre croissant. Après cela, la magicienne annonce le polynôme secret à l'audience. La magicienne peut-elle trouver une stratégie pour réaliser un tel tour ?

Solution de l'exercice 13
Nous allons montrer qu'il existe deux polynômes P et Q distincts de degré n tels que les listes $\{P(x_1), \ldots, P(x_n)\}$ et $\{Q(x_1), \ldots, Q(x_n)\}$ sont identiques lorsqu'elles sont écrites dans l'ordre croissant. Pour cela, cherchons un polynôme P de degré n tel que $P(x_{2i-1}) + P(x_{2i}) = 0$ pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$. Alors les deux polynômes P et $-P$ vérifieront ce que l'on cherche.

Si $P(x) = a_n x^n + \ldots + a_0$, alors les équations deviennent

$$\begin{cases} a_n(x_1^n + x_2^n) + \ldots + a_1(x_1 + x_2) + a_0 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n(x_{2i-1}^n + x_{2i}^n) + \ldots + a_1(x_{2i-1} + x_{2i}) + a_0 & = & 0 \\ \vdots & & \vdots \\ a_n(x_{2n-1}^n + x_{2n}^n) + \ldots + a_1(x_{2n-1} + x_{2n}) + a_0 & = & 0 \end{cases}$$

Il s'agit d'un système linéaire de n équations avec $n + 1$ inconnues $a_0, \ldots, a_n$. Celui-ci admet donc une solution non nulle $(a_n, \ldots, a_0)$. Il faut encore vérifier que le polynôme $P(x) =$

$a_nx^n + \ldots + a_0$ est de degré exactement n. Pour cela, on remarque déjà que P est de degré au plus n. De plus il admet une racine dans chacun des intervalles $[x_{2i-1}, x_{2i}]$ d'après le théorème des valeurs intermédiaires (en effet, $P(x_{2i-1})P(x_{2i}) = -P(x_{2i})^2 \leqslant 0$ donc P change de signe entre x_{2i-1} et x_{2i}), c'est-à-dire au moins n racines. Comme P est non nul (ses coefficients sont non tous nuls), il admet exactement n racines et est donc de degré n.

On a donc trouvé un cas où la magicienne ne peut pas gagner à coup sûr.

Exercice 14

(RMM 2024 P3) Étant donné un entier positif n, une collection $\mathcal{S}$ de $n-2$ triplets non ordonnés d'entiers dans $\{1, 2, \ldots, n\}$ est dite n-admissible si pour chaque $1 \leqslant k \leqslant n-2$ et chaque choix de k triplets distincts $A_1, A_2, \ldots, A_k \in \mathcal{S}$, on a

$$|A_1 \cup A_2 \cup \cdots \cup A_k| \geqslant k + 2.$$

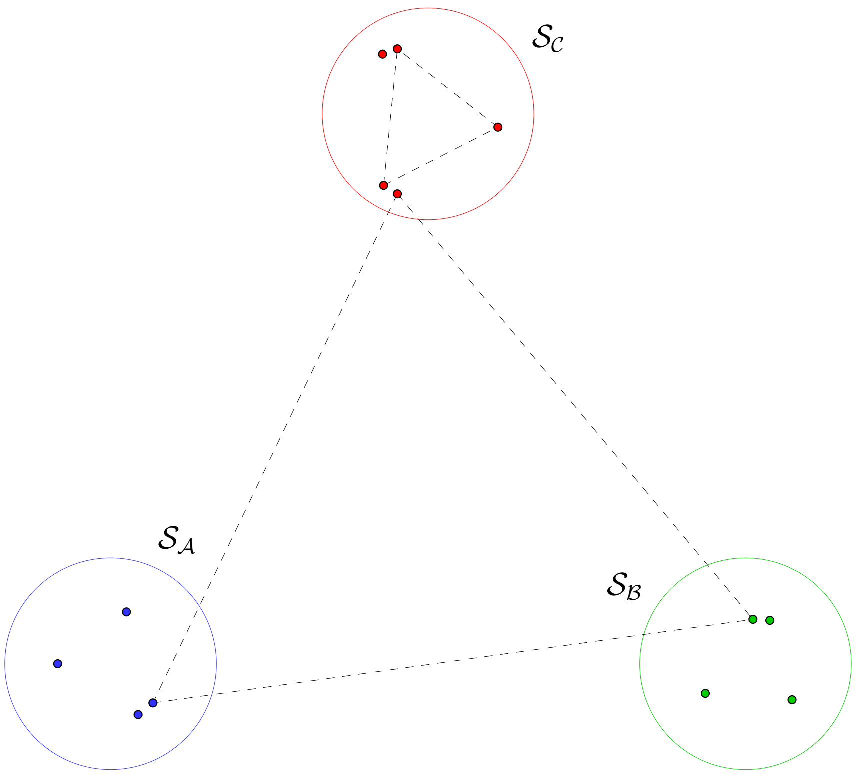
Est-il vrai que pour tout $n > 3$ et pour chaque collection n-admissible $\mathcal{S}$, il existe des points $P_1, \ldots, P_n$ deux à deux distincts dans le plan tels que les angles du triangle $P_iP_jP_k$ soient tous inférieurs à $61°$ pour tout triplet $\{i, j, k\}$ dans $\mathcal{S}$?

Solution de l'exercice 14

On va montrer qu'une telle construction est possible en procédant par récurrence forte sur sur n.

Initialisation : Si $n = 1$ ou 2, il n'y a rien à faire.

Hérédité : Supposons que l'on dispose d'une construction valide pour tout $k \leqslant n - 1$. L'idée est de séparer les points en trois groupes, A, B et C, de sorte que les points de chaque groupe vérifient la propriété entre eux et l'on puisse tracer un "gros triangle ABC" équilatéral.



Pour que cette construction fonctionne, il faut que, pour tout triplet $\{i,j,k\}$ de $\mathcal{S}$, soit $\{i,j,k\}$ sont dans le même groupe, soit ils sont dans 3 groupes distincts. Montrons qu'une telle répartition existe. Pour tout P_i, on lui associe un numéro x_i dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, et la condition se traduit par $x_i+x_j+x_k=0$ pour tout $\{i,j,k\}\in\mathcal{S}$. Comme il y a $n-2$ ensembles, on obtient un système homogène de $n-2$ équations

$$x_i+x_j+x_k=0 \quad \forall\{i,j,k\}\in\mathcal{S}$$

à n inconnues $x_1,\ldots,x_n$. L'espace des solutions est de dimension au moins 2. Ainsi, il existe une solution distincte de $(0,\ldots,0),(1,\ldots,1)$ ou $(2,\ldots,2)$ (puisque l'espace engendré par ces trois vecteurs est de dimension 1), donc il existe une solution dont les coordonnées ne sont pas toutes égales. Notons alors

$$A:=\{P_i,x_i=0\} \quad \mathcal{S}_A:=\{\{i,j,k\}\in\mathcal{S},x_i=x_j=x_k=0\}$$

$$B:=\{P_i,x_i=1\} \quad \mathcal{S}_B:=\{\{i,j,k\}\in\mathcal{S},x_i=x_j=x_k=1\}$$

$$C:=\{P_i,x_i=2\} \quad \mathcal{S}_C:=\{\{i,j,k\}\in\mathcal{S},x_i=x_j=x_k=2\}$$

Les ensembles A,B et C forment une partition de $\mathcal{S}$ en trois ensembles non vides. De plus, les ensembles $\mathcal{S}_A,\mathcal{S}_B,\mathcal{S}_C$ vérifient chacun la même propriété que $\mathcal{S}$: si $A_1,\ldots,A_r\in\mathcal{S}_A$, avec $r\leqslant|\mathcal{S}_A|$, alors

$$|A_1\cup\ldots\cup A_r|\geqslant r+2.$$

Par hypothèse de récurrence, on peut alors construire trois ensembles, respectivement de $|A|,|B|$ et $|C|$ points vérifiant la propriét.

On reprend alors la figure ci-dessus, pour laquelle dans chaque cercle, les points vérifient la propriété, et où les cercles sont suffisamment écartés pour que les angles d'un triangle formés par trois points quelconques appartenant chacun à un cercle sont inférieurs à $61°$. Cette configuration vérifie alors la propriété, ce qui conclut.

4 TD de grilles (Mano)

En stand-by...

5 TD d'inversion (Aurélien)

En stand-by...

6 Combinatoire : "bon bah super" (Baptiste et Emilhan)

– Pour débuter –

Exercice 1
(Iran second round 2020, Day 2, P5) On dit qu'une paire d'entiers a et b est **parfaite** si $ab + 1$ est un carré parfait. Déterminer les n pour lesquels il est possible de diviser l'ensemble $\{1, 2, \ldots, 2n\}$ en n paires parfaites.

Exercice 2
(Israël TST 1 2016 ; P2) Félix le généreux a un certain nombre de pièces. Un homme approche, et Félix veut partager ses pièces avec lui. S'il dispose d'un nombre pair de pièces, il donne la moitié de ses pièces à l'homme et s'en va. S'il en a un nombre impair, il donne une pièce à la charité, mais pendant ce temps un deuxième homme approche. Il désire désormais partager ses pièces en trois parts égales. Si c'est possible, il le fait et s'en va. Sinon, il donne le plus petit nombre de pièces possible à la charité pour obtenir un multiple de 3. Cela continue jusqu'à ce que Félix parte ou qu'il n'ait plus de pièces. Existe-t-il un naturel M tel que si Félix possède plus de M pièces au départ, il repartira toujours avec au moins une pièce.

Exercice 3
(ARMO 2009 9.1) Est-il possible de colorier les entiers strictement positifs avec 2024 couleurs, chaque couleur apparaissant une infinité de fois, de telle sorte qu'il n'existe pas trois entiers a, b et c de couleurs différentes et tel que $ab = c$?

– Plat principal –

Exercice 4
(SL BMO A5 2023) Existe-t-il deux polynômes à coefficients réels P et Q tels que $P(P(x)) \cdot Q(Q(x))$ a exactement 2023 racines réelles distinctes et tels que $P(Q(x)) \cdot Q(P(x))$ a exactement 2024 racines réelles.

Exercice 5
(IMO 2010 P5) Chacune des six boîtes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5, B_6 contiennent initialement une pièce. Les opérations suivantes son autorisées :

Type 1) Choisir une boîte non vide B_j, avec $1 \leqslant j \leqslant 5$, retirer une pièce de la boîte B_j et en ajouter deux à la boîte B_{j+1}.

Type 2) Choisir une boîte non vide B_k, avec $1 \leqslant k \leqslant 4$, retirer une pièce de B_k et échanger les contenus des boîtes (potentiellement vides) B_{k+1} et B_{k+2}.

Déterminer s'il existe une suite finie d'opérations de telle sorte que les cinq boîtes B_1, B_2, B_3, B_4, B_5 deviennent vides, tandis que la boîte B_6 contienne exactement $2010^{2010^{2010}}$.

Exercice 6
(Israël TST 2 2016 ; P3) Sur chaque case d'un plateau $n \times n$, un dragon est endormi. Deux dragons sont dits **voisins** si leurs cases ont un côté en commun. À chaque tour, Rémi réveille un dragon qui a un voisin vivant, et Martin le dirige vers l'un de ses voisins vivants. Le dragon réveillé crache du feu sur ce voisin et le désintègre donc, puis se rendort. Sachant

que Rémi tente de tuer le plus de dragons possibles, tandis que Martin essaye de les sauver, combien de dragons resteront vivants à la fin si

1. $n = 4$? 2. $n = 5$?

Exercice 7

(RMM 2021 P2) Aurélien et Émile jouent au jeu suivant. Aurélien pense à un entier postif N qui est $\leqslant 5000$. Ensuite, il fixe 20 entiers positifs distincts $a_1, a_2, \ldots, a_{20}$ tels que, pour tout $k = 1, 2, \ldots, 20$, les nombres N et a_k sont égaux modulo k. Un coup consiste pour Émile à donner à Aurélien un ensemble S d'entiers positifs entre 1 et 20, et Aurélien lui donne en réponse l'ensemble $\{a_k : k \in S\}$, sans lui préciser quel élément correspond à quel indice. Combien de coups au minimum sont nécessaires pour qu'Émile devine avec certitude l'entier d'Aurélien ?

– Pour le fun –

Exercice 8

(IMO C4 2002) Soit T l'ensemble des triplets ordonnés (x, y, z), où x, y, z sont des entiers compris entre 0 et 9. Maëna et Thomas jouent à un jeu de devinette. Maëna commence par choisir un triplet (x, y, z) dans T, et Thomas tente de le découvrir en un minimum de questions. Une question consiste pour Thomas à choisir un triplet (a, b, c) dans T, et Maëna lui répond en lui donnant le nombre $|x + y - a - b| + |y + z - b - c| + |z + x - c - a|$. Quel est le nombre minimal de questions dont Thomas a besoin pour déterminer avec certitude le triplet de Maëna ?

Exercice 9

(APMO 2019 P4) On considère une grille de taille 2018×2019 avec des entiers écrits sur chaque case. Deux cases sont dites **voisines** si elle partagent un côté. À chaque tour, on choisit certaines cases ; elles sont alors chacunes remplacées simultanément par la moyenne des valeurs écrites sur leurs cases voisines. Est-il toujours possible de faire en sorte que tous les nombres de la grille deviennent égaux après un nombre fini de coups ?

Exercice 10

(American TST P5 2023) Soit m et n des entiers strictement positifs fixés. Mano et Antoine jouent à un jeu sur une grille infinie de carrés unités. Mano a secrètement érit un nombre réel sur chaque case de la grille, de telle sorte que la somme des nombres écrits sur les cases de tout rectangle de taille $n \times m$ ou $m \times n$ soit nulle. Antoine essaye de trouver tous les nombres écrits sur la grille. Antoine demande une par une les valeurs de certaines cases de la grille à Aurélien. Il gagne s'il parvient à en déduire tous les nombres de la grille après un nombre fini de questions. Déterminer, en fonction de m et n, le plus petit nombre de questions qu'Antoine doit poser à Mano pour gagner, ou montrer le cas échéant qu'il est impossible qu'Antoine gagne.

– Solutions –

Solution de l'exercice 1

En regardant modulo 4 puis 8, on voit qu'un nombre $\equiv 2 \pmod 4$ doit être associé avec un nombre $\equiv 0 \pmod 4$. Cela n'est donc possible que lorsque n est pair (et réciproquement on met $4k + 2$ avec $4k + 4$ et $4k + 1$ avec $4k + 3$).

<u>*Solution de l'exercice 2*</u>
On va construire des naturels N arbitrairement grands pour lesquels Félix finit sans argent, ce qui montrera que la réponse est non. Soit $N \in \mathbb{N}$. On construit $a_0 = 0$, $a_1 = N - 1$, a_2, ..., a_{N-1} tel que si Félix commence avec a_{N-1} pièces, il lui restera a_{N-i} pièces après la i-ème étape.

On suppose a_0, ..., a_k construits. On sait que a_k est un multiple de $N - k$. Pour choisir a_{k+1}, il faut exactement que ce soit un multiple de $N - k - 1$ qui soit dans l'intervalle $[\![a_k + 1, a_k + N - k - 1]\!]$. Puisque l'intervalle est de longueur $N - k - 1$, c'est toujours possible. Puisque $a_{N-1} \geqslant N - 1$, cela conclut.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u>
La réponse est oui. On propose ici quelques constructions.
⋆ Pour un entier $\geqslant 2$ quelconque, on le colorie de la couleur de son plus petit facteur premier (p_1 à p_{2023} ou strictement plus grand).
⋆ Pour $n \geqslant 2$, on regarde $X(n) = v_2(f(n))$, où $f(n)$ est la somme des puissances des nombres premiers dans la décomposition de n. Alors $X(nm) = min(X(n), X(m))$ si $X(m) \neq X(n)$. Il suffit ensuite de colorier dans la couleur $i \leqslant 2023$ si $X(n) = i \leqslant 2023$, et dans la couleur 2024 sinon.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>
La réponse est oui. On donne ici deux solutions. Dans les deux cas, il est naturel de s'intéresser à des polynômes ne prenant que des valeurs positives (ou un seul de valeurs strictement positives) pour contrôler le nombre de racines. Pour les mêmes raisons, le plus naturel est d'écrire des polynômes sous formes factorisées.
⋆ *Première solution* : On prend $P(X) = C \cdot (X - 1) \dots (X - 2023)$ et $Q(X) = X^2 + M$, où $C = 2023^{-2023}$ et $1011 < M < 1012$. Alors par construction, pour tout $t \leqslant 2023$, $P(t) < 1$. Puisque $P(x)$ tend vers $+\infty$ en $+\infty$, on en déduit que $P \circ P(X)$ admet 2023 racines réelles distinctes, puisque $P(X)$ prend toute valeur entre 1 et 2023 exactement une fois. En outre, Q n'a aucune racine réelle et $P \circ Q(X)$ a 2024 racines réelles car Q prend toute valeur entre 1012 et 2023 exactement 2 fois.
⋆ *Deuxième solution* : On peut prendre $P(X) = X^2(X + 1)^2 \dots (X + 2022)^2$ et $Q(X) = (X + 1)^2 \dots (X + 2024)^2$. On vérifie alors que $Q \circ Q$ n'a aucune racine réelle, et que $P \circ P$ en a 2023 car $P(X)$ vaut 0 pour 2023 valeurs réelles distinctes, et est toujours positif. En outre, $Q \circ P$ n'a pas de racine réelle car $P \geqslant 0$ et $P \circ Q$ a 2024 racines réelles (qui sont les entiers -1, -2, ..., -2024).

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>
Cfr $C4$ de l'IMO 2010 : https ://www.imo-official.org/problems/IMO2010SL.pdf

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
On va montrer que dans le cas 4×4 le nombre de dragon que l'on peut sauver est 4 et dans le cas du carré 5×5, c'est 6. On va utiliser la propriété suivante.

Lemme 1. Soit S un ensemble de cases du tableau qui vérifie la propriété suivante : on suppose que dans cet ensemble de cases il n'y a pas deux qui sont voisines ou qui ont un voisin en commun. Alors Max peut sauver au moins $|S|$ dragons.

Démonstration. Max adopte la stratégie suivante, il tue tous les dragons qui ne sont pas dans S en priorité. A la fin, chaque dragon de S sera vivant ou bien il aura été tué par un de ses camarades qui restera alors isolé donc vivant. □

On peut alors exhiber facilement des ensembles S dans les deux cas de l'énoncé.
Pour $n = 4$.

	X		
			X
X			
		X	

Pour $n = 5$.

		X		
X				X
		X		
X				X

Il faut maintenant démontrer que Max ne peut pas sauver 4 dragons dans le cas $n = 4$. Pour cela, il suffit que Minnie choisisse les dragons du tableau plus haut, ce qui aura pour effet de tuer tous les autres dragons du tableau. Cela conclut dans ce cas.

Le cas $n = 5$ est plus difficile. On donne des coordonnées (i, j), $1 \leqslant i, j \leqslant 5$ à chacun des points de la grille. On commence par tuer tous les dragons autour de $(3, 3)$ et on laisse le dragon en $(3, 3)$ **vivant**. On choisit alors le dragon en $(1, 1)$ et spdg on tue le dragon en $(2, 1)$. On tue alors les dragons en $(1, 1)$, $(1, 3)$ et $(2, 2)$ en choisissant le dragon $(1, 2)$ et on laisse $(1, 2)$ **vivant**. On choisit alors le dragon en $(1, 5)$, il nous reste deux cas.

— Si le dragon en $(1, 4)$ est tué, alors on tue tous les dragons autour de $(2, 5)$ et on laisse le $(2, 5)$ **vivant**.

— Si le dragon $(2, 5)$ est tué, alors on tue tous les dragons autour de $(1, 4)$ et on laisse $(1, 4)$ **vivant**.

On tue alors tous les dragons autour des cases $(4, 1)$, $(5, 3)$ et $(4, 5)$ qui restent ensuite **vivants**. Il reste donc seulement 6 dragons vivants.

Solution de l'exercice 7
Montrons que la réponse est 2. C'est déjà suffisant, puisque l'on peut choisir $S = \{17, 19\}$ puis $\{18, 19\}$. Cela nous permet de connaître a_{17}, puis a_{18} et a_{19}, et donc N par théorème des restes chinois car $17 \cdot 18 \cdot 19 > 5000$.
On montre maintenant qu'un seul coup ne peut pas suffire. On dira dans la suite que les nombres $\{11, 13, 16, 17, 19\}$ sont **grands**, et que les autres sont petits. On remarque alors que le ppcm des nombres petits vaut $2^3 \cdot 3^2 \cdot 5 \cdot 7 = 2520$. Soit $S = \{s_1, \ldots, s_n\}$ un sous-ensemble de $\{2, \ldots, 20\}$, avec $n \geqslant 2$. On construit par lemme chinois des entiers $t_1, \ldots, t_n$ tous congrus à 1 modulo 2520, qui sont tels que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on ait $t_i \equiv 1 \pmod{s_i}$ et $t_i \equiv 2521 \pmod{s_{i+1}}$. On remarque alors que $\{t_1, \ldots, t_n\}$ convient pour $N = 1$ et $N = 2521$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 8
On réfère à la SL OIM de 2002.

Solution de l'exercice 9

On va montrer que cela n'est pas toujours possible. L'approche la plus naturelle serait de trouver une grille de telle sorte que chaque case soit déjà la moyenne de la valeur de ses voisins. En faisant les petits cas il semble que cela ne soit pas possible (on peut réécrire toutes les équations comme un système linéaire d'équations avec autant d'équations que d'inconnues et toutes les solutions constantes sont déjà solution, il semble alors que le système soit inversible). Il peut alors nous venir à l'idée de regarder le même exercice mais modulo 5 (tous nos dénominateurs sont divisibles seulement par 2 et 3 donc inversible par 5).

En testant les petits cas on trouve le tableau 2×3 qui est invariant par n'importe quelles étapes.

3	1	3
0	2	0

On peut alors faire les symétriques de ce tableau pour couvrir un tableau 2018×2019, comme on a effectué les symétriques, les moyennes ne changent pas (on rajoute dans la moyenne un nombre qui est égale à elle).

Solution de l'exercice 10
https ://web.evanchen.cc/exams/sols-TST-IMO-2023.pdf

7 Problèmes de construction d'entiers (Rémi)

Ce cours est presque entièrement repris du cours de construction d'entiers proposé par Paul et Martin au groupe D en 2022, auquel on pourra se rapporter pour plus de contenu théorique. Ci-dessous, une sélection des exercices les plus intéressants dans le cadre du thème précis de cette année, à savoir uniquement des manipulations astucieuses de nombres premiers et notamment à l'aide du théorème des restes chinois.

Exercice 1 (JBMO SL 2021 N4)
Paul et Martin jouent au jeu suivant. D'abord, Martin choisit un ensemble infini S de nombres premiers. Paul donne ensuite une suite infinie d'entiers $x_1, x_2, \ldots$. Martin choisit ensuite un entier M et un nombre premier p de S. Paul gagne si il existe un rang à partir duquel tous les termes de la suite sont divisibles par p^M. Sinon, Martin gagne.

Quel joueur dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 2
Montrer que pour tout entier $n \geq 1$, il existe des entiers a, b tels que $4a^2 + 9b^2 - 1$ est divisible par n.

Exercice 3 (OFM 2023)
Existe-t-il deux entiers a et b tels qu'aucun des nombres $a, a+1, ..., a+2023, b, b+1, ..., b+2023$ n'en divise un des 4047 autres, mais que $a(a+1)(a+2)(a+2023)$ divise $b(b+1)(b+2)(b+2023)$.

Exercice 4 (RMM 2015 P1)
Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs $a_1, \ldots$ telle que a_m et a_n sont premiers entre eux ssi $|m-n| = 1$?

Exercice 5
Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est une puissance parfaite.

Exercice 6
Déterminer s'il existe une suite infinie d'entiers (a_n) d'entiers strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

— Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite (a_n).

— Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^n a_i$ s'écrit comme une puissance $n-$ème d'un entier.

Exercice 7
Montrer qu'il existe une suite (a_n) à valeurs dans $\mathbb{N}^\star$ avec les deux propriétés suivantes :

— Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite (a_n).

— Pour tout $n \geqslant$, le nombre $a_1 + \ldots + a_n$ est divisible par n.

Exercice 8 (Iran 2012)
Soit $t > 0$ un entier. Montrer qu'il existe un entier $n > 1$, premier avec t tel qu'aucun des termes de la suite $n+t, n^2+t, n^3+t, \ldots$ ne soit une puissance parfaite.

Exercice 9 (BXMO 2020)
Existe-t-il un entier n admettant exactement 2020 diviseurs d vérifiant que $\sqrt{n} < d < 2\sqrt{n}$?

Exercice 10 (EGMO 2017 P5)
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Un $n-$uplet $(a_1, \ldots, a_n)$ d'entiers strictement positifs (pas forcément distincts) est dit *onéreux* s'il existe un entier strictement positif k tel que

$$(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_n + a_1) = 2^{2k-1}$$

1) Trouver tous les entiers $n \geqslant 2$ pour lesquels il existe un $n-$uplet onéreux.

2) Montrer que pour tout entier positif impair m, il existe un entier $n \geqslant 2$ tel que m appartient à un $n-$uplet onéreux.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Cet exercice sert à présenter le procédé d'extraction diagonale : si (p_i) est une numérotation des éléments de S, alors Paul choisit la suite $x_i = \prod_{j \leqslant i} p_j^i$ et gagne.

Solution de l'exercice 2
On décompose $n = 2^x \prod p_i^{a_i}$ en produit de facteurs premiers. On va trouver des valeurs de a et b tels que $p_i^{a_i} \mid 4a^2+9b^2-1$ et on va en déduire des valeurs de a et de b tels que $n \mid 4a^2+9b^2-1$ à l'aide du théorème des restes chinois. On cherche les constructions les plus simples possibles, donc par exemple avec $a = 0$ ou $b = 0$, ce qui motive les paragraphes suivants.

Puisque 3 est inversible modulo 2^x, on a $2^x \mid (3 \cdot 3^{-1})^2 - 1$ donc on peut prendre $a = 0 \mod 2^a$ et $b = 3^{-1} \mod 2^x$.

Puisque 2 est inversible modulo $p_i^{a_i}$, on a $p_i^{a_i} \mid (2 \cdot 2^{-1})^2 - 1$ donc on peut prendre $a = 2^{-1} \mod p_i^{a_i}$ et $b = 0 \mod p_i^{a_i}$.

D'après le théorème des restes chinois, les systèmes

$$\begin{cases} a & \equiv & 0 & \mod 2^x \\ a & \equiv & 2^{-1} & \mod p_1^{a_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a & \equiv & 2^{-1} & \mod p_r^{a_r} \end{cases}$$

$$\begin{cases} b & \equiv & 3^{-1} & \mod 2^x \\ b & \equiv & 0 & \mod p_1^{a_1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ b & \equiv & 0 & \mod p_r^{a_r} \end{cases}$$

admettent des solutions a et b modulo n, de sorte que n divise $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Solution de l'exercice 3
Cet exercice est le coeur du TD, il s'agit d'un modèle d'application du théorème des restes chinois. La réponse est positive ; on construit les entiers a et b comme suit. On commence par choisir 2024^2 nombres premiers $p_{i,j}$ (pour $0 \leqslant i, j \leqslant 2023$) deux à deux distincts et plus grands que 2024. Le théorème chinois indique qu'il existe un entier $a \leqslant 2024$ tel que $a \equiv p_{i,j} - i[p_{i,j}^2]$

pour tout nombre premier $p_{i,j}$. Ainsi, $p_{i,j}$ divise $a+i$ et, lorsque $k = i$, le nombre $p_{i,j}$ est strictement supérieur à la différence entre $a+i$ et $a+k$, donc il ne divise pas $a+k$. Par conséquent, la valuation $p_{i,j}$-adique du produit $a(a+1)(a+2)(a+2023)$ vaut 1, et l'entier

$$q = \frac{a(a+1)(a+2)\cdots(a+2023)}{\prod p_{i,j}}$$

est premier avec chacun des nombres $p_{i,j}$. À nouveau, le théorème chinois indique qu'il existe un entier $b \geqslant 2024$ tel que $b \equiv 0[q]$ et $b \equiv -j[p_{i,j}]$ pour tout nombre premier $p_{i,j}$. Cette fois-ci, $p_{i,j}$ divise $b+j$ et, lorsque $\ell = j$, le nombre $p_{i,j}$ est strictement supérieur à la différence entre $b+j$ et $b+\ell$, donc il ne divise pas $b+\ell$. En particulier, $p_{i,j}$ divise donc $a+i$ et $b+j$ mais ni $a+k$ ni $b+\ell$, donc $a+i$ et $b+j$ ne divisent ni $a+k$, ni $b+\ell$. Cela démontre déjà qu'aucun des nombres $a, a+1, \ldots, a+2023, b, b+1, \ldots, b+2023$ n'en divise un autre. Enfin, le produit $a(a+1)(a+2)\cdots(a+2023) = q\prod p_{i,j}$ divise bien $b(b+1)(b+2)\cdots(b+2023)$, car chacun des facteurs q ou $p_{i,j}$ divise un des nombres $b+j$, et ces facteurs sont deux à deux premiers entre eux.

Solution de l'exercice 4

On commence par oublier partiellement une des conditions, on essaye de contruire une suite où les termes consécutifs sont toujours premiers entre eux mais où chacun contient de plus en plus de nombres premiers. Pour ce faire, on se donne deux familles (p_i) et (q_i) de nombres premiers distincts, et on cherche une suite avec cette tête :

$$\begin{array}{ccccccc} \prod p_i & & \prod p_i & & \prod p_i & & \prod p_i \\ & \prod q_i & & \prod q_i & & \prod q_i & \end{array}$$

Avec cette construction, malheureusement, deux membres de deux étages différents sont premiers entre eux. Il faudrait donc multiplier les membres du premier étage par un facteur q, et inversement, ce qui suggère ce schéma :

$$\begin{array}{ccccccc} q_1\prod p_i & & q_3\prod p_i & & q_5\prod p_i & & q_7\prod p_i \\ & p_2\prod q_i & & p_4\prod q_i & & p_6\prod q_i & \end{array}$$

Malheureusement, on a créé un problème puisqu'on a un q_{2n+1} en commun entre a_{2n+1} et a_{2n+2} et un p_{2n} entre a_{2n} et a_{2n+1}. Cela suggère de retirer dans l'autre terme le problème qu'on a ajouté dans l'un, d'où la construction suivante :

$$\begin{array}{ccccccccc} x_1 & = & \boxed{p_1} & \boxed{q_1} & & & & & \\ x_2 & = & \color{green}{p_2} & \color{green}{q_2} & & & & & \\ x_3 & = & \boxed{p_1} & p_3 & q_3 & & & & \\ x_4 & = & \boxed{q_1} & \color{green}{q_2} & \color{red}{p_4} & \color{red}{q_4} & & & \\ x_5 & = & \boxed{p_1} & \color{green}{p_2} & p_3 & p_5 & q_5 & & \\ x_6 & = & \boxed{q_1} & \color{green}{q_2} & q_3 & \color{red}{q_4} & p_6 & q_6 & \\ x_7 & = & \boxed{p_1} & \color{green}{p_2} & p_3 & \color{red}{p_4} & p_5 & p_7 & q_7 \\ & & \vdots & \color{green}{\vdots} & & \color{red}{\vdots} & & & \end{array}$$

On voit sur cette représentation que le $p_i q_i$ à la fin de a_i donne le facteur commun avec tous les a_j pour $j \geqslant i+2$, mais qu'il n'y en a aucun en commun avec a_{i+1}, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5

On commence par montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^*$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est entière.

Pour cela, on prend 2022 entiers $\{a_1, \ldots, a_{2022}\}$. Pour tout sous-ensemble B, on note $m(B)$ la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B. Alors $|B|m(B)$ est entier pour tout B, avec $|B| \leqslant 2022$, de sorte que l'ensemble $\{2022!a_1, 2022!a_2, \ldots, 2022!a_{2022}\}$ convient. On note $A' = \{b_1, \ldots, b_{2022}\}$ les entiers obtenus.

Maintenant, on veut multiplier chaque entier par une nouvelle constante de sorte que les $m(B)$ (où $m(B)$ désigne la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B de A') soient des puissances parfaites.

Pour cela, on écrit $m(B) = \prod p_i^{\alpha_i(B)}$. On veut multiplier tous les entiers par un nombre $k = \prod p_i^{\beta_i}$, de sorte que la moyenne devienne $km(B) = \prod p_i^{\alpha_i(B)+\beta_i}$.

On va utiliser les restes chinois pour cela, et le plus simple est que $km(B)$ soit de la forme $a^{p(B)}$ avec $p(B)$ un nombre premier. On se donne donc $2^{2022} - 1$ nombres premiers tous supérieux ou égaux aux $\alpha_i(B)$, et on choisit β_i vérifiant pour tout B :

$$\beta_i \equiv -\alpha_i(B) \mod p(B)$$

L'ensemble $\{kb_1, \ldots, kb_2\}$ vérifie alors la propriété voulue.

Solution de l'exercice 6

On montre que oui, on utilise l'algorithme glouton.

On commence avec $a_1 = 1$. On suppose construits les k premiers termes et on note x le plus petit entier qui n'apparaît pas dans la suite. On construit a_{k+1} de sorte à pouvoir faire apparaître $a_{k+2} = x$.

Etablissons le cahier des charges en posant $\prod a_i = \prod p_i^{kb_i}$ et $x = \prod p_i^{c_i}$. Donc on veut $a_{k+1} = \prod p_i^{d_i}$ de sorte que pour tout i, on a

$$\begin{array}{lcll} d_i + kb_i & \equiv & 0 & \mod k+1 \\ d_i + kb_i + c_i & \equiv & 0 & \mod k+2 \end{array}$$

Encore une fois, ce système admet une solution suffisamment grande avec le théorème des restes chinois.

On peut donc caser x, ce qui achève la récurrence et conclut.

Solution de l'exercice 7

On applique un algorithme glouton. On commence avec $a_1 = 1$. On suppose que $a_1, \ldots, a_k$ sont construits et on note x le plus petit entier strictement positif qui n'apparaît pas dans l'ensemble $\{a_1, \ldots, a_k\}$. On veut a_{k+1} tel qu'on puisse poser $a_{k+2} = x$. Pour cela, on note $s = a_1 + \ldots + a_k$. Il faut que

$$\begin{array}{lcll} s + a_{k+1} & \equiv & 0 & \mod k+1 \\ s + a_{k+1} + x & \equiv & 0 & \mod k+2 \end{array}$$

soit

$$\begin{array}{lcll} a_{k+1} & \equiv & -s & \mod k+1 \\ a_{k+1} & \equiv & -s - x & \mod k+2 \end{array}$$

qui possède une infinité de solutions (et donc une solution qui n'est pas déjà dans la suite (a_i).

On peut donc s'arranger pour placer x, ce qui achève la récurrence et garantit l'existence de la suite.

Solution de l'exercice 8

Oublions premièrement la condition que n doit être premier à t.

Si, pour un entier N, on choisit $n \equiv 1 \pmod N$, on a $n^k + t \equiv t + N \pmod N$ pour tout k ; en particulier, si $N = (t+1)^2$, on sait que pour tout $p \mid t+1$ premier, $v_p(n^k+t) = v_p(t+1)$. C'est super car ça signifie qu'on contrôle très bien les valuations $p-$adiques des $n^k + t$, au moins pour les p qui divisent $t + 1$. En particulier, si $t + 1$ n'est pas une puissance, le problème est résolu. Mais même si $t + 1$ est une puissance $\ell-$ième (mais pas une puissance $m-$ème pour $m > \ell$), alors si un terme $n^k + t$ est une puissance, ça doit être une puissance $d-$ième pour un diviseur d de ℓ.

Si de plus, par hasard, n était une puissance ℓ-ième, on aurait que $n^k + t$ devrait être une puissance $d-$ème à distance t de la puissance $d-$ème n^k ; si finalement $\sqrt[\ell]{n} \geq t$, on aurait une contradiction puisque pour tout $x > 0$, $(x + 1)^d > x^d + x$ et que donc, avec $x = \sqrt[d]{n} > t$, on aurait que $n^k + t$ est encadré entre deux puissances $d-$ème.

On cherche donc un entier n, premier à t, congru à 1 modulo $(t + 1)^2$, et qui est une puissance $\ell-$ème d'un entier au moins égal à t ; il suffit de choisir $n = (1 + t(t + 1)^2)^\ell$.

Solution de l'exercice 9

Première idée : 3^{2019} a exactement 2020 diviseurs (impairs, c'est important pour la suite).

Deuxième idée : Si n n'est pas un carré et est divisible par 2^x avec x "grand", pour tout diviseur impair $d < 2\sqrt{n}$, il existe un unique entier $0 \leq y \leq x$ avec $\sqrt{n} < 2^y d < 2\sqrt{n}$ et ces différents d donnent des différents $2^y d$. De plus, chacun des diviseurs entre $\sqrt{n}$ et $2\sqrt{n}$ est de cette forme.

Troisième idée : combiner les deux idées !

Si on choisit $n = 2^{42^{42}} \times 3^{2019}$, puisque 2019 est impair, n n'est pas un carré, et n a exactement 2020 diviseurs impairs $< 2\sqrt{n}$ car $3^{2019} < 2^{42^{42}/2+1} \times 3^{2019/2} = 2\sqrt{n}$; de plus pour chacun de ces diviseurs d il existe un unique entier $y \leq 42^{42}$ qui vérifie $\sqrt{n} < 2^y d < 2\sqrt{n}$; en effet, cela résulte de $2^{42^{42}} > 2^{42^{42}/2} \times 3^{2019/2} = \sqrt{n}$. Cela conclut.

Solution de l'exercice 10

1) Si n est impair, le $n-$uplet $(1, \ldots, 1)$ convient. Supposons que $n = 2\ell$ et qu'il existe un $n-$uplet onéreux $(a_1, \ldots, a_n)$ tel que $(a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_n + a_1) = 2^{2k-1}$ avec k entier.

Si a_t est le plus grand élément du $n-$uplet, alors

$$2^k = a_t + a_{t-1} \leqslant 2a_t < 2(a_t + a_{t+1}) = 2^{k'+1}$$

$$2^{k'} = a_t + a_{t+1} \leqslant 2a_t < 2(a_t + a_{t-1}) = 2^{k+1}$$

On déduit que $2^k = 2^{k'}$ et $a_{t-1} = a_{t+1}$. On peut alors retirer a_{t-1} et a_t, on obtient un $n - 2$ uplet onéreux. On peut faire une récurrence descendante, en voyant que $n = 2$ ne marche pas.

2) Pour la construction, on remarque que si m vérifie la propriété, alors $2m$ aussi (homogénéité). On a donc l'idée de faire une récurrence (forte). Il faut le cas m impair. On pose $m = 2^\ell - d$, où ℓ est la plus petite puissance de 2 supérieure à m. Par hypothèse, il existe un

$n-$uplet onéreux contenant d (disons que $a_1 = d$ quitte à cycler). Alors le $n-$uplet $(d, m, d, \dots)$ est onéreux et contient m.

8 Combinatoire multithèmes (Emile)

Ce TD propose des exercices de combinatoire mêlant des arguments d'algèbre et d'arithmétique.

Exercice 1 (C1 2020)
Soit n un entier strictement positif. Combien y a-t-il de permutations $a_1, \ldots, a_n$ de $1, \ldots, n$ vérifiant

$$a_1 \leq 2a_2 \leq 3a_3 \leq \ldots \leq na_n?$$

Exercice 2 (A3 2014)
Lucile et Amélie ont devant eux n réels $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Elles veulent les réordonner en $a_1, \ldots, a_n$ de manière à minimiser

$$S = \max_i |a_1 + a_2 + \ldots + a_i|.$$

Lucile teste toutes les possibilités et obtient une valeur minimale de L pour S. Amélie, quant à elle, effectue un algorithme glouton : elle prend a_1 qui minimise $|a_1|$, puis a_2 qui minimise $|a_1 + a_2|$, etc. Lorsqu'elle a un choix entre deux réels qui donnent la même somme, elle prend un des deux arbitrairement. Avec cet algorithme glouton, elle obtient une valeur A pour S. Existe-t-il une constante $c > 0$ telle que quel que soit n et la suite $x_1, \ldots, x_n$ et les choix de Amélie, on ait $A \leq cL$? Si oui, déterminer le plus petit c vérifiant cette relation.

Exercice 3
Soit p un nombre premier et $a_1, \ldots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$

prennent au moins $p/2$ valeurs modulo p.

Exercice 4
Soit $(a_n)_n$ une suite d'entiers. On suppose que pour tout n suffisamment grand, a_n est le nombre d'entiers $1 \leq i \leq n-1$ tels que $a_i + i \geq n$. Quel est le nombre maximal d'entiers qui peuvent apparaître une infinité de fois dans une telle suite ?

Exercice 5 (TST Chinois 2022 Test 1, jour 1, P2)
Soit p un nombre premier et A un ensemble infini d'entiers naturels. Montrer qu'il existe un sous-ensemble B de A de cardinal $2p-2$ tel que toute moyenne arithmétique de p éléments distincts de B n'appartienne jamais à A.
Bonus : Que se passe-t-il si on remplace $2p-2$ par $2p-1$?

Exercice 6 (RMM 2019 P6)
Trouver toutes les paires d'entiers (c, d) strictement supérieurs à 1 tels que :
Pour tous les polynômes unitaires Q à coefficients entiers de degré d, pour tout nombre premier $p > c(2c+1)$, il existe un ensemble S de taille au plus $\frac{2c-1}{2c+1}p$ tel que

$$\cup_{s \in S}\{s, Q(s), Q(Q(s)), Q(Q(Q(s))), \ldots\}$$

contienne un système complet de résidus modulo p.

Exercice 7 (Roumanie TST Jour 3, P4)
Soit n un entier strictement positif. On définit A_n (resp. B_n) l'ensemble des entiers $0 \leq k < n$ tels que le nombre de facteurs premiers distincts de $PGCD(k, n)$ est pair (resp. impair). Montrer que si n est pair, on a $|A_n| = |B_n|$, et que si n est impair, on a $|A_n| > |B_n|$.

Solution de l'exercice 1
Commençons par considérer lequel des a_i vaut 1. Si $i > 1$, on a alors

$$2(i-1) \leq (i-1)a_{i-1} \leq ia_i = i$$

et donc nécessairement $i = 2$ et $a_1 = 2$. Ainsi, on a soit $a_1 = 1$, soit $a_1 = 2$ et $a_2 = 1$. Supposons avoir ainsi placé les k premiers nombres $1, 2, \ldots, k$ dans les k premiers nombres $a_1, \ldots, a_k$. Alors on regarde où se trouve $k+1$: soit $a_{k+1} = k+1$, soit $a_i = k+1$ avec $i > k+1$ et alors

$$(i-1)(k+2) \leq (i-1)a_{i-1} \leq ia_i = i(k+1).$$

Ceci n'est que possible si $i = k+2$ et $a_{i-1} = k+2$. On a donc placé les nombres $1, 2, \ldots, k+2$ dans $a_1, a_2, \ldots, a_{k+2}$. On construit donc la permutation de cette manière, quelque soit l'option prise à chaque étape, la permutation satisfera les inégalité des l'énoncé.

D'après cette construction, il y a deux possibilités pour la position de n : soit $a_n = n$, soit $a_{n-1} = n$ et $a_n = n-1$. Dans chacun des cas, les a_i restants forment une permutation des nombres restants vérifiant l'hypothèse de l'énoncé. Réciproquement, si $a_1, \ldots, a_{n-1}$ satisfait l'hypothèse de l'énoncé, alors $a_1, \ldots, a_{n-1}, n$ aussi, et si $a_1, \ldots, a_{n-2}$ satisfait l'hypothèse de l'énoncé, alors $a_1, \ldots, a_{n-2}, n, n-1$ aussi. Ainsi, le nombre de telles permutations A_n au rang n satisfait l'hypothèse de récurrence $A_n = A_{n-1} + A_{n-2}$. Comme $A_1 = 1$ et $A_2 = 2$, on trouve que A_n est la suite de Fibonacci.

Solution de l'exercice 2
On va montrer que c existe, et que sa valeur minimale est 2. Tout d'abord, un exemple où 2 est atteint est pour la suite $1, -1, 2, -2$. En effet, Lucile peut choisir l'ordre $1, -2, 2, -1$ et obtient $L \leq 1$, mais si Amélie effectue l'algorithme glouton, elle choisira l'ordre $1, -1, 2, -2$ (ou son opposé) et alors $A = 2$. Ainsi, il n'est pas possible de faire moins que $c = 2$.

Montrons maintenant que $c = 2$ fonctionne. Soit $x_1, x_2, \ldots, x_n$ une suite ordonnée par Lucile dans l'ordre optimal, et $y_1, \ldots, y_n$ la suite ordonnée par Amélie selon l'algorithme glouton. On va montrer que pour tout i, on a $|y_1 + y_2 + \ldots + y_i| \leq 2L$. On le montre par récurrence, c'est clair pour $i = 0$, supposons le vrai pour $i-1$ et montrons le pour i. On remarque la chose suivante : pour tout j, on a

$$|x_j| \leq |x_1 + x_2 + \ldots + x_j| + |x_1 + x_2 + \ldots + x_{j-1}| \leq 2L.$$

On se met à la place d'Amélie après la $(i-1)$-ième étape, qui doit choisir la valeur de y_i parmi les x_j restants. Sans perte de généralité, on suppose que $y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1} \geq 0$. Si un des x_j restants est négatif ou nul, on a donc

$$2L \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1} \geq y_1 + y_2 + \ldots + y_{i-1} + x_j \geq x_j \geq -2L$$

où la première inégalité est par hypothèse de récurrence. Ainsi, le meilleur choix pour y_i satisfera nécessairement que $|y_1 + y_2 + \ldots + y_i| \leq 2L$. Si, au contraire, tous les x_j restants sont positifs, on remarque que quelque soit le x_j choisi par Amélie pour valoir y_i, on a

$$0 \leq y_1 + \ldots + y_{i-1} + x_j \leq y_1 + \ldots + y_n = x_1 + \ldots + x_n \leq L$$

et donc Amélie choisira nécessairement y_i avec $|y_1 + y_2 + \ldots + y_i| \leq 2L$. Ceci termine la récurrence.

Ainsi, la constante c existe et sa valeur minimale est $c = 2$.

Remarque : Cette preuve montre en fait que selon les valeurs des x_i, il peut se passer deux choses : soit on a les bornes $A \leq \max_i |x_i| \leq 2L$, soit l'algorithme glouton atteint son maximum à la fin, et donc $A = |\sum_i x_i| = L$.

Solution de l'exercice 3

On remarque la chose suivante : si $i \neq j$ sont donnés, il existe une unique valeur $k_{i,j}$ de k telle quie $a_i + ik = a_j + jk$, c'est précisément $k_{i,j} \equiv (a_i - a_j)(j-i)^{-1} \pmod p$. Il y a $\binom{p}{2}$ valeurs de $k_{i,j}$, qui peuvent prendre au plus p valeurs différentes. Il existe donc un k qui est pris par au plus $\frac{1}{p}\binom{p}{2} = \frac{p-1}{2}$ valeurs.

Notons G le graphe dont les sommets sont $1, 2, \ldots, n$ et dont les arêtes sont entre les sommets i, j avec $k_{i,j} = k$. On veut montrer que le graphe G a au moins $\frac{p+1}{2}$ composantes connexes, ce qui donnerait $\frac{p+1}{2}$ restes différents des $a_i + ik$ modulo p. Pour cela, on note m le nombre de composantes connexes de G et $n_1, n_2, \ldots, n_m$ les tailles des composantes connexes de G. Dans chaque composante connexe, le nombre d'arêtes est au moins $n_i - 1$, et donc

$$\frac{p-1}{2} \geq (n_1 - 1) + (n_2 - 1) + \ldots + (n_m - 1) = p - m$$

donc $m \geq \frac{p+1}{2}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 4

La réponse est 2. On commence par montrer que la suite (a_n) est nécessairement bornée. En effet, soit K le maximum des a_n avant que la règle s'applique. Alors on montre par récurrence que la suite (a_n) est majorée par K (elle est clairement minorée par 0 une fois que la règle s'applique). Si $n \leq K+1$, alors a_n compte un nombre au plus K de termes donc $a_n \leq K$. Si $n > K+1$, alors remarquons que pour tout $k < n-K$, on a par hypothèse de récurrence

$$a_k + k \leq K + k < n$$

et donc k n'est pas compté lorsque l'on calcule a_n. Ainsi, a_n compte au plus les nombres $n-1, n-2, \ldots, n-K$ et donc $a_n \leq K$.

Montrons maintenant que la suite (a_n) est périodique à partir d'un certian rang. En effet, par le principe des tiroirs, comme la suite est bornée, on peut trouver deux indices $i < j$ tels que $a_{i+1} = a_{j+1}, a_{i+2} = a_{j+2}, \ldots, a_{i+K} = a_{j+K}$. Alors comme la suite est bornée par K, on trouve que les suites $(a_{i+k})_k$ et $(a_{j+k})_k$ ont les mêmes conditions initiales et suivent la même règle que la suite (a_n), donc elles sont égales et (a_n) est périodique de période $j-i$ à partir du rang i. Notons S le rang au bout duquel la suite devient périodique, et T sa période. Remarquons que dès que $n \geq S+K$, a_n ne compte plus que des a_i avec $i \geq S$.

Une fois que la suite devient périodique, notons M son maximum, et m son minimum. Si $m = M$, la suite (a_n) stationne, donc on suppose à présent que $m < M$. Soit $n \geq S+K+M$ tel que $a_n = M$. On sait que a_n ne compte que des indices parmi $n-1, n-2, \ldots, n-M$, donc nécessairement il doit tous les compter, et donc $a_{n-M} + (n - M) \geq n$, donc $a_{n-M} \geq M$ et comme $n - M \geq S$, on a $a_{n-M} = M$ (par définition de M comme le maximum). De la même manière, si $a_n = m$, a_n compte au moins $n-1, n-2, \ldots, n-m$, donc on doit avoir $a_{n-m-1} + n - m - 1 < n$, et donc $a_{n-m-1} \leq m$, soit $a_{n-m-1} = m$ (par définition de m comme le minimum).

Prenons n, N grands (par exemple $n, N \geq S + K + M(m+1)$) tels que $a_n = m$ et $a_N = M$. Alors on sait que pour tous u, v pas trop grands ($n - u(m-1) \geq S + K$ et $N - vM \geq S + K$), on a $a_{n-u(m+1)} = m$ et $a_{n-vM} = M$. On choisit alors $u \geq 0$ et $v \geq 1$ afin que

$$N - vM \leq n - u(m+1) < N - vM + pgcd(M, m+1).$$

Mais comme $a_{N-(v-1)M} = M$, on sait que $a_{N-(v-1)M}$ doit compter le terme $n - u(m+1)$ (qui est entre $N - vM$ et $N - (v-1)M - 1$). Ainsi, on doit avoir

$$m + n - u(m+1) = a_{n-u(m+1)} + n - u(m+1) \geq N - (v-1)M.$$

et donc

$$N - (v-1)M < m + N - vM + pgcd(M, m+1)$$

$$M < m + pgcd(M, m+1) = m + pgcd(M - m - 1, m+1).$$

On remarque que si $M - m - 1 > 0$, alors le terme de droite vaut au plus $m + M - m - 1 = M - 1$, ce qui est absurde. Ainsi, $M = m + 1$ et la suite ne peut prendre que deux valeurs à partir d'un certain rang.

Réciproquement, la suite $1, 2, 1, 2, \ldots$ satisfait l'énoncé et prend deux valeurs une infinité de fois.

Solution de l'exercice 5

On tente une première chose : essayons de faire en sorte que toute moyenne des éléments de B soit non entière. Pour cela, on regarde les éléments de A modulo p. S'il y a deux résidus x, y modulo p qui sont pris une infinité de fois dans A, on peut prendre B qui contient $p-1$ éléments congrus à x, et $p-1$ éléments congrus à y, et alors B fonctionne.

Supposons donc que ce n'est pas le cas. Posons $A_0 = 0$. On translate A en $A + K_1$ de façon à ce que tous les élements de A sauf un nombre fini d'entre eux soient divisibles par p. Quitte à seulement considérer A_1 les éléments de $A + K_1$ plus grands que tous les éléments non divisibles par p, tous les éléments de A_1 sont divisibles par p. Mais alors on applique le même raisonnement que précédemment mais modulo p^2 : en faisant une moyenne, on n'a aucun risque de tomber sur un des éléments de $A + K_1$ non divisibles par p car les éléments de A_1 sont tous plus grands. Ainsi, si il y a deux résidus modulo p^2 pris une infinité de fois dans A_1, on peut prendre B comme avant, sinon on retranslate A en $A + K_2$ de façon à ce que tous les entiers de $A + K_2$ sauf un nombre fini soient divisibles par p^2, et on retronque comme avant pour obtenir A_2. On continue ainsi avec des A_n qui sont des troncatures de translatés $A + K_n$.

Il est possible que l'on ne puisse jamais obtenir d'ensemble B de cette manière, et donc on construit une infinité de A_n. Dans ce cas, on construit une suite $a_1 < a_2 < \ldots < a_{2p-2}$ d'éléments de A de la manière suivante : soit n_1 le premier nombre tel que $A + K_{n_1}$ contienne un nombre non divisible par p^{n_1} (qui existe car sinon tous les éléments de A sont congrus modulo toutes les puissances de p, absurde). Soit b_1 le plus grand tel élément, et on pose $a_1 = b_1 - K_{n_1}$ l'élément de A correspondant. On prend alors n_2 le premier nombre tel que

$A + K_{n_2}$ contienne un nombre non divisible par p^{n_2} et strictement supérieur à $a_1 + K_{n_2}$. On note b_2 le plus grand et $a_2 = b_2 - K_{n_2}$. On continue la construction ainsi. De cette manière, dans $A + K_{n_{2p-2}}$, on se retrouve avec les nombres $c_1 = a_1 + K_{n_{2p-2}}, c_2 = a_2 + K_{n_{2p-2}}, \ldots, c_{2p-2} = a_{2p-2} + K_{n_{2p-2}}$ qui sont tels que :

— $c_1 < \ldots < c_{2p-2}$

— $v_p(c_1) < v_p(c_2) < \ldots < v_p(c_{2p-2}) < n_{2p-2}$

— Pour tout i, c_i est le plus grand nombre de $A + K_{n_{2p-2}}$ non divisible par $p^{v_p(c_i)+1}$

Vérifions que $B = \{a_1, \ldots, a_{2p-2}\}$ fonctionne. Soient $i_1 < \ldots < i_p$ des indices, alors on a

$$v_p\left(\frac{1}{p}(c_{i_1} + c_{i_2} + \ldots + c_{i_p})\right) = v_p(c_{i_1}) - 1$$

et

$$\frac{1}{p}(c_{i_1} + c_{i_2} + \ldots + c_{i_p}) \geq c_{i_1}$$

donc par les propriétés des c_i, la moyenne des c_{i_j} ne peut pas appartenir à $A + K_{n_{2p-2}}$, et donc la moyenne des a_{i_j} ne peut pas appartenir à A. Ainsi, cette construction de B fonctionne.

Preuve du bonus : Prenons $A = \mathbb{Z}$ et montrons qu'aucun B ne convient. Pour cela, il faut montrer que pour tous $2p - 1$ entiers $a_1, a_2, \ldots, a_{2p-1}$, il en existe p dont la somme est divisible par p. Ceci est assez difficile, en voici une preuve avec des arguments type Chevalley-Warning. Posons F le polynôme à $2p - 1$ variables

$$F(X_1, \ldots, X_{2p-1}) = \sum_A \left(\sum_{i \in A} X_i\right)^{p-1}$$

où la somme est sur tous les sous ensembles A de $\{1, 2, \ldots, 2p - 1\}$ de cardinal p. Maintenant, étant donné un monôme $X_{i_1}^{k_1} X_{i_2}^{k_2} \ldots X_{i_m}^{k_m}$ avec $k_1 + \ldots + k_{2p-1} = p - 1$ et tous les k_i strictement positifs, son coefficient dans F vaut

$$\binom{2p-1-m}{p-m}\binom{p-1}{k_1, k_2, \ldots, k_m}$$

et ce premier facteur est divisible par p. Ainsi, modulo p, F est le polynôme nul. Mais en l'évaluant en $a_1, \ldots, a_{2p-1}$ et en supposant que toutes les sommes $\sum_{i \in A} a_i$ sont non nulles modulo p, on trouve

$$0 \equiv F(a_1, \ldots, a_{2p-1}) = \sum_A 1 = \binom{2p-1}{p} \not\equiv 0 \pmod{p}$$

d'où une absurdité.

Solution de l'exercice 6

On va montrer que la réponse est $c \geq d$. On commence par traiter le cas de $c < d$. Dans ce cas, par le théorème de Dirichlet, il existe un nombre premier p congru à 1 modulo d et supérieur à $c(2c+1)$. On prend alors $Q(X) = X^d$. En effet, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, il y a seulement $1 + \frac{p-1}{d}$ éléments dans l'image de Q (il y a 0 et les $\frac{p-1}{d}$ puissances de g^d modulo p où g est une racine primitive modulo p). Mais alors pour obtenir un système complet de résidus modulo p à partir d'un ensemble S, il faut que l'ensemble S contienne tous les nombres qui ne sont pas des puissances d-ièmes modulo p, il y en a au moins

$$|S| \geq p - \left(1 + \frac{p-1}{d}\right) = \frac{d-1}{d}(p-1).$$

Mais comme $c < d$, on a $\frac{d-1}{d} > \frac{2c-1}{2c+1}$, donc en choisissant p assez grand, on a $\frac{d-1}{d}(p-1) > \frac{2c-1}{2c+1}p$, comme voulu.

On va maintenant montrer que $c \geq d$ fonctionne. Soit Q comme dans l'énoncé, on considère dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ le graphe fonctionnel orienté G de Q (c'est-à-dire le graphe dont les sommets sont les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et où on met une arête de x à $Q(x)$ pour chaque x). Dans G, chaque sommet a exactement une arête sortante, et au plus d arêtes rentrantes : une arête rentrante dans le sommet x est une solution y de $Q(y) = x$, dont il y en a au plus d.

Appelons feuille un sommet de G qui n'a aucune arête entrante. Afin d'obtenir un système complet de résidus modulo p, on peut choisir pour S l'ensemble des feuilles, auxquelles on rajoute une arête dans chaque cycle isolé de G. On note a le nombre d'éléments x envoyés sur eux-mêmes (cycles de taille 1), et b le nombre d'éléments dans des cycles isolés de taille au plus 2. Parmi les b éléments, on peut en choisir au moins $\frac{b}{2}$ à mettre dans S. Considérons enfin les $p - a - b$ éléments restants. Parmi ces éléments, comme chaque élément a un degré entrant d'au plus d, il y a une proportion au plus $\frac{d-1}{d}$ d'entre eux qui sont des feuilles. Ainsi, on peut construire un ensemble S de taille au plus

$$a + \frac{b}{2} + \frac{d-1}{d}(p-a-b) = \frac{d-1}{d}p + \frac{1}{d}a - \frac{d-1}{d}b \leq \frac{d-1}{d}p + 1$$

où on a utilisé le fait que $a \leq d$, puisque le polynôme $Q(X) - X$ a au plus d racines. Maintenant, puisque $p > c(2c+1) \geq d(2d+1)$, on a

$$\frac{d-1}{d}p + 1 < \frac{d-1}{d}p + \frac{1}{d(2d+1)}p = \frac{d(2d-1)-1}{d(2d+1)}p < \frac{2d-1}{2d+1}p \leq \frac{2c-1}{2c+1}p$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7

L'idée est de définir la fonction $f(n) = |A_n| - |B_n|$. Commençons par montrer que si $p \mid n$, alors $f(pn) = pf(n)$. En effet, pour un nombre k entre 1 et pn, le nombre de facteurs premiers distincts de $PGCD(k, pn)$ est égal au nombre de facteurs premiers distincts de $PGCD(k, n)$, ce qui ne dépend que de la valeur de k modulo n. Ainsi, $|A_{pn}| = p|A_n|$ et $|B_{pn}| = p|B_n|$, et donc $f(pn) = pf(n)$.

Il reste donc à voir ce qui se passe lorsque $n = p_1 p_2 \dots p_r$ avec $p_1, p_2, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts. Pour cela, remarquons que pour k entre 1 et n, k contribue un facteur $\mu(d)$ à $f(n)$, avec $d = PGCD(k, n)$. Si d est un diviseur de n, il y a exactement $\varphi(n/d)$ tels nombres k, et donc

$$f(n) = \sum_{d \mid n} \mu(d)\varphi(n/d)$$

donc la fonction f restreinte aux nombres sans facteurs carrés est une convolution de deux fonctions multiplicatives, et est donc multiplicative. Il reste donc à calculer f dans le cas d'un nombre premier p. Dans ce cas, chaque nombre de 1 à p contribue 1 à $f(p)$, sauf p qui contribue -1, et donc $f(p) = p - 2$. On a donc, pour tout $n = \prod_i p_i^{\alpha_i}$,

$$f(n) = \prod_i p_i^{\alpha_i - 1}(p_i - 2)$$

d'où le résultat.

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Soit n un entier impair. Dans une grille $n \times n$ on colorie les $2n(n+1)$ segments unités de la grille en rouge ou bleu. On suppose qu'il y a au plus n^2 segments coloriés en rouge. Montrer qu'il existe au moins un carré unité dont trois de ses côtés au moins sont bleus.

Exercice 2
Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers strictement positifs telle que $a_1 = 2024$ et pour tout entier strictement positif n,
$$\sqrt{a_{n+1} - a_n} = \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor.$$
Montrer que la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ contient une infinité d'entiers pairs et une infinité d'entiers impairs.

Exercice 3
Soient m et n deux entiers strictement plus grand que 2. On suppose qu'un m-gone régulier $\mathcal{R}$ dont la longueur du côté est 1 peut être inclus à l'intérieur d'un n-gone régulier $\mathcal{T}$. Montrer que n'importe quel m-gone régulier $\mathcal{S}$ dont la longueur du côté est plus petite que $\cos(\pi/\text{ppcm}(m,n))$ peut être translaté (on n'autorise donc pas les rotations) à l'intérieur de $\mathcal{T}$.

Note : toutes les inclusions des polygones ***ne*** *sont* ***pas*** *supposées strictes, c'est-à-dire qu'il est possible qu'un sommet de $\mathcal{S}$ touche un côté ou un autre sommet de $\mathcal{T}$.*

Solutions

Exercice 1
(P3 TST Inde 2016 IMO training camp) Soit n un entier impair. Dans une grille $n \times n$ on colorie les $2n(n+1)$ segments de la grille en rouge ou bleu. On suppose qu'il y a au plus n^2 segments rouges. Montrer qu'il existe un carré unité dont trois de ses côtés au moins sont bleus.

Solution de l'exercice 1
Supposons par l'absurde qu'un tel coloriage soit possible et on le considère.
Chaque carré possède donc au moins 2 côtés coloriés en rouge. Chaque segment rouge appartient à deux carrés au plus. Or il y a n^2 carrés et au plus n^2 segments rouges, cela montre qu'il y a donc exactement 2 côtés coloriés en rouge par carré et que chaque segment rouge colorié est le côté de deux carrés. En particulier, il n'est pas possible qu'un des $4n$ segments du bord de la grille soit colorié en rouge.

On construit maintenant un graphe $G = (V, E)$ associé au coloriage des segments de la grille. L'ensemble E des sommets de G est l'ensemble des carrés de la grille. Une arête de G relie deux sommets lorsque leurs carrés correspondant ont un segment rouge en commun.
Comme chaque sommet de G a exactement 2 voisins, le graphe G est une union de cycles (non-triviaux). Remarquons maintenant qu'après avoir colorié notre grille en échiquier, chaque carré ne peut être voisin qu'avec un carré de couleur différente. Cela implique que notre graphe est **2-coloriable** ou bipartite. En particulier, tous les cycles sont pairs. Cela implique qu'il y a un nombre pair de sommets or il y en a n^2 qui est impair, c'est la contradiction recherchée.

Solution alternative. On raisonne de nouveau par l'absurde. On colorie la grille en noir et blanc à la manière d'un échiquier en coloriant les coins en noirs. Il y a donc $(n^2+1)/2$ cases noires et $(n^2-1)/2$ cases blanches.

On compte maintenant le nombre de segments rouges qui sont adjacents à une case noire. Il y en a au moins 2 par case noire par hypothèse, et on ne compte pas deux fois un même segment comme les segments sont entre des cases noires et blanches ou sont au bord. Il y a donc $2(n^2+1)/2 = n^2+1$ segments rouges au moins, ce qui est une contradiction.

Remarque 1. La condition que n est impair est nécessaire. En appliquant l'idée de la première solution, il suffit de tracer des cycles dans notre grille $n \times n$ et de mettre des segments rouges quand deux cases sont reliées dans un cycle. Par exemple on peut tracer $n/2$ cycles concentriques en partant du grand tour.

Exercice 2
(TST Taiwan 2021) Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs telle que $a_1 = 2024$ et pour tout entier strictement positif n,

$$\sqrt{a_{n+1} - a_n} = \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor.$$

Montrer que la suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ contient une infinité d'entiers pairs et une infinité d'entiers impairs.

Solution de l'exercice 2
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on prend $b_n = \lfloor \sqrt{a_n} \rfloor$. On a donc que b_n est l'unique entier naturel pour lequel il existe $0 \leqslant c_n \leqslant 2 \cdot b_n$ tel que $a_n = b_n^2 + c_n$. En particulier, $b_n^2 \leqslant a_n$.
La condition de l'énoncé se traduit donc en $a_{n+1} - a_n = b_n^2$. On montre un premier encadrement sur la suite $(b_n)_{n \in \mathbb{N}}$.

Lemme 2. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a l'inégalité $0 \leqslant 2b_n - b_{n+2} \leqslant 1$.

Démonstration. Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $a_{n+1} = a_n + b_n^2 \leqslant 2a_n$. En outre, $a_{n+1} = a_n + b_n^2 = 2b_n^2 + c_n$, donc

$$a_{n+2} \leqslant 4b_n^2 + 2c_n \leqslant 4b_n^2 + 4b_n < (2b_n + 1)^2$$

Par suite, $b_{n+2}^2 \leqslant a_{n+2} < (2b_n + 1)^2$, et $b_{n+2} \leqslant 2b_n$.
On a également $a_{n+1} = a_n + b_n^2 \geqslant 2b_n^2$. On en déduit que

$$a_{n+2} \geq 2b_n^2 + b_{n+1}^2 \geq 2b_n^2 + (\sqrt{2}b_n - 1)^2 > (2b_n - 1)^2$$

En effet, $2b_n^2 \leqslant a_{n+1} < (b_{n+1} + 1)^2$, donc $b_{n+1} > b_n\sqrt{2} - 1$.
Cela montre que $b_{n+2} \geqslant \sqrt{a_{n+2}} - 1 > 2b_n - 2$. Ainsi, $b_{n+2} \geqslant 2b_n - 1$. □

Puisque $a_{n+1} - a_n = b_n^2$, et que l'énoncé nous demande de montrer que les termes de la suite $(a_n)_n$ changent de parité une infinité de fois, on désire montrer qu'il y a une infinité de b_n qui sont impairs. Supposons donc par l'absurde qu'à partir d'un certain rang, on ait $b_{n+2} = 2b_n$. En particulier, le rapport $\frac{b_{2n+2}}{b_{2n+1}}$ est un rationnel q qui est constant pour n assez grand. Cependant, pour tout n, on a vu que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} > \sqrt{2} - \frac{1}{b_n},$$

et que

$$\frac{b_{n+1}}{b_n} = \frac{2b_{n+1}}{b_{n+2}} \leqslant \frac{2}{\sqrt{2} - \frac{1}{b_{n+1}}}$$

Par encadrement, puisque b_n tend vers $+\infty$ lorsque n tend vers l'infini, on en déduit que $q = \sqrt{2}$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel. Cela conclut.

Solution alternative de la conclusion. On présente une deuxième façon de conclure à partir du fait que $b_{n+2} = 2b_n$ pour n assez grand. On part des identités (valables lorsque n est choisi assez grand) :

$$a_{n+1} - a_n = b_n^2 \Longleftrightarrow b_{n+1}^2 + c_{n+1} - b_n^2 - c_n = b_n^2 \Longleftrightarrow 2b_n^2 = b_{n+1}^2 + c_{n+1} - c_n$$
$$\Longrightarrow 2b_{n+1}^2 = b_{n+2}^2 + c_{n+2} - c_{n+1}$$

Ainsi,

$$4b_n^2 = 2b_{n+1}^2 + 2c_{n+1} - 2c_n = b_{n+2}^2 + c_{n+2} + c_{n+1} - 2c_n = 4b_n^2 + c_{n+2} + c_{n+1} - 2c_n$$

On obtient donc une suite récurrente linéaire de la forme

$$c_{n+2} + c_{n+1} - 2c_n = 0,$$

pour tout n assez grand. Puisque les deux racines du polynômes $X^2 + X - 2$ sont 1 et -2, on dispose de $m > 0$, et de $a, b \in \mathbb{R}$ tels que $c_n = a + b \cdot (-2)^{n-m}$ pour tout $n \geqslant m$. Puisque les c_n sont toujours positifs, on montre que $b = 0$ en considérant des n assez grands. Cela montre que c_n est constant à partir d'un certain rang, puis que $2b_{n+1}^2 = b_{n+2}^2$, ce qui est absurde car $\sqrt{2}$ est irrationnel.

Exercice 3
(P6 TST 1 Chine) Soient m et n deux entiers strictement plus grands que 2. On suppose qu'un m-gone régulier $\mathcal{R}$ dont la longueur du côté est 1 peut être inclus à l'intérieur d'un n-gone régulier $\mathcal{T}$. Montrer que n'importe quel m-gone régulier $\mathcal{S}$ dont la longueur du côté est plus petite que $\cos(\pi/\text{ppcm}(m,n))$ peut être translaté (on n'autorise donc pas les rotations) à l'intérieur de $\mathcal{T}$.

Note : toutes les inclusions des polygones ***ne*** *sont* ***pas*** *supposées strictes, c'est-à-dire qu'il est possible qu'un sommet de $\mathcal{S}$ touche un côté ou un autre sommet de $\mathcal{T}$.*

Solution de l'exercice 3
On note O le centre du polygone $\mathcal{T}$ ainsi que O' le centre du polygone $\mathcal{R}$. Pour tout angle α et tout point du plan C, on note également $\rho_{\alpha,C}$ la rotation d'angle α et de centre C. On choisit une numérotation des sommets $X_1X_2\cdots X_m$ dans le sens positif de $\mathcal{R}$. Pour chaque m-gone régulier $Y_1Y_2\cdots Y_m$ de centre O'', on dira que son **angle** est l'angle orienté $(O'X_1, O''Y_1)$.

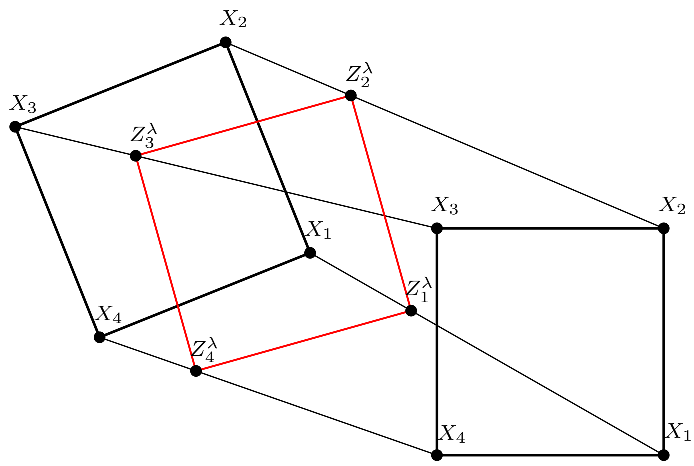
L'idée de la preuve est la suivante : on regarde toutes les rotations de centre O et d'angle $2\pi/n$ de $\mathcal{R}$, on note $\mathcal{R}^k = \rho_{2\pi k/n,O}(\mathcal{R})$. Comme le polygone $\mathcal{T}$ est fixé par cette rotation on en déduit que les $\mathcal{R}^k$ sont également inclus dans $\mathcal{T}$. On dispose maintenant de n polygones (pas forcément différents a priori) inclus dans $\mathcal{T}$, et ce dernier étant convexe cela implique que l'enveloppe convexe des $\mathcal{R}^k$ est également contenue dans $\mathcal{T}$. On va montrer que quelque soit l'angle du polygone $\mathcal{S}$, il peut s'inclure dans cette enveloppe convexe, cela retire donc $\mathcal{T}$ de l'exercice.

Lemme 3. Il suffit pour résoudre l'exercice de se restreindre au cas où l'angle du polygone $\mathcal{S}$ est entre 0 et $2\pi/\text{ppcm}(m,n)$.

Démonstration. Supposons que l'angle de $\mathcal{S}$ soit dans $[2\pi k/\text{ppcm}(m,n), 2\pi(k+1)/\text{ppcm}(m,n)[$. Soient u et v les deux entiers donnés par le théorème de Bézout tel que $nu + mv = -k \cdot \text{pgcd}(m,n)$. On peut alors effectuer à toute la figure la rotation $\rho_{2\pi u/n,O}$ puis renuméroter les sommets du polygone $\rho_{2\pi u/n,O}(\mathcal{S})$ en les décalant de v dans le sens positif. L'angle du polygone après ces opérations est maintenant dans $[0, 2\pi/\text{ppcm}(m,n)[$ comme souhaité. $\square$

Lemme 4. Soit $\mathcal{R}'$ un m-gone régulier de côté 1 et d'angle $2\pi/\text{ppcm}(m,n)$ et soit $\mathcal{S}$ un m-gone régulier dont la longueur du côté est plus petite que $\cos(\pi/\text{ppcm}(m,n))$, alors il existe un translaté de $\mathcal{S}$ qui est inclus dans l'enveloppe convexe de $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$.

Démonstration. Soient $X_1X_2\cdots X_m$ et $Y_1Y_2\cdots Y_m$ les polygones $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$. On note $Z_i^\lambda = \lambda X_i + (1-\lambda)Y_i$, on va montrer que pour tout λ dans $[0,1]$, le polygone $Z_1^\lambda Z_2^\lambda \cdots Z_m^\lambda$ est un m-gone régulier. Le λ pour lequel la longueur du côté est minimal est $\lambda = 1/2$ et dans ce cas la longueur du côté du polygone $Z_1^{1/2}Z_2^{1/2}\cdots Z_m^{1/2}$ est $\cos(2\pi/\text{ppcm}(m,n))$. Cela conclura la preuve du lemme 4 car l'orientation de ces polygones réguliers varie continuement entre 0 et $2\pi/\text{ppcm}(m,n)$.



Soit λ dans $[0,1]$ et Z_i^λ comme définis précédemment, la valeur du vecteur $\overrightarrow{Z_iZ_{i+1}}$ ne dépend que des vecteurs $\overrightarrow{X_iX_{i+1}}$ et $\overrightarrow{Y_iY_{i+1}}$ et pas de leur positions dans l'espace. On peut donc raisonner dans le cas où les polygones $\mathcal{R}$ et $\mathcal{R}'$ sont tous les deux centrés en O'. Dans ce cas il est clair que $Z_1^\lambda \cdots Z_m^\lambda$ est un m-gone régulier. Pour calculer la longueur de son côté on peut faire la chose suivante. Soit R la longueur $O'X_1$, on note $r = O'Z_1^\lambda$, la longueur $Z_1^\lambda Z_2^\lambda$ est alors r/R. Il est clair que cette longueur est minimale en $\lambda = 1/2$ et vaut alors $\cos(\pi/\text{ppcm}(m,n))$. $\square$

Cela conclut donc la preuve de l'exercice.

Remarque 5. Ce n'est a priori pas clair dans la preuve mais le cas où m et n ont un pgcd non trivial est plus simple. En effet, les rotations $\rho_{2\pi k/\text{pgcd}(m,n),O}$ sont toutes contenus dans $\mathcal{T}$ mais sont également des translations du polygone $\mathcal{R}$ original. En particulier, il existe une translation de $\mathcal{R}$ qui est dans $\mathcal{T}$ et centrée en O. Une des plus grandes versions d'un m-gone régulier inclus dans $\mathcal{T}$ est donc centrée en O, quelque soit l'angle fixée du m-gone.

3 Deuxième partie

1 Combinatoire : algorithme glouton (Aurélien)

En stand-by...

2 Configurations (Quentin)

Nous présentons ici trois configurations classiques qui peuvent se révéler utiles à la résolution de problèmes de géométrie : les symmédianes, le lemme dit iranien et les cercles mixtilinéaires.

– Symmédianes –

Exercices

Exercice 1 (Propriétés des symmédianes - À RETENIR)
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[BC]$. Les tangentes au cercle circonscrit de ABC en B et C se rencontrent en X. Soit Y le deuxième point d'intersection de (AX) et du cercle circonscrit. Soit enfin D le point d'intersection de (AX) et (BC). Montrer les propriétés suivantes.

1. $\widehat{BAX} = \widehat{MAC}$.
2. (YA) est la Y-symmédiane de YBC.
3. (BC) est la B-symmédiane de ABY, (CB) est la C-symmédiane de ACY.
4. $\frac{AB}{BY} = \frac{AC}{CY}$.
5. Les triangles ABY et AMC sont semblables.
6. $\frac{BD}{DC} = \left(\frac{AB}{AC}\right)^2$.
7. Le cercle circonscrit à BCX coupe $[AY]$ en son milieu.
8. $\widehat{AMB} = \widehat{BMY}$.

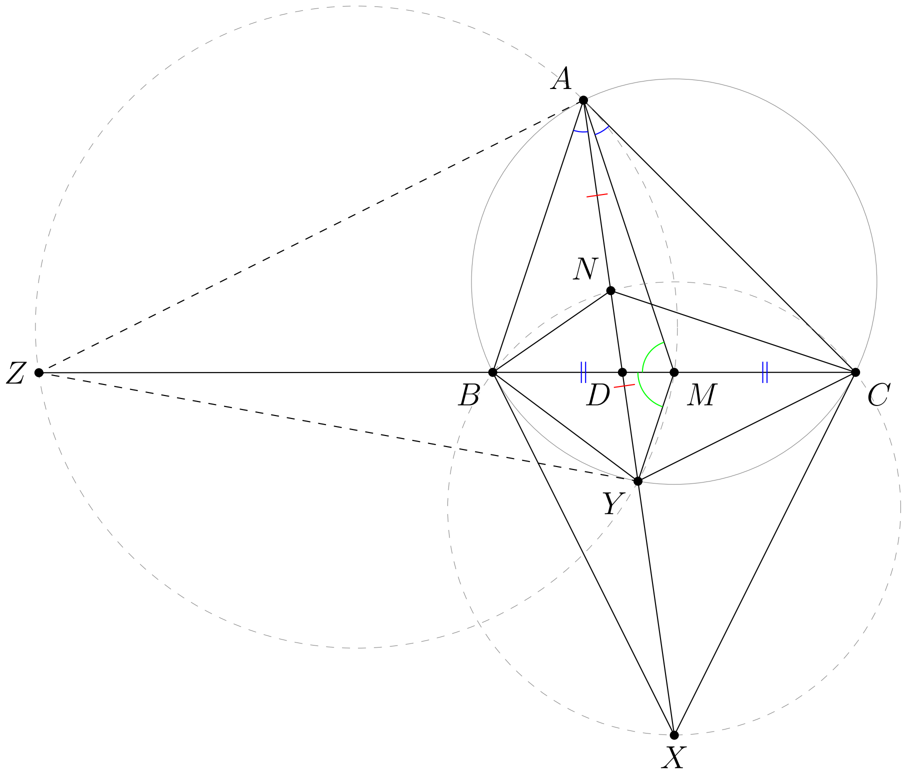
Exercice 2 (IMO Shortlist 2003, G2)
Soient A, B, C trois points distincts alignés dans cet ordre. On considère un cercle Γ passant par A et C et dont le centre ne se situe pas sur (AC). Les tangentes en A et C s'intersectent en un point P. Le segment $[PB]$ coupe Γ en Q. La bissectrice de $\widehat{CQA}$ coupe la droite (AC) en un point D.
Montrer que le point D ne dépend pas du choix du cercle Γ.

Exercice 3 (APMO 2014, Problème 4)
Soit ABC un triangle acutangle, H son orthocentre, D le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de $[BC]$. La demi-droite $[MH)$ intersecte le cercle circonscrit à ABC en E. La droite (ED) intersecte le cercle une deuxième fois en F. Montrer que $\frac{BF}{CF} = \frac{AB}{AC}$.

Exercice 4 (Vietnam TST 2001, Jour 1, Problème 2)
Dans le plan, deux cercles s'intersectent en deux points distincts A et B. Une tangente commune aux deux cercles les intersecte en deux points P et Q. Les tangentes au cercle circonscrit à APQ en P et Q s'intersectent en S. Soit H le symétrique de B par rapport à (PQ).
Montrer que A, H, S sont alignés.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1



1. On peut le montrer par loi des sinus. Nous proposons ici une preuve basée sur les outils de géométrie projective.
   On redéfinit M comme le point sur $[BC]$ tel que $\widehat{MAC} = \widehat{BAX}$ et on souhaite montrer que M est le milieu de $[BC]$. Les points B, C, Y, A sont harmoniques, donc les droites $(AB), (AC)$, la tangente en A et (AX) sont harmoniques. En symétrisant par rapport à la bissectrice de $\widehat{BAC}$, les droites $(AC), (AB)$, la parallèle à (BC) passant par A et (AM) sont harmoniques, donc les points $B, C, \infty_{(BC)}, M$ sont harmoniques. Par unicité du quatrième point harmonique, M est nécessairement le milieu de $[BC]$.
   En particulier le point d'intersection de la symédiane avec le cercle circonscrit est le point formant une division harmonique avec B, C, A.
2. Ce résultat provient de la question 1, en remarquant que la construction faite dans ABC ou dans YBC donne le même point X.
3. Ceci découle du fait que B, C, A, Y sont harmoniques.
4. Là encore, cela découle de l'harmonicité de B, C, A, Y.
5. On a déjà l'égalité d'angle $\widehat{BAY} = \widehat{MAC}$. Mais on a également $\widehat{AYB} = \widehat{ACB} = \widehat{ACM}$ par angle inscrit.
6. Par loi des sinus dans BAD, on a $BD = AB \cdot \dfrac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{ADB})}$. Par loi des sinus dans ADC, on a également $DC = AC \cdot \dfrac{\sin(\widehat{DAC})}{\sin(\widehat{CDA})}$. Or $\sin(\widehat{CDA}) = \sin(\widehat{ADB})$ puisque

$\widehat{CDA} = 180° - \widehat{ADB}$. D'où $\dfrac{BD}{DC} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})}$.

En appliquant le même raisonnement dans BAM, MAC, on a $1 = \dfrac{BM}{MC} = \dfrac{AB}{AC} \cdot \dfrac{\sin(\widehat{BAM})}{\sin(\widehat{MAC})}$. Mais $\widehat{BAD} = \widehat{MAC}, \widehat{DAC} = \widehat{BAM}$. D'où $\dfrac{\sin(\widehat{BAD})}{\sin(\widehat{DAC})} = \dfrac{AB}{AC}$, et finalement $\dfrac{BD}{DC} = \left(\dfrac{AB}{AC}\right)^2$, comme voulu.

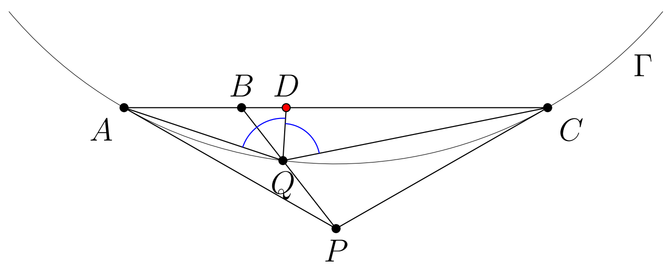
7. Soit N le milieu de $[AY]$. On procède par chasse aux angles.

$$\begin{aligned}
\widehat{NCB} &= \widehat{NCY} - \widehat{BCY} \\
&= \widehat{ACD} - \widehat{BAY} \text{ par angle inscrit et symmédiane de } ACY \text{ (point 3)} \\
&= \widehat{ACB} - \widehat{XBY} \text{ par angle tangentiel} \\
&= \widehat{AYB} - \widehat{XBY} \\
&= \widehat{YXB} \\
&= \widehat{NXB}
\end{aligned}$$

   Par angle inscrit, les points B, X, C, N sont cocycliques.

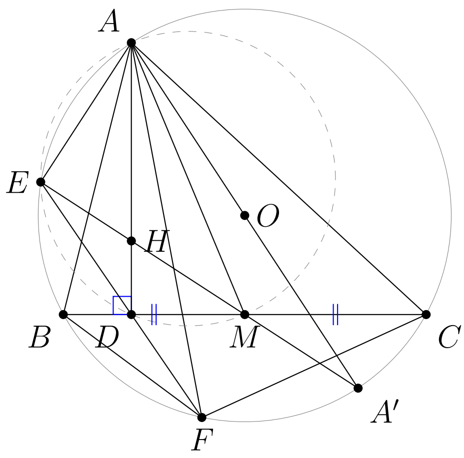
8. Soit Z l'intersection des tangentes en A et Y au cercle circonscrit. Puisque la droite (BC) est la C-symmédiane de ACY (point 3), Z est sur (BC). Puisque M est le milieu de $[BC]$, les points A, M, Y, Z sont cocycliques (point 7).
   Dès lors, $\widehat{AMB} = \widehat{AMZ} = \widehat{AYZ} = \widehat{ZAY} = \widehat{ZMY} = \widehat{BMY}$, en utilisant successivement angles inscrits et $ZA = ZY$ (par tangence).

Solution de l'exercice 2



On reconnait par construction que (QB) est la symmédiane de AQC. Alors $\dfrac{BA}{BC} = \left(\dfrac{QA}{QC}\right)^2$. néanmoins, par théorème de la bissectrice, $\dfrac{DA}{DC} = \dfrac{QA}{QC} = \sqrt{\dfrac{BA}{BC}}$, qui ne dépend donc pas de Γ. La position de D sur $[BC]$ étant uniquement déterminée par le ratio $\dfrac{DB}{DC}$, on en déduit que le point D ne dépend pas de Γ.

Solution de l'exercice 3

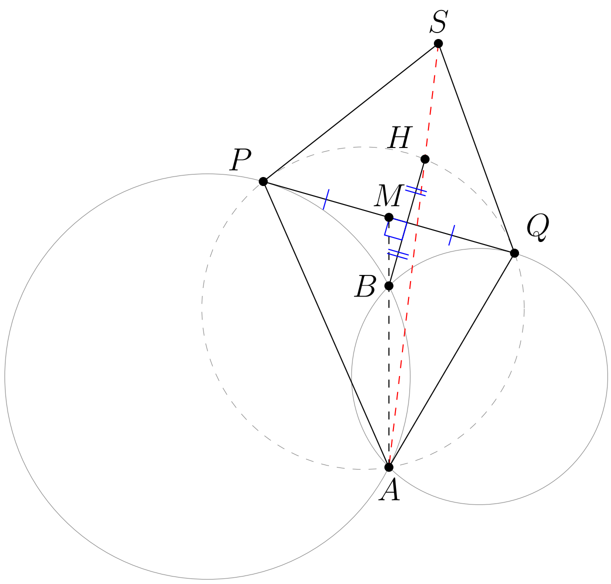


Le problème revient à montrer que (AF) est la A-symmédiane de BAC. Soit O le centre du cercle circonscrit, et A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit. On sait alors que M est le milieu de $[HA']$.
En particulier $\widehat{MEA} = \widehat{A'EA} = 90° = \widehat{MDA}$ donc D, E, M, A sont cocycliques. On en déduit :

$$\begin{aligned}
\widehat{FAC} &= \widehat{FAA'} + \widehat{A'AC} \\
&= \widehat{FEA'} + 90° - \widehat{CBA} \text{ par angle inscrit} \\
&= \widehat{DEM} + 90° - \widehat{CBA} \\
&= \widehat{DAM} + 90° - \widehat{CBA} \text{ par angle inscrit} \\
&= \widehat{BAM} - \widehat{BAD} + 90° - \widehat{CBA} \\
&= \widehat{BAM} \text{ car } \widehat{BAD} = 90° - \widehat{CBA}
\end{aligned}$$

Donc $\widehat{FAC} = \widehat{BAM}$: (AF) est bien la symmédiane, ce qui donne le résultat.

Solution de l'exercice 4



Par construction, la droite (AS) est la symmédiane de APQ. Il s'agit donc de montrer que H est sur la symmédiane.
Montrons d'abord que H est sur le cercle circonscrit de APQ. On procède par chasse aux angles :

$$\begin{aligned}\widehat{PHQ} &= \widehat{QBP} \text{ par symétrie}\\ &= 180^\circ - \widehat{BPQ} - \widehat{PQB}\\ &= 180^\circ - \widehat{BAP} - \widehat{QAB} \text{ par angle tangentiel}\\ &= 180^\circ - \widehat{QAP}\end{aligned}$$

Donc les points A, P, H, Q sont cocycliques, comme voulu.
Soit M le milieu de $[PQ]$. Par axe radical et tangence, A, B, M sont alignés. Puisque (AS) est la symmédiane, $\widehat{QAS} = \widehat{MAP} = \widehat{BAP}$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{QAH} = \widehat{BAP}$ pour conclure. Or :

$$\begin{aligned}\widehat{QAH} &= \widehat{QPH} \text{ par angle inscrit}\\ &= \widehat{BPQ} \text{ par symétrie}\\ &= \widehat{BAP} \text{ par angle tangentiel}\end{aligned}$$

Donc A, S, H sont alignés, comme voulu.

– Lemme iranien –

Exercices

Exercice 5 (Lemme iranien - À RETENIR)
Soit ABC un triangle de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à (CA) et (AB) en E et F respectivement. Les droites (BI) et (EF) s'intersectent en K. Soient M et N les milieux de $[BC]$ et $[CA]$ respectivement.
Montrer que (BK) et (CK) sont perpendiculaires, et que K est sur la droite (MN).

Exercice 6 (Iran TST 2009, Jour 3, Problème 3)
Soit ABC un triangle de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à $(BC), (CA)$ et (AB) en D, E et F respectivement. Soit M le pied de la perpendiculaire à (EF) passant par D. Soit P le milieu de $[DM]$ et H l'orthocentre de BIC.
Montrer que (PH) coupe $[EF]$ en son milieu.

Exercice 7 (USA TST 2015, Jour 1, Problème 1)
Soit ABC un triangle non-isocèle, de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à $(BC), (CA)$ et (AB) en D, E et F respectivement. Soit M le milieu de $[BC]$. Soit Q le point sur le cercle inscrit tel que $\widehat{AQD} = 90^\circ$ et P le point de la droite (AI) à l'intérieur du triangle tel que $MD = MP$.
Montrer que soit $\widehat{PQE} = 90^\circ$, soit $\widehat{PQF} = 90^\circ$.

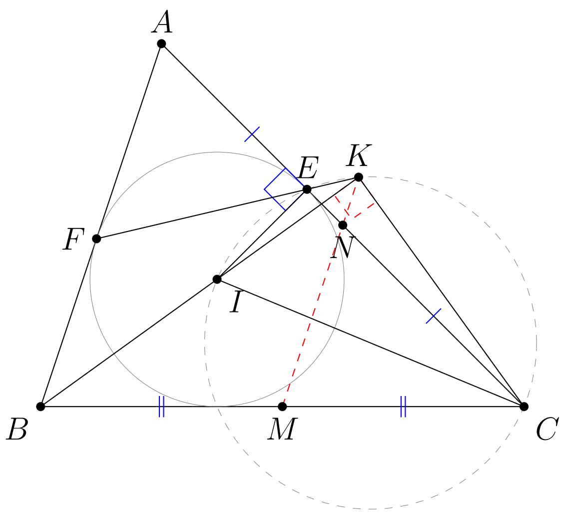
Exercice 8 (IMO Shortlist 2004, G7)
Soit ABC un triangle. Soit X un point variable sur la droite (BC) tel que C est situé entre B

et X, et tel que les cercles inscrits à ABX et ACX s'intersectent en deux points distincts P et Q.
Montrer que la droite (PQ) passe par un point indépendant de X.

Exercice 9 (Roumanie TST 2007, Jour 7, Problème 2)
Soit ABC un triangle de centre de cercle inscrit I. Le cercle inscrit est tangent à (CA) et (AB) en E et F respectivement. Soit M le milieu de $[BC]$. Les droites (AM) et (EF) s'intersectent en N. Le cercle de diamètre $[BC]$ intersecte (BI) et (CI) une deuxième fois en X et Y respectivement.
Montrer que $\dfrac{NX}{NY} = \dfrac{AC}{AB}$.

Solutions des exercices

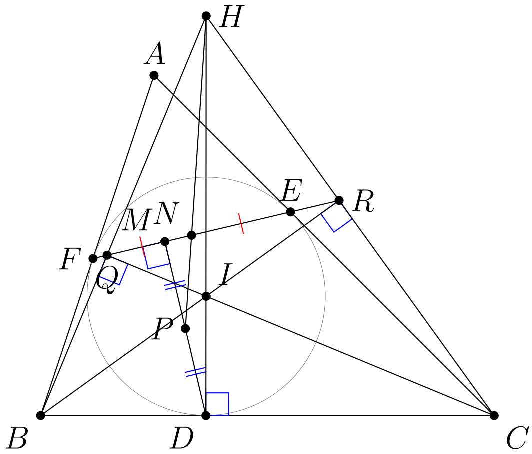
Solution de l'exercice 5



Montrons d'abord que les droites (BK) et (CK) sont perpendiculaires.
Puisque $\widehat{IEC} = 90°$, les points I, E, C sont sur le cercle de diamètre $[IC]$. Alors les droites (BK) et (CK) sont perpendiculaires si et seulement si K est sur le cercle, si et seulement si E, K, C, I sont cocycliques, si et seulement si $\widehat{FKB} = \widehat{EKI} = \widehat{ECI} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$. Montrons donc cette égalité.
Dans le triangle FKB, on a $\widehat{FKB} = 180° - \widehat{BFK} - \widehat{KBF}$. Or $\widehat{KBF} = \frac{1}{2}\widehat{CBA}$, et puisque $AF = AE$, $\widehat{BFK} = 180° - \widehat{KFA} = 180° - \left(90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC}\right)$.
Finalement, $\widehat{FKB} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{BAC} - \frac{1}{2}\widehat{CBA} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$, comme voulu. Donc les droites (BK) et (CK) sont bien perpendiculaires.

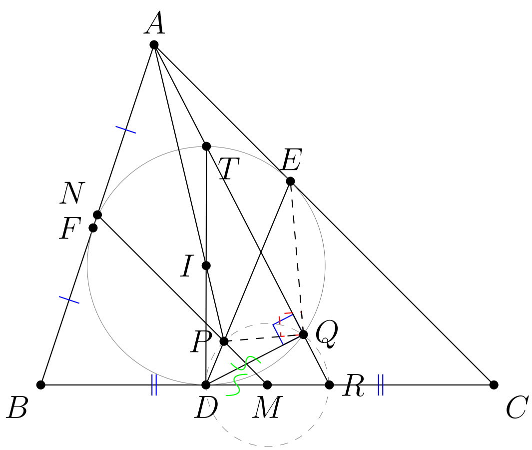
Montrons à présent que K, M, N sont alignés. Pour ce faire, remarquons que M est le milieu de $[BC]$ dans KBC rectangle en K : c'est donc le centre du cercle circonscrit, en particulier $MK = MB$, d'où $\widehat{BKM} = \widehat{MBK} = \frac{1}{2}\widehat{CBA} = \widehat{KBA}$. Par angles alternes-internes, les droites (MK) et (AB) sont parallèles. Mais par droite des milieux, les droites (MN) et (AB) sont aussi parallèles. Donc (MN) et (MK) sont parallèles et avec un point commun : elles sont confondues, et M, K, N sont alignés.

Solution de l'exercice 6



Soient R, Q les pieds des hauteurs issues de B, C respectivement dans BIC.
Puisque R est sur (BI) et que (BR) est perpendiculaire à (CR), par le lemme iranien R est sur (EF). De même Q est sur (EF).
Notons à présent que I est l'orthocentre de BHC et D, R, Q sont les pieds des hauteurs. Donc I est le centre du cercle inscrit de DQR.
De plus, H est l'orthocentre de BIC, donc c'est le centre D-exinscrit de DRQ triangle orthique. Mais P est le milieu de $[DM]$ la hauteur, donc N est le point de contact du cercle inscrit de DQR sur $[QR]$ (résultat classique dont la preuve est donnée dans le lemme 1, voir plus bas).
En particulier, (IN) est perpendiculaire à $(QR) = (EF)$. Mais $IE = IF$, donc N est le milieu de $[EF]$, comme voulu.

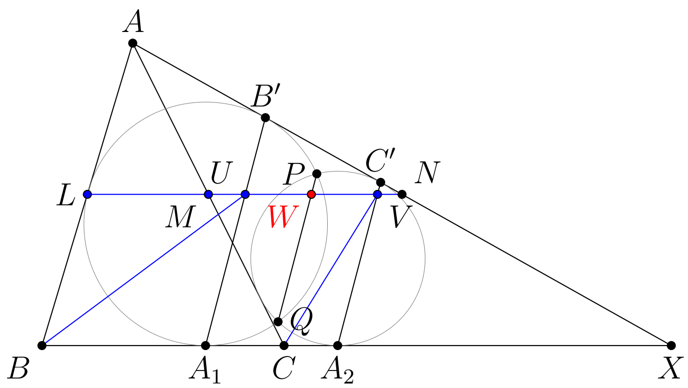
Solution de l'exercice 7



Sans perte de généralité, $AB < AC$. Soit N le milieu de $[AB]$. Notons que $\frac{MP}{CE} = \frac{DM}{DC}$ puisqu'on a $DC = EC$ et $DM = MP$. Donc par la réciproque du théorème de Thalès, (MP)

est parallèle à la droite $(EC) = (AC)$. Mais par droite des milieux (MN) est parallèle à (AC). Finalement, P est sur (MN). Mais P est également sur (AI), donc d'après le lemme iranien P est sur (DE).
Soit T l'intersection de (AQ) et du cercle inscrit (autre que Q). Puisque $\widehat{TQD} = 90°$, T, I, D sont alignés.
Soit R l'intersection de (AQ) et (BC). On sait que R est le point de contact du cercle A-exinscrit sur $[BC]$ d'après le lemme 1 (voir plus bas). En particulier M est le milieu de $[DR]$ (résultat classique de chasse aux longueurs, laissé au lecteur). De plus, DQR est rectangle en Q, donc le cercle de centre M et de rayon $MD = MP$ passe par D, Q, R (et donc par P) : $DPQR$ sont cocycliques.
Finalement, $\widehat{EQP} = \widehat{EQT} + \widehat{TQP}$. Mais par angle inscrit, $\widehat{EQT} = \widehat{EDT}$.
De plus,$\widehat{TQP} = 180° - \widehat{PQR} = \widehat{RDP} = \widehat{CDE}$ toujours par angle inscrit.
Finalement, $\widehat{EQP} = \widehat{CDE} + \widehat{EDT} = 90°$, comme voulu.
Notons que si au départ nous avions fait l'hypothèse $AB > AC$, nous aurions alors trouvé, pour des raisons de symétrie, $\widehat{PQF} = 90°$.

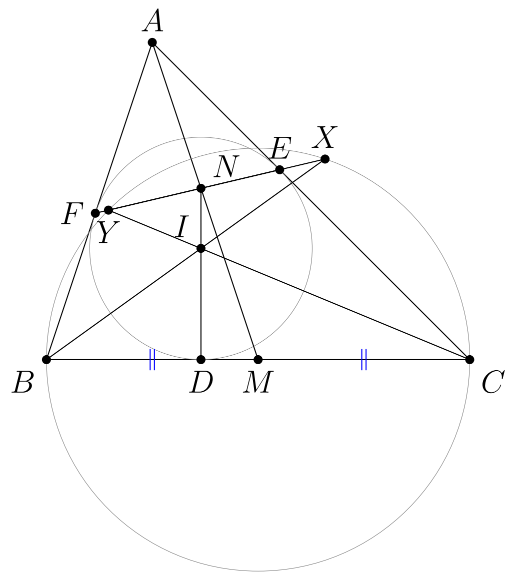
Solution de l'exercice 8



Le cercle inscrit à ABX est tangent à (BX) et (AX) en A_1 et B' respectivement. Le cercle inscrit à ACX est tangent à (CX) et (AX) en A_2 et C' respectivement. Alors les droites (A_2C') et (A_1B') sont parallèles.
Comme $(B'C')$ et (A_1A_2) sont des tangentes communes aux deux cercles, la droite (PQ) (qui en est l'axe radical) coupe $[B'C']$ et $[A_1A_2]$ en leurs milieux. En particulier (PQ) est parallèle à (A_2C') et (A_1B') et est équidistante de ces deux droites.
Soient L, M, N les milieux respectifs de $[AB], [AC], [AX]$. Notons que L, M ne dépendent pas de X, donc la droite (LM) ne dépend pas de X non plus. Soient S, T les intersections respectives de (A_1B') et (A_2C') avec (LM).
D'après le lemme iranien, (BU) est la bissectrice de $\widehat{XBA}$ donc c'est la bissectrice de $\widehat{CBA}$, en particulier (BU) ne dépend pas de X. Mais (LM) ne dépend pas de X non plus. Finalement, le point U ne dépend pas de X.
De même, V est sur la bissectrice intérieure de $\widehat{XCA}$ qui est la bissectrice extérieure de $\widehat{ACB}$, et donc le point V ne dépend pas de X non plus.
Enfin, soit W le milieu de $[UV]$. Puisque (PQ) est parallèle et équidistante à $(A_1B'), (A_2C')$: W est sur (PQ). Et puisque U, V sont indépendants de X, W est indépendant de X égale-

ment.
Donc la droite (PQ) passe bien par un point indépendant de X.

Solution de l'exercice 9



Puisque $[BC]$ est un diamètre, $\widehat{BYC} = \widehat{BXC} = 90°$. Donc d'après le lemme iranien, X, Y sont sur (EF).
Soit D le point de contact du cercle inscrit sur (BC). Alors N, I, D sont alignés (résultat classique dont la preuve est donnée dans le lemme 2, voir plus bas).
En appliquant plusieurs fois la loi des sinus :

$$\frac{NX}{NY} = \frac{IX}{IY} \cdot \frac{\sin \widehat{XIN}}{\sin \widehat{NIY}} = \frac{\sin \widehat{IYX}}{\sin \widehat{YXI}} \cdot \frac{\sin \widehat{XIN}}{\sin \widehat{NIY}}$$

Or, $\widehat{IYX} = \widehat{CBX} = \frac{1}{2}\widehat{CBA}$, $\widehat{YXI} = \widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$.
De plus, $\widehat{XIN} = \widehat{BID} = 90° - \widehat{CBI} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{CBA}$, et de même $\widehat{NIY} = 90° - \frac{1}{2}\widehat{ACB}$.
Finalement :

$$\begin{aligned}\frac{NX}{NY} &= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{CBA}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)} \cdot \frac{\sin\left(90° - \frac{1}{2}\widehat{CBA}\right)}{\sin\left(90° - \frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{CBA}\right)}{\sin\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)} \cdot \frac{\cos\left(\frac{1}{2}\widehat{CBA}\right)}{\cos\left(\frac{1}{2}\widehat{ACB}\right)} \\ &= \frac{\sin\left(\widehat{CBA}\right)}{\sin\left(\widehat{ACB}\right)} \\ &= \frac{AC}{AB}\end{aligned}$$

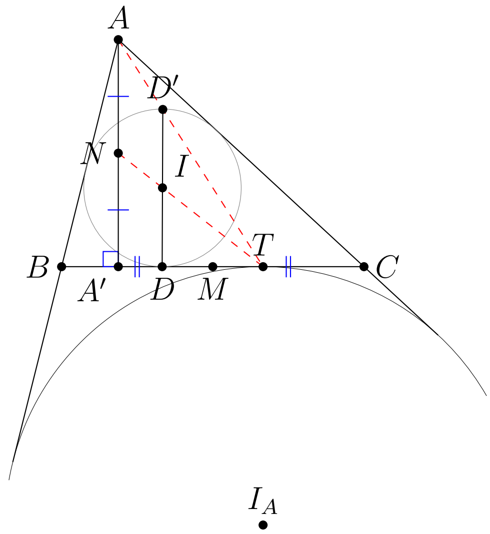
On a donc bien $\frac{NX}{NY} = \frac{AC}{AB}$.

Lemmes supplémentaires

Lemme 1. Soit ABC un triangle, de centre inscrit I, de centre A-exinscrit I_A. Soit D le point de tangence du cercle inscrit sur (BC), et T celui du cercle A-exinscrit. Soit A' le pied de la hauteur issue de A, et N le milieu de $[AA']$. Enfin, soit M le milieu de $[BC]$, et soit D' le point diamétralement opposé à D sur le cercle inscrit. Alors :

1. A, D', T sont alignés,
2. N, I, T sont alignés.

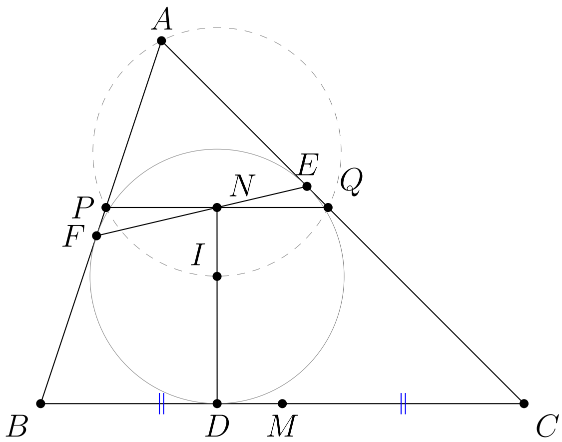
Démonstration. Par tangence, A est le centre de l'homothétie envoyant le cercle inscrit sur le cercle A-exinscrit, et cette homothétie envoie nécessairement D' sur T (les points “les plus hauts” des cercles), ce qui donne le point 1.



Pour le point 2, notons que (DD') et (AA') sont parallèles. On a donc une homothétie de centre T qui envoie D sur A' et D' sur A. Elle envoie donc I le milieu de $[DD']$ sur N le milieu de $[A'A]$. Donc T, I, N sont alignés. □

Lemme 2. Soit ABC un triangle de centre inscrit I, et soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit sur $(BC), (AC), (AB)$ respectivement. Soit M le milieu de $[BC]$. La droite (ID) coupe (EF) en un point N. Alors A, N, M sont alignés.

Démonstration. On définit la parallèle à (BC) passant par I qui coupe $(AB), (AC)$ en P, Q respectivement.



On souhaite montrer que A, N, M sont alignés, ce qui par parallélisme est équivalent à dire que N est le milieu de $[PQ]$.
Or, E, N, F sont les projections orthogonales de I sur $(AQ), (QP), (AP)$ respectivement. Elles sont alignées, donc par droite de Simson, I est sur le cercle circonscrit de APQ.
Comme (AI) est la bissectrice de $\widehat{PAQ}$, par théorème du pôle Sud, $IP = IQ$. Comme (IN) est perpendiculaire à (PQ), il découle que N est le milieu de $[PQ]$, comme voulu. □

– Cercles mixtilinéaires –

Définition 3. Soit ABC un triangle. Il existe un unique cercle tangent à $(AB), (AC)$ et tangent intérieurement au cercle circonscrit de ABC, appelé cercle A-mixtilinéaire.

Exercices

Exercice 10 (Propriétés du cercle mixtilinéaire - À RETENIR)
Soient E, F les points de contact du cercle A-mixtilinéaire sur $(AC), (AB)$ respectivement, soit T le point de contact sur le cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit. Soient S_B le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AC}$ ne contenant pas B, S_C le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas C et S_A le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A. Montrer les propriétés suivantes.

1. Les points T, F, S_C sont alignés, de même que T, E, S_B.
2. Le point I est le milieu du segment $[EF]$.
3. Le deuxième point d'intersection N de (TI) et du cercle circonscrit est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ contenant A.
4. Les quadrilatères $BFIT$ et $CEIT$ sont cycliques, et les droites (BS_B) et (CS_C) en sont les tangentes respectives en I.
5. Les droites $(EF), (BC)$ et (S_AT) sont concourantes.

Exercice 11 (BxMO 2023, Problème 3)
Soit ABC un triangle de centre inscrit I. La droite (AI) coupe le cercle circonscrit à ABC une deuxième fois en S. La perpendiculaire à (AI) passant par I intersecte $(BC), (CA), (AB)$ en D, E, F respectivement. Le cercle circonscrit à AEF intersecte le cercle circonscrit à ABC une

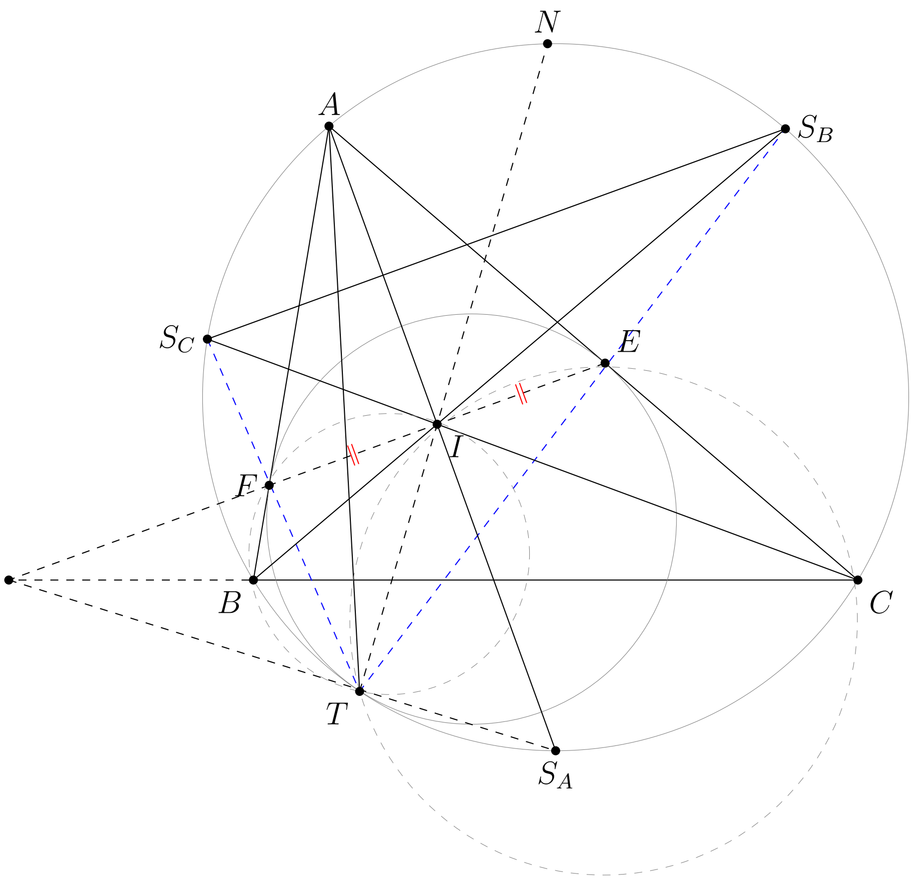
deuxième fois en P. Les droites (PS) et (BC) s'intersectent en Q.
Montrer que l'intersection des droites (IQ) et (DS) se situe sur le cercle circonscrit à ABC.

Exercice 12 (Taiwan TST 2014, Tour 3, Jour 1, Problème 3)
Soit ABC un triangle et M un point situé sur son cercle circonscrit. Les tangentes au cercle inscrit passant par M rencontrent (BC) en deux points X_1 et X_2.
Montrer que le cercle circonscrit à MX_1X_2 rencontre le cercle circonscrit à ABC une deuxième fois en le point de tangence du cercle A-mixtilinéaire.

Exercice 13 (IMO Shortlist 1999, G8)
Soit ABC un triangle, et X un point du cercle circonscrit situé sur l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A. Soient I_1, I_2 les centres inscrits de CAX, BAX respectivement. Montrer que le cercle circonscrit de XI_1I_2 intersecte le cercle circonscrit à ABC une deuxième fois en un point ne dépendant pas de X.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 10



1. Le point T est le centre de l'homothétie envoyant le cercle A-mixtilinéaire sur le cercle circonscrit. Cette homothétie envoie (AB) sur une parallèle à (AB) tangente au cercle circonscrit, elle est donc tangente au cercle circonscrit en S_C. Elle envoie alors F sur S_C, et de même elle envoie E sur S_B, d'où le résultat.

2. Par tangence, $AE = AF$ donc (AI) coupe $[EF]$ en son milieu. On souhaite donc montrer que E, I, F sont alignés. Nous savons par pôle Sud que B, I, S_B sont alignés, ainsi que C, I, S_C. D'après le théorème de Pascal dans l'hexagone $BACS_CTS_B$, on déduit que les points $(BA) \cap (S_CT) = F, (AC) \cap (TS_B) = E$ et $(BS_B) \cap (CS_C) = I$ sont alignés, comme voulu.
3. Dans le triangle TEF, on remarque que (TI) est la T-médiane, et (TA) est la T-symmédiane. En particulier, $\widehat{ATS_C} = \widehat{ATF} = \widehat{ETI} = \widehat{S_BTN}$. Cette égalité caractérise le fait que N est le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ contenant A (en effet le milieu de l'arc vérifie cette égalité, par angle inscrit, et par unicité c'est forcément N).
4. L'homothétie de centre T envoyant le cercle A-mixtilinéaire sur le cercle circonscrit envoie E sur S_C, F sur S_B, donc les droites (EF) et (S_BS_C) sont parallèles. Ainsi :

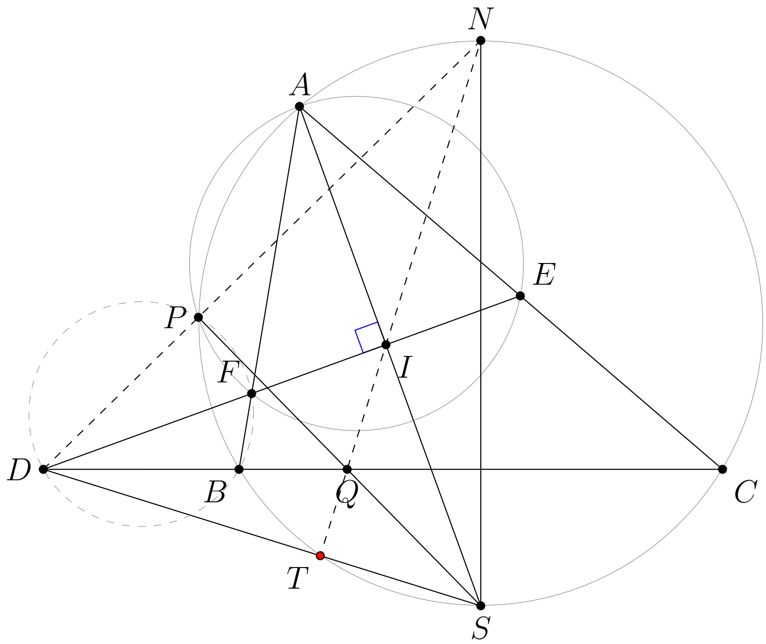
$$\widehat{IFT} = \widehat{EFT} = \widehat{S_BS_CT} = \widehat{S_BBT} = \widehat{IBT}$$

Par angle inscrit, B, F, I, T sont cocycliques. De même pour C, E, I, T.
Pour montrer que (CS_C) est tangente, remarquons que :

$$\widehat{S_CIF} = \widehat{CIE} = \widehat{CTE} = \widehat{CTS_B} = \widehat{NTS_C} = \widehat{ITF}$$

Par angle tangentiel, on a le résultat voulu.
5. D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone TS_AABCS_C, on déduit que les points $(TS_A) \cap (BC)$, $(S_AA) \cap (CS_C) = I$ et $(TS_C) \cap (AB) = F$ sont alignés. Autrement dit, puisque $(IF) = (EF)$, les droites $(EF), (BC), (TS_A)$ sont concourantes.

Solution de l'exercice 11



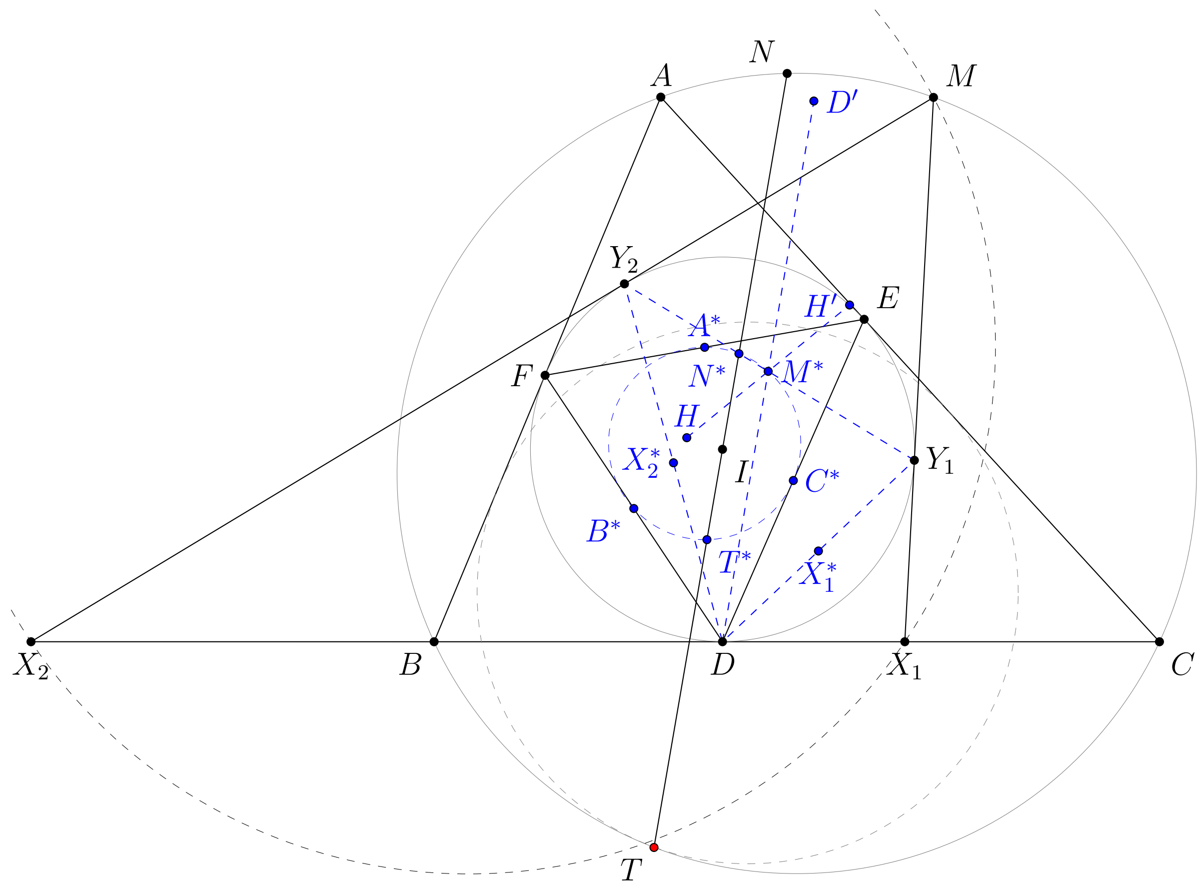
On sait que le point d'intersection de la droite (DS) et du cercle circonscrit à ABC (autre que S) est le centre du cercle A-mixtilinéaire (voir exercice 10, point 5), qu'on nomme T. Il s'agit

donc de montrer que T, I, Q sont alignés. Soit N le pôle Nord de ABC (milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ contenant A). On sait que les points T, I, N sont alignés (voir exercice 10, point 3). Il s'agit donc de montrer que les points N, Q, T sont alignés.
Montrons d'abord que D, P, N sont alignés. Pour ce faire, puisque $\widehat{SPN} = 90°$, il suffit de montrer que $\widehat{DPS} = 90°$. Or P est le point de Miquel du quadrilatère complet généré par $BCEF$. Il en vient que $PFBD$ est cyclique. Ainsi :

$$\widehat{PDI} = \widehat{PDF} = \widehat{PBF} = \widehat{PBA} = \widehat{PSA} = \widehat{PSI}$$

Donc par angle inscrit, $DPIS$ est cyclique, d'où $\widehat{DPS} = \widehat{DIS} = 90°$.
Donc D, P, N sont alignés, et (SQ) est perpendiculaire à (DN). De même, (DQ) est perpendiculaire à (NS), puisque (NS) est la médiatrice de $[BC]$. Il découle que Q est l'orthocentre de DNS, en particulier il est sur (NT) qui est la N-hauteur du triangle (puisque $[NS]$ est un diamètre du cercle).
On a donc bien montré que N, Q, T sont alignés, ce qui conclut.

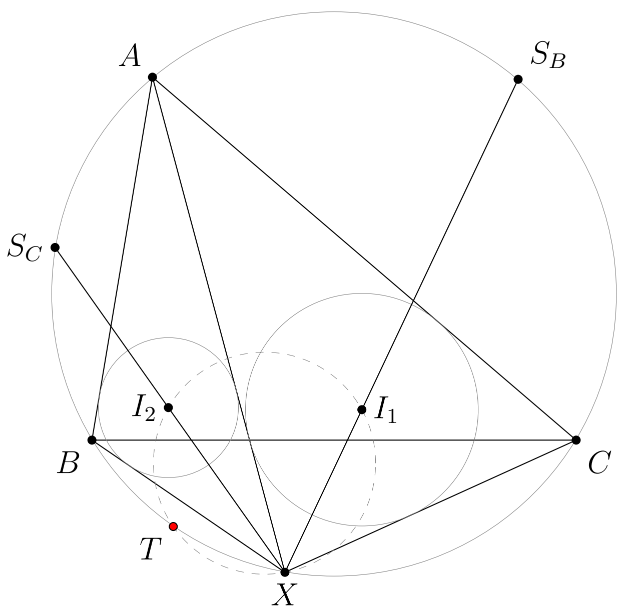
<u>*Solution de l'exercice 12*</u>



Soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit sur $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.
Soit N le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ contenant A. On sait alors que T, I, N sont alignés.
Notons Y_1, Y_2 les points de tangence de $(MX_1), (MX_2)$ avec le cercle inscrit. On effectue une

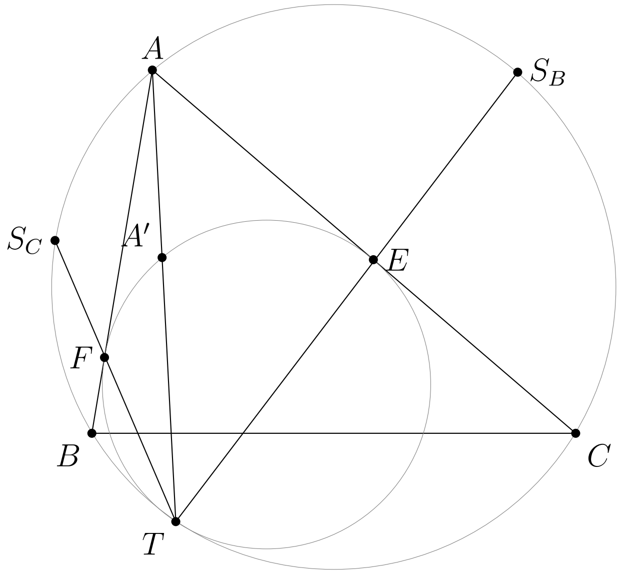
inversion par rapport au cercle inscrit, en notant avec une étoile l'image d'un point après inversion. On sait que A^*, B^*, C^* sont les milieux des côtés de DEF, et donc que le cercle circonscrit de ABC est envoyé sur le cercle d'Euler de DEF.
De plus, $\widehat{IAN} = 90°$ donc $\widehat{A^*N^*I} = 90°$. Mais N, I, T sont alignés donc N^*, I, T^* aussi : il découle que $\widehat{A^*N^*T^*} = 90°$, autrement dit T^*, A^* sont diamétralement opposé sur le cercle d'Euler de DEF.
Comme $(MY_1), (MY_2)$ sont tangentes au cercle inscrit, M^* est le milieu de $[Y_1Y_2]$, et il est sur le cercle d'Euler de DEF.
Par tangence de (X_1Y_1) et (X_1D), X_1^* est le milieu de $[DY_1]$. De même, X_2^* est le milieu de $[DY_2]$.
Montrons à présent que T^*, M^*, X_1^*, X_2^* sont cocycliques. Soit H l'orthocentre de DEF. Une homothétie de centre D et de rapport 2 envoie T^*, M^*, X_1^*, X_2^* sur H, D', Y_1, Y_2 (où D' désigne simplement l'image de M^*). En effet, T^* est diamétralement opposé à T^* sur le cercle d'Euler, c'est donc le milieu de $[DH]$.
Mais alors une homothétie de centre M^* et de rapport -1 envoie H, D', Y_1, Y_2 sur H', D, Y_2, Y_1, où H' est le symétrique de H par rapport à M^*, autrement dit H' est l'image de M^* par une homothétie de centre H et de rapport 2. Comme M^* est sur le cercle d'Euler, on en déduit que H' est sur le cercle circonscrit à DEF, c'est-à-dire le cercle inscrit (l'homothétie de centre H de rapport 2 envoie le cercle d'Euler sur le cercle circonscrit à DEF).
Finalement, H', D, Y_2, Y_1 sont cocycliques. Les homothéties préservant les cercles, T^*, M^*, X_1^*, X_2^* sont cocycliques. Les inversions préservant les droites-cercles (et M, X_1, X_2 n'étant pas alignés), on en déduit que les points T, M, X_1, X_2 sont cocycliques, comme souhaité.

Solution de l'exercice 13



On va montrer que le point fixe en question est T le point de contact du cercle A-mixtilinéaire sur le cercle circonscrit.
Soient S_B, S_C les milieux des arcs $\widehat{CA}, \widehat{AB}$ ne contenant pas B, C respectivement. Par pôle

Sud, X, I_1, S_B sont alignés, ainsi que X, I_2, S_C.
D'abord, les points A, T, S_B, S_C sont harmoniques. En effet, en notant E, F les points de contact du cercle A-mixtilinéaire sur $(AC), (AB)$ respectivement, et en notant A' l'intersection (autre que T) de (TA) avec le cercle A-mixtilinéaire, on a la configuration suivante :



Par tangence on sait alors que A', T, E, F sont harmoniques. Mais l'homothétie de centre T envoyant le cercle mixtilinéaire sur le cercle circonscrit envoie alors A', T, E, F sur A, T, S_B, S_C, ces derniers sont donc harmoniques.
En particulier on a $\dfrac{TS_B}{TS_C} = \dfrac{AS_B}{AS_C} = \dfrac{I_1S_B}{I_2S_B}$. En effet par pôle Sud, $S_BA = S_BI_1, S_CA = S_CI_2$. De plus, par angle inscrit $\widehat{TS_CI_2} = \widehat{TS_BI_1}$.
Il suit que TS_BI_1 est semblable à TS_CI_2, donc T est le centre de la similitude directe envoyant I_1 sur I_2 et S_B sur S_C. C'est donc le point de Miquel du quadrilatère complet engendré par $I_1I_2S_CS_B$. Il suit que T, X, I_1, I_2 sont cocycliques. Comme T ne dépend pas de X, on a bien le résultat voulu.

3 Comment manier une hypothèse d'angle ? (Martin)

L'objectif du présent TD est de se concentrer sur des problèmes de géométrie au caractère repoussant : des problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles. Pourquoi cela est repoussant ? Parce que bien souvent il n'est pas évident de tracer directement une figure exacte. Super, on peut donc se débarasser de son compas et de son équerre et réfléchir complètement à main levée ? Rien n'est moins sûr ! Bien souvent dans ce genre de problème, c'est au contraire en cherchant comment tracer la figure exacte que l'on progresse dans sa résolution. En effet, pour tracer la figure, on est amené à chercher diverses propriétés sur les points présentés, à rajouter soi-même des objets géométriques, à effectuer des transformation, à reconnaître des configurations classiques... Vous l'aurez compris, le travail de recherche pour une construction exacte est déjà un travail de résolution de l'exercice.

Il est à penser, au vu des IMO des années précédentes, que de tels problèmes vont apparaître de plus en plus souvent, une raison de plus de traiter ce genre de problèmes en particulier.

En gage de ma bonne foi, toutes les figures du présent corrigé ont été tracées de façon exacte.

Quelques conseils

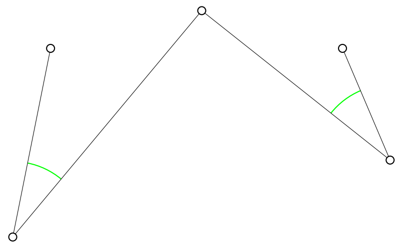
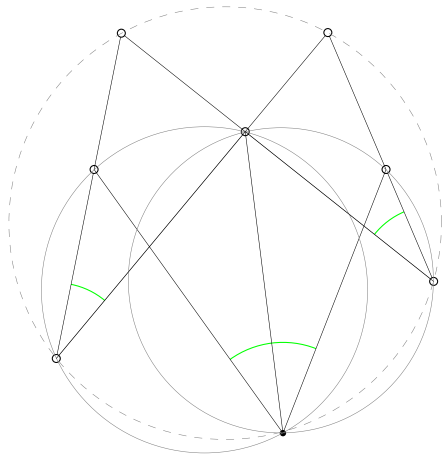
Pour traiter les problèmes dans lesquels certains points sont définis par des égalités d'angles, voici quelques conseils :

- Chercher comment tracer la figure exacte. Bien souvent, les idées déployées pour tracer la figure exacte sont également utiles pour la résolution de l'exercice. On va par exemple naturellement introduire des points intermédiaires, des cercles supplémentaires, des droites nouvelles et ces objets révèlent souvent les informations qui étaient cachées derrière la condition d'angles.

- Manipuler algébriquement l'hypothèse donnée. En rajoutant une quantité de chaque côté de l'équation, en soustrayant l'équation à $180°$...l'objectif est de transformer l'hypothèse d'angle donnée en une hypothèse géométrique.

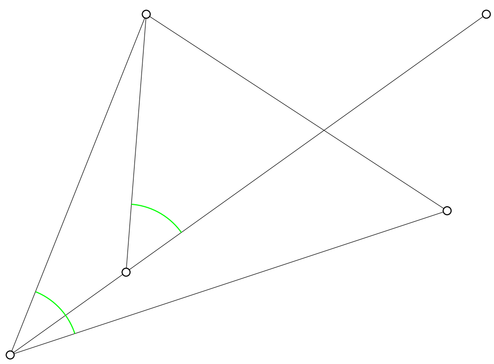
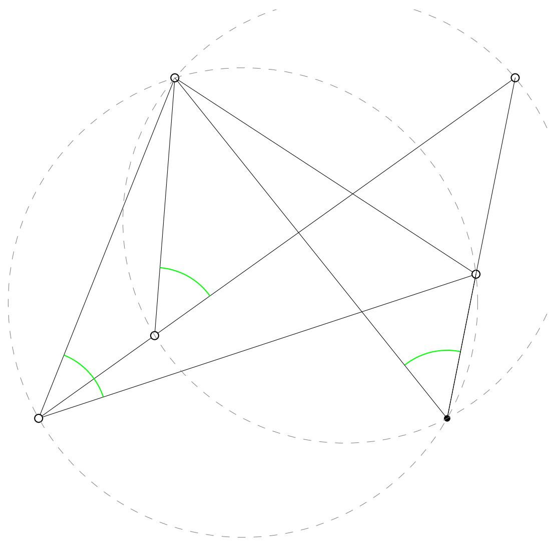
- **Introduire des points intermédiaires.** Voyons deux exemples.

  Supposons tout d'abord qu'on se trouve dans la situation de gauche :

Deux angles de même mesure concernent deux segments disjoints. On peut compléter la figure pour avoir un cercle dont un arc est couvert par les deux angles (cercle en pointillé de la figure de droite) ou on peut chercher à introduire un point intermédiaire qui transporte l'information d'un angle à l'autre. Un point intermédiaire est par exemple le second point d'intersection des deux cercles portant les deux angles verts (cercles noirs de la figure de droite. L'introduction d'un tel point peut également permettre, dans certains cas, de construire la figure.

Regardons à présent la situation suivante

On désire construire, étant donné un triangle et une droite issue de l'un des sommets, un point sur la droite définissant un angle de même mesure que l'un des angles du triangle (voir situation de gauche). Un point intermédiaire intéressant est, encore une fois, le second point d'intersection des deux cercles circonscrits portant les deux arcs. Ici, en construisant d'abord le point d'intermédiaire, on peut construire de façon exacte le point désiré sur la droite : en traçant le cercle circonscrit au triangle puis en traçant le cercle passant par le point intermédiaire et les deux points ayant l'ordonnée la plus grande (voir les cercles en pointillé sur la figure de droite).

L'introduction de points intermédiaire est souvent bénéfique, et **un bon point intermédiaire est souvent un point appartenant à plusieurs cercles différents**, car il "transporte" d'une certaine manière les diverses égalités d'angles.

En présence d'une hypothèse d'égalité de deux angles, un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle, comme cela a été montré dans les deux exemples précédents.

Penser point intermédiaire !

- Rechercher les configurations connues faisant intervenir des égalités d'angles (configuration de la symédiane par exemple). Quelques problèmes ne sont que des déguisements de certaines configuration par une redéfinition des divers points.

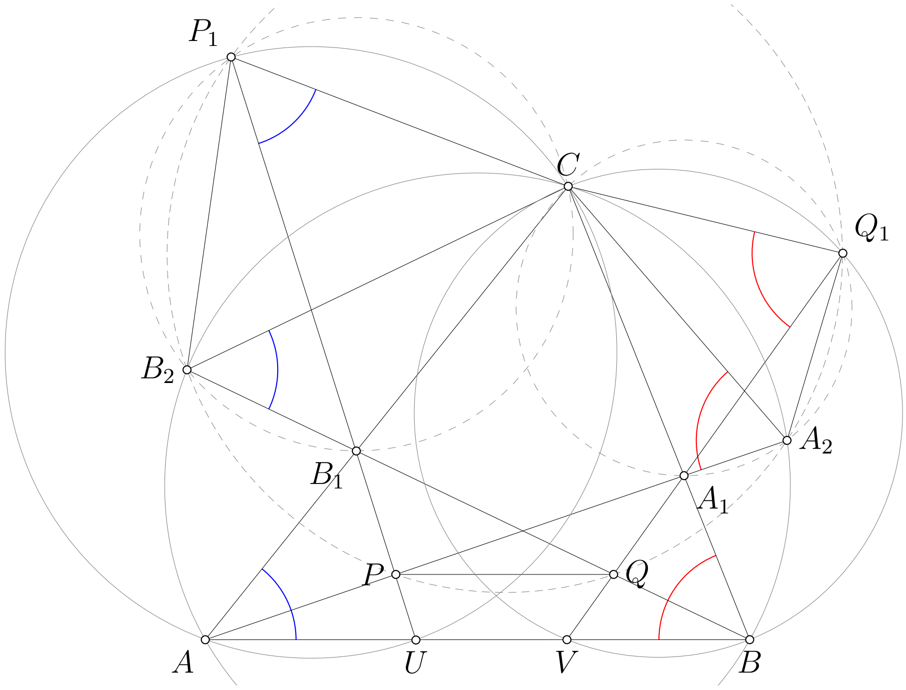
- L'inversion permet d'échanger des points et donc d'échanger des angles. Certaines hypothèses d'angles compliquées admettent une version analogue simple dans la figure inversée.

Un exemple

Voyons un exemple concret d'introduction du point intermédiaire dans un exercice.

Exemple 1.
(IMO 2019 P2) Soit ABC un triangle et soient A_1 et B_1 deux points appartenant respectivement aux côtés $[BC]$ et $[CA]$. Soient P et Q deux points appartenant respectivement aux segments $[AA_1]$ et $[BB_1]$, de telle sorte que les droites (PQ) et (AB) soient parallèles. Soit P_1 un point situé sur la droite (PB_1) tel que B_1 se trouve situé entre les points P et P_1 et tel que $\widehat{PP_1C} = \widehat{BAC}$. Soit Q_1 un point situé sur la droite (QC_1) tel que C_1 se trouve situé entre les points Q et Q_1 et tel que $\widehat{QQ_1C} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points P, Q, P_1 et Q_1 sont cocycliques.

Démonstration.



On commence par tracer une figure exacte. La condition d'angle nous fait naturellement penser au théorème de l'angle inscrit. A cet effet, on introduit U et V les points d'intersection respectifs des droites (PB_1) et (A_1Q) avec le côté AB.

D'après le théorème de l'angle inscrit, les points P_1, C, U et A sont cocycliques, ce qui nous permet de construire le point P_1. De même on est capable de construire le point Q_1.

Penser point intermédiaire. Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle

Ecoutons notre cours (et notre coeur) et introduisons le point intermédiaire correspondant au second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle

Ici, il s'agit du point intermédiaire B_2, second point d'intersection des cercles (ABC) et (B_1P_1C). Par théorème de l'angle inscrit : $\widehat{B_1B_2C} = \widehat{B_1P_1C} = \widehat{CAB} = \widehat{BB_2C}$ donc les points B_2, B_1 et B sont alignés.

On introduit de même le point A_2, second point d'intersection des cercles (ABC) et (CA_1Q_1) et on montre de même que le point A_2 est sur la droite (AA_1).

On s'empresse de remarquer, puisqu'on a préalablement tracé le cercle supposé passer par les points P, Q, P_1 et Q_1, que les points A_2 et B_2 appartiennent également à ce cercle. Or on a

$$\widehat{QPA_2} = \widehat{BAA_2} = \widehat{BB_2A_2} = \widehat{QB_2, A_2}$$

donc les points P, Q, A_2 et B_2 sont cocycliques.

D'autre part,

$$\widehat{B_2P_1P} = \widehat{B_2P_1B_1} = \widehat{B_2CB_1} = \widehat{B_2BA} = \widehat{B_2QP}$$

donc le point P_1 appartient au cercle passant par les points B_2, P, Q et A_2. On montre de même que c'est aussi le cas du point Q_1, ce qui termine la preuve. □

Exercices

Exercice 1
(G2 2018) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Exercice 2
(USAMO 2021 P1) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Exercice 3
(IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Exercice 4
(USA TSTST 2023 P1) Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Soient R et S deux points respectivementsur les segments $[GB]$ et $[GC]$ et satisfaisant

$$\widehat{ABS} = \widehat{ACR} = 180° - \widehat{BGC}.$$

Montrer que $\widehat{RAS} + \widehat{BAC} = \widehat{BGC}$.

Exercice 5
(Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Exercice 6
(IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Exercice 7
(IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe

un point T à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD, TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE), et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.

Exercice 8
(Balkan MO 2021 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$. Soit ω un cercle passant par B et C et on suppose que le point A se trouve à l'intérieur du cercle ω. Soient X et Y des points de ω tels que $\widehat{BXA} = \widehat{AYC}$. On suppose que X et C sont situés de part et d'autre de la droite (AB) et que Y et B sont situés de part et d'autre de la droite (AC). Montrer que, lorsque X et Y varient sur le cercle ω, la droite (XY) passe par un point fixe.

Exercice 9
(EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Exercice 10
(IMO SL 2016 G6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe vérifiant $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} < 90°$. Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ coupent respectivement le segment $[AC]$ en les points E et F et se coupent entre elles au point P. Soit M le milieu du segment $[AC]$. Soit ω le cercle circonscrit au triangle BPD. Les segments $[BM]$ et $[DM]$ coupent ω respectivement aux points X et Y. Soit Q le point d'intersection des droites (XE) et (YF). Montrer que les droites (PQ) et (AC) sont perpendiculaires.

Exercice 11
(IMO 2014 P3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

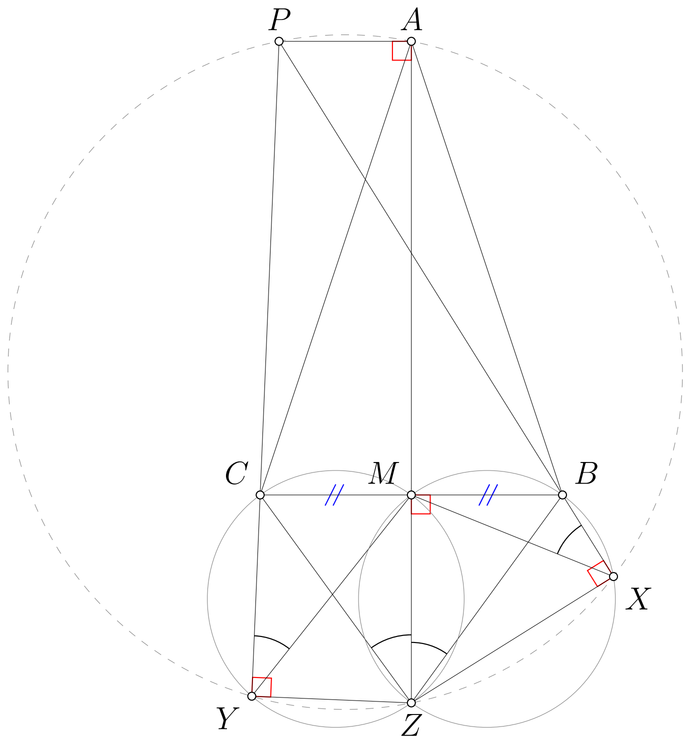
Exercice 12
(IMO 2018 P6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Soit X un point à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. On suppose que $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ et $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Montrer que $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

Solutions

Exercice 1
(G2 2018) Soit ABC un triangle tel que $AB = AC$ et soit M le milieu du segment $[BC]$. Soit P

un point vérifiant $PB < PC$ et tel que les droites (AP) et (BC) sont parallèles. Soient X et Y des points appartenant respectivement aux droites (PB) et (PC) de telle sorte que le point B est sur le segment $[PX]$, le point C est sur le segment $[PY]$ et $\widehat{PXM} = \widehat{PYM}$. Montrer que le quadrilatère $APXY$ est cyclique.

Solution de l'exercice 1



Le problème est le suivant : étant donné le point X placé sur la droite (PB), comment construire le point Y. Une première réponse serait de dire "étant donné l'énoncé, je n'ai qu'à tracer le cercle (APX) et prendre le point d'intersection de ce cercle avec la droite (PC)", mais cela ne nous apporterait pas beaucoup d'informations.

Penser point intermédiaire ! On va rajouter un point Z intermédiaire, qui vérifierait $\widehat{CZM} = \widehat{CYM}$ et $\widehat{MZB} = \widehat{MXB}$. **On sait qu'un point intermédiaire souvent utile est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'hypothèse d'angle.**

Ici, on considère donc le point Z, second point d'intersection des cercles (MXB) et (MYC). On le note Z. Puisque $\widehat{MZB} = \widehat{MXB} = \widehat{MYC} = \widehat{MZC}$, la droite (MZ) est la médiane et la bissectrice issue du sommet Z dans le triangle BZC. Donc le point Z est sur la médiatrice du segment $[BC]$.

Pour construire la figure on procède donc comme suit : on choisit un point Z sur la médiatrice du segment $[BC]$, on choisit X comme le second point d'intersection du cercle (ZMB) et de la droite (PB) et on construit le point Y de la même façon.

On peut imaginer que le point Z va nous servir dans la démonstration. Comme l'angle $\widehat{ZMB}$ est droit et que les points M, B, X et Z sont cocycliques, $\widehat{ZXB} = 90°$. De même, $\widehat{ZYC} =$

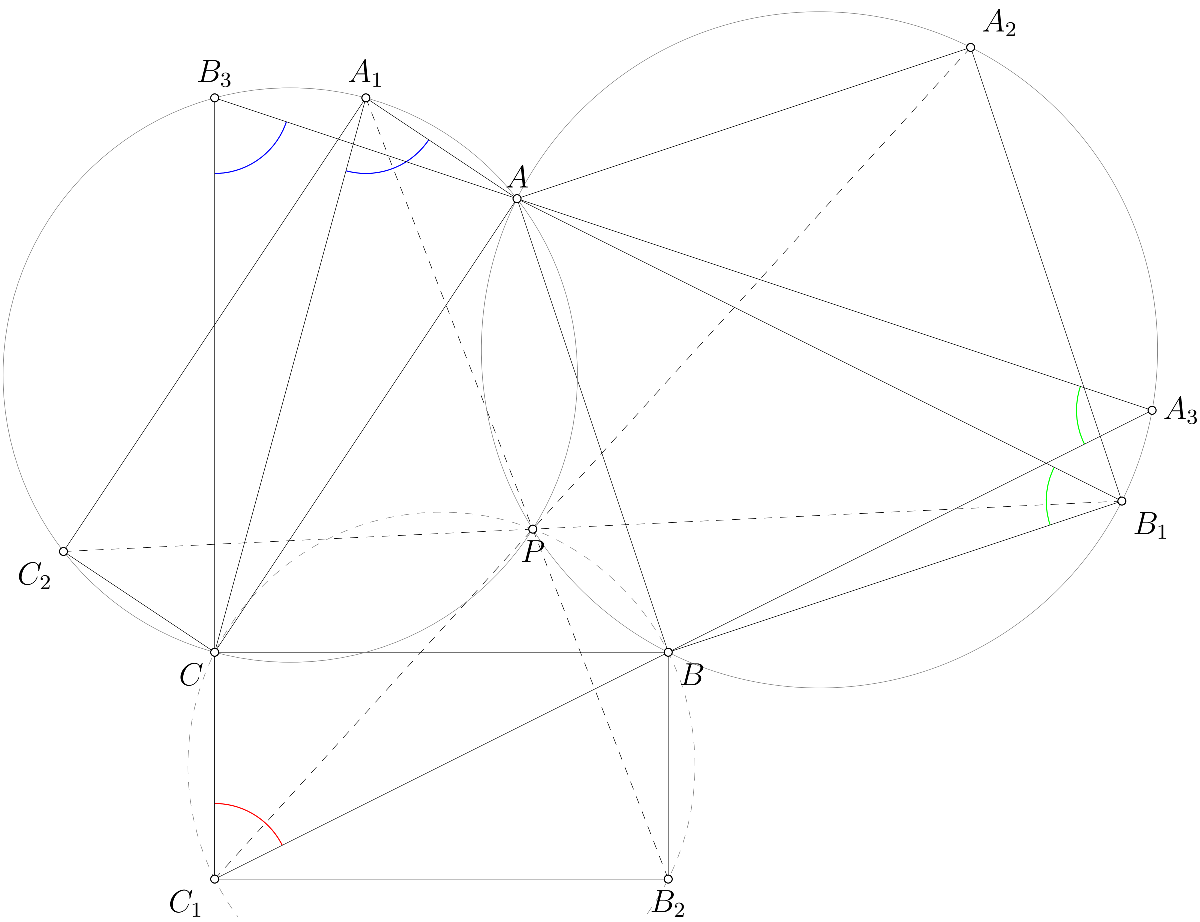
$90°$. les points A, X et Y sont donc suer le cercle de diamètre $[PZ]$ donc en particulier les points P, A, X, Z et Y sont cocycliques.

Exercice 2
(USAMO 2021 P1) Soit ABC un triangle. On construit à l'extérieur du triangle ABC les rectangles BB_2C_1C, CC_2A_1A et AA_2B_1B. On suppose que

$$\widehat{BC_1C} + \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180°$$

Montrer que les droites $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2) sont concourantes.

Solution de l'exercice 2



Ici aussi, comprendre comment construire la figure permet de terminer rapidement l'exercice.

Le fait que la somme des angles vaut $180°$ nous fait penser à un triangle. On doit donc essayer de créer un triangle ayant les $\widehat{BC_1C}, \widehat{CA_1A}$ et $\widehat{AB_1B}$. Pourcela on part du rectangle CBB_2C_1 et du rectangle AA_1C_2, C. On souhaite construire un point B_3 sur la droite (C_1C) tel que $\widehat{CB_3A} = \widehat{CA_1A}$. Le théorème de l'angle inscrit est tout indiqué, on choisit B_3 comme le second point d'intersection de la droite (CC_1) et du cercle (AA_1C_2C). On Prolonge ensuite les droites (B_3A) et (BC_1) pour obtneir un point A_3 vérifiant $\widehat{AA_3B} = 180° - \widehat{BC_1C} - \widehat{CA_1A}$. Pour construire le point B_1, on utilise encore une fois le théorème de l'angle inscrit et le point B_1 est le point d'intersection du cercle (AA_3B) et de la perpendiculaire en B à la droite (AB). On peut alors construire A_2.

Lorsque l'on trace les trois droites qui doivent concourir, on s'aperçoit qu'elles se coupent sur le second point d'intersection des deux cercles (AA_1C_2C) et (AA_2B_1B). On note P ce second point d'intersection.

La symétrie du problème suggère que le point P appartient aussi au cercle (CBB_2C_1). Or

$$\widehat{CPB} = 360° - \widehat{BPA} - \widehat{CPA} = 180° - \widehat{BPA} + 180° - \widehat{CPA} = \widehat{CA_1A} + \widehat{AB_1B} = 180° - \widehat{CC_1B}$$

comme voulu. On montre ensuite que P appartient aux trois droites demandées. Or

$$\widehat{A_1PB_2} = \widehat{A_1PC} + \widehat{CPB_2} = 90° + 90° = 180°$$

donc le point P appartient à la droite (A_1B_2). On procède de même pour les droites (C_2B_1) et (C_1A_2).

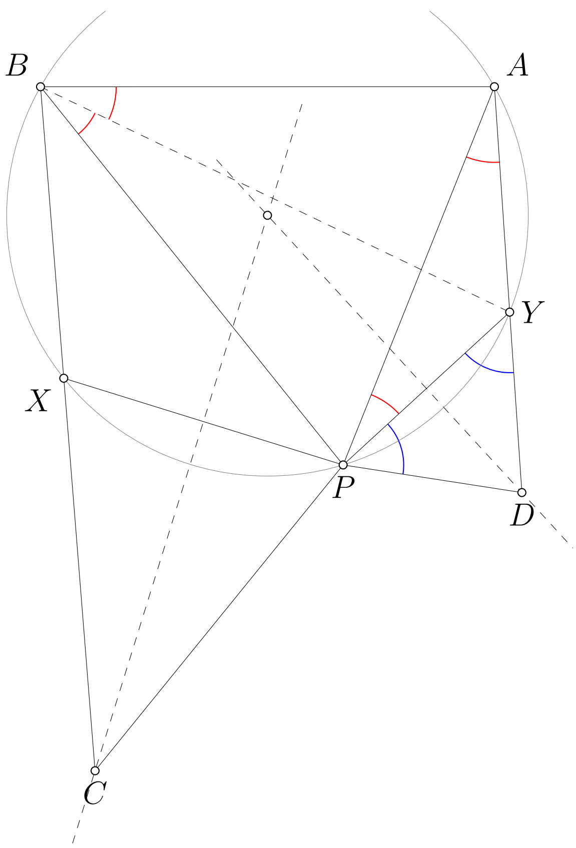
Remarque : On aurait également pu tracer les cercles circonscrits aux rectangles données dans l'espoir d'introduire un point intermédiaire intéressant.

Exercice 3
(IMO 2020 P1) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe et soit P un point à l'intérieur du quadrilatère. On suppose que les égalités de rapports suivantes sont vérifiées :

$$\widehat{PAD} : \widehat{PBA} : \widehat{DPA} = 1 : 2 : 3 = \widehat{CBP} : \widehat{BAP} : \widehat{BPC}$$

Montrer que les trois droites suivantes sont concourrantes : la bissectrice de l'angle $\widehat{ADP}$, la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ et la médiatrice du segment $[AB]$.

Solution de l'exercice 3



Résoudre l'exercice consiste à trouver comment tracer la figure.

Pour cela on prend le problème à l'envers en notant que l'angle $\widehat{PBA}$ détermine la position du point D. Ceci nous conduit à construire le triangle PBA puis construire les points C et D à partir de ce triangle. Pour construire le point D, il faut déterminer l'angle $\widehat{PBA} = 2\widehat{PAD}$. Ceci conduit à couper l'angle $\widehat{PBA}$ en deux et à tracer sa bissectrice.

Supposons le point D construit. Le point Y d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{PBA}$ avec la droite (AD) vérifie par hypothèse

$$\widehat{YAP} = \widehat{DAR} = \frac{1}{2}\widehat{PBA} = \widehat{YBA}$$

donc les points Y, A, B et P sont cocycliques. Le point Y est donc le pôle Sud du sommet B dans le triangle ABP. A l'inverse, le point D appartient donc à la droite (AY) avec Y le pôle Sud du sommet B dans le triangle PAB. On a alors

$$\widehat{DPY} = \widehat{DPA} - \widehat{YPA} = 3\widehat{PAD} - \widehat{PAD} = 2\widehat{PAD} = \widehat{PYD}$$

Le triangle PDY est donc isocèle en D. Le point D est donc le point d'intersection de la droite (AY) et de la médiatrice du segment $[PY]$. La bissectrice de l'angle $\widehat{PDA}$ est donc la médiatrice du segment $[PY]$.

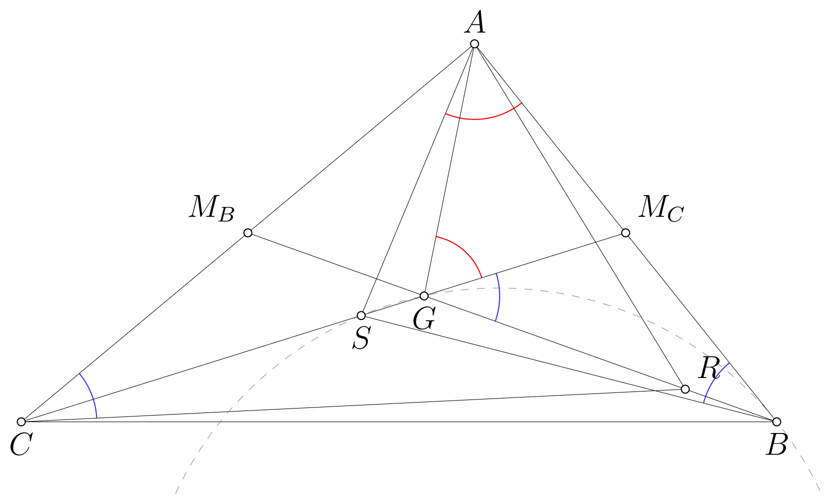
De même la bissectrice de l'angle $\widehat{PCB}$ est la médiatrice du segment $[PX]$, où X est le pôle Sud du sommet A dans le triangle APB. Les bissectrices des angles $\widehat{PCB}$ et $\widehat{PDA}$ se coupent donc au point O le centre du cercle circonscrit au triangle APB. Celui-ci appartient bien à la médiatrice $[AB]$.

Exercice 4
(USA TSTST 2023 P1) Soit ABC un triangle et G son centre de gravité. Soient R et S deux points respectivementsur les segments $[GB]$ et $[GC]$ et satisfaisant

$$\widehat{ABS} = \widehat{ACR} = 180° - \widehat{BGC}.$$

Montrer que $\widehat{RAS} + \widehat{BAC} = \widehat{BGC}$.

Solution de l'exercice 4



Soit M_C le milieu du segment $[AB]$ et M_B le milieu du segment $[AC]$. On observe

$$\widehat{M_CBG} = \widehat{M_CBS} - \widehat{GBS} = 180° - \widehat{BGC} - \widehat{GBS} = \widehat{GSB}.$$

Ainsi, la droite (M_CB) est tangente au cercle circonscrit au triangle GBS. Par puissance d'un point, on déduit que

$$M_CG \times M_CS = M_CB^2 = M_CA^2.$$

Ainsi, par réciproque de la puissance d'un point, la droite (AM_C) est tangente au cercle circonscrit au triangle AGS. On déduit par théorème de l'angle tangentiel que

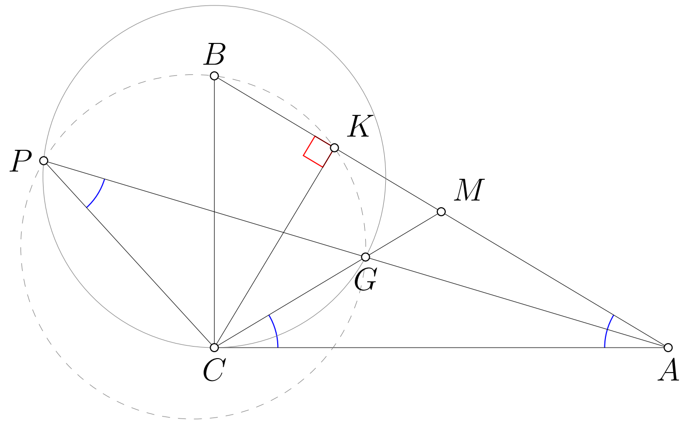
$$\widehat{SAB} = \widehat{SAG} + \widehat{GAM_C} = \widehat{SAG} + \widehat{M_CSA} = \widehat{AGM_C}.$$

De la même façon, on montre que $\widehat{CAG} = \widehat{AGM_B}$. Ainsi

$$\widehat{ABC} + \widehat{RAS} = \widehat{CAR} + \widehat{BAS} = \widehat{AGM_B} + \widehat{AGM_C} = \widehat{M_CGM_B} = \widehat{BGC}.$$

Exercice 5
(Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Solution de l'exercice 5



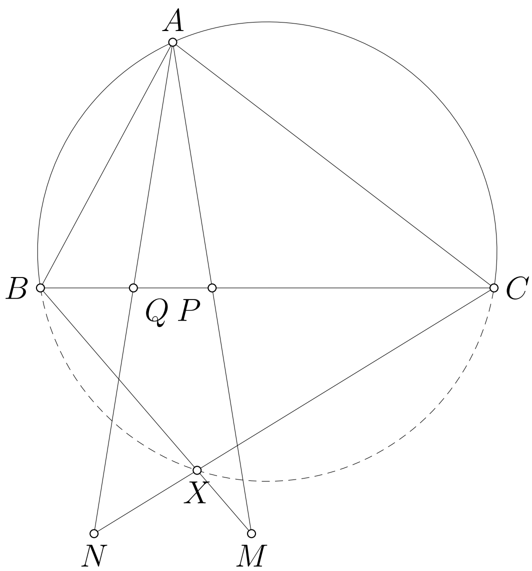
Commençons par tracer la figure et tracer de façon exacte le point P. Pour cela, on cherche un angle plus commode qui vaut $\widehat{BAC}$ pour appliquer le théorème de l'angle inscrit. La médiane (CG) étant déjà présente sur la figure, on la prolong pour qu'elle coupe le segment $[AB]$ au poin M et comme le triangle ABC est rectangle en C, $\widehat{BAC} = \widehat{MCA}$. La droite (AC) est donc tangente au cercle circonscrit au triangle PCG. On peut tracer le cercle tangent à la droite (AC) passant par G, donc on peut tracer le point P.

Une fois la figure tracée, on peut conjecturer que le point K d'intersection des deux cercles est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On note K le pied de la hauteur et on montre que K appartient au cercle circonscrit au triangle BPG.

Utilisons les informations que nous a apportées notre construction : d'après la puissance du point A par rapport au cercle (PCG), $AC^2 = AG \cdot AP$ et on sait que $AC^2 = AK \cdot AB$. On a donc $AB \cdot AK = AG \cdot AP$ et l'on peut conclure avec la réciproque de la puissance d'un point.

Exercice 6
(IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Solution de l'exercice 6



Ici, il s'agit de réinterpréter les égalités qui sont données. Puisque $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$, la droite (AB) est tangente au cercle circonscrit au triangle APC. Le centre du cercle ACP s'obtient comme le point d'intersection de la perpendiculaire à la droite (AB) passant par A et la médiatrice du segment $[AC]$. Si on peut tracer le cercle APC, on peut tracer le point P. De même on trace le point Q. On peut alors tracer le reste de la figure. On note X le point d'intersection des droites (BM) et (CN).

Les égalités d'angles nous apportent que les triangles ABC, PBA et QCA sont semblables. En particulier on déduit que

$$\frac{NQ}{QC} = \frac{AQ}{CQ} = \frac{AB}{AC} = \frac{BP}{AP} = \frac{BP}{PM}$$

et puisque $\widehat{BPM} = 180° - \widehat{BPA} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{NQC}$, les triangles BPM et NQC sont semblables.

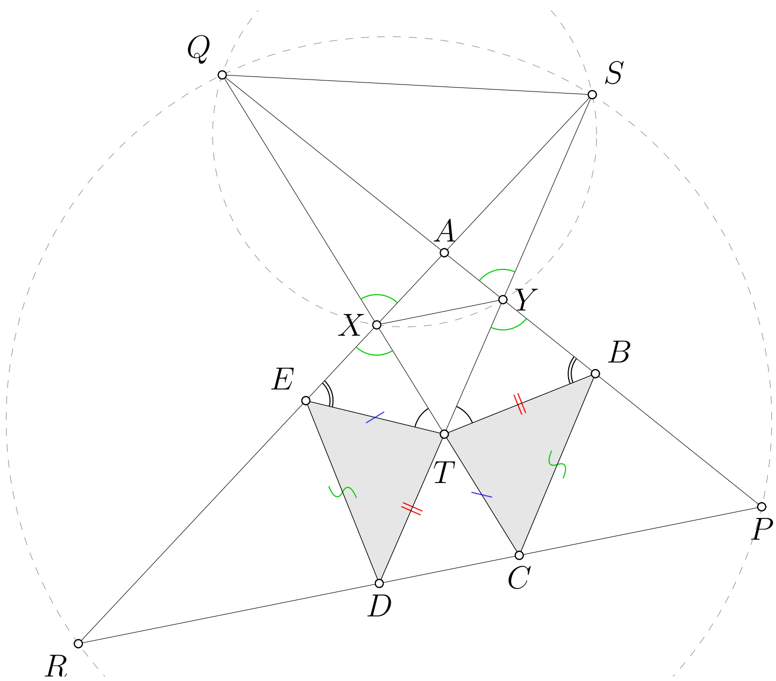
On a donc

$$\widehat{XBC} + \widehat{XCB} = \widehat{MBP} + \widehat{NCQ} = \widehat{MBP} + \widehat{BMP} = \widehat{BPA} = \widehat{BAC}$$

donc $\widehat{BXC} = 180° - \widehat{BAC}$ et les points A, B, C et X sont cocycliques.

Exercice 7
(IMO 2022 P4) Soit $ABCDE$ un pentagone convexe tel que $BC = DE$. On suppose qu'il existe un point T à l'intérieur de $ABCDE$ tel que $TB = TD, TC = TE$ et $\widehat{ABT} = \widehat{AET}$. On note P et Q les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (CT) avec la droite (AB) ; on suppose que les points P, B, A et Q sont alignés dans cet ordre. De même, on note R et S les points d'intersection respectifs des droites (CD) et (DT) avec la droite (AE), et on suppose que les points R, E, A et S sont eux aussi alignés dans cet ordre. Démontrer que les points P, S, Q et R sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7



Pour tracer la figure, on commence par le segment $[AT]$. On prend un point B et on note B' son symétrique par rapport au segment $[AT]$. On peut alors choisir E sur le cercle circonscrit au triangle $AB'T$. On choisit ensuite un point C sur le cercle de centre T et de rayon TE. Le point D sera alors le point d'intersection du cercle de centre T de rayon TB avec le cercle de centre E de rayon BC.

Passons désormais à la résolution de l'exercice. Les triangles ETD et CTB sont isométriques d'après les conditions de longueur. On déduit que

$$\widehat{QTE} = 180° - \widehat{ETD} - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{BTC} - \widehat{DTC} = \widehat{STB}$$

Si on note X et Y les points d'intersection respectivement de (QT) avec (AE) et de (ST) avec (AB), alors on a

$$\widehat{EXT} = 180° - \widehat{XET} - \widehat{XTE} = 180° - \widehat{TYB} - \widehat{YTB} = \widehat{TYB}$$

de sorte que $\widehat{QXS} = \widehat{QYS}$ et les points Q, X, Y et S sont cocycliques.

D'autre part, puisque les triangles EXT et BYT partagent les mêmes angles deux à deux, il sont semblables et

$$\frac{XT}{YT} = \frac{ET}{BT} = \frac{TC}{TD}$$

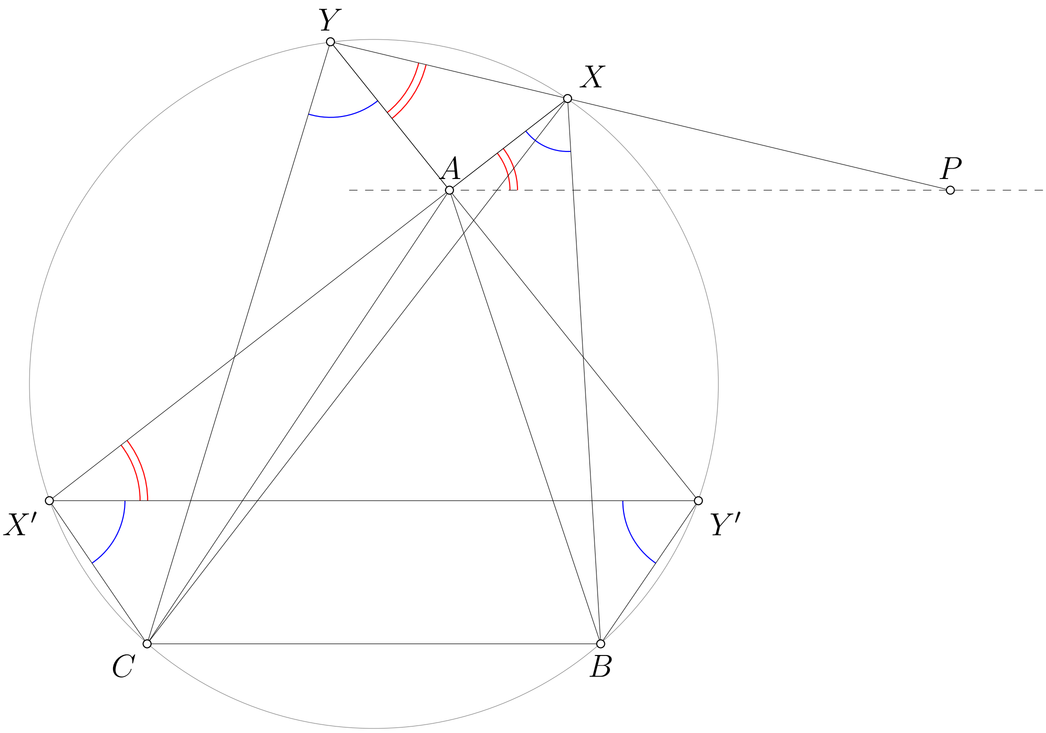
de sorte que d'après Thalès, les droites (XY) et (CD) sont parallèles.
On peut alors conclure

$$\widehat{PQS} = \widehat{YQS} = \widehat{YXS} = \widehat{YXA} = \widehat{PRA} = \widehat{PRS}$$

donc les points P, R, Q et S sont cocycliques.

Exercice 8
(Balkan MO 2021 P1) Soit ABC un triangle dans lequel $AB < AC$. Soit ω un cercle passant par B et C et on suppose que le point A se trouve à l'intérieur du cercle ω. Soient X et Y des points de ω tels que $\widehat{BXA} = \widehat{AYC}$. On suppose que X et C sont situés de part et d'autre de la droite (AB) et que Y et B sont situés de part et d'autre de la droite (AC). Montrer que, lorsque X et Y varient sur le cercle ω, la droite (XY) passe par un point fixe.

Solution de l'exercice 8
Tout d'abord, nous allons chercher à tracer une figure exacte, en espérant que les raisonnements mis en oeuvre pour le tracé nous éclairerons sur la dynamique de la figure.



Pour tracer la figure, on cherche à tirer profit de l'hypothèse que les points X, B, C et Y sont sur un même cercle, à l'aide du théorème de l'angle inscrit. Supposons la figure tracée. On prolonge donc la droite (XA) et on note X' le second point d'intersection de (XA) avec ω et de même Y' le second point d'intersection de (YA) avec ω.

Le théorème de l'angle inscrit et l'hypothèse sur X et Y nous impose l'égalité suivante :

$$\widehat{CX'Y'} = \widehat{CYY'} = \widehat{CYA} = \widehat{AXB} = \widehat{X'XB} = \widehat{X'Y'B}$$

de sorte que le quadrilatère $BCX'Y'$ est un trapèze isocèle, et les droites $(X'Y')$ et (BC) sont parallèles.

On en déduit un protocole pour tracer la figure : On place un point X sur le cercle ω et on prolonge la droite (AX) de sorte à obtenir le point X'. Puis on obtient le point Y' en traçant la parallèle à la droite (BC) passant par X. On obtient enfin le point Y en prolongeant la droite $(Y'A)$.

Résolvons à présent l'exercice. Maintenant que l'on peut tracer un figure exacte, on peut tracer la figure pour deux positions différentes du point X, notées X_1 et X_2, tracer les points Y_1

et Y_2 associés et conjecturer la position du point fixe à l'aide du point d'intersection des droites $(X_1Y_1$ et (X_2Y_2). Il est frappant que le point d'intersection obtenu appartient à la parallèle à la droite (BC) passant par le point A.

Soit donc P le point d'intersection de la droite (XY) avec la parallèle à (BC) passant par A. Puisque les droites $(X'Y')$ et (AP) sont parallèles, on trouve :

$$\widehat{XAP} = \widehat{XX'Y'} = \widehat{XYY'} = \widehat{XYA}$$

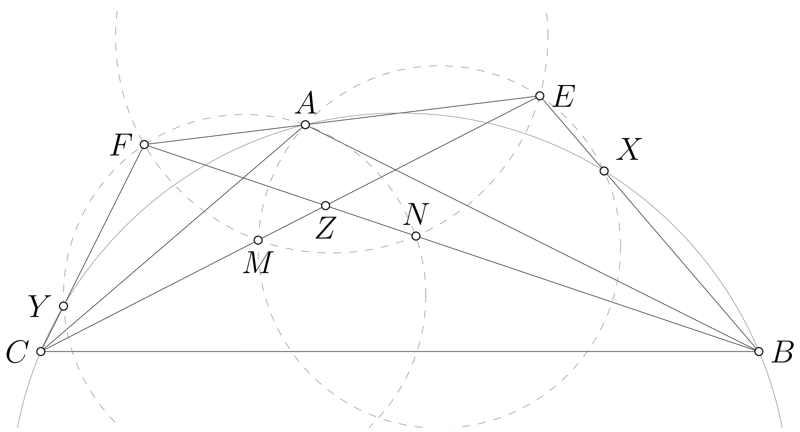
De sorte que la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle AXY. On a donc, d'après la puissance d'un point :

$$PA^2 = PX \cdot PY = \mathcal{P}_\omega(P)$$

La position du point P sur la parallèle à (BC) passant par A est uniquement déterminée par la puissance du point P par rapport au cercle ω, qui ne dépend pas de X et Y. C'est ce que nous voulions démontrer.

Exercice 9
(EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Solution de l'exercice 9



Pour tracer le point M, on introduit un point intermédiaire.

Penser point intermédiaire ! Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'égalité d'angle

Ici, on considère donc le point X, second point d'intersection des cercles (ABC) et (AEM). En pratique, on choisit X comme le second point d'intersection de la droite (EB) et du cercle (ABC). Alors on a bien par théorème de l'angle inscrit $\widehat{AXE} = \widehat{ACB}$. On choisit alors le point M comme le point d'intersection de la droite (CE) et du cercle (AXE).

On construit de même le point N à l'aide du point intermédiaire Y défini comme le second point d'intersection du cercle (ABC) avec la droite (CF).

Cette construction nous a apporté deux points et deux cercles. On constate que démontrer que les points E, M, N et F sont cocycliques revient à montrer que le point Z d'intersection des droites (BF) et (CE) appartient à l'axe radical des cercle (AME) et (ANF). En effet, on aura alors $ZM \cdot ZE = ZN \cdot ZF$.

Cette caractérisation est facile à exprimer en coordonnées barycentriques. Puisqu'il y a peu de points, on peut s'essayer au calcul.

On choisit ABC comme repère et a, b et c désignent les longueurs usuelles. On adopte également les notations de Conway pour les quantités S_A, S_B et S_C.

On calcule les coordonnées du point E. Si I_C est le centre du cercle $C-$exinscrit au triangle ABC, le point E est sur la droite (AI_C) donc ses coordonnées sont de la forme $(t, b, -c)$. Le point E appartient à la hauteur issue du sommet B donc ses coordonnées s'écrivent également de la forme (S_C, s, S_A). On en déduit que le point E a pour coordonnées $(cS_C, -bS_A, cS_A)$. De même, le point F a pour coordonnées $(bS_B, bS_A, -cS_A)$.

Le point Z a donc ses coordonnées de la forme $(bS_B, s, -cS_A)$ d'une part et $(cS_C, -bS_A, t)$ d'autre part. Ses coordonnées sont donc $(-bcS_BS_C, b^2S_AS_B, c^2S_AS_C)$.

On calcule les coordonnées du point X. Il appartient à la droite (BE), ses coordonnées sont donc de la forme (S_C, s, S_A). Il appartient au cercle (ABC) donc

$$s(a^2S_A + c^2S_C) = -b^2S_AS_C$$

Les coordonnées du point X sont donc $(S_C(a^2S_A + c^2S_C), -b^2S_AS_C, S_A(a^2S_A + c^2S_C)$. De même, les coordonnées du point Y sont $(S_B(a^2S_A + b^2S_B), S_A(a^2S_A + b^2S_B), -c^2S_AS_B)$.

On calcule à présent les paramètres du cercle (AEX). On sait déjà que $u = 0$ puisque le cercle passe par le point A. Puisque le point X appartient au cercle (ABC), $-a^2y_Xz_X - b^2z_Xx_X - c^2x_Xy_X = 0$ et donc en injectant ses coordonnées dans l'équation du cercle (AEX) on a

$$w(a^2S_A + c^2S_C) = vb^2S_C$$

On injecte à présent les coordonnées du point E dans l'équation de cercle :

$$\begin{aligned} 0 &= a^2bcS_A^2 - b^2c^2S_AS_C + bc^3S_AS_C + (-vbS_A + wcS_A)(\underbrace{cS_C + cS_A}_{cb^2} - bS_A) \\ &= bS_A\left(a^2cS_A - bc^2S_C + c^3S_C + (wc - vb)(cb - S_A)\right) \end{aligned}$$

On injecte la première équation liant v et w :

$$v\left(c\frac{b^2S_C}{a^2S_A + c^2S_C} - b\right)(cb - S_A) = bc^2S_C - c^3S_C - a^2cS_A$$

et après simplification :

$$vb(cb - S_A) = c(a^2S_A + c^2S_C)$$

On pose $V_B = v(bc - S_A) = \dfrac{c}{b}(a^2S_A + c^2S_C)$ et $W_B = (bc - S_A)w = bcS_C$.

On trouve de même $V_C = bcS_B$ et $W_C = \dfrac{b}{c}(a^2S_A + b^2S_B)$.

Il reste alors à vérifier que les coordonnées de Z satisfont

$$(V_B - V_C)y_Z + (W_B - W_C)z_Z = 0$$

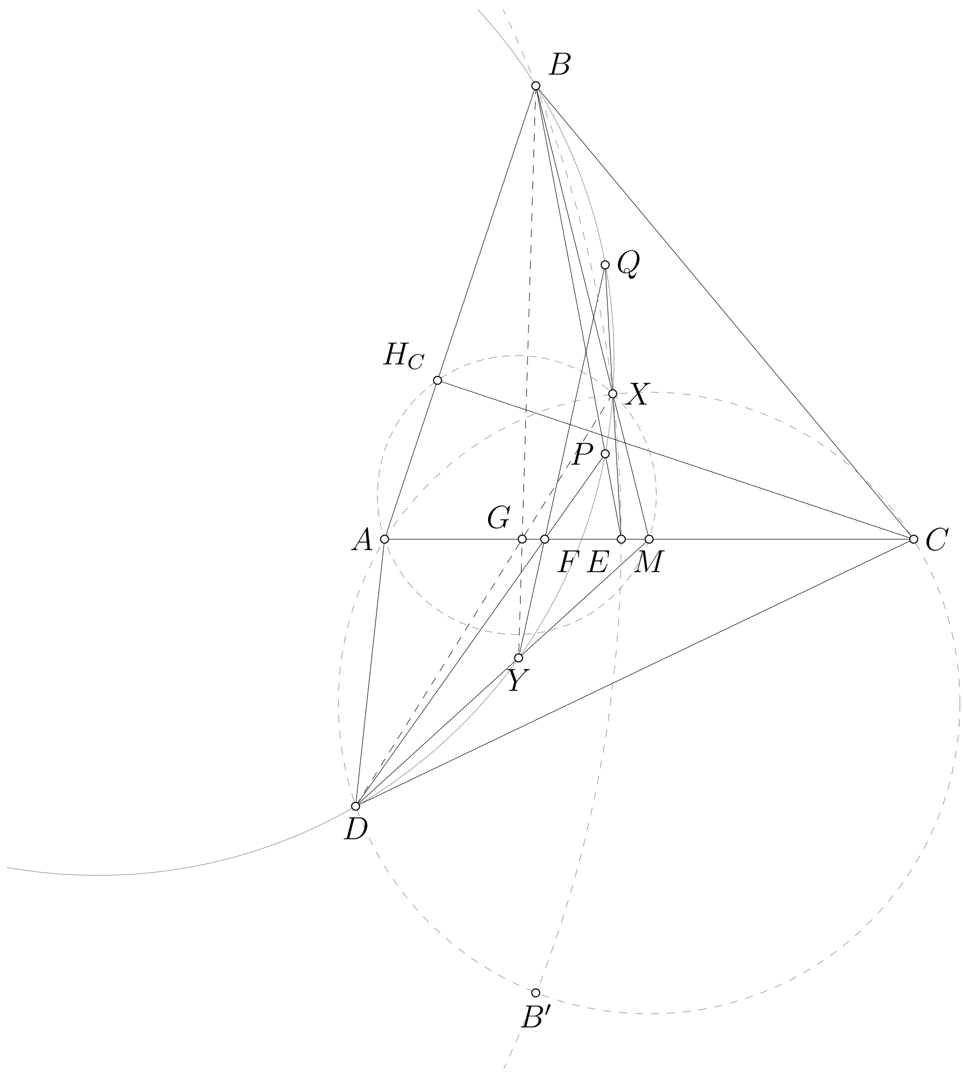
Or

$$\begin{aligned} (V_B - V_C)b^2S_B + (W_B - W_C)c^2S_C &= cbS_B(a^2S_A + c^2S_C) - b^3cS_B^2 + c^3bS_C^2 - bcS_C(a^2S_A + b^2S_B) \\ &= cb\left(S_B(\underbrace{a^2S_A + c^2S_C - b^2S_B}_{\frac{1}{2}(b^4-(a^2-c^2)^2)}) - S_C(\underbrace{a^2S_A - b^2S_B + c^2S_C}_{\frac{1}{2}(c^4-(a^2-b^2)^2)})\right) \\ &= 2bcS_A\left(-S_BS_C + S_CS_B\right) \\ &= 0 \end{aligned}$$

Donc le point Z appartient bien à l'axe radical des cercles (AEX) et (BFY), comme désiré.

Exercice 10
(IMO SL 2016 G6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe vérifiant $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} < 90°$. Les bissectrices intérieures des angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ADC}$ coupent respectivement le segment $[AC]$ en les points E et F et se coupent entre elles au point P. Soit M le milieu du segment $[AC]$. Soit ω le cercle circonscrit au triangle BPD. Les segments $[BM]$ et $[DM]$ coupent ω respectivement aux points X et Y. Soit Q le point d'intersection des droites (XE) et (YF). Montrer que les droites (PQ) et (AC) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 10



Ici, le procédé pour tracer un point D vérifiant $\widehat{ABC} = \widehat{ADC}$ n'est pas très difficile, et pourtant grâce à ce procédé nous allons pouvoir remarquer plein de propriétés utiles à la résolution de l'exercice.

On introduit le point B', symétrique du point B par rapport à la droite (AC) puis on choisit un point D sur le cercle $(AB'C)$. On trace ensuite le reste de la figure.

La première chose qui frappe est que le point X appartient au cercle $(AB'C)$ lui aussi. Rappelons que si H est l'orthocentre du triangle ABC, alors le point H appartient au cercle $AB'C$. Le point X serait donc le point d'intersection de la médiane avec ce cercle, il s'agirait donc du $B-$ Humpty Point, dont on connaît de nombreuses propriétés. Pour montrer que le point X est effectivement ce point, on procède dans l'autre sens : on montre que le point X' défini comme le point d'intersection de (AM) avec le cercle (ADC) est sur le cercle ω. D'une part :

$$\widehat{BPD} = \widehat{BEA} + \widehat{AFD} = \frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{BCA} + \frac{1}{2}\widehat{ADC} + \widehat{ACD} = \widehat{ABC} + \widehat{BCD}$$

D'autre part, si H_C est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC, les points H_C, X', M et A sont cocycliques (c'est une propriété du Humpty Point). On utilise ensuite que le point M est le centre du cercle passant par les points H_C, A et C :

$$\begin{aligned}
\widehat{BX'D} &= \widehat{BX'H_C} + \widehat{H_CX'A} + \widehat{AX'D} \\
&= \widehat{BAC} + \widehat{H_CMA} + \widehat{ACD} \\
&= 90° - \widehat{ACH_C} + 2\widehat{ACH_C} + \widehat{ACD} \\
&= \widehat{ABC} + \widehat{BCH_C} + \widehat{H_CCA} + \widehat{ACD} \\
&= \widehat{ABC} + \widehat{BCD}
\end{aligned}$$

Le point X' appartient donc au cercle ω, donc $X' = X$. De même le point Y appartient au cercle ABC.

La deuxième chose qui frappe est que le point Q appartient lui aussi au cercle ω ! Le cercle ω contiendrait donc 6 points. Pour le démontrer, nous avons donc envie d'uitliser le théorème de Pascal, ou plutôt sa réciproque. En effet, si les points B, Q, X, P, Y et D vérifient le théorème de Pascal, ils appartiendront à la même conique, or la conique définie par les points B, X, P, Y et D est un cercle.

L'hexagone le plus commode à utiliser, étant donné les points introduits, semble être l'hexagone $QYBPDX$, c'est-à-dire qu'il faut montrer que les points $F = (QY) \cap (PD)$, $G := (YB) \cap (DX)$ et $E = (XQ) \cap (BP)$ sont alignés. En d'autres mots, il faut montrer que les droites (BY) et (DX) se coupent sur la droite (AC). Or ces trois droites sont les axes radicaux des paires de cercles formées avec ω, (ABC) et (ACD), elles sont donc concourantes. Le point Q appartient donc au cercle ω.

Pour conclure, nous allons montrer que $\widehat{PQX} + \widehat{XEA} = 90°$.
Avec le théorème de l'angle inscrit dans ω :

$$\widehat{PQX} = \widehat{PBX} = \widehat{EBM}$$

Soit d la perpendiculaire à la droite (AC) passant par le point E. Il suffit désormais de montrer que la droite d est tangente au cercle (BXE). Comme la droite d est perpendiculaire à la droite (AC), il suffit en fait de montrer que le point B', symétrique du point B par rapport à la droite (AC), appartient au cercle (BXE), car alors de fait le centre de ce cercle sera sur (AC) et on aura la tangence désirée.

Tout d'abord,

$$\widehat{BEB'} = 2\widehat{BEA} = 2\left(\frac{1}{2}\widehat{ABC} + \widehat{BCA}\right) = \widehat{ABC} + \widehat{BCB'}$$

D'autre part, en utilisant les calculs faits en début d'exercice :

$$\widehat{BXB'} = \widehat{BXA} + \widehat{AXB'} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB}\widehat{ACB'} = \widehat{ABC} + \widehat{BCB'}$$

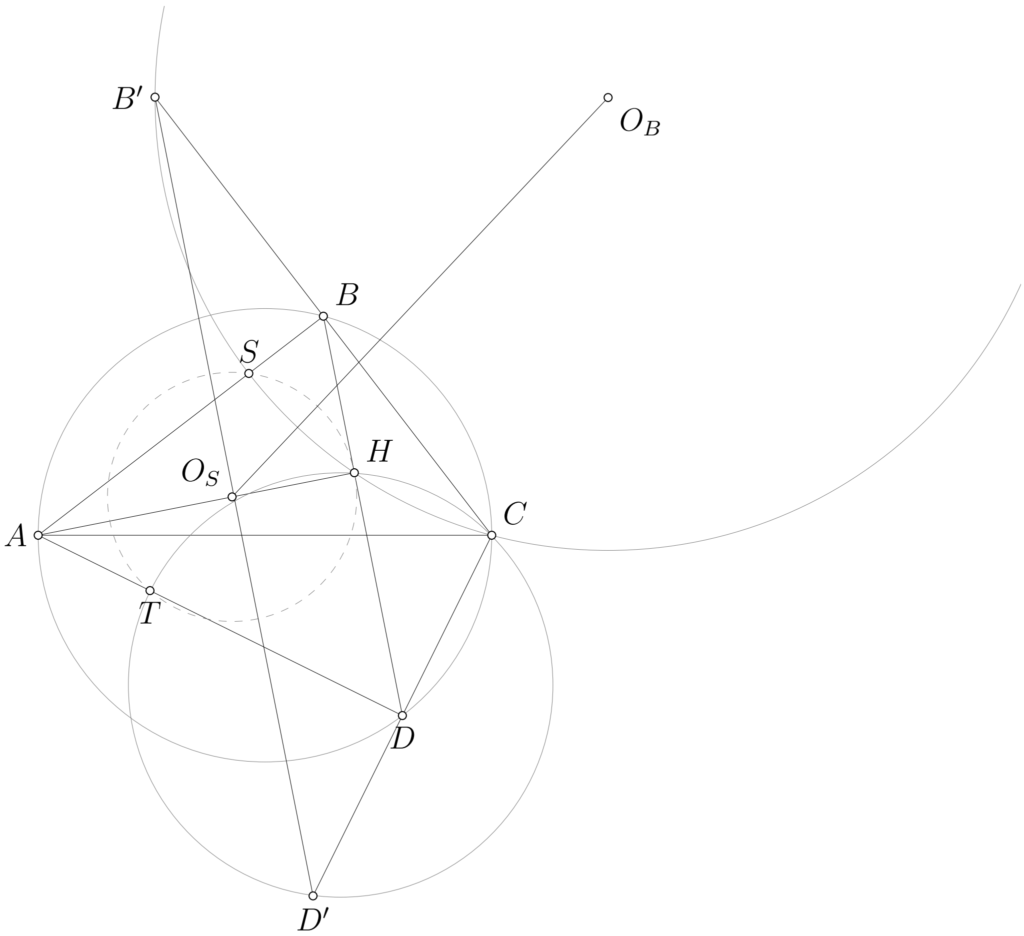
On a donc le résultat voulu.

Exercice 11
(IMO 2014 P3) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $\widehat{ABC} = \widehat{ADC} = 90°$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABD. Soient S et T appartiennent respectivement aux côtés AB et AD de telle sorte que

$$\widehat{SHC} - \widehat{BSC} = 90° \quad \text{et} \quad \widehat{THC} - \widehat{DTC} = 90°$$

Montrer que la droite (BD) est tangente au cercle circonscrit au triangle HST.

Solution de l'exercice 11



Commençons par chercher comment placer les points S et T. Pour cela il y a plusieurs façon de faire (par exemple, on peut regarder une inversion de centre C), la plus simple est de manipuler l'égalité d'angle donnée.

Si on introduit la perpendiculaire à la droite (AD) en T et si X est un point quelconque de cette perpendiculaire dans le même demi-plan délimité par (AD) que C, alors

$$\widehat{XTC} = 90° - \widehat{DTC} = 180° - \widehat{THC}$$

ce qui signifie que (XT) est tangente en T au cercle (THC). Donc la tangente au cercle (THC) est perpendiculaire à la droite (AD), donc la droite (AD) contient le centre du cercle.

Cela signifie que le symétrique D' du point C par rapport au point D appartient au cercle (THC). On peut désormais tracer le point T et de même le point S, en posant B' le symétrique du point C par rapport au point B.

On déduit tout de suite que $AD' = AC = AB'$. Comme les droites $(D'B')$ et (DB) sont parallèles, les droites (AH) et $(D'B')$ sont perpendiculaires, donc la droite (AH) est la médiatrice du segment $[B'D']$, si bien que $HB' = HD'$.

Pour démontrer le problème, il suffit donc de montrer que les médiatrices des segments $[SH]$ et $[TH]$ se coupent sur le segment $[AH]$. On notera dans la suite O_B et O_D les centres respectifs des cercles (CSB') et (CTD'). Si on note O_S le point d'intersection de la médiatrice sur segment $[SH]$ avec le segmant $[AH]$ et que l'on définit de manière similaire le point O_T, il suffit de montrer que

$$\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{O_TA}{O_TH}$$

On calcule $\frac{O_SA}{O_SH}$. D'après le théorème de la bissectrice, puisque (O_SO_B) est la bissetrice de l'angle $\widehat{SO_BH}$, et d'après la loi des sinus dans le triangle AO_BC, on a

$$\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{AO_B}{O_BH} = \frac{AO_B}{O_BC} = \frac{\sin\widehat{ACO_B}}{\sin\widehat{CAB}} = \frac{\sin(\widehat{CAB}+\widehat{CO_BB}))}{\sin\widehat{CAB}} = \cos\widehat{BO_BC} + \frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}}$$

On calcule chaque terme séparément et notre objectif est de se ramener au quadrilatère $ABCD$ pour montrer que la quantité que l'on calcule est symétrique en les paramètres du quadrliatère $ABCD$, de sorte que les deux rapports seront fatalement égaux.

D'une part, avec le théorème de l'angle au centre, on a

$$\cos\widehat{BO_BC} = \cos(180° - \widehat{B'HC}) = -\cos\widehat{B'HC}$$

Le théorème d'Al-Kashi nous donne alors

$$-\cos\widehat{B'HC} = \frac{B'C^2 - HC^2 - HB'^2}{HC\cdot HB'} = \frac{4BC^2 - HC^2 - HB'^2}{2HC\cdot HB'}$$

Puisque $HB' = HD'$, on est sur la bonne voie. D'autre part,

$$\frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}} = \frac{AB}{BC}\cdot\sin\widehat{BO_BC} = \frac{AB}{O_BC}$$

En utilisant à nouveau Al-Kashi dans le triangle $B'HO_B$ et en posant $R_B = O_BC = O_BH = O_BB'$:

$$HB'^2 = 2R_B^2 - 2R_B^2\cos 2\widehat{B'CH} = 4R_B^2\sin^2\widehat{BCH}$$

donc avec la loi des sinus dans le triangle BHC :

$$\frac{AB}{O_BC} = 2\frac{AB}{HB'}\sin\widehat{BCH} = 2\frac{AB}{HB'}\cdot\frac{BH}{CH}\sin\widehat{DBC} = 2\frac{AB\cdot BH\cdot\cos\widehat{ABH}}{CH\cdot HB'} = 2\frac{BH^2}{CH\cdot HB'}$$

On somme le tout et on utilise Pythagore :

$$\begin{aligned}
\cos\widehat{BO_BC} + \frac{\sin\widehat{BO_BC}}{\tan\widehat{CAB}} &= \frac{4BC^2 - HC^2 - HB'^2}{2HC \cdot HB'} + 2\frac{BH^2}{CH \cdot HB'} \\
&= \frac{2}{HB' \cdot HC}(BC^2 + BH^2) - \frac{HC^2 + HB'^2}{2HC \cdot HB'} \\
&= \frac{2}{HB' \cdot HC}(AC^2 - AH^2) - \frac{HC^2 + HB'^2}{2HC \cdot HB'}
\end{aligned}$$

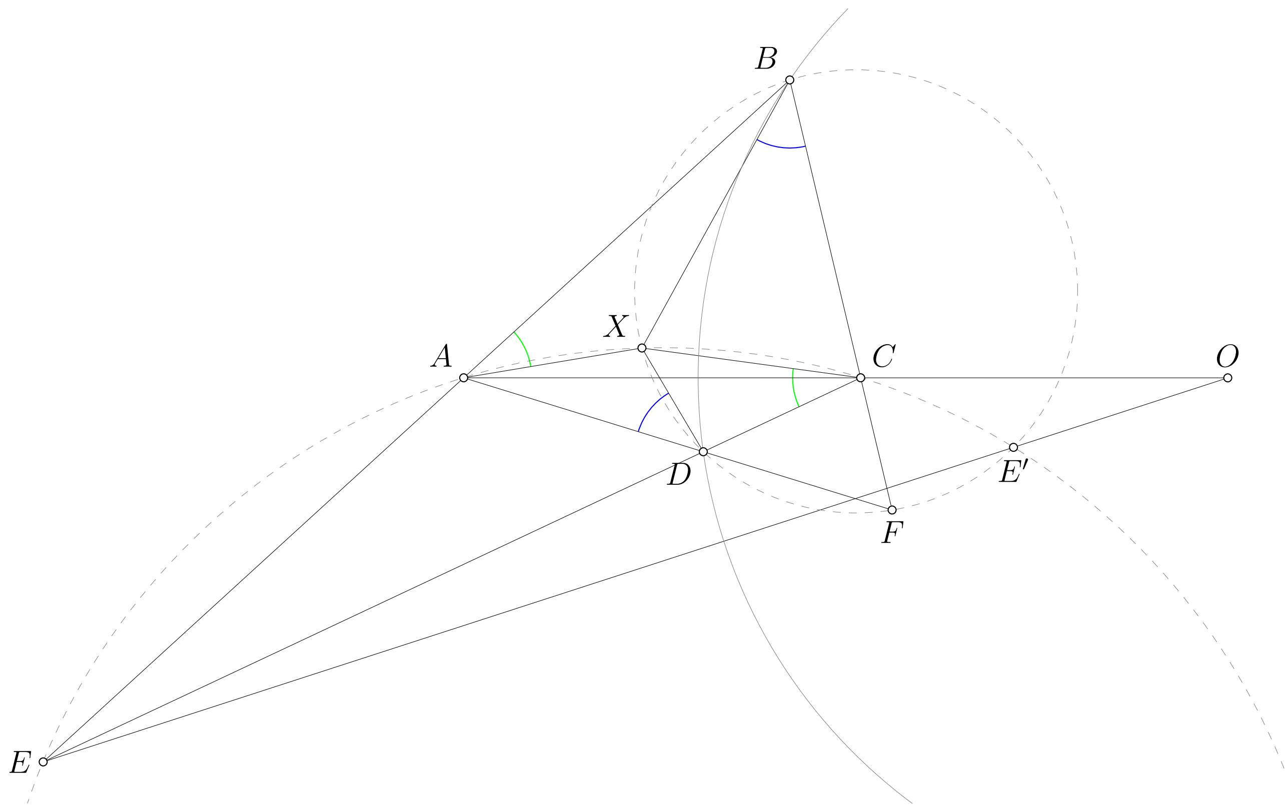
De même on trouvera :

$$\frac{O_TA}{O_TH} = \frac{2}{HD' \cdot HC}(AC^2 - AH^2) - \frac{HC^2 + HD'^2}{2HC \cdot HD'}$$

et comme$HB' = HD'$, on a bien $\frac{O_SA}{O_SH} = \frac{O_TA}{O_TH}$ et le problème est terminé.

Exercice 12
(IMO 2018 P6) Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que $AB \cdot CD = AD \cdot BC$. Soit X un point à l'intérieur du quadrilatère $ABCD$. On suppose que $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$ et $\widehat{XBC} = \widehat{XDA}$. Montrer que $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

Solution de l'exercice 12



L'hypothèse sur le produit des longueurs signifie que le point D est sur le $B-$cercle d'Apollonius du triangle ABC, ce qui nous permet déjà de tracer le quadrilatère $ABCD$.

Avant de placer le point X, on doit en étudier quelques propriétés. Examinons l'égalité $\widehat{XAB} = \widehat{XCD}$. Les deux angles ne couvrent pas le même arc, donc on regarde plutôt $180°$ moins chacun des deux angles. Si E est le point d'intersection des droites (AB) et (CD), l'égalité devient $\widehat{EAX} = 180° - \widehat{XCE}$ donc le point X appartient au cercle (ACE). De même, en notant F le point d'intersection des droites (AD) et (BC), le point X appartient au cercle (BDF). On peut donc tracer le point X !

Passons à la résolution du problème. La présence du $B-$cercle d'Apollonius nous encourage à effectuer une inversion. On pose donc O le centre du $B-$cercle d'Apollonius relatif au triangle ABC et on note i l'inversion de centre O de rayon OB. L'inversion fixe B et D et échange A et C. Le point $E = (AB) \cap (CD)$ est envoyé sur le point $E' = (OAB) \cap (OCD)$. On a

$$\widehat{AE'C} = \widehat{AE'O} - \widehat{CE'O} = \widehat{OAE} - \widehat{OCE} = \widehat{CEA}$$

Le point E' appartient donc au cercle (ACE).

On calcule désormais l'angle $\widehat{AXB}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{AXB} &= 360° - \widehat{BXE'} - \widehat{AXE'} \\
&= 180° - \widehat{BDE'} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} - \widehat{ODE'} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} - \widehat{OED} + \widehat{AEO} \\
&= 180° - \widehat{BDO} + \widehat{AEC}
\end{aligned}$$

On calcule désormais $\widehat{CXD}$.

$$\begin{aligned}
\widehat{CXD} &= \widehat{CXE'} + \widehat{E'XD} \\
&= \widehat{CEE'} + \widehat{DBE'} \\
&= \widehat{DEE'} + \widehat{DBO} - \widehat{E'BO} \\
&= \widehat{DBO} + \widehat{DEO} - \widehat{BEO} \\
&= \widehat{DBO} - \widehat{AEC}
\end{aligned}$$

et on a bien $\widehat{AXB} + \widehat{CXD} = 180°$.

4 Nombres complexes (Raphaël)

5 Nombres complexes

On rappelle que les nombres complexes sont définis comme $z = a+ib \in \mathbb{C}$ avec $a, b \in \mathbb{R}$, et i le nombre imaginaire $i^2 = -1$. Ils peuvent s'identifier à un point du plan $(a, b) \in \mathbb{R}^2$, s'écrire sous une forme polaire : $z = r\cos\theta + ir\sin\theta = re^{i\theta}$ avec $r = |z| = \sqrt{a^2+b^2}$ la norme de z et θ l'angle que forme le vecteur (a, b) avec l'axe des abscisses. On définit aussi le complexe conjugué $\overline{z} = a - ib$ et on a $|z|^2 = z\overline{z}$.

Pour les maths olympiques les nombres complexes peuvent être utiles dans deux domaines : la géométrie où il est possible de faire des calculs analytiques et en particulier avec des transformations géométriques et en algèbre sur des problèmes en lien avec des polynômes et c'est sur quoi on va parler ici.

Preuve du Théorème fondamental de l'algèbre

Commençons par mentionner ce qui est sûrement le résultat le plus célèbre utilisant les nombres complexes qui est le théorème fondamental de l'algèbre.

Théorème 1.
Tout polynôme non constant admet au moins une racine complexe.

Si un polynôme P admet une racine $z_1 \in \mathbb{C}$, il peut être factorisé sous la forme $P = (X - z_1)Q$. Par une simple récurrence sur le degré du polynôme on obtient alors le théorème suivant.

Théorème 2.
Tout polynôme P de degré deg$(P) = n \geqslant 1$ admet exactement n racines dans $\mathbb{C}$,comptées avec multiplicité.

Remarquer que ce théorème implique que tout polynôme non constant est surjectif sur $\mathbb{C}$: en effet $P(z) = a$ admet toujours une solution car le polynome $Q = P - a$ admet au moins une racine. Il implique également que les polynomes P de degré $n \geqslant 2$ ne sont pas injectifs dans $\mathbb{C}$ car, sauf si a est une racine de P', il existe $z_1, \cdots, z_n \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_1) = \cdots = P(z_n) = a$.

Nous allons maintenant montrer Théorème 1. Commençons par le lemme suivant.

Lemme 3.
Soit P un polynôme dans $\mathbb{C}$ avec $\deg P \geqslant 1$ et $P(0) = 1$. Alors pour tout $\epsilon > 0$, il existe z tel que $|z| \leqslant \epsilon$ et $|P(z)| > 1$.

Autrement dit $P(0)$ n'est pas un maximum local.

Démonstration. On écrit $P(z) = 1 + a_1z + \cdots + a_nz^n$. Commençons par le cas où $a_1 \neq 0$ avec $a_1 = |a_1|e^{i\theta_1}$. On pose alors $z = te^{-i\theta_1}$, $t \in \mathbb{R}$, avec $0 < t < 1$. On a

$$\begin{aligned}|a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| &\leqslant |a_2||z|^2 + \cdots + |a_n||z|^n \\ &\leqslant t^2(|a_2| + \cdots + |a_n|)\end{aligned}$$

et donc

$$\begin{aligned}|P(z)| &\geqslant |1 + a_1z| - |a_2z^2 + \cdots + a_nz^n| \\ &\geqslant 1 + t|a_1| - t^2(|a_2| + \cdots + |a_n|) \\ &\geqslant 1 + \frac{t}{2}|a_1|\end{aligned}$$

lorsque $t < \frac{|a_1|}{2(|a_2|+\cdots+|a_n|)}$ ce qui termine la preuve dans le cas $a_1 \neq 0$.

Pour le cas général on peut écrire $a_1 = a_2 = \cdots = a_{k-1} = 0$ et $a_k = |a_k|e^{i\theta_k} \neq 0$. On pose alors $z = te^{-i\frac{\theta_k}{k}}$ et par le même calcul on trouve

$$|P(z)| \geqslant 1 + t^k|a_k| - t^{k+1}(|a_{k+1}| + \cdots + |a_n|) \geqslant 1 + t^k\left(1 - \frac{1}{2^k}\right)|a_k|$$

lorsque $t < \frac{|a_k|}{2(|a_{k+1}|+\cdots+|a_n|)}$. □

De même on montre qu'il existe z tel que $|z| < \epsilon$ et $|P(z)| < 1$. La preuve est la même en choisissant pour le calcul $z = te^{-i\frac{\theta_k+\pi}{k}}$. Même chose pour la partie réelle et la partie imaginaires de $P(z)$. On peut trouver z, $|z| < \epsilon$ tel que $\Re(P(z)) > 1$ (resp. $\Re(P(z)) < 1$, $\Im(P(z)) > 0$ ou $\Im(P(z)) < 0$).

On en déduit alors une propriété très intéressante sur les polynômes dans $\mathbb{C}$.

Proposition 4. Si P est un polynôme non constant et $z_* \in \mathbb{C}$ tel que $P(z_*) \neq 0$. Alors $|P(z_*)|$ n'est pas un extremum local.

Démonstration. On pose $Q(z) = \frac{P(z+z^*)}{P(z^*)}$ et on utilise le Lemme 3. □

La même chose est vrai pour $\Re(P(z_*))$ et $\Im(P(z_*))$ sans l'hypothèse $P(z_*) \neq 0$. Autrement dit il est toujours possible de trouver une direction dans $\mathbb{C}$ pour augmenter ou diminuer la norme, la partie réelle ou la partie imaginaire du polynôme. Une autre conséquence de ce lemme est que sur un domaine $D \subset \mathbb{C}$, le maximum $\max_{z\in D}|P(z)|$ ne peut être atteint sur le bord du domaine. On peut utiliser cette proposition pour démontrer le Théorème fondamental de l'algèbre.

Démonstration (Preuve du Théorème Fondamental de l'algèbre). Soit $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ un polynôme de degré n. Alors pour $|z| \geqslant 1$

$$\begin{aligned}|P(z)| &\geqslant |a_n||z|^n - |a_0 + \cdots + a_{n-1}z^{n-1}| \\ &\geqslant |a_n||z|^n - |z|^{n-1}(|a_0| + \cdots + |a_{n-1}|) \\ &= |z|^{n-1}(|a_n||z| - |a_0| - \cdots - |a_{n-1}|)\end{aligned}$$

et donc $|P(z)| \to \infty$ lorsque $|z| \to \infty$. Puisque $z \to |P(z)|$ est une fonction continue sur $\mathbb{C}$ elle admet alors un minimum

$$|P(z_*)| = \min_{z\in\mathbb{C}} |P(z)|$$

et donc z_* est un minimum local. Par le Lemme 4 on en déduit que $P(z_*) = 0$. □

Relation coefficients/moyenne pour les polynômes dans $\mathbb{C}$.

On rappelle que

$$\int_0^{2\pi} \cos(\theta)d\theta = \int_0^{2\pi} \sin(\theta)d\theta = 0$$

et pour les nombres complexes on en déduit alors que

$$\int_0^{2\pi} e^{i\theta}d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos(\theta) + i\sin(\theta))d\theta = 0.$$

Plus généralement on a

$$\int_0^{2\pi} e^{ik\theta} d\theta = \int_0^{2\pi} (\cos(k\theta) + i\sin(k\theta)) d\theta = 0 \quad \text{pour } k \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}.$$

Cette propriété permet d'avoir une propriété assez intéressante pour les polynômes complexes.

Lemme 5.
Soit P un polynôme complexe, alors

$$P(0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) d\theta.$$

Autrement dit $P(0)$ est égale à la moyenne des valeurs du polynôme sur le cercle unité $\{z, |z| = 1\}$. Remarque : on peut utiliser ce Lemme pour donner une autre preuve aux Lemmes 3 et 4.

Démonstration. Pour $P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_n z^n$ on a

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) d\theta &= \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (a_0 + a_1 e^{i\theta} + \cdots + a_n e^{in\theta}) d\theta \\ &= a_0 + a_1 \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i\theta} d\theta}_{=0} + \cdots + a_n \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{in\theta} d\theta}_{=0} = a_0 = P(0)\end{aligned}$$

□

On peut généraliser ce genre de relation pour les différents coefficient de P, la preuve étant essentiellement la même.

Lemme 6.
Soit $P(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ un polynôme complexe. on a

$$a_k = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta \quad \text{pour } 0 \leqslant k \leqslant n.$$

Démonstration. On a

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta = \sum_{m=0}^{n} a_m \underbrace{\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} e^{i(m-k)\theta} d\theta}_{=1 \text{ si } m=k \text{ et } 0 \text{ sinon}} = a_k.$$

□

Plus généralement on a la propriété suivante pour les dérivées $k-$ème de P.

Proposition 7. Soit P un polynôme complexe, alors pour tout $z_* \in \mathbb{C}$ et $k \in \mathbb{N}$

$$P^{(k)}(z_*) = \frac{k!}{2\pi} \int_0^{2\pi} P(z_* + e^{i\theta}) e^{-ik\theta} d\theta.$$

Démonstration. On pose $Q(z) = P(z + z_*)$ et en utilisant le Lemme 6 on a

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z_* + e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} Q(e^{i\theta})e^{-ik\theta}d\theta = \frac{Q^{(k)}(0)}{k!} = \frac{P^{(k)}(z_*)}{k!}.$$

□

Pour $k = 0$ on retrouve la remarque précédente en tout point $z_* \in \mathbb{C}$, $P(z_*)$ est égale à la moyenne des valeurs du polynôme sur un cercle de rayon 1 de centre z_* $\{z, |z - z_*| = 1\}$.

En général, les intégrales ne sont pas nécessaires pour les maths olympiques et on peut donner des relations similaires en utilisant les racines n-ème de l'unité $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$. On rappelle que

$$1 + \omega + \cdots + \omega^{n-1} = 0$$

et plus généralement

$$1 + \omega^k + \omega^{2k} \cdots + \omega^{(n-1)k} = \begin{cases} n & \text{si } k = 0[n] \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Lemme 8.
Soit $P(z) = a_0 + \cdots + a_d z^d$ un polynôme complexe, et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = a_0 + a_n + a_{2n} + \cdots + a_{n\lfloor \frac{d}{k} \rfloor}.$$

Démonstration. On écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{d} a_m\omega^{mk}\right) = \sum_{m=0}^{d} a_m \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{mk}\right)}_{=1 \text{ si } n|m \text{ et } 0 \text{ sinon}} = \sum_{m=0[n]} a_m.$$

□

En particulier si $d < n$ on a simplement

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = a_0.$$

On peut donner une formule similaire aux propositions précédentes.

Proposition 9. Soit P un polynôme complexe et $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ tel que $n > d = \deg(P)$ alors

$$P^{(p)}(z_*) = \frac{p!}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(z_* + \omega^k)\omega^{-pk}.$$

Démonstration. En posant $Q(z) = P(z + z_*)$ on se ramène au cas $z_* = 0$ et on écrit

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)\omega^{-pk} = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\left(\sum_{m=0}^{d} a_m\omega^{mk}\right)\omega^{-pk} = \sum_{m=0}^{d} a_m \underbrace{\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\omega^{(m-p)k}\right)}_{=1 \text{ si } n|m-p \text{ et } 0 \text{ sinon}} = a_p$$

avec $p!a_p = P^{(p)}(0)$. □

Théorème de Gauss-Lucas

Dans $\mathbb{R}$, si un polynôme P de degré n admet n racines, alors on peut utiliser le Théorème de Rolle pour montrer que les racines de P' se trouvent entre les racines de P. On peut se poser la même question pour les racines complexes : si on connais où se trouvent les racines de P que peut-on dire des racines de P' ? Une propriété est donnée par le Théorème de Gauss-Lucas

Théorème 10.
(Gauss-Lucas) Les racines de P' sont dans l'enveloppe convexe formée par les racines de P.

On commence par mentionner relation suivante qui peut se révéler très utile en pratique.

Lemme 11.
Soit P un polynome convexe, $\deg P = n$ et $z_1, \cdots, z_n$ les racines de P, on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}.$$

Démonstration. On a

$$P(z) = a_n \prod_{j=1}^{n} (z - z_j), \quad P'(z) = a_n \sum_{k=1}^{n} \prod_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} (z - z_j)$$

et donc

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\prod_{1 \leqslant j \leqslant n, j \neq k} (z - z_j)}{\prod_{j=1}^{n} (z - z_j)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z - z_k}.$$

□

Démonstration (Preuve du Théorème de Gauss-Lucas). Soit $z_1, \cdots, z_n$ les racines de P et z_* une racine de P' alors

$$0 = \frac{P'(z_*)}{P(z_*)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_* - z_k}.$$

On pourrait alors proposer l'idée suivante : si z_* est en dehors de l'enveloppe convexe alors tous les vecteurs $\frac{1}{z_* - z_k}$ pointeraient plus ou moins dans la même direction dans $\mathbb{C}$ et la somme ne pourrait pas être nulle. Ici on va plutôt écrire une preuve utilisant les barycentres. On a

$$0 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{z_* - z_k} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\overline{z}_* - \overline{z}_k}{|z_* - z_k|^2} = \overline{\sum_{k=1}^{n} \frac{z_*}{|z_* - z_k|^2}} - \overline{\sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_* - z_k|^2}}$$

ce qui donne

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{z_*}{|z_* - z_k|^2} = \sum_{k=1}^{n} \frac{z_k}{|z_* - z_k|^2}.$$

Finalement

$$z_* = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k z_k \text{ avec } \alpha_k = \frac{|z_* - z_k|^{-2}}{\sum_{j=1}^{n} |z_* - z_j|^{-2}}$$

ce qui bien un barycentre car $\alpha_1 + \cdots + \alpha_n = 1$. Donc z_* est dans l'enveloppe convexe des racines de P. □

Théorème de Kronecker

Le Théorème de Kronecker est beaucoup moins connu (et utile) que les Lemme et théorèmes présentés précédement. Cependant il s'agit malgré tout d'un très joli résultat et sa démonstration est tout aussi élégante.

Théorème 12.
Soit P un polynome unitaire à coefficients entiers tel que ses racines $z_1, \cdots, z_m$ soient non nulles et satisfont $|z_i| \leqslant 1$. Alors il s'agit de racines $n-$ième de l'unité.

Démonstration. On note $\mathcal{K}_d$ l'ensemble de tel polynomes de degré inférieur à d.

La première remarque que l'on peut faire est que $\mathcal{K}_d$ est fini. En effet pour tout $P(z) = z^d + a_{d-1}z^{d-1} + \cdots + a_0 \in \mathcal{K}_d$, avec les relations coefficients/racines on a

$$|a_k| = \left| \sum_{I \subset \{1, \cdots, d\}, |I|=k} \prod_{i \in I} z_i \right| \leqslant \binom{d}{k}.$$

Donc comme les coefficients sont des entiers, il n'y a qu'un nombre fini de possibilités.

La deuxième observation est que si $P(z) \in \mathcal{K}_d$ alors $P(z)P(-z) \in \mathcal{K}_{2d}$ car c'est un polynome à coefficients entiers et ses racines sont $\pm z_i$.

$$P(z)P(-z) = \prod_{i=1}^{d}(z - z_i)(-z - z_i) = (-1)^d \prod_{i=1}^{d}(z^2 - z_i^2) =: (-1)^d Q(z^2).$$

Le polynome $Q(X) = \prod_{i=1}^{d}(X - z_i^2)$ a bien des coefficients entiers, et ses racines sont $z_1^2, \cdots, z_n^2$ et finalement $Q \in \mathcal{K}_d$. On alors la propriété suivante : si z_i est une racine d'un polynome de $\mathcal{K}_d$ alors z_i^2 est aussi racine d'un polynome de $\mathcal{K}_d$. On peut alors définir une suite $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \mathbb{C}$, avec $u_0 = z_i$ et $u_{n+1} = u_n^2$. Toutes les valeurs de la suites sont racine d'un polynome de $\mathcal{K}_d$. Or cet ensemble est fini et il n'y a donc qu'un nombre fini de telle racines. Par par principe des tiroirs on peut donc trouver $n \neq m$ tel que $u_n = u_m$ c'est à dire

$$z_i^{2^n} = z_i^{2^m}$$

et donc $z_i^{2^n - 2^m} = 1$ qui est donc bien une racine de l'unité. □

Exercices

Exercice 1
(Iran 1997) Soit $P(z)$ un polynome à coefficients réel tel que $P(0) = 1$ et $|P(z)| = 1$ pour tout $z \in \mathbb{C}$ avec $|z| = 1$. Montrer que $P = 1$.

Solution de l'exercice 1
Il y a plusieurs manière de résoudre l'exerice en utilisant les outils du cours.

(Preuve 1) Par l'absurde supposont que P est non constant. Pour $0 < \epsilon < 1$, il existe z, avec $|z| < \epsilon$ et $|P(z)| > 1$. La fonction $z \to |P(z)|$ est continue donc elle atteint son maximum dans $\{z, |z| \leqslant 1\}$

$$|P(z_*)| = \max_{z, |z| \leqslant 1} |P(z)|.$$

On a alors deux cas possible. Si $|z_*| < 1$ alors c'est un maximum local dans $\{z, |z| \leqslant 1\}$ ce qui est impossible. Si $|z_*| = 1$ alors $1 = |P(z_*)| \geqslant |P(z)| > 1$ ce qui est aussi impossible. On obtient une absurdité et on en déduit donc que P est constant.

(Preuve 2) Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ une racine n-ième de l'unité avec $n > \deg(P)$ alors

$$1 = P(0) = \frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)$$

Puisque $|P(\omega^k)| = 1$ on peut écrire $P(\omega^k) = e^{i\theta_k}$, et on alors

$$n = e^{i\theta_0} + \cdots + e^{i\theta_{n-1}}$$

dont l'unique possibilité est $e^{i\theta_0} = \cdots = e^{i\theta_{n-1}}$ (par inégalité triangulaire). Finalement on a $P(0) = P(1) = P(\omega) = \cdots = P(\omega^{n-1}) = 1$. Le polynome $Q = P - 1$ admet $n+1$ racine et est de degré au plus d et donc $Q = 0$.

(Preuve 3) Même raisonnement avec l'inégalité triangulaire mais en commençant par écrire l'égalité

$$1 = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(e^{i\theta})d\theta.$$

Exercice 2

(Chine 1994) Soit un polynome $P(z) = a_n z^n + a_{n-1}z^{n-1} + \cdots + a_0$. Montrer qu'il existe z avec $|z| \leqslant 1$ et $|P(z)| \geqslant |a_n| + |a_0|$.

Solution de l'exercice 2

Commençons par traiter le cas $a_0, a_n \in \mathbb{R}_+$. Soit $\omega = e^{i\frac{2\pi}{n}}$ une racine n-ième de l'unité, on a

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k) = a_0 + a_n.$$

Par inégalité triangulaire

$$\sup_{0 \leqslant k \leqslant n-1} |P(\omega^k)| \geqslant \left|\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} P(\omega^k)\right| = |a_0 + a_n| = |a_0| + |a_n|$$

ce qui termine la preuve.

Dans le cas général, $a_0 = |a_0|e^{i\theta_0}$, $a_n = |a_n|e^{i\theta_n}$ et on peut poser $Q(z) = e^{-i\theta_0}P(e^{i\frac{\theta_0-\theta_n}{n}}z) = |a_n|z^n + \cdots + a_1 e^{i\frac{\theta_0-\theta_n}{n} - i\theta_0}z + |a_0|$. Et donc il existe z tel que $|Q(z)| \geqslant |a_0| + |a_n|$. En posant $z' = e^{i\frac{\theta_0-\theta_n}{n}}z$ on a bien $|z'| \leqslant 1$ et $|P(z')| \geqslant |a_0| + |a_n|$.

Exercice 3

(Ireland 1995) Soit $P(z) = z^3 + az^2 + bz + c$ avec $a, b, c \in \mathbb{C}$ et tel que toutes ses racines soient de norme 1. Montrer que toutes les racines de $Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |b|z + |c|$ sont de norme 1.

Solution de l'exercice 3

On commence par écrire les relations coefficients-racines

$$\begin{cases} z_1 z_2 z_3 = -c \\ z_1 z_2 + z_2 z_3 + z_1 z_3 = b \\ z_1 + z_2 + z_3 = -a \end{cases}$$

On a alors que $|c| = |z_1||z_2||z_3| = 1$ et

$$\frac{b}{c} = \frac{z_1z_2 + z_2z_3 + z_1z_3}{z_1z_2z_3} = \frac{1}{z_1} + \frac{1}{z_2} + \frac{1}{z_3} = \overline{z}_1 + \overline{z}_2 + \overline{z}_3 = -\overline{a}$$

et donc $\frac{|b|}{|c|} = |b| = |a| \leqslant 3$. Finalement

$$Q(z) = z^3 + |a|z^2 + |a|z + 1 = (z+1)(z^2 + (|a|-1)z + 1) = (z+1)(z-\lambda)(z-\overline{\lambda})$$

car $\Delta = (|a|-1)^2 - 4 < 0$. Finalement les racines de Q sont $\{1, \lambda, \overline{\lambda}\}$ avec $|\lambda|^2 = 1 \times \lambda \times \overline{\lambda} = 1$ par relation coefficients-racines.

Exercice 4
(Chine TST 2008) Soient $z_1, z_2, z_3 \in \mathbb{C}$ de normes inférieures ou égale à 1 et ω_1, ω_2 les racines de

$$Q(z) = (z-z_1)(z-z_2) + (z-z_1)(z-z_3) + (z-z_2)(z-z_3).$$

Montrer que pour $j = 1, 2, 3$ on a

$$\min\{|z_j - \omega_1|, |z_j - \omega_2|\} \leqslant 1.$$

Solution de l'exercice 4
On procède par l'absurde en supposant que $\min\{|z_1 - \omega_1|, |z_1 - \omega_2|\} > 1$.

Lorsuq el'on cherche à localiser des racines d'une polynômes, on regarde les quotients $\frac{R'}{R}$, puisque un tel quotient fait apparaître une somme de terme contenant chacun les racines. Cela permet d'isoler chaque racine et se debarasser des multiplicités en exposant. L'exemple qui suit en est assez éloquant. On pourra également regarder à cet égard le théorème de Gauss-Lucas.

Soit $P(z) = (z-z_1)(z-z_2)(z-z_3)$. On observe que $P' = Q$. D'une part, puisque $Q(z) = 3(z-\omega_1)(z-\omega_2)$, on a

$$\frac{Q''(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{2(z_1-z_2) + 2(z_1-z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)} = \frac{2(2z_1 - z_2 - z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}.$$

D'autre part,

$$\frac{Q''(z_1)}{Q'(z_1)} = \frac{z_1 - \omega_1 + z_1 - \omega_2}{(z_1-\omega_1)(z_1-\omega_2)} = \frac{1}{z_1 - \omega_1} + \frac{z_1 - \omega_2}{.}$$

En combinant les deux formules et en utilisant l'hypothèse de l'absurde, on trouve

$$\left|\frac{2(2z_1 - z_2 - z_3)}{(z_1-z_2)(z_1-z_3)}\right| = \left|\frac{1}{z_1-\omega_1} + \frac{1}{z_1-\omega_2}\right| < 1.$$

Posons alors A, B et C les points d'affixe z_1, z_2 et z_3 respectivement. Alors $|2z_1 - z_2 - z_3|$ correspond à la longueur m_a de la médiane issue du sommet A. L'inégalité ci-dessus nous dit donc que

$$2m_a < AB \times AC.$$

On homogénéise l'inégalité en se servant de la condition que z_1, z_2 et z_3 sont dans le disque unité, ce qui donne, si R est le rayon du cercle circonscrit à ABC,

$$2m_aR \leqslant 2m_a < AB \times AC.$$

Or, la loi des sinus donne que

$$\frac{AB \times AC}{R} = \frac{4S}{BC} = 2AH_A.$$

où H_A est le pied de la hauteur issue de A. Or, $m_a \geqslant H_A$ par inégalité triangulaire, ce qui donne la contradiction voulue.

Exercice 5
(HMIC 2014) Soit ω une racine de l'unité et P un polynome à coefficients entiers. Montrer que si $|P(\omega)| = 1$ alors $P(\omega)$ est une racine de l'unité.

Solution de l'exercice 5
L'énoncé fait penser au théorème de Kronecker, on va donc essayer de s'en approcher en cherchant un polynôme entier dont toutes les racines sont de module 1, et l'une d'entre elle est $P(\omega)$.

Soit d l'ordre de ω et n le degré du polynôme. On rappelle que Φ_d le $d-$ème polynôme cyclotomique est irréductible sur $\mathbb{Z}[X]$ et que ses racines sont les racines primitives $d-$èmes de l'unité, c'est-à-dire les nombres ω^k pour $k \in \{1, \ldots, d\}$ premier avec n.

Puisque P est à coefficients entiers et ω de module 1, on a

$$1 = |P(\omega)|^2 = P(\omega)\overline{P(\omega)} = P(\omega)P\left(\frac{1}{\omega}\right).$$

Ainsi, $\omega^n = P(\omega)\omega^n P(1/\omega)$, donc ω est racine du polynôme à coefficients entiers $X^n - P(X)X^nP(1/X)$. On déduit que Φ_d divise ce polynôme et que ω^k est racine de ce polynôme pour tout k premier avec d. On déduit en remontant les calcules que pour tout k premier avec d, $1 = |P(\omega^k)|$.

Considérons alors, dans la même veine que pour les polynômes cyclotomiques, le polynôme

$$Q(X) = \prod_{\gcd(k,d)=1} (X - P(\omega^k)).$$

Afin d'appliquer le théorème de Kronecker à Q, il faut encore montrer que Q est à coefficients entiers. Les coefficients de Q sont des fonctions symétriques élémentaires de $P(\omega^k)$, donc, après développement, des fonctions symétriques de ω^k. (pour une preuve rigoureuse de ce fait, on pourra consulter le Théorème de Newton.

Ces fonctions symétriques sont elles-mêmes entières puisqu'elles correspondent aux coefficients de Φ_d qui est entier. Ainsi, Q est à coefficients entiers et ses racines sont de module 1. D'après le théorème de Kronecker, ses racines (et en particulier $P(\omega)$) sont entières.

6 Arithmétique : TD de petites idées simples (Antoine)

Exercice 1
(India EGMO TST 2023 P2)
Alice a écrit un nombre n sur le tableau. Chaque minute, elle efface le nombre x écrit sur le tableau, et le remplace par $2x+1$ si x n'est pas un cube, ou $\sqrt[3]{x}$ si x est un cube. Montrer que les nombres qu'elle écrit tendent vers $+\infty$.

Solution de l'exercice 1
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h2975768p26673852.

Exercice 2
(N4 BMO 2021)
Déterminer si tous les rationnels strictement positifs peuvent s'écrire sous la forme

$$\frac{a^{2021}+b^{2023}}{c^{2022}+d^{2024}}.$$

Solution de l'exercice 2
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h2840861p25162476.

Exercice 3
(N1 BMO 2021)
Pour $S \subset \mathbf{N}$ fini, on pose $m(S)$ la moyenne des éléments de S. Pour $n \in \mathbf{N}$, on pose

$$M = \{m(S), S \subset [\![1,n]\!]\}.$$

Trouver la valeur minimale de $|a-b|$, pour $a,b \in M$ distincts.

Solution de l'exercice 3
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h2840858p25162465.

Exercice 4
(N5 BMO 2013)
Trouver toutes les solutions de l'équation

$$p^{q-1}-q^{p-1}=4n^2$$

où p,q sont des nombres premiers et $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 4
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h2025845p14257784.

Exercice 5
(N6 BMO 2013)
Trouver toutes les solutions de l'équation

$$p^{q-1}-q^{p-1}=4n^3$$

où p,q sont des nombres premiers et $n \geq 1$.

Solution de l'exercice 5
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h2025892p14258218.

Exercice 6
(N3 IMO 2008)
Soit $a_0, a_1 \ldots, a_n, \ldots$ une suite d'entiers naturels non nuls telle que $\operatorname{pgcd}(a_{i+1}, a_{i+2}) > a_i$. Montrer que $a_n \geqslant 2^n$ pour tout $n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 6
Posons $d_i = \text{PGCD}(a_i, a_{i+1})$, $b_i = a_i/d_i$ et $c_i = a_{i+1}/d_i$. Comme $a_{i+1} \geqslant d_{i+1} > a_i$ pour tout $i \geqslant 0$, la suite $(a_i)_{i\geqslant 0}$ est strictement croissante. On en déduit déjà que $a_0 \geqslant 2^0$ et $a_1 \geqslant 2^1$, puis que $a_2 \geqslant a_1 + d_1 \geqslant a_1 + a_0 + 1 \geqslant 2^2$.

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \geqslant 3$ tel que $a_n < 2^n$. Sans perte de généralité, on choisit n minimal. Comme $c_{n-1} > b_{n-1}$, on sait déjà que $c_{n-1} \geqslant 2$. Par conséquent,

$$2b_{n-1}d_{n-1} = 2a_{n-1} \geqslant 2^n > a_n = c_{n-1}d_{n-1} \geqslant 2d_{n-1}$$

et

$$4d_{n-1} > 4a_{n-2} \geqslant 2^n > a_n = c_{n-1}d_{n-1},$$

de sorte que $1 < b_{n-1} < c_{n-1} < 4$. Cela signifie que $b_{n-1} = 2$ et $c_{n-1} = 3$.

On en déduit que

$$c_{n-2}d_{n-2} = a_{n-1} = 2d_{n-1} > 2a_{n-2} = 2b_{n-2}d_{n-2}$$

et

$$16d_{n-2} > 16a_{n-3} \geqslant 2^{n+1} > 2a_n = 3a_{n-1} = 3c_{n-2}d_{n-2},$$

de sorte que $2b_{n-2} < c_{n-2} < 6$, donc que $1 \leqslant b_{n-2} \leqslant 2$ et $3 \leqslant c_{n-2} \leqslant 5$. Mais alors

$$8b_{n-2}a_{n-2} \geqslant 2^{n+1}b_{n-2} > 2b_{n-2}a_n = 3b_{n-2}a_{n-1} = 3b_{n-2}c_{n-2}d_{n-2} = 3c_{n-2}a_{n-2} \geqslant 9a_{n-2},$$

de sorte que $b_{n-2} > 1$. Cela signifie que $b_{n-2} = 2$ et $c_{n-2} = 5$.

On conclut des égalités ci-dessus que

$$c_{n-3}d_{n-3} = a_{n-2} = 2d_{n-2} > 2a_{n-3} = 2b_{n-3}d_{n-3}$$

et

$$64d_{n-3} > 64a_{n-4} \geqslant 2^{n+2} > 4a_n = 6a_{n-1} = 15a_{n-2} = 15c_{n-3}d_{n-3},$$

de sorte que $2b_{n-3} < c_{n-3} < 5$, donc que $b_{n-3} = 1$ et $3 \leqslant c_{n-3} \leqslant 4$. Mais alors

$$32a_{n-3} \geqslant 2^{n+2} > 4a_n = 15c_{n-3}d_{n-3} = 15c_{n-3}a_{n-3} \geqslant 45a_{n-3},$$

ce qui est impossible. Notre supposition initiale était donc invalide, ce qui conclut.

Exercice 7
(Brazil MO 2018 P5)
On considère la suite $a_1 = 1$, $a_2 = 12$, etc, où à chaque étape a_n est la concaténation de a_{n-1} et n en base 10. Montrer qu'il y a une infinité de termes de la suite qui sont divisibles par 7.

Solution de l'exercice 7
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h1739475p11303665.

Exercice 8
(Mathlinks 7.1.2)
Soient a, b, c, d quatre nombres distincts en progression arithmétique. Montrer que $abcd$ n'est pas un carré parfait.

Solution de l'exercice 8
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c60h200119p1100612.

Exercice 9
(India EGMO TST 2022 P4)
Soit N un entier. On suppose que pour tout réel $x \in]0, 1[$ écrits en écriture décimale sous la forme $x = 0.a_1a_2a_3\ldots$, on peut colorier les a_i en N couleurs telles que

1) toutes les couleurs sont utilisées une infinité de fois,

2) pour toute couleur, quand on enlève tous les nombres de l'écriture décimale de x sauf ceux de cette couleur, le nombre obtenu est rationnel.

Déterminer les valeurs possibles de N.

Solution de l'exercice 9
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h2727186p23739812.

7 TD d'algèbre (Benoît)

Ce cours traitait d'exercices avec les réels. Les idées importantes à avoir sont :

— Entre deux réels il y a toujours un réel

— Les intervales sont des objets très intéressants : ce sont les ensembles convexes de $\mathbb{R}$, ils sont stables par intersection, et stables par homothéties.

— On a existence des $\sup$ et $\inf$ pour tout ensemble borné (mais attention ce n'est pas forcément des $\max$ ou $\min$)

— On peut faire des limites, à l'inverse pour tout $\varepsilon > 0$, il existe N tel que $\varepsilon N > 1$

Exercices traités en classe

Exercice 1 (P4 EGMO 2023)
Turbo l'escargot se déplace sur un cercle de circonférence 1. Pour $c_1, c_2, \ldots$ une suite de réels positifs donnée, Turbo glisse successivement d'une distance $c_1, c_2, \ldots$, choisissant à chaque fois dans le sens horaire ou anti-horaire.
Déterminer la plus grande constante $C > 0$ telle que pour toutes les suites $0 < c_1, c_2, \ldots < C$, Turbo peut choisir un point du cercle et une façon de se déplacer tel qu'il ne s'arrête jamais, ni ne traverse ce point.

Solution de l'exercice 1

On montre que la plus grande constante est $C = \dfrac{1}{2}$.

• $C \geqslant \dfrac{1}{2}$: On considère une suite $0 < c_1, c_2, \ldots < \frac{1}{2}$, Turbo choisit n'importe quel point A (où il ne commence pas). Il va ensuite pour chacun de ses mouvements dans la direction opposée à A. Sa distance à A est en chaque point du cercle au moins de $\frac{1}{2}$, il ne passera donc jamais par A.

• $C \leqslant \frac{1}{2}$: Soit $C > \frac{1}{2}$ une constante. On choisit un réel α tel que $\frac{1}{2} < \alpha < C$. On prend alors la suite $c_{2n+1} = \frac{1}{2}$ et $c_{2n} = \alpha$. On suppose par l'absurde qu'il commence à un point O et qu'il ne va pas au point A. À chaque instant n et $n+1$, Turbo ne peut pas aller dans la même direction car il pourcourt alors tout le cercle car $\frac{1}{2} + \alpha > 1$ et il passerait donc par A. Ainsi, Turbo alterne à chaque coup dans les deux sens. Supposons sans perte de généralité qu'il avance dans le sens trigo quand il avance de α. Il avance alors après deux coups d'une distance net $\alpha - \frac{1}{2} > 0$ dans le sens trigo. Ainsi, après $2n$ coups il a avancé de $n(\alpha - \frac{1}{2})$ dans le sens trigo. En prenant n assez grand, on a $n(\alpha - \frac{1}{2}) > 1$ et Turbo a donc parcouru tout le cercle c'est absurde.
On a donc bien $C = \dfrac{1}{2}$ comme constante maximale

Exercice 2 (A2 SL IMO 2002)
Soit $a_1, a_2, \ldots$ une suite de réels et c une constante qui verifient : pour tous $i \in \mathbb{N}^*$ $0 \leq a_i \leq c$ et pour tous i, j distincts :

$$|a_i - a_j| > \frac{1}{i+j}.$$

Montrer que $c \geq 1$.

Solution de l'exercice 2
On considère les n premiers termes de la suite (a_i). On les range dans l'ordre croissant de sorte que $0 \leqslant a_{t_1} < a_{t_2} < \ldots < a_{t_n} \leqslant c$. On a alors en particulier grâce à la propriété de l'énoncé :

$$\frac{1}{t_1+t_2}+\frac{1}{t_2+t_3}+\cdots+\frac{1}{t_{n-1}+t_n} \leqslant c$$

On peut alors utiliser l'inégalité du mauvais élève (ou bien Cauchy-Schwarz) qui donne

$$c \geqslant \frac{1}{t_1+t_2}+\frac{1}{t_2+t_3}+\cdots+\frac{1}{t_{n-1}+t_n} \geqslant \frac{(n-1)^2}{t_1+2t_2+\cdots+2t_{n-1}+t_n} = \frac{(n-1)}{2\frac{n(n+1)}{2}-t_1-t_n}$$

Car les t_i forment une bijection de $[\![1,n]\!]$ dans lui même. Ainsi : $c \geqslant \dfrac{(n-1)^2}{n(n+1)} = 1 - \dfrac{3n-1}{n(n+1)}$, or $\dfrac{3n-1}{n(n+1)}$ prend des valeurs aussi petites que l'on veut et donc $c \geqslant 1$.

Exercice 3 (P2 Iran 2023)
Soit $\dfrac{1}{2} < s < 1$. On suppose qu'une fourmi se déplace sur le segment $[0,1]$. Si elle est sur le point a, elle peut se rendre sur le point sa ou $1-(1-a)s$.
Pour tout réel $0 \leqslant c \leqslant 1$, montrer que la fourmi pourra toujours se rendre à une distance inférieure à $\dfrac{1}{2024}$ du point c en un nombre fini de déplacements.
Solution de l'exercice 3
On peut tout d'abord remarquer que les deux opérations en question consistent en des homothéties de rapport s et de centre respectivement 0 et 1.

On cherche à avoir la fourmi qui, en commençant à un endroit, arrive après un certain nombre d'homothéties, dans un intervale spécifique. Cependant, à la place on peut réfléchir à l'envers et considérer que l'on veut finir dans cette intervale et se demander où la fourmi devait être avant la dernière homothétie, puis où elle devait être avant l'avant-dernière etc... À chaque étape (inversée du coup), on fait une homothétie sur un intervale (en commençant par l'intervale d'arrivée) de rapport $\frac{1}{s}$ et de centre 0 ou 1. On note $I_0 = [c - \frac{1}{2024}, c + \frac{1}{2024}]$ et on note I_k l'intervale après k opérations. On va chercher à avoir $[0,1] \subset I_k$ pour un certain k, on aura alors gagné car qu'importe où la fourmi commence elle pourra refaire les opérations et arrivera dans I_0.

On peut déjà remarquer que si $[0,\varepsilon] \subset I_k$ pour un $\varepsilon > 0$ et un $k \in \mathbb{N}$, on peut faire des homothétie de centre 0 pour augmenter au fur et à mesure l'intervale $[0,\varepsilon]$ et avoir $[0,1] \subset I_{k+l}$. De la même façon, on peut y arriver si $[1-\varepsilon, 1] \subset I_k$.

Maintenant, montrons qu'on peut se ramener à la configuration précédente. On considère les opérations suivantes : si $I_k \cap [0, \frac{1}{2}] = \varnothing$, alors on fait une homothétie de centre 1, sinon on fait une homothétie de centre 0. A chaque opération, la longueur de l'intervale est multipliée par $\frac{1}{s} > 1$, ainsi on ne peut pas avoir l'intervale qui reste indéfiniment dans le segment $[0,1]$ (qui est de longueur 1). On considère le premier k tel que $I_k \not\subset [0,1]$. On a $\frac{1}{s} < 2$ or si $I_{k-1} \cap [0, \frac{1}{2}] = \varnothing$, on avait fait une homothétie de centre 1, ce qui ne permet pas à I_k de sortir de $[0,1]$. Ainsi, on a fait une homothétie de centre 0, comme I_{k-1} était dans $[0,1]$, si I_k n'y est plus c'est qu'il y a un nombre plus grand que 1 dans I_k. Par ailleurs, on a $x \in [0, \frac{1}{2}] \cap I_{k-1}$ et $\frac{x}{s} \in I_k$ mais $x < \frac{1}{2} < s$ donc $\frac{x}{s} < 1$ et donc $[\frac{x}{s}, 1] \subset I_k$ c'est ce qu'on voulait.

D'où le résultat.

Exercice 4 (A2 SL IMO 2014)
Soit f une fonction de $]0,1[$ dans $]0,1[$ définie par :

$$f(x) = \begin{cases} x + \dfrac{1}{2} & \text{si } x < \dfrac{1}{2} \\ x^2 & \text{si } x \geq \dfrac{1}{2} \end{cases}$$

Soit $0 < a < b < 1$ deux réels. On définit alors deux suites (a_n) et (b_n) tels que $a_0 = a$, $b_0 = b$, $a_n = f(a_{n-1})$ et $b_n = f(b_{n-1})$. Montrer qu'il existe un entier positif n tel que

$$(a_n - a_{n-1})(b_n - b_{n-1}) < 0.$$

Solution de l'exercice 4
On note $I_1 = [0, \frac{1}{2}[$ et $I_2 = [\frac{1}{2}, 1]$. On remarque tout d'abord que $f(x) < x$ pour x dans I_2 et $f(x) > x$ pour x dans I_1. Ainsi, l'énoncé correspond à dire que a_n et b_n seront pour un certain n, l'un dans I_1 et l'autre dans I_2. On suppose par l'absurde que ce n'est pas le cas. Comme f est croissante dans ces deux domaines, on a tout d'abord $a_n < b_n$ pour tout n.

Continuons les observations intéressantes : $f(I_1) \subset I_2$, donc à chaque fois que a_n est dans I_1, alors a_{n+1} est dans I_2. On en conclut donc que la suite a_n va une infinité de fois dans I_2. Par ailleurs, si on découpe de nouveau I_2 en $I_{21} = [\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{2}}{2}[$ et $I_{22} = [\frac{\sqrt{2}}{2}, 1]$, on obtient que $f^2(I_{21}) \subset [\frac{3}{4}, 1] \subset I_{22}$. Ainsi de nouveau a_n va aller une infinité de fois dans I_{22}.

Par ailleurs, on a $b_n^2 - a_n^2 = (a_n - b_n)(a_n + b_n)$, donc pour $a_n \in I_2$, on a $b_n - a_n \leqslant b_{n+1} - a_{n+1}$. On a de plus $a_n - b_n = a_{n+1} - b_{n+1}$ pour $a_n \in I_1$, ainsi la suite $b_n - a_n$ est croissante. Par ailleurs, pour $a_n \in I_{22}$, on a $a_n + b_n \geqslant \sqrt{2}$, donc à chaque fois que a_n est dans I_{22}, $b_{n+1} - a_{n+1} \geqslant \sqrt{2}(b_n - a_n)$. Ainsi après k passages, on a :

$$b_n - a_n \geqslant (\sqrt{2})^k (b - a)$$

Ce nombre tend vers l'infini pour les grands k, or il est majoré par 1, c'est absurde.

Exercices non traités en classe

Exercice 5 (A2 SL IMO 2000)
Soit a, b, c des entiers strictement positifs tels que $b > 2a$ et $c > 2b$. Montrer qu'il existe un réel λ tel que $\lambda a, \lambda b$ et λc ont tous une partie fractionnaire dans $\left[\dfrac{1}{3}; \dfrac{2}{3}\right[$

Solution de l'exercice 5
On remarque que $\{\lambda a\} \in [\frac{1}{3}, \frac{2}{3}[$ est équivalent à $\lambda \in [\frac{3k+1}{3a}, \frac{3k+2}{3a}[$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$ (et similairement pour b et c). On note ainsi $[\frac{3k+1}{3a}, \frac{3k+2}{3a}[= I_k$, $[\frac{3l+1}{3b}, \frac{3l+2}{3b}[= J_l$ et $[\frac{3m+1}{3c}, \frac{3m+2}{3c}[= K_m$. On cherche ainsi une intersection entre un I_k, un J_l et un K_m qui est non nulle.

On va d'abord prouver qu'il existe k, l tels que $J_l \subset I_k$. On cherche l tel que $\left\{a\dfrac{3l+1}{3b}\right\} \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$.
On note $\dfrac{\alpha}{\beta} = \dfrac{a}{b}$ en fraction irréductible. On a alors :

$$a\frac{3l+1}{3b} = \frac{l\alpha}{\beta} + \frac{\alpha}{3\beta}$$

Comme α et β sont premiers entre eux $l\alpha$ parcourt tous les entiers modulo β.
On suppose $\beta \geqslant 6$. On a alors que $\left\{\dfrac{l\alpha}{\beta}\right\}$ peut faire des pas de $\dfrac{1}{6}$ et donc faire tomber $\left\{a\dfrac{3l+1}{3b}\right\}$ dans $[\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$.
Si on est dans le cas $\beta < 6$, on se rappelle que $2a < b$ donc $2\alpha < \beta$. Ainsi les seules possibilités pour les fractions $\dfrac{\alpha}{\beta}$ sont $\dfrac{1}{5}, \dfrac{2}{5}, \dfrac{1}{4}$ et $\dfrac{1}{3}$; avec $l = 2, 3, 1, 1$ on obtient bien $\left\{a\dfrac{3l+1}{3b}\right\} \in [\frac{1}{3}, \frac{1}{2}[$.

On a donc $\dfrac{1}{3} \leqslant a\dfrac{3l+1}{3b} < \dfrac{1}{2}$ à des entiers près. Or $2a < b$, donc $\dfrac{a}{3b} < \dfrac{1}{6}$ et ainsi, il existe k tel que :

$$k + \frac{1}{3} \leqslant a\frac{3l+1}{3b} \leqslant a\frac{3l+2}{3b} < k + \frac{2}{3}$$

et donc $J_l \subset I_k$ (on fixe à partir de maintenant les k et l).

Par ailleurs, on a $c > 2b$, or la distance entre deux intervales K_m est $\dfrac{2}{3c}$ qui est donc plus petit que la longueur de J_l qui est $\dfrac{1}{3b}$. Ainsi il existe un m qu'on fixe tel que l'intersection entre J_l et K_m est non nulle. Ainsi $K_m \cap J_l \neq \varnothing$ et $K_m \cap J_l \subset I_k$ donc $K_m \cap J_l \cap I_k \neq \varnothing$. On prend un λ dedans, il convient.

Exercice 6
Trouver toutes les suites finies d'entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ telles que pour tout $1 \leqslant i, j, i+j \leqslant n$, on a :

$$a_i + a_j \leqslant a_{i+j} \leqslant a_i + a_j + 1$$

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>
On peut commencer par trouver une suite qui fonctionne. On remarque que les suites linéaires de la forme $a_i = \alpha i$ fonctionnent pour α entier. Après quelques essais on peut se rendre compte que les suites $a_i = \lfloor \alpha i \rfloor$ fonctionnent pour $\alpha \in \mathbb{R}$, nous avons donc nos candidats.

Prouvons tout d'abord que ce sont des solutions, soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et $a_i = \lfloor \alpha i \rfloor$. Pour prouver que c'est une solution, on utilise la propriété :

$$\lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor \leqslant \lfloor x + y \rfloor \leqslant \lfloor x \rfloor + \lfloor y \rfloor + 1$$

ce qui donne l'inégalité de l'énoncé. (Cette propriété se prouve en écrivant x et y sous la forme partie entière plus partie fractionnaire.)

On se donne maintenant une suite a_i qui vérifie l'énoncé, on cherche un réel α tel que pour tout i :

$$a_i \leqslant \alpha i < a_i + 1$$

Ainsi, il faut qu'il existe un réel qui est plus grand que tous les $\frac{a_i}{i}$ et plus petit que tous les $\frac{a_i+1}{i}$. Ce sera le cas si pour tous les i et j, on a :

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$$

car en prenant le max des $\frac{a_i}{i}$ et le min des $\frac{a_j+1}{j}$ on aura un réel α entre les deux qui convient. Prouvons donc ce résultat par récurrence sur $\max(i,j)$.

Pour $i = j = 1$, on a bien $a_1 < a_1 + 1$.

Soit $k < n$, on suppose que pour tous $i, j \leqslant k$, on a $\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$. Soit i, j tels que $\max(i,j) = k+1$.
Si $i = j = k+1$, l'inégalité est évidente.
Sinon si $i = k+1$, on a par hypothèsse de récurrence

$$\frac{a_{i-j}}{i-j} < \frac{a_j+1}{j}$$

et par l'énoncé

$$a_i \leqslant a_j + a_{i-j} + 1$$

d'où

$$a_i < a_j + \frac{a_j+1}{j} \cdot (i-j) + 1 = \frac{a_j+1}{j} \cdot i$$

Ce qui donne le résultat pour i, j
Dans le dernier cas, $j = k+1$, de même par hypothèse de récurrence :

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_{j-i}+1}{j-i}$$

et par l'énoncé :

$$a_i + a_{j-i} \leqslant a_j$$

d'où :

$$a_j > a_i + \frac{a_i}{i} \cdot (j-i) - 1$$

Ce qui donne :

$$\frac{a_i}{i} < \frac{a_j+1}{j}$$

On a ainsi prouvé l'inégalité pour i, j et le résultat pour tous les i et j par récurrence. Cela finit la preuve.

Exercice 7 (P1 USA 2024)
Trouver la plus petite constante C qui vérifie l'énoncé suivant :

Pour tout entier n et pour toute suite de réels positifs non-entiers $a_1, a_2, \ldots, a_n$ qui vérifient

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_n} = 1,$$

on peut choisir des entiers $b_1, b_2, \ldots, b_n$ tels que :

— Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a $b_i = \lfloor a_i \rfloor$ ou $b_i = \lfloor a_i \rfloor + 1$

— On a $1 < \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} \leqslant C$.

Solution de l'exercice 7

Un algorithme type glouton fonctionne ici pour prouver qu'on peut prendre $C \leqslant \dfrac{3}{2}$. Prouvons-le. En prenant tous les $b_i = \lfloor a_i + 1 \rfloor > a_i$, on a nécessairement :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} < \sum_i \frac{1}{a_i} = 1$$

On peut maintenant progressivement changer tous b_i en $\lfloor a_i \rfloor < a_i$, à la fin du processus :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} > \sum_i \frac{1}{a_i} = 1$$

Il y a donc un moment où la somme vient juste de passer au-dessus de 1, notons i_0 l'indice pour lequel on vient de changer b_{i_0} de $\lfloor a_{i_0} \rfloor + 1$ en $\lfloor a_{i_0} \rfloor$, on a alors :

$$1 < \sum_i \frac{1}{b_i} \leqslant 1 + \frac{1}{\lfloor a_{i_0} \rfloor} - \frac{1}{\lfloor a_{i_0} \rfloor + 1} = 1 + \frac{1}{(\lfloor a_{i_0} \rfloor)(\lfloor a_{i_0} \rfloor + 1)} \leqslant \frac{3}{2}$$

avec égalité quand $\lfloor a_{i_0} \rfloor = 1$. Prouvons maintenant que c'est optimal.

On cherche une suite a_i qui minimise optimalement C, ainsi, il faut que l'algorithme glouton précédent soit optimal pour cette suite : il faudrait qu'il n'y ait qu'un seul passage de $\lfloor a_i \rfloor + 1$ à $\lfloor a_i \rfloor$ qui permette d'avoir une somme plus grande que 1 et que ce passage se fasse sur un $\lfloor a_i \rfloor = 1$.

Considérons pour n entier la suite : $a_1 = \cdots = a_{n-1} = \dfrac{4n+1}{2}$ et $a_n = \dfrac{4n+1}{2n+3}$. Tout d'abord elle correspond à l'énoncé car :

$$\sum_i \frac{1}{a_i} = \frac{2(n-1) + 2n + 3}{4n+1} = 1$$

Soit maintenant une suite b_i de l'énoncé telle que

$$1 < \sum_i \frac{1}{b_i} \leqslant C$$

On remarque tout d'abord que pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $b_i = 2n$ ou $2n+1$ et $b_n = 1$ ou 2. Supposons tout d'abord que $b_n = 2$, on a alors :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} \leqslant \frac{1}{2} + (n-1)\frac{1}{2n} < 1$$

C'est absurde, donc $b_n = 1$, ainsi, on a :

$$\sum_i \frac{1}{b_i} \geqslant 1 + (n-1)\frac{1}{2n+1} = \frac{3}{2} - \frac{3}{4n+2}$$

En particulier, pour un C qui correspond à l'énoncé on a :

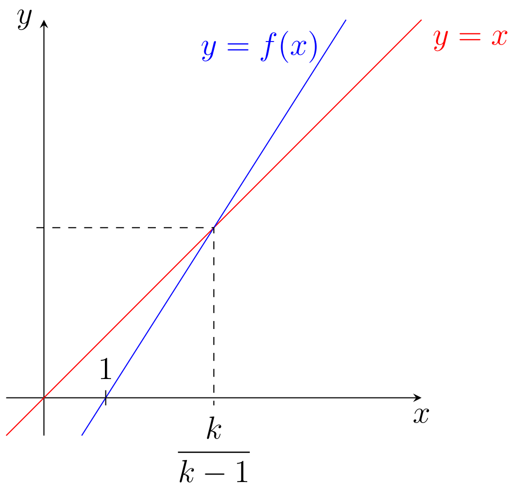
$$1 < \frac{1}{b_1} + \frac{1}{b_2} + \cdots + \frac{1}{b_n} \leqslant C$$

D'où, $C \geqslant \frac{3}{2} - \frac{3}{4n+2}$, en faisant tendre n vers plus l'infini, on a $C \geqslant \frac{3}{2}$.

Exercice 8
Trouver tous les réels $k > 1$ tel qu'il existe un ensemble borné S de réels strictement positifs possédant au moins 3 élements et tel que $k(a-b) \in S$ dès que $a, b \in S$ avec $a > b$.

Solution de l'exercice 8
Soit k et S comme dans l'énoncé.
Montrons d'abord que les éléments de S sont plus grand qu'un certain réel $m > 0$. On suppose d'abord par l'absurde que c'est faux. On note $M = \sup(S)$ le plus petit majorant de S. Par définition pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un élément $x \in S$ tel que $x > M - \varepsilon$ et par l'hypothèse qu'on a faite il existe $y \in S$ tel que $0 < y < \varepsilon$. Ainsi $k(x-y) \in S$, or $k(x-y) > kM - 2k\varepsilon > M$ pour ε assez petit. Cela contredit la définition de M. On a donc un réel $m > 0$ tel que pour tout $x \in S$, on a $x \geqslant m$. On peut alors prendre m maximal autrement dit, on prend $m = \inf(S) > 0$.
Pour $x > y \in S$, on a alors $k(x-y) \geqslant m$, donc deux éléments de S sont distants d'au moins $\frac{m}{k}$.
En particulier, comme S est borné, il est fini (il contient au plus $\frac{kM}{m}+1$ éléments) et $m, M \in S$.

On peut en particulier écrire $S = \{a_1 < a_2 < \ldots < a_n\}$ avec $n \geqslant 3$. Si on multiplie tous les éléments de S par un réel strictement positif, cela ne change pas la propriété de l'énoncé. On peut donc considérer $a_1 = 1$ (cela ne change pas le problème mais permet d'avoir une meilleure vision du problème). On a donc $S = \{1 < a_2 < \ldots < a_n\}$.
On introduit f la fonction telle que $f(x) = k(x-1)$, pour $x \neq 1$ tel que $x \in S$, on a alors $f(x) = S$.
Traçons f pour une meilleure visualisation. On trace également la fonction identité.



On a en particulier $f(x) \geqslant x \Leftrightarrow x \geqslant \frac{k}{k-1}$. Ainsi, pour $x = a_n$, on a $f(a_n) \in S$ donc $f(a_n) \leqslant a_n$ et $a_n \leqslant \frac{k}{k-1}$. De plus, cela donne pour $x \in S \backslash \{a_n\}$, $f(x) < x$. En utilisant cette dernière propriété, $f(a_2) < a_2$ (S comporte au moins 3 éléments donc $a_2 < a_n \leqslant \frac{k}{k-1}$) ainsi, $f(a_2) = 1$. En inversant cette relation, $a_2 = 1 + \frac{1}{k}$. On suppose que $a_3 \neq \frac{k}{k-1}$, on a alors $f(a_3) < a_3$, or f est strictement croissante donc il ne reste plus que $f(a_3) = a_2$ pour avoir $f(a_3) \in S$. En inversant cette fonction, $a_3 = 1 + \frac{1}{k} + \frac{1}{k^2}$. Cependant, cela donne maintenant $k(a_3 - a_2) = \frac{1}{k} \in S$. Or $\frac{1}{k} < 1$, c'est absurde. Donc $a_3 = \frac{k}{k-1}$, en particulier avec $a_n \leqslant \frac{k}{k-1}$, on a $n = 3$.

On peut maintenant utiliser $k(a_3 - a_2) \in S$, comme $a_2 > 1$, on a $k(a_3 - a_2) < k(a_3 - 1) = a_3$. Si $k(a_3 - a_2) = a_2$, cela donne $k(k^2 - (k+1)(k-1)) = (k+1)(k-1)$ d'où $k^2 - k - 1 = 0$, d'où

$$k = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

Avec $k > 1$, il nous reste $k = \frac{1 + \sqrt{5}}{2}$.
Si on a $k(a_3 - a_2) = 1$, cela donne $k = k(k-1)$ d'où $k = 2$. Réciproquement, on a pour $k = 2$ l'ensemble $S = \{1, \frac{3}{2}, 2\}$ qui convient et pour $k = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ l'ensemble $S = \left\{1, \frac{1+\sqrt{5}}{2}, \frac{3+\sqrt{5}}{2}\right\}$ qui convient.

Exercices supplémentaires (pas en lien direct avec le thème du TD)

Exercice 9 (A5 BMO 2016)
Soient a, b, c et d des nombres réels tels que $a + b + c + d = 2$ et $ab + bc + cd + da + ac + bd = 0$. Déterminer les valeurs minimales et maximales que peut prendre le produit $abcd$.

Solution de l'exercice 9
Correction sur AOPS

Exercice 10 (P1 Chine 2021)
Soit $x_1, x_2, \ldots, x_{60}$ des réels compris entre -1 et 1. Trouver le maximum de :

$$\sum_{i=1}^{60} x_i^2(x_{i+1} - x_{i-1}),$$

avec les indices pris modulo 60.

Solution de l'exercice 10
Correction sur AOPS

Exercice 11 (P4 Chine 2021)
Soit n un entier, trouver tous les n-tuples de réels $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ tels que :

$$f(x_1, x_2, \cdots, x_n) = \sum_{k_1=0}^{2} \sum_{k_2=0}^{2} \cdots \sum_{k_n=0}^{2} \big|k_1x_1 + k_2x_2 + \cdots + k_nx_n - 1\big|$$

atteigne son minimum

Solution de l'exercice 11
Correction sur AOPS

Exercice 12 (P2 APMO 2018)
Soit $f(x)$ et $g(x)$ donnés par :

$$\begin{cases} f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x-2} + \frac{1}{x-4} + \cdots + \frac{1}{x-2018} \\ g(x) = \frac{1}{x-1} + \frac{1}{x-3} + \frac{1}{x-5} + \cdots + \frac{1}{x-2017} \end{cases}$$

Montrer que $|f(x) - g(x)| > 2$ pour tout réel non entier compris entre 0 et 2018

Solution de l'exercice 12
Correction sur AOPS

8 TN moderne (Théo)

L'objectif de cette séance était de regarder les comportements des polynômes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ et d'en voir des applications. Le cours et le TD sont repris du formidable cours https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2022/02/Poly-2021-Valbonne.pdf à partir de la fin de la page 284 (et remis ci-dessous). Les exercices du TD étaient les mêmes que ceux du polycopié, à l'exception des deux derniers exercices dont on donne le corrigé.

Comme pour les équations diophantiennes, regarder modulo n est intéressant en arithmétique. Néanmoins, très souvent, le meilleur cadre est de regarder modulo un nombre premier ou une puissance d'un nombre premier : en effet, le lemme chinois permet de comprendre l'étude d'un polynôme modulo n en le comprenant modulo des puissances de nombres premiers.

Regardons ce qui est préservé ou non (dans la suite n sera un entier strictement positif, p un nombre premier) :

— La division euclidienne est préservée dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut effectuer la division euclidienne lorsque le coefficient dominant est inversible (ceci est analogue au fait qu'on peut faire la division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$ lorsque le coefficient dominant est unitaire). Par contre, si le polynôme n'est pas unitaire, on ne peut plus rien faire : il est impossible d'effectuer la division euclidienne de X^2 par $2X$.

— Si a est une racine de P dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut factoriser P : il existe un polynôme Q à coefficient dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$. Néanmoins, si b est une autre racine de P, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ on peut bien factoriser P par $(X-a)(X-b)$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$ par contre cela n'est pas possible : par exemple X^2-1 modulo 15 admet pour racine $1, 4, 11, 14$.

— En particulier, un polynôme de degré d ayant au moins $d+1$ racines dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est nul, mais cela n'est pas le cas dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}[X]$. Un polynôme de degré $d \geqslant 0$ a donc au plus d racines.

— L'interpolation est toujours possible dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: les polynômes interpolateurs de Lagrange sont bien définis.

— Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $X^p - X = \prod_{i=0}^{p-1}(X-i)$. En effet, par petit Fermat, tous les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ sont racines de $X^p - X$. C'est donc un polynôme de degré p et unitaire, dont on connaît p racines d'où la factorisation.

  On obtient aussi que $X^{p-1} - 1 = \prod_{i=1}^{p-1}(X-i)$

— Un polynôme dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ vérifie $P(x) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ si et seulement si $X^p - X$ divise P

— Pour les polynômes de degré 2, dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ avec $p \geqslant 3$, le polynôme ax^2+bx+c (avec $a \neq 0$ a une racine si et seulement si $\Delta = b^2 - 4ac$ est un carré. Les deux racines sont alors $\frac{-b\pm\sqrt{\Delta}}{2a}$. Dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$, on peut effectuer la mise sous forme canonique d'un polynôme de degré 2 et ensuite résoudre selon n si n est impair.

— Les relations de Viète et Newton sont toujours vraies dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

— Dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$ toute l'arithmétique des polynômes persiste : pgcd, décomposition en produit d'irréductible

— Le lemme d'Hensel permet de remonter de racines de P modulo p à des racines de P modulo p^k. Si P a une racine dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ notée y telle que $P'(y) \neq 0 \pmod p$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$, il existe $z \equiv y \pmod p$ tel que $P(z) \equiv 0 \pmod{p^k}$.

Autour des polynômes

Exercice 1
Soit p un nombre premier, montrer que $(p-1)! \equiv -1 \pmod p$.

Exercice 2
Soit p un nombre premier. Déterminer le reste de la division euclidienne de $1^k + \cdots + (p-1)^k$ pour tout entier $k \geqslant 0$ par p (sans racine primitive).

Exercice 3
Soit $n, m \geqslant 2$ tels que pour tout entier $k \in \{1, \ldots, n\}$, $k^n \equiv 1 \pmod m$. Montrer que m est premier et $n = m - 1$.

Exercice 4
Soit p un nombre premier. Combien y a-t-il de polynômes unitaires dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ de degré $p-2$ admettant exactement $p-2$ racines distinctes, et dont les coefficients sont deux à deux distincts et non nuls ?

Irréductibilité

Exercice 5
Soit P un polynôme unitaire, dont tous les coefficients sauf le coefficient dominant sont divisibles par p, et dont le coefficient constant n'est pas divisible par p^2. Montrer que P est irréductible.

Exercice 6
Soit $n \geqslant 2$ un entier, montrer que le polynôme $x^n + 5x^{n-1} + 3$ est irréductible.

Exercice 7
Pour A un polynôme à coefficients entiers non nul, on note $c(A)$ le pgcd des coefficients entiers. Soit P et Q deux polynômes à coefficients entiers non nuls, montrer que $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Exos récents

Exercice 8
Une suite $a_1, a_2, a_3, \ldots$ d'entiers strictement positifs vérifie $a_1 > 5$ et $a_{n+1} = 5 + 6 + \cdots + a_n$ pour tout entier strictement positif n. On suppose que, quelle que soit la valeur de a_1, cette suite contient toujours un multiple de p. Montrer que $p = 2$.

Bonus : montrer que $p = 2$ vérifie l'énoncé.

Exercice 9
Soit p un nombre premier. Tristan et Abigaëlle jouent au jeu suivant. Tristan écrit un entier $X \geqslant 1$ au tableau et donne une suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ 1 d'entiers strictement positifs à Abigaëlle. Abigaëlle joue alors une infinité de tours de jeu. Lors du $n^{\text{ème}}$tour de jeu,

Abigaëlle remplace, selon son choix, l'entier Y écrit au tableau par l'entier $Y + a_n$ ou par l'entier $Y \cdot a_n$.

Abigaëlle gagne si, au bout d'un nombre fini de tours de jeu, elle parvient à écrire au tableau un multiple de p. Déterminer si elle peut réussir à gagner quels que soient les choix initiaux de Tristan, dans chacun des deux cas suivants :

a) $p = 10^9 + 7$;

b) $p = 10^9 + 9$.

Remarque : On admettra que $10^9 + 7$ et $10^9 + 9$ sont premiers.

Exercice 10
Pour tout nombre premier p, il existe un royaume de p-Landia, qui contient p îles numérotées de 1 à p. Deux villes distinctes m et n sont alors reliées par un pont si p divise $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$. Deux ponts peuvent se superposer, mais il est impossible de passer d'un pont à un autre directement.

Montrer qu'il existe une infinité de p pour lesquels il y a deux villes du royaume de p-Landia qui ne sont pas connectées par une suite de ponts.

Pot pourri

Exercice 11
Soit g, f deux polynômes à coefficients entiers tels que f divise g et f et g sont à coefficients dans $\{1, 2022\}$. Montrer que $deg(f) + 1$ divise $deg(g) + 1$.

Exercice 12
(USA TST for EGMO 2019, P3) Soit n un entier strictement positif tel que

$$\frac{1^k + 2^k + \dots n^k}{n}$$

est un entier pour tout $k \in \{1, 2, \dots, 99\}$. Montrer que n ne possède pas de diviseurs compris entre 2 et 100.

Exercice 13
Déterminer tous les nombres premiers p pour lesquels il existe un unique a dans $\{1, \dots, p\}$ tel que $a^3 - 3a + 1$ est divisible par p.

Exercice 14 (Existence de racines primitives)
Soit p un nombre premier, d un diviseur positif de $p - 1$. Montrer qu'il y a au plus $\phi(d)$ éléments dont l'ordre multiplicatif vaut d modulo p. En déduire qu'il y a un élément d'ordre exactement $p - 1$ modulo p.

Exercice 15
Soit p un nombre premier impair et a un résidu quadratique modulo p, montrer que a est un résidu quadratique modulo p^k pour tout entier $k \geqslant 0$.

Exercice 16
Soit f un polynôme non nul à coefficients dans $\{-1, 1\}$ divisible par $(X-1)^{2^k}$. Montrer que $deg(f) \geqslant 2^{k+1} - 1$.

Exercice 17
Soit p un nombre premier et P un polynôme à coefficients entiers. Montrer que si $P(0), \ldots, P(p^2-1)$ forme un système complet modulo p^2, alors il en est de même pour $P(0), \ldots, P(p^3-1)$ modulo p^3.

Solution de l'exercice 1

Comme $X^{p-1}-1=\prod_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*}(X-a)$, on en déduit par Viète que $(p-1)!\equiv\prod_{a\in(\mathbb{Z}/p\mathbb{Z})^*}a\equiv(-1)^{p-1}\times(-1)$ donc $(p-1)!\equiv-1$ si p est impair, et sinon, $p=2$ donc $(p-1)!\equiv1\equiv-1\pmod p$ ce qui prouve le théorème de Wilson.

Solution de l'exercice 2

Rappelons que $X^p-X=\prod_{k=0}^{p-1}(X-k)$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

On utilise les relations de Newton appliquées aux éléments $0,\dots,p-1$ dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Notons σ_k pour $k\in\mathbb{N}$ les polynômes symétriques élémentaires (avec $\sigma_k=0$ si $k\geqslant n$, et S_k les sommes des puissances k-ièmes pour $k\in\mathbb{N}$, on a pour tout $k\geqslant1$:

$$\sum_{r=0}^{k-1}(-1)^r\sigma_rS_{k-r}+(-1)^kk\sigma_k=0$$

Or on peut calculer facilement les σ_k à partir du polynôme X^p-X : $\sigma_0=0$, $\sigma_i=0$ pour $i\geqslant1$, sauf si $i=n-1$: dans ce cas $(-1)^{p-1}\sigma_{p-1}=-1$, donc $\sigma_{p-1}=-1$ (c'est vrai si p impair, et cela se vérifie aisément si $p=2$). En particulier les relations de Newton deviennent $S_k+(-1)^{p-1}\sigma_{p-1}S_{k-(p-1)}$ si $k\geqslant p$, $S_k=0$ si $0<k<p-1$, $S_{p-1}+(-1)^{p-1}(p-1)\sigma_{p-1}$.

Comme $S_0=0$, $S_k=S_{k-(p-1)}$ si $k>p-1$, $S_k=0$ si $0<k<p-1$, et $S_{p-1}=-1$, on obtient que par récurrence immédiate que le reste de la vision euclidienne de $1^k+\dots+(p-1)^k$ vaut $p-1$ si k est divisible par $p-1$, 0 sinon (pour $k=0$, la somme vaut S_0-1).

Solution de l'exercice 3

Soit d un diviseur de m, on a bien pour tout $k\in\{1,\dots,d\}$, $k^n\equiv1\pmod d$. Ainsi si (n,m) vérifie l'énoncé, (n,d) aussi pour tout diviseur d de m.

Supposons que (n,p) vérifie l'énoncé pour p premier. Déjà notons que $n<p$ car $p^n\equiv0\pmod p$: comme $n\geqslant2$, on obtient que $p\geqslant3$. Le polynôme X^n-1 a exactement n racines : les éléments de $\{1,\dots,n\}$. En particulier dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, $X^n-1=\prod_{i=1}^{n}(X-i)$.

Les relations de Viète donnent que $\sum_{i=1}^{n}i=0\pmod p$. Or $\sum_{i=1}^{n}i\equiv\frac{n(n+1)}{2}\equiv0\pmod p$. Ainsi $n\equiv0\pmod p$ ou $n\equiv-1\pmod p$. Comme $2\leqslant n<p$, on obtient que $n=p-1$.

En particulier, cela implique que si (n,m) est solution de l'énoncé, pour tout diviseur premier p de m, $n=p-1$. En particulier, m a au plus un facteur premier : m est de la forme p^k avec p premier et $k\geqslant1$. Pour obtenir le résultat voulu, il suffit de montrer que $k<2$, i.e. par la remarque préliminaire que $(p-1,p^2)$ n'est pas solution.

Supposons que $(n,m)=(p-1,p^2)$ vérifie l'énoncé. Notons déjà que $p-1\geqslant2$, donc $p\geqslant3$. On a alors que $(p-1)^{p-1}\equiv1\pmod{p^2}$. Or d'après le binôme de Newton,

$$(p-1)^{p-1}\equiv\sum_{k=0}^{p-1}\binom{p-1}{k}p^k(-1)^{p-1-k}\equiv(-1)^{p-1}+(p-1)(-1)^{p-2}p\equiv1+p\pmod{p^2}$$

Solution de l'exercice 4

Soit P un polynôme vérifiant l'énoncé. P ne peut pas avoir 0 comme racine, donc P a toutes les racines entre 1 et $p-1$, sauf 1, notée a. Ainsi

$$P_a(X) = \frac{X^{p-1}-1}{X-a} = \frac{X^{p-1}-a^{p-1}}{X-a} = X^{p-2} + aX^{p-3} + \cdots + a^{p-2}$$

.

Parmi les $p-1$ candidats pour vérifier l'énoncé, il reste à vérifier ceux qui ont des coefficients deux à deux distincts non nuls. Si P_a a des coefficients deux à deux distincts, alors comme P_a est unitaire, l'ordre de a modulo p vaut au moins $p-1$, donc par Fermat, l'ordre vaut exactement $p-1$. En particulier a est une racine primitive. Réciproquement si a est une racine primitive, $1, a, \ldots, a^{p-2}$ sont distincts modulo p, donc P_a convient.

Ainsi il y a autant de polynômes que de racines primitives modulo p, i.e. $\phi(p-1)$.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>

Supposons que P est réductible. Il existe alors Q et R des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$ vérifiant $0 < deg(Q) < deg(P)$ et $0 < deg(R) < deg(P)$ tels que $P = QR$.

Regardons cette identité dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$: on a $X^n = \overline{QR}$ où $\overline{Q}$ désigne le polynôme Q vu dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$. Tous les facteurs irréductibles de $\overline{Q}$ sont de la forme X^k, donc $\overline{Q} = X^k$ pour $k \geqslant 0$. On obtient alors que $\overline{R} = X^{n-k}$.

Si $0 < k < n$, on a $\overline{Q}(0) = \overline{R}(0) = 0$, donc p divise $R(0)$ et $Q(0)$, donc p^2 divise $P(0)$, ce qui est contradictoire. Ainsi $k = 0$ ou n, donc $\overline{Q} = X^n$ ou $\overline{R} = X^n$ (on ne traitera que le premier cas par symétrie). Or $deg(Q) \geqslant deg(\overline{Q}) = n$ ce qui est absurde.

Ainsi P est bien irréductible.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>

Supposons que le polynôme est réductible : il existe un tel couple (g, h) tel que $X^n + 5X^{n-1} + 3 = g(X)h(X)$ avec $0 < deg(g), deg(h) < n$. En passant dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$, $X^{n-1}(X-1) = \overline{g}\overline{h}$ avec $\overline{g}$ et $\overline{h}$ les polynômes correspondants à g et h mais vu dans $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}[X]$. Si 0 est racine de $\overline{g}$ et $\overline{h}$, alors $h(0) \equiv g(0) \equiv 0 \pmod 3$ donc 9 divise $f(0) = 3$ ce qui est absurde. Ainsi X^{n-1} divise $\overline{g}$ ou $\overline{h}$, supposons que X^{n-1} divise $\overline{g}$ par symétrie. Dans ce cas g est de degré supérieur ou égal à $n-1$, donc h de degré inférieur ou égal à 1 donc 1. En particulier h étant à coefficient entier et unitaire, h est de coefficient dominant ± 1 donc admet une racine entière, donc f admet une racine entière notée p. Notons que p divise 3 donc p est impair : $f(p) \equiv 1 + 5 + 3 \equiv 1 \pmod 2$ ce qui contredit le fait que $f(p) = 0$ et prouve le résultat voulu.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>

Posons $P = c(P)P_1$ et $Q = c(Q)Q_1$ avec P_1 et Q_1 dans $\mathbb{Z}[X]$: on a alors $c(P_1) = 1 = c(Q_1)$. Ainsi $PQ = c(P)c(Q)P_1Q_1$: il suffit alors de montrer que $c(P_1Q_1) = 1$ pour avoir $c(PQ) = c(P)c(Q)$.

Supposons que $c(P_1Q_1) \neq 1$, il existe alors un facteur premier p divisant tous les coefficients de P_1Q_1. En particulier en passant dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$, $\overline{P_1Q_1} = 0$, donc $\overline{P_1} = 0$ ou $\overline{Q_1} = 0$ (sinon on peut voir que le produit des termes de coefficient dominant de $\overline{P_1Q_1}$ apparaîtrait dans le produit). Ceci donne que p divise $c(P_1)$ ou $c(Q_1)$, ce qui est contradictoire. Ainsi on a bien $c(P_1Q_1) = 1$ ce qui conclut.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>

Supposons $p \neq 2$, notons que par récurrence immédiate $a_n \geqslant 5$ donc l'énoncé est bien posé. On a $a_{n+1} = \frac{a_n(a_n+1)}{2} - 10$

On aimerait idéalement qu'aucun terme ne soit divisible par p. Le plus simple serait que tous les a_n soient congrus à a_0 modulo p, et que a_1 ne soit pas divisible par p.

On cherche donc à résoudre l'équation $x \equiv \frac{x(x+1)}{2} - 10 \pmod p$ qui est équivalent à $2x \equiv x^2 + x - 20 \pmod p$, soit à $x^2 - x - 20 \equiv 0 \pmod p$. Or $x^2 - x - 20 = (x-5)(x+4)$ (ce qu'on peut retrouver en appliquant les formules de résolution d'un polynôme de degré 2 modulo p. En particulier si $a_1 \equiv 5p$ ou $a_1 \equiv -4 \pmod p$, alors $a_n \equiv 5 \pmod p$ pour tout $n \geqslant 1$, ou $a_n \equiv -4 \pmod p$ pour tout $n \geqslant 1$. En prenant $a_1 = 10p - 4 > 5$, a_n n'est pas divisible par p car $p \neq 2$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi on a bien $p = 2$.

Pour $p = 2$, supposons qu'il existe a_1 tel que la suite $(a_n)_{n \geqslant 1}$ ne contient aucun terme pair. Dans ce cas, posons $a_1 = 5 + 2^l k$ avec $l \geqslant 1$ (car a_1 est impair) et k impair.

On a alors si a_n est de la forme $5 + 2^b c$ avec c impair et $b \geqslant 1$,

$$a_{n+1} = \frac{(5+2^b c)(6+2^b c)}{2} - 10 = (5+2^b c)(3+2^{b-1}c) - 10 = 5 + 2^{b-1}(5c + 6c + 2^{b-1}c)$$

a_{n+1} est de la forme $5 \times 2^{b-1}c'$ avec c' impair (valant $(5c + 6c + 2^{b-1}c)$).

Par récurrence immédiate, on obtient que $a_{m+1} = 5 + 2^{l-m} c_m$ pour $0 \leqslant m \leqslant l$ avec c_m un entier impair. Ainsi a_{l+1} est pair, ce qui donne le résultat voulu.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>

Ici Abigail a beaucoup trop de possibilité : à chaque fois elle peut potentiellement obtenir deux résultats différents, donc si Tristan a un espoir de gagner, il aimerait qu'au n-ième tour, Abigail n'ait qu'une possibilité modulo p : b_n. Au départ, il choisir $X = b_0$. Puis, à partir de b_n, pour n'avoir qu'une possibilité, il voudrait choisir a_{n+1} tel que $a_{n+1}b_n \equiv a_{n+1} + b_n \pmod p$, i.e. $a_{n+1} \equiv \frac{b_n}{1-b_n} \pmod p$. En particulier, on aura $b_{n+1} \equiv \frac{b_n^2}{b_n - 1} \pmod p$. Ceci étant dit, on remarque qu'avoir $b_n \equiv 1 \pmod p$ est un problème pour Tristan.

Donnons ainsi la stratégie suivante pour Tristan : Tristan un X non congru ni à 0 ni à 1 mod p. Il pose $b_0 = X$. Puis tant que b_n ne vaut pas 1 modulo p, il pose $a_{n+1} \equiv \frac{b_n}{b_n - 1} \pmod p$ et $b_{n+1} \equiv \frac{b_n^2}{b_n - 1} \pmod p$. On montrer par récurrence immédiate qu'Abigail, au bout de n choix, aura écrit $b_n \pmod p$ au tableau.

On peut espérer que pour tout n, a_n soit toujours défini et b_n soit toujours différent de 0 et 1 modulo p. Notons que si $b_n \neq 0, 1 \pmod p$, $b_{n+1} \neq 0 \pmod p$. De plus $b_{n+1} \equiv 1 \pmod p$ équivaut à $b_n^2 - b_n + 1 \equiv 0 \pmod p$. Ce polynôme a une racine modulo p si et seulement si son discriminant, -3 est un carré modulo p.

Or par réciprocité quadratique

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{2(p-1)}{4}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

.

En particulier cela nous donne la question a : comme $p \equiv 2 \pmod 3$, $\left(\frac{-3}{p}\right) = -1$ donc l'équation $x^2 - x + 1 \equiv 0 \pmod p$ n'a pas de solution : ainsi b_{n+1} ne peut valoir 1 modulo p, donc Tristan gagne.

Pour la question b, malheureusement on ne peut pas assurer que le procédé précédent marche. Une option serait que b_n boucle rapidement. Comme $b_{n+1} \equiv b_n + a_{n+1} \equiv b_n a_{n+1}$, si $b_{n+1} \equiv b_n$, $a_{n+1} \equiv 0 \pmod p$ donc $b_{n+1} \equiv 0 \pmod p$. Le mieux qu'on puisse espérer est donc d'avoir une boucle de taille 2, i.e. $b_2 \equiv b_0 \pmod p$.

Or

$$b_2 \equiv \frac{b_1^2}{b_1 - 1} \equiv \frac{\frac{b_0^4}{(b_0-1)^2}}{\frac{b_0^2}{b_0-1} - 1}$$

L'équation (avec $x \not\equiv 0 \pmod p$) $x \equiv \frac{\frac{x^4}{(x-1)^2}}{\frac{x^2}{x-1}-1}$ est équivalente à $1 \equiv \frac{x^3}{x^2(x-1)-(x-1)^2} \equiv \frac{x^3}{x^3-2x^2+2x-1}$ donc à $2x^2-2x+1 \equiv 0 \pmod p$ et celle-ci a un sens sous réserve d'avoir x différent de 0 et 1 mod x et $\frac{x^2}{x-1}$ différent de 0 ou 1 mod p.

L'équation $2x^2-2x+1 \equiv 0 \pmod p$ est une équation de degré 2, qui a une solution modulo p si et seulement si son discriminant qui vaut -4 est un carré modulo p. Or -4 est un carré si et seulement si -1 en est un. Or dans la b, $p \equiv 1 \pmod 4$ donc -1 est bien un carré : il existe une racine modulo p de $2x^2-2x+1$ qu'on notera y. 0 et 1 n'étant pas racine y est différent de 0 ou 1. De plus, on ne peut pas avoir $\frac{y^2}{y-1} \equiv 0$ ou 1 modulo p : pour 0 c'est clair, pour 1, cela impliquerait avoir $y^2-y \equiv 1$, donc $2y^2-2x \equiv 2$. Or $2y^2-2y \equiv -1$, et $2 \not\equiv -1 \pmod p$. Ainsi si on prend $X = y$, on obtient par récurrence immédiate que $b_n \equiv b_0$ si n est pair, b_1 si n est impair, et est différent de 0 et 1 pour tout $n \geqslant 0$. Ainsi Abigail ne peut gagner : dans les deux cas Tristan gagne.

Solution de l'exercice 10

On peut modéliser le problème par un graphe, dont les villes sont les éléments de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ et (m,n) sont reliés si et seulement si p divise $(m^2-n+1)(n^2-m+1)$.

Plus simplement on définit $f : \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ qui à x associe x^2+1. Deux sommets (m,n) sont reliés si et seulement si $m = f(n)$ ou $n = f(m)$. On peut donc tracer les arêtes de la forme $(m, f(m))$ et obtenir le graphe voulu : il a donc n arêtes.

Idéalement on aimerait montrer que pour des bons nombres premiers, le graphe n'est pas connexe. Pour cela, il suffit de trouver une infinité de nombres premiers p pour lesquels il y a $n-2$ arêtes : il suffit donc de montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers p pour lesquels on a deux arêtes de la forme (a,a), i.e. f a deux points fixes.

Or $f(n) \equiv n$ est équivalent à $n^2-n+1 \equiv 0$, dont le discriminant vaut -3.

Or par réciprocité quadratique si $p > 3$,

$$\left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{2(p-1)}{4}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right)$$

Ainsi si $p \equiv 1 \pmod 3$, -3 est un carré non nul, donc $f(n) \equiv n$ a deux solutions modulo p. Ainsi en enlevant les deux boucles, il y a $n-2$ arêtes, donc le graphe n'est pas connexe : on a le résultat voulu.

Solution de l'exercice 11

On regarde l'identité dans $\mathbb{Z}/2021\mathbb{Z}$: on a que $\overline{f}$ divise $\overline{g}$. Or $\overline{f} = \sum_{k=0}^{deg(f)} X^k$ et $\overline{g} = \sum_{k=0}^{deg(g)} X^k$. Posons la division euclidienne de $deg(g)+1$ par $deg(f)+1$: on a $deg(g)+1 = q(deg(f)+1)+r$. On a

$$\overline{g} = \overline{f}\sum_{k=0}^{q-1} X^{r+k(deg(f)+1)} + \sum_{l=0}^{r-1} X^l$$

Supposons $r \neq 0$. Ainsi $\overline{f}$ divise $\sum_{l=0}^{r-1} X^l$ dont le degré vaut $r-1 < r \leqslant deg(f)$. En particulier, comme f est unitaire, cela est impossible. Ainsi $r = 0$, donc $deg(g)+1$ est divisible par $deg(f)+1$

Solution de l'exercice 12

Déjà essayons de voir ce qu'on peut faire avec cette hypothèse : le résultat est toujours vrai pour $k = 0$. Comme la condition est linéaire on peut en déduire que $\frac{P(1)+P(2)+\ldots P(n)}{n}$ est entier ceci étant vrai pour tout polynôme P à coefficients entiers de degré au plus 99. La question maintenant est : à quel polynôme appliquer cela de façon astucieuse ?

Pour P un polynôme de la forme $P(X) = Q(X) - Q(X-1)$ pour Q à coefficients entiers de degré au plus 99. La somme précédente se téléscopage et donne que $\frac{P(n)-P(0)}{n}$ est un entier. En fait pas de chance, on sait déjà que $n - 0 = n$ divise $P(n) - P(0)$. On aimerait donc avoir quelque chose de plus fort. Pour cela, on pourrait chercher à appliquer le résultat non pas à $Q(X+1) - Q(X)$, mais à un polynôme ressemblant à $\frac{Q(X)-Q(X-1)}{d}$ avec d entier bien choisi, divisant tous les coefficients de $Q(X+1) - Q(X)$. Le plus facile pour d est de prendre $d = p$ un nombre premier, reste à trouver comment avoir un polynôme dont beaucoup de coefficients sont divisibles par p. Fixons p un nombre premier entre 1 et 99, on considère alors logiquement $Q = X^p$, on a $Q(X+1) - Q(X) = \sum\limits_{i=0}^{p-1} \binom{p}{k} X^k = 1 + pR(X)$ avec $R(X) = \sum\limits_{i=1}^{p-1} \frac{\binom{p}{k}}{p} X^k$. Il est connu que p divise $\binom{p}{k}$ si $1 \leqslant k \leqslant p-1$ (ce qui se prouve aisément par la formule comité président). Ainsi le polynôme $\frac{Q(X+1)-Q(X)-1}{p} = R(X)$ est à coefficient entiers.

On applique alors l'hypothèse à $R(X-1)$: via un téléscopage, on obtient que $\frac{Q(n)-Q(0)-n}{np} = \frac{n^p-n}{np}$ est entier. En particulier, si p divise n, np divise n^p donc np divise n ce qui est contradictoire. Ainsi n n'est divisible par aucune entier premier entre 1 et 99 donc aucun entier entre 2 et 100 (car 100 n'est pas premier).

Solution de l'exercice 13

Soit p vérifiant l'énoncé, et a l'unique solution de $a^3 - 3a + 1 \equiv 0 \pmod p$. Notons que $a \neq 0$ donc en posant $b \equiv \frac{1}{a} \pmod p$, $b^3 - 3b^2 + 1 \equiv 0$ donc $(b-1)^3 - 3b + 2 \equiv 0$ donc $(b-1)^3 - 3(b-1) - 1 \equiv 0$. En particulier $-(b-1)$ est aussi une racine modulo p de $X^3 - 3X + 1$, donc $a \equiv -(b-1)$, donc $a^2 \equiv -(ab-a) \equiv a-1$ donc $a^2 - a + 1 \equiv 0 \pmod p$. Or $a^3 - 3a + 1 = (a^2-a+1)(a+1) - 3a$, donc en passant modulo p, $3a \equiv 0 \pmod p$. Or clairement a ne peut être nul modulo p, donc $p = 3$.

Réciproquement si $p = 3$, il y a une unique solution de $a^3 + 1 \equiv 0 \pmod 3$: $a \equiv 2$. Ainsi $p = 3$ est le seul nombre premier qui convient.

Solution de l'exercice 14

Soit d divisant $p-1$. S'il n'existe pas d'éléments d'ordre d, alors l'énoncé est vrai. Sinon, il existe y élément d'ordre d. Tout élément d'ordre d est racine de $P = X^d - 1$, un polynôme qui a au plus d racines. Or les y^k pour $0 \leqslant k \leqslant d-1$ sont des racines de P : ainsi tout élément d'ordre d est une puissance de y. Or si k n'est pas premier avec d, y^k est d'ordre au plus $\frac{d}{PGCD(d,k)}$ donc pas d'ordre k : il y a au plus $\phi(d)$ élément d'ordre d.

Supposons qu'il n'y a pas d'élément d'ordre $p-1$. Tout élément inversible est d'ordre d avec d divisant $p-1$ par petit Fermat. Il y a donc au plus $\sum\limits_{d|p-1, d\neq p-1} \phi(d) = -\phi(p-1) + \sum\limits_{d|p-1} \phi(d) = -\phi(p-1) + p - 1 < p - 1$ éléments inversibles.

En effet $\sum_{d|k} \phi(d) = k$ car entre 1 et k, il y a exactement $\phi(d)$ éléments dont le pgcd avec k vaut d pour tout d divisant k.

Ainsi on a une contradiction : il existe bel et bien un élément d'ordre p.

Solution de l'exercice 15

Déjà rappelons que a est premier avec p. Il existe une racine $y \neq 0$ au polynôme $P(X) =$

$X^2 - a$. Or $P'(y) \equiv 2y \not\equiv 0 \pmod p$. En particulier, d'après Hensel, $X^2 - a$ admet une racine modulo p^k pour tout $k \geqslant 0$, d'où le résultat.

Solution de l'exercice 16

Posons d le degré de f, l'hypothèse de l'énoncé implique que $d \geqslant 2^k$. On passe dans $\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$, posons $\overline{f}$ la réduction de f modulo 2, en particulier $\overline{f} = 1 + \cdots + X^d$ est divisible par $(1+X)^{2^k}$.

Montrons par récurrence que $(1+X)^{2^k} = 1 + X^{2^k}$ pour tout $k \geqslant 1$: pour $k = 1$ on a bien $(1+X)^2 = 1 + 2X + X^2 = 1 + X^2$. Si c'est vrai au rang k, on a que

$$(1+X)^{2^{k+1}} = (1+X^{2^k})^2 = 1 + 2 + X^{2^k} + X^{2^{k+1}} = 1 + X^{2^{k+1}}$$

ce qui conclut.

Ainsi $1 + \cdots + X^d$ est divisible par $1 + X^{2^k}$. En particulier, $1 + X^{2^k} = X^{2^k} - 1$ divise $X^{d+1} - 1$. Posons $d + 1 = q2^k + r$ la division euclidienne de $d+1$ par 2^k, on a que

$$X^{d+1} - 1 = X^r + X^r\left(\left(X^{2^k}\right)^q - 1\right) - 1$$

or $X^{2^k} + 1$ divise $X^r\left(\left(X^{2^k}\right)^q - 1\right)$, donc $X^{2^k} + 1$ divise $X^r - 1$. En particulier, comme $r < 2^k$, on a $r = 0$, donc 2^k divise $d+1$. Ainsi on a soit $d + 1 = 2^k$, soit $d + 1 \geqslant 2^{k+1}$. Le premier cas est impossible car $d \geqslant 2^k$, donc on a forcément $d \geqslant 2^{k+1} - 1$, ce qui donne bien l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 17

Posons $P = \sum\limits_{k=0}^{d} a_k X^k$.

Montrons déjà que pour tout $k \geqslant 1$ et pour tout x, y entier et pour tout entier j strictement positif, $P(x + yp^j) \equiv P(x) + yp^j P(y) \pmod{p^{j+1}}$. En effet,

$$P(x+yp^j) \equiv \sum_{k=0}^{d} a_k(x+yp^j)^k \equiv \sum_{k=0}^{d} a_k(x^k + kx^{k-1}p^j) \equiv P(x) + yp^j P'(x) \pmod{p^{j+1}}.$$

Désormais supposons que $P(0), \ldots, P(p^2 - 1)$ sont distincts modulo p^2. Supposons qu'il existe $0 \leqslant i < j \leqslant p^3 - 1$ tels que $P(x) \equiv P(y) \pmod{p^2}$. Posons r_x et r_y les restes de la division euclidienne de x et y par p^2. On a $P(r_x) \equiv P(x) \equiv P(y) \equiv P(r_y) \pmod{p^2}$, donc $r_x = r_y$. En particulier, il existe un entier $a > 0$ tel que $y = x + p^2 a$. Comme $y < p^3$, on a $a < p$ donc a est premier avec p.

Or par le premier résultat, $P(y) \equiv P(x) + ap^2 P'(x) \pmod{p^3}$, donc p^3 divise $ap^2 P'(x)$. Ainsi p divise $P'(x)$. Comme $P'(r_x) \equiv P(x) \pmod p$, on a que p divise $P'(r_x)$.

Or par le premier résultat, $P(r_x + p) \equiv P(r_x) + pP'(r_x) \equiv P(r_x) \pmod{p^2}$ ce qui contredit l'hypothèse sur P.

Ainsi on aboutit à une contradiction. On a bien que $P(0), \ldots, P(p^3 - 1)$ sont distincts modulo p^3.

9 Géométrie : TD de petites idées simples (Anna)

Exercices d'échauffement

Exercice 1
Soient $ABCD$ un quadrilatère cyclique et P l'intersection des droites (AD) et (BC), Q l'intersection des droites (AC) et (BD). On note E le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits de PAB et PDC. Montrer que EQ est la bissectrice de $\widehat{AEC}$.

Exercice 2
(Benelux 2019.) Soit ABC un triangle d'orthocentre H. On note D, E, F les milieux des segments $[AB]$, $[AC]$, $[AH]$. On note P, Q les symétriques de B, C par rapport à F. Montrer que les droites (QD), (PE) se coupent sur le cercle circonscrit de ABC.

Problèmes

Exercice 3
(Shortlist 2012.) Soit ABC un triangle avec centre de cercle circonscrit O. On suppose que la bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe (BC) en D. Soit F le symétrique de D par rapport au milieu de $[BC]$. Les perpendiculaires à (BC) en D, F coupent (AO) et (AD) respectivement en X et Y. Montrer que B, C, X, Y sont cocycliques.

Exercice 4
(Shortlist 2012.) Soit ABC un triangle avec orthocentre H. Soient D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C. On note I_1, I_2 les centres des cercles inscrits de AFE et BFD, et O_1, O_2 les centres des cercles circonscrits de CI_1A, CI_2B. Montrer que (I_1I_2) est parallèle à (O_1O_2).

Exercice 5
(IMO 1999.) Soient Ω, Γ_1, Γ_2 des cercles tels que Γ_1, Γ_2 sont tangents intérieurement à Ω en M, N respectivement. Γ_1 passe par le centre du cercle Γ_2. La droite passant par les points d'intersection des cercles Γ_1 et Γ_2 coupe Ω en A et B. On note D, E les intersections de (MA) et (MB) avec Γ_1 respectivement. Montrer que (DE) est tangent à Γ_2.

Exercice 6
(USA TSTST 2016.) Soit ABC un triangle acutangle dont H est l'orthocentre et O est le centre du cercle circonscrit. On nomme M, N les milieux des segments $[AH]$, $[BC]$. Supposons que le cercle γ de diamètre $[AH]$ intersecte le cercle circonscrit de ABC en $G \neq A$, et la droite (AN) en $Q \neq A$. La tangente à γ en G coupe la droite (OM) en P. Montrer que les cercles circonscrits de GNQ et MBC se coupent en un point T sur $[PN]$.

Exercice 7
(EGMO 2021.) Soit ABC un triangle donc l'angle $\widehat{A}$ est obtus. On note E, F les intersections des hauteurs issues de B, C respectivement avec la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$. Soient M, N des points sur $[EC]$, $[BF]$ tels que $\widehat{AME} = \widehat{ACB}$ et $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrez que les points M, N, E, F sont cocycliques.

Exercice 8
(Iran TST 2017.) Soit ABC un triangle et I_a le centre de son cercle A-exinscrit. Un cercle passant par I_a et A intersecte les extensions des segments $[AB]$ et $[AC]$ en X, Y respectivement. Soient S, T des points sur $[BI_a]$, $[CI_a]$ respectivement tels que $\widehat{BTI_a} = \widehat{BXI_a}$ et $\widehat{CSI_a} = \widehat{CYI_a}$. On note K l'intersection de $[SC]$ et $[TB]$ et Z l'intersection de (KI_a) et (ST). Montrer que les points X, Y, Z sont alignés.

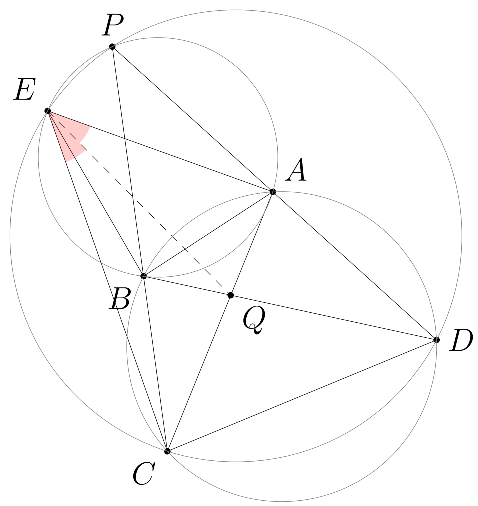
Solutions

<u>Solution de l'exercice 1</u>

E est le centre de la similitude directe qui envoie C, D sur B, A. Donc EAB est semblable à EDC et EAD est semblable à EBC. De plus, comme $ABCD$ est cyclique, ABQ est semblable à DCQ et ADQ est semblable à BCQ. On a donc

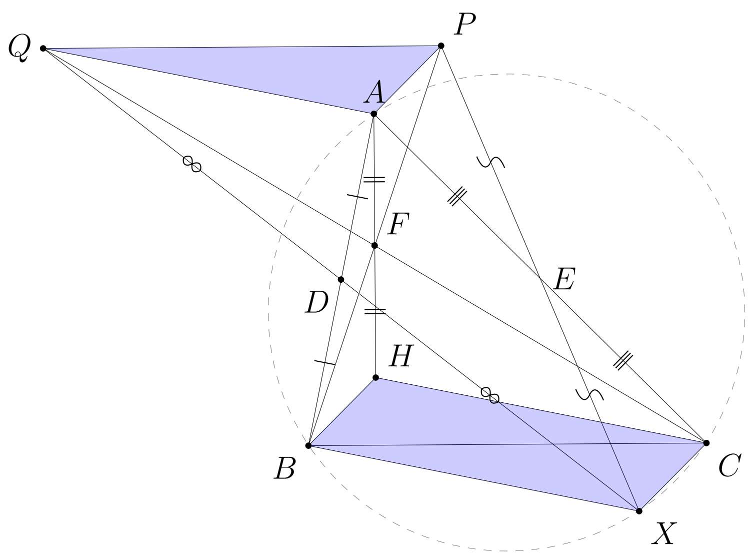
$$\frac{EA}{EC} = \frac{EA}{ED} \cdot \frac{ED}{EC} = \frac{AB}{DC} \cdot \frac{AD}{BC} = \frac{AQ}{QD} \cdot \frac{QD}{QC} = \frac{AQ}{QC}.$$

On a fini par le lemme de la bissectrice.



<u>Solution de l'exercice 2</u>

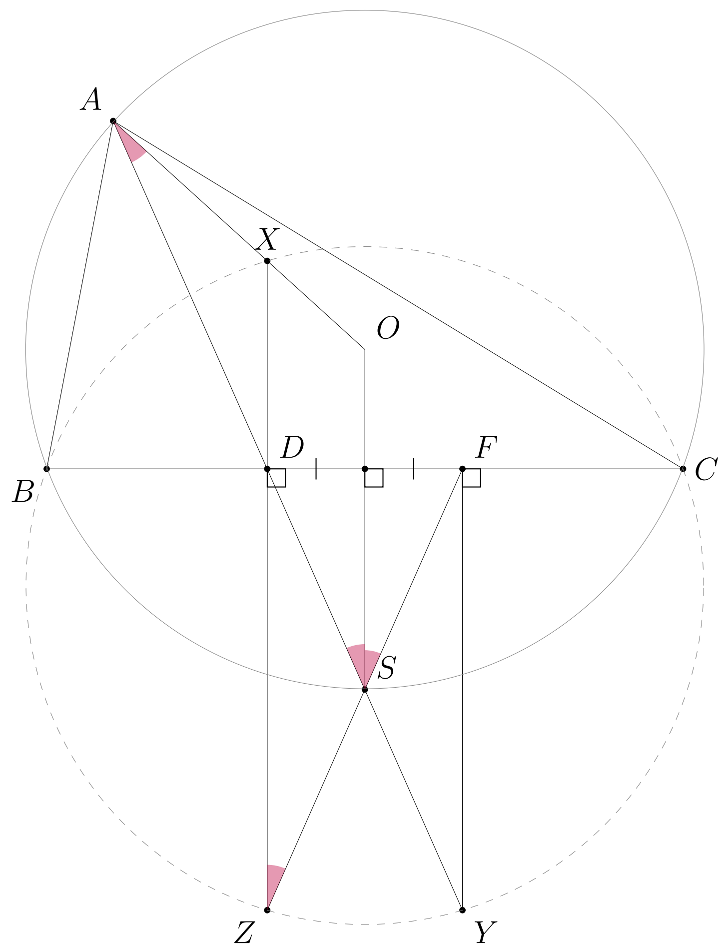
Il existe une homothétie $\mathcal{H}_A$ de centre A, qui envoie B, H, C sur D, F, E. Il existe une ho-



mothétie $\mathcal{H}_F$ qui envoie P, A, Q sur B, H, C. Alors l'homothétie $\mathcal{H}_F \circ \mathcal{H}_A$ de rapport $1/2$ envoie P sur D et Q sur E. Donc, $DE = \frac{1}{2}PQ$ et $(DE) \parallel (QP)$, et ainsi par Thalès $EP = EX$.

Donc, $APCX$, $QAXB$ et $QPCB$ sont des parallélogrammes. De ce fait, $QA = BX$, $QP = BC$, $CX = AP$ et les triangles QPA, BCX sont isométriques. De plus, par homothétie de centre F, QAP est isométrique à CHB. Donc, $\widehat{BXC} = \widehat{BHC} = 180° - \widehat{BAC}$. Donc A, C, X, B sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3
Soit Γ le cercle circonscrit de ABC. On se rappelle que la médiatrice de $[BC]$ et la bissectrice



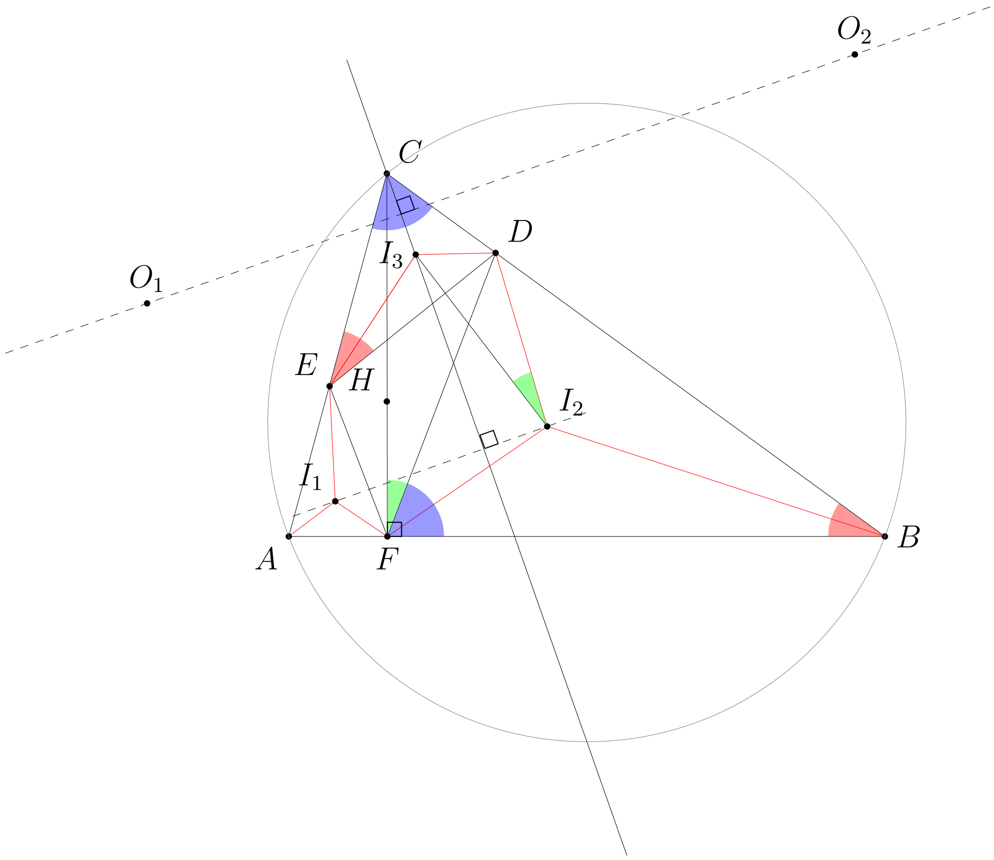
de $\widehat{BAC}$ se coupent sur le cercle Γ en le milieu de l'arc $\widehat{BC}$. Appelons le S. On note que D, F sont symétriques par rapport à la médiatrice (OS) de $[BC]$. On définit Z comme le point symétrique à Y par rapport à cette médiatrice. D, F, Y, Z forment un rectangle dont les diagonales se coupent en S et B, C, Z, Y sont cocycliques. Nous allons montrer que X, C, Z, B sont cocycliques en prouvant que $DB \cdot DC = DX \cdot DZ$. On a $DB \cdot DC = DA \cdot DS$ par cocyclicité de A, B, C, S. Donc, il suffit de montrer que $DA \cdot DS = DX \cdot DZ$, c.-à-d. que A, X, S, Z sont cocycliques. Or, on a

$$\widehat{DZS} = \widehat{OSF} = \widehat{DSO} = \widehat{ASO} = \widehat{SAO} = \widehat{DAX}.$$

Donc A, X, S, Z sont cocycliques, comme voulu.

<u>*Solution de l'exercice 4*</u>

Introduisons également le centre du cercle inscrit I_3 du triangle CDE. Nous allons montrer que C, I_3, I_2, B sont cocycliques. Notons que $DCEI_3$ est similaire à $DFBI_2$. Effectivement, on a $\widehat{DCE} = \widehat{DHB} = \widehat{DFB}$ et $\widehat{DEC} = \widehat{DHC} = \widehat{DBF}$. Donc $DCEI_3 \sim DFBI_2$ et DI_3I_2 est semblable à DCF. Par conséquence, on peut calculer $\widehat{DI_2I_3} = \widehat{DFC} = 90° - \widehat{BFD} = 90° - \widehat{ACB}$, $\widehat{DI_2B} = \widehat{DI_3E}$. Comme I_3 est le centre du cercle inscrit de CED, $\widehat{EI_3D} = 180° - \frac{\widehat{CED}+\widehat{CDE}}{2} = 90° + \frac{\widehat{ECD}}{2}$. Par chasse aux angles, $\widehat{I_3I_2B} = \widehat{I_3I_2D} + \widehat{DI_2B} = 90° - \widehat{ACB} + 90° + \frac{\widehat{ACB}}{2} = 180° - \widehat{I_3CB}$. Donc C, I_3, I_2, B sont cocycliques. Par symétrie, C, I_3, I_1, A sont cocycliques aussi, ainsi que A, I_1, I_2, B. Donc, (O_1O_2) est la médiatrice de $[CI_3]$, et est ainsi perpendiculaire à la bissectrice de $\widehat{ACB}$. Il nous suffit de montrer que (I_1I_2) est perpendiculaire à ladite bissectrice également. Ceci se fait par chasse aux angles. Puisque A, I_1, I_2, B sont cocycliques, on peu exprimer l'angle $\widehat{I_1I_2B}$ en fonctions des angles du triangles ABC. Ceci suffit pour calculer que la bissectrice de $\widehat{ABC}$ coupe (I_1I_2) sous un angle droit. (Laissé à vérifier au lecteur.)



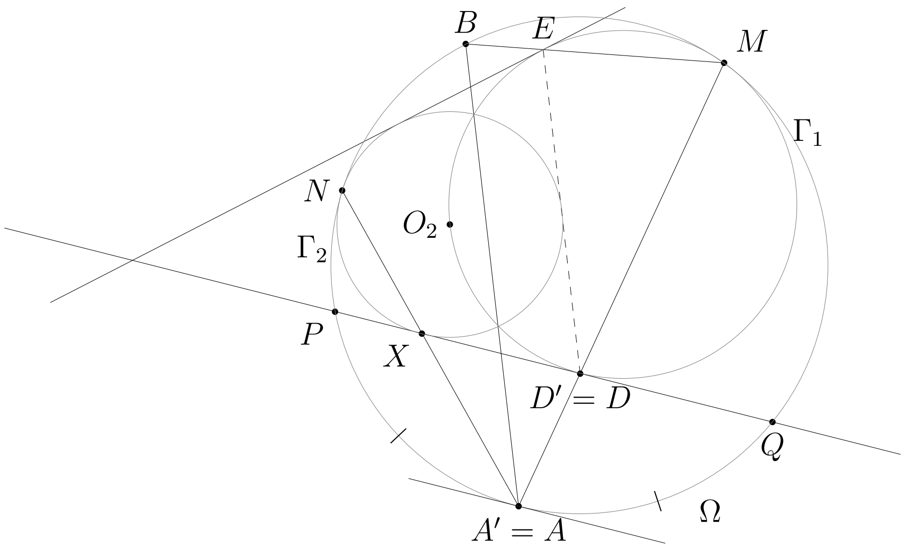
Solution de l'exercice 5

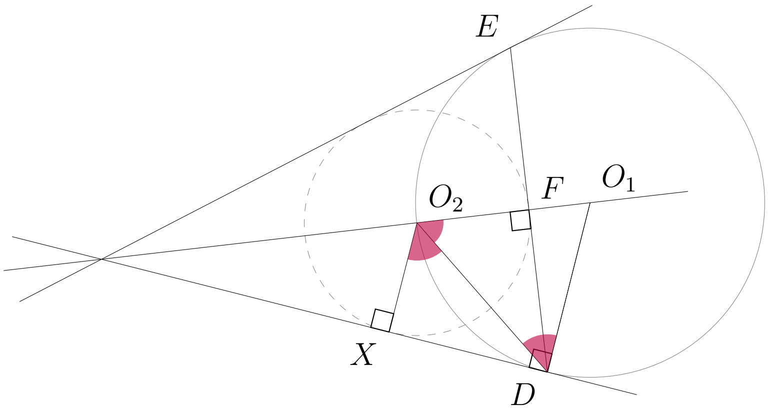
Montrons que D, E sont les points de contact entre Γ_1 et les tangentes communes de Γ_1, Γ_2 (que l'ont appelle t_1, t_2). Supposons que la tangente commune de Γ_1 et Γ_2 la plus proche de A (disons t_1) touche Γ_1, Γ_2 en X, D' respectivement et coupe Ω en P, Q. Nous voulons montrer que $D = D'$.

L'homothétie de centre M qui envoie Γ_1 sur Ω, envoie D' sur le milieu A' de l'arc PQ. Donc M, D', A' sont alignés. Il en est de même pour N, X, A'. Par une chasse aux angles rapide (en s'aidant par exemple de la tangente à Ω en A', qui est parallèle à (PQ)), on peut se convaincre que N, M, X, D' sont cocycliques. Donc, A' est sur l'axe radical de Γ_1 et Γ_2. Donc $A' = A$ et $D' = D$. De même manière, on montre que E est le point de contact de t_2 avec Γ_2.

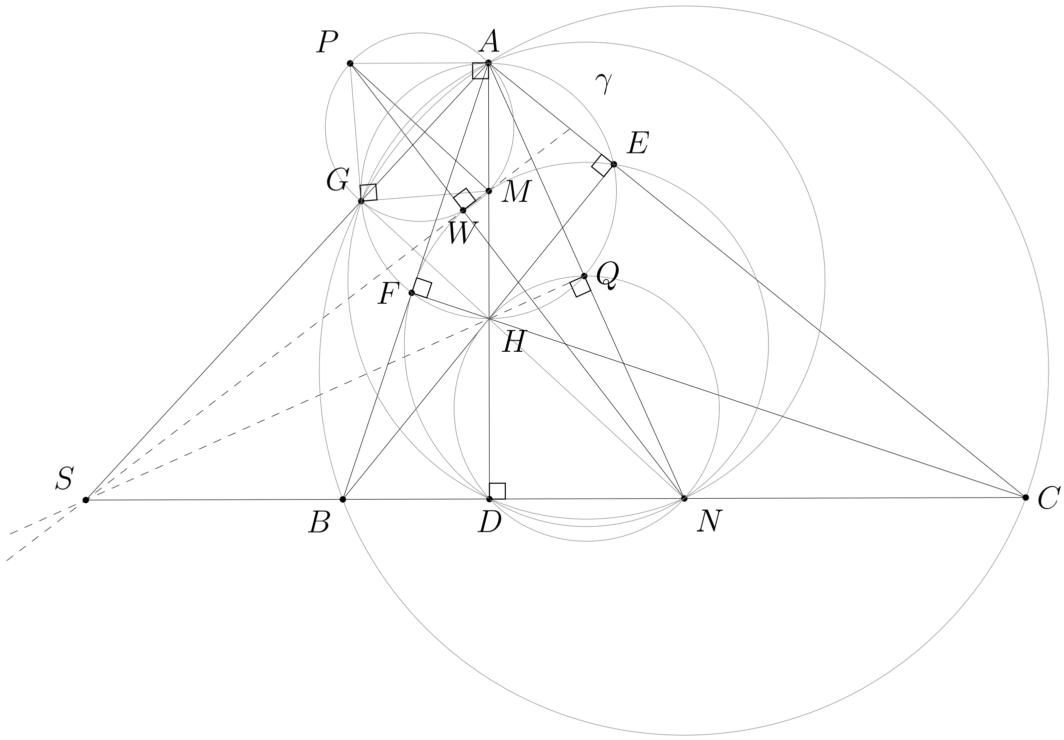
On peut dès à présent oublier de cercle Ω et utiliser le fait que Γ_1 passe par le centre O_2 de Γ_2. Soit O_1 le centre de Γ_1. Soit F le projeté orthogonal de D sur (O_1O_2). Par symétrie, $F \in (ED)$. Nous allons montrer que F appartient à Γ_1. Pour cela, il suffit de montrer que (DO_2) est la bissectrice de $\widehat{XO_2O_1}$. Comme O_1O_2D est isocèle en O_1, et (O_1D), (O_2X) sont parallèles,

$$\widehat{DO_2O_1} = \widehat{O_2DO_1} = \widehat{DO_2X}.$$





Solution de l'exercice 6



L'étape clé de la solution est de conjecturer le bon point comme intersection des cercles circonscrits de BMC et GQN. Soit W le projeté orthogonal de M sur (PN). Nous allons montrer que B, C, M, W sont cocycliques, ainsi que G, W, Q,N.

Trouvons d'abord une meilleure description pour le point P. Le point M est le centre de γ et P est l'intersection de la tangente à γ en G et de la médiatrice de $[GA]$ qu'est (OM). Donc, P est l'intersection des tangentes γ en A et G. Puisque M est le centre de γ, les angles $\widehat{PAM}$ et $\widehat{PGM}$ sont droits. Ainsi, les points P, G, W, M, A sont cocycliques sur le cercle de diamètre de $[PM]$.

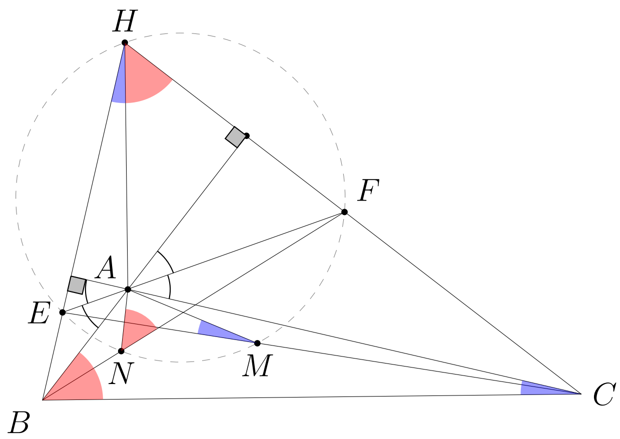
De plus, W, M, D, N sont cocycliques car $\widehat{MDN}$ et $\widehat{MWN}$ sont droits. Donc, W se situe sur le cercle d'Euler de ABC, contenant F, W, M, E, N, D.

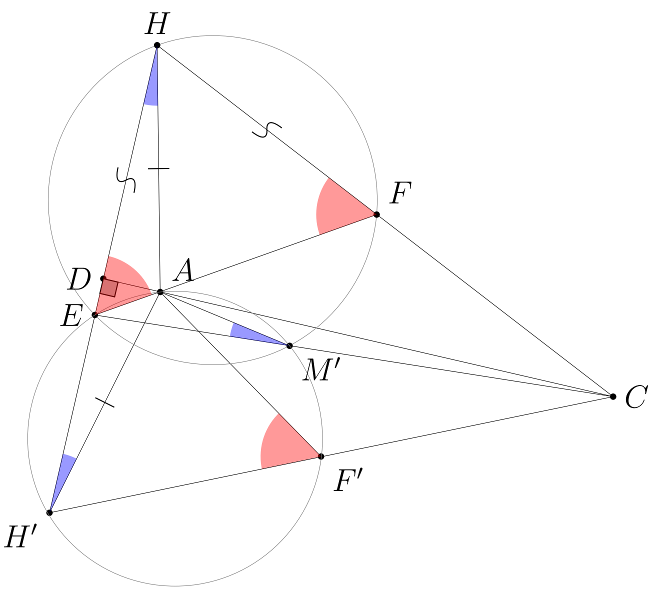
Montrons que G, H, N sont alignés. L'angle $\widehat{AGH}$ est droit, et donc (GH) coupe le cercle circonscrit de ABC en le point diamétralement opposé à A, disons A'. Il est classique que H, N, A' sont alignés. Donc G, H, N sont alignés et $\widehat{AGN}$ est droit. En particulier, ceci implique que A, G, D, N sont cocycliques. Par le théorème des axes radicaux, $(GA), (WM), (DN)$ s'intersectent en un même point, disons S. Donc, $SW \cdot SM = SG \cdot SA = SB \cdot SC$ et W, M, B, C sont cocycliques. Ils nous restent à montrer que G, W, Q, N sont cocycliques.

Nous allons maintenant montrer que S, G, W, Q, N sont cocycliques, ce qui finira. Nous savons déjà que $SGWN$ est cyclique, car les angles $\widehat{SGN}$, $\widehat{SWN}$ sont droits. Similairement, les points H, Q, N, D sont cocycliques. Donc, comme $GAQH$, $GAND$ et $HQND$ sont cycliques, par le théorème des axes radicaux, H, Q, S sont alignés et $\widehat{SQN} = 90°$. Donc S, G, Q, N sont cocycliques. CQFD.

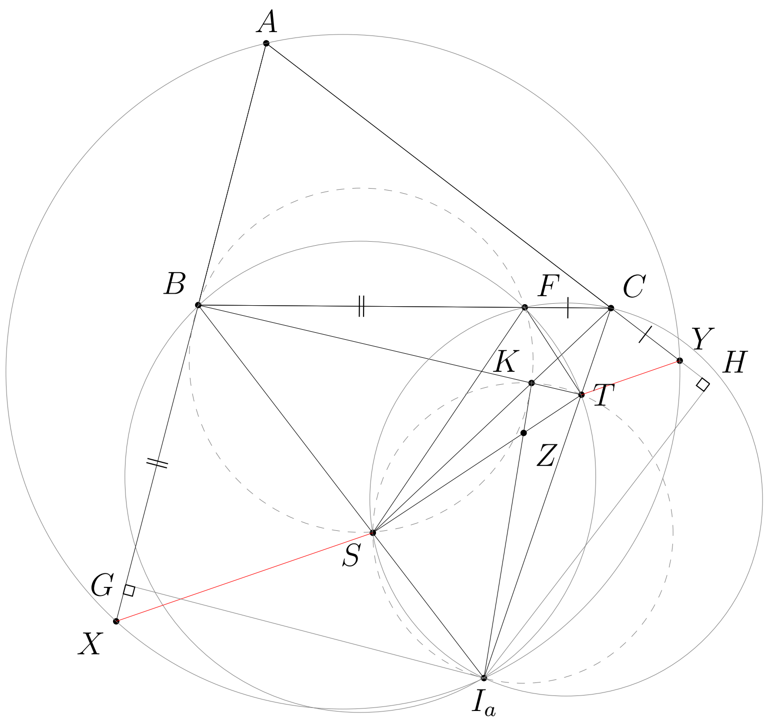
Solution de l'exercice 7

Soit H l'orthocentre de ABC. En traçant une belle figure, on peut conjecturer que HEF est un triangle isocèle en H, et que H, E, F, M, N sont cocycliques. Le premier fait se prouve rapidement par chasse aux angles. Pour montrer la deuxième affirmation, notons M', l'intersection de (EC) avec le cercle circonscrit de HEF. On veut montrer que $M' = M$. En remarquant que A est l'orthocentre du triangle BHC, on a $\widehat{ACB} = \widehat{BHA} = \widehat{EHA}$. Ainsi, il nous suffit de montrer que $\widehat{EHA} = \widehat{EM'A}$. La preuve va être analogue pour montrer que N est sur le cercle circonscrit de HEF. On peut donc oublier les points B, N dès à présent. Soit H', F' les symétriques de H, F respectivement par rapport à la droite (AC). On affirme que E, A, F', H' sont cocycliques. Effectivement, on a $\widehat{AF'H'} = \widehat{AFH} = \widehat{AEH} = 180° - \widehat{AEH'}$. Donc E, A, F', H' sont cocycliques. De plus, H, F, F', H' sont cocycliques par symétrie, et H, F, M', E sont cocycliques par hypothèse. Donc, par puissance de points, et comme H', F', C son alignés, E, M', F', H' sont cocycliques. Donc, $\widehat{AM'E} = \widehat{AH'E} = \widehat{AHE}$, ce qui conclut.





Solution de l'exercice 8



Nous allons montrer d'abord qu'il existe un point F sur $[BC]$ tel que $BF = BX$ et $CF = CY$. Puisque (BI_a), (CI_a) sont les bissectrices de $\widehat{XBC}$ et $\widehat{YCB}$ respectivement, ce point va être le symétrique de X par rapport à (BI_a) et le symétrique de Y par rapport à (CI_a).

Soient G, H les projetés orthogonaux de I_a sur (AB) et (AC) respectivement. Les points A, H, I_a, G sont cocycliques et $I_aG = I_aH$. Par hypothèse, les points A, Y, I_a, X sont aussi cocycliques. Donc I_a est le centre d'une rotation qui envoie X, G sur Y, H et donc $GH = YH$. De plus, on sait que $BG + CH = BC$. Donc $BX + CY = BC$. Ceci prouve notre affirmation sur l'existence du point F.

On note maintenant que B, F, T, I_A sont cocycliques, car $((BT),(I_aT)) = ((BX),(I_aX)) = ((BF),(I_aF))$. De même manière, C, F, S, I_a sont cocycliques.

Montrons maintenant que (XS) est parallèle à (YT). La symétrie par rapport à (I_aB), composée avec la rotation d'angle $((SF),(TF))$ et la symétrie par rapport à (I_aC) envoie (XS) sur (YT) et tourne la droite d'un angle valant

$$2\big((SI_a),(SF)\big) + \big((SF),(TF)\big) + 2\big((TF),(TI_a)\big) =$$

$$= \big((SI_a),(SF)\big) + \big((SI_a),(TI_a)\big) + \big((TF),(TI_a)\big).$$

Comme $BFTI_a$ et $CFSI_a$ sont cycliques, ceci vaut

$$= \big((CI_a),(CF)\big) + \big((SI_a),(TI_a)\big) + \big((BF),(BI_a)\big) =$$

$$= \big((TI_a),(BC)\big) + \big((SI_a),(TI_a)\big) + \big((BC),(SI_a)\big) = 0.$$

Donc (XS) est parallèle à (YT).

Maintenant pour conclure, il nous suffit de montrer que ZTY est similaire à ZSX. Notons que S, K, T, A sont cocycliques. Effectivement,

$$((KT),(I_aT)) = ((BT),(I_aT)) = ((BF),(I_aF)) = ((CF),(I_aF)) = ((CS),(I_aS)) = ((KS),(I_aS)).$$

On en déduit que B, F, K, S sont cocycliques, car

$$((BF),(SF)) = ((CF),(SF)) = ((CI_a),(SI_a)) = ((TI_a),(SI_a)) = ((TK),(SK)) = ((BK),(SK)).$$

Par l'exercice 1, on a alors

$$\frac{ZT}{ZS} = \frac{FT}{FS} = \frac{TY}{XS}.$$

Ceci conclut.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercices

Exercice 1
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous les réels positifs ou nuls x, y et z, l'inégalité suivante est vérifiée

$$2x^3zf(z) + yf(y) \geq 3yz^2f(x).$$

Exercice 2
Soit $ABCD$ un trapèze tel que les droite (AB) et (CD) sont parallèles. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent au point P. Soit ω_1 un cercle passant par le point B et tangent à la droite (AC) au point A. Soit ω_2 un cercle passant par le point C et tangent à la droite (BD) au point D. Soit ω_3 le cercle circonscrit au triangle BPC. Montrer que la corde commune aux cercles ω_1 et ω_3 ainsi que la corde commune aux cercles ω_2 et ω_3 se coupent sur la droite (AD).

Exercice 3
Les entiers positifs n et k satisfaisant $n \geqslant 2k + 1$ sont connus d'Alice. Il y a n cartes avec des nombres de 1 à n, mélangées aléatoirement comme un paquet, face cachée. À son tour, elle fait ce qui suit dans l'ordre :

(i) Elle retourne d'abord la carte du dessus du paquet et la pose face visible sur la table.

(ii) Ensuite, si Alice n'a signé aucune carte, elle peut signer la nouvelle carte maintenant.

Le jeu se termine après $2k + 1$ tours, et Alice doit avoir signé une carte. Soit A le nombre sur la carte signée, et M le $(k+1)^{\text{ème}}$ plus grand nombre parmi les $2k+1$ cartes face visible. Le score d'Alice est $|M - A|$, et elle souhaite que le score soit aussi proche de zéro que possible.

Pour chaque (n, k), déterminer le plus petit entier $d(n, k)$ tel qu'Alice ait une stratégie pour garantir que son score ne dépasse pas d quelque soit le mélange initial.

Solutions

Exercice 1
(1.2 TST Pays-Bas 2024)

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ telles que, pour tous les réels positifs ou nuls x, y et z, l'inégalité suivante soit vérifiée

$$2x^3zf(z) + yf(y) \geq 3yz^2f(x).$$

Solution de l'exercice 1

On va montrer que toutes les fonctions qui sont solutions de cette équation fonctionelle sont les fonctions vérifiant

$$f(x) = \begin{cases} Cx^2 \text{ si } x > 0 \\ D \text{ si } x = 0, \end{cases}$$

où C est un réel positif tandis que D est un réel négatif.

La première chose que l'on remarque est qu'en remplaçant $f(x)$ par x^α, on obtiendrait l'inégalité,

$$2x^3z^{1+\alpha} + y^{1+\alpha} \geq 3yz^2x^\alpha.$$

On se rend alors compte que la valeur $\alpha = 2$ nous permet d'avoir tout le temps cette inégalité d'après l'inégalité arithmético-géométrique. Dès lors, on sait que l'on va essayer de démontrer que la fonction f est de la forme $x \mapsto Cx^2$. Ainsi, on se doute que les cas d'égalités auront lieu lorsque $y = xz$, et cela motive les substitutions suivantes. En fait, on va montrer que f est de la forme $x \mapsto Cx^2$ pour les réels x strictement positifs, on traitera ensuite le cas de $f(0)$ dans la synthèse.

Dans la suite on notera $P(x, y, z)$ l'inégalité de l'énoncé.
On regarde $P(x, y, 0)$, cela nous donne que $yf(y) \geqslant 0$, ou encore que $f(y)$ est positif dès que y est strictement positif.
L'inégalité $P(1, y, y)$ se lit alors $3yf(y) \geqslant 3y^3f(1)$ ou encore $f(y) \geqslant y^2f(1)$ si y est non nul. D'un autre côté, $P(x, x, 1)$ se réécrit $2x^2f(1) \geqslant 2f(x)$ si x est non nul. Cela implique que $f(x) = x^2f(1)$ pour tout x non nul. Les fonctions f qui vérifient l'inégalité fonctionelle sont donc de la forme $f(x) = Cx^2$ pour x non nul et $C \geqslant 0$ une constante.

Réciproquement, si f est de la forme décrite plus haut et si x, y et z sont strictement positifs, on peut appliquer l'inégalité arithmético-géométrique

$$2x^3zf(z) + yf(y) = C(x^3z^3 + x^3z^3 + y^3) \geqslant 3C\sqrt[3]{x^6z^6y^3} = 3yz^2f(x).$$

Il reste maintenant à traiter le cas où un des nombres est nul et de trouver les valeurs possibles pour $f(0)$.

- Si $y = 0$, l'inégalité devient $2x^3zf(z) \geqslant 0$, qui est vérifiée si $z > 0$ et si $z = 0$.
- Si $z = 0$, l'inégalité devient $yf(y) \geqslant 0$ qui est vérifiée si $y > 0$ et si $y = 0$.
- Si $x = 0$ l'inégalité devient $yf(y) \geqslant 3yz^2f(0)$. En fixant y strictement positif et en faisant tendre z vers l'infini, on obtient $f(0) \leqslant 0$. Réciproquement, si cela est vrai l'inégalité $yf(y) \geqslant 3yz^2f(0)$ est bien vérifiée.

Cela conclut la synthèse et donc l'exercice.

Solution alternative : Après avoir conjecturé quelles seraient les solutions, on peut simplifier l'énoncé en posant, pour tout $x > 0$, $g(x) = \frac{f(x)}{x^2}$. L'hypothèse devient alors, pour tous $x, y, z > 0$:

$$2x^3z^3g(z) + y^3g(y) \geqslant 3yz^2x^2g(x)$$

En posant $y = xz$, on obtient

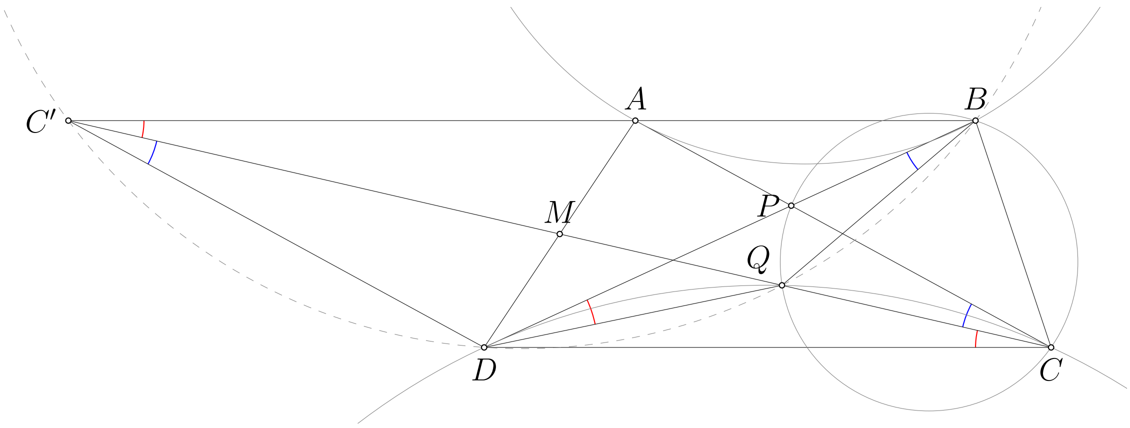
$$2g(z) + g(xz) \geqslant 3g(x),$$

et on conclut en posant $z = 1$ puis $x = 1$ que $g(x) = g(1) = C$ pour tout $x > 0$.

Exercice 2
(P7 TST Iran 2017)

Soit $ABCD$ un trapèze tel que les droite (AB) et (CD) sont parallèles. Les diagonales (AC) et (BD) se coupent au point P. Soit ω_1 un cercle passant par le point B et tangent à la droite (AC) au point A. Soit ω_2 un cercle passant par le point C et tangent à la droite (BD) au point D. Soit ω_3 le cercle circonscrit au triangle BPC. Montrer que la corde commune aux cercles ω_1 et ω_3 ainsi que la corde commune aux cercles ω_2 et ω_3 se coupent sur la droite (AD).

Solution de l'exercice 2



Une figure propre suggère que les deux cordes se coupent en le milieu du segment $[AD]$. On se propose donc de le montrer.

Soit Q le second point d'intersection des cercles ω_2 et ω_3 et R le second point d'intersection des cercles ω_3 et ω_1. Il suffit de montrer que la droite (QC) passe par le milieu du segment $[AD]$. On aura alors de façon symétrique que la droite (BR) passe par le milieu.

Soit M le point d'intersection de la droite (QC) avec la droite (AD) et soit C' le point d'intersection de la droite (QC) avec la droite (AB). Il suffit de montrer que le quadrilatère $C'ACD$ est un parallèlogramme, c'est-à-dire qu'il suffit de montrer que les droites (AC) et $(C'D)$ sont parallèles.

Tout d'abord, d'après les théorèmes de l'angle inscrit et des angles alternes-internes, on a

$$\widehat{QC'B} = \widehat{CC'B} = \widehat{QCD} = \widehat{QDB}$$

donc les points C', D, Q et B sont cocycliques. On en déduit par le théorème de l'angle inscrit :

$$\widehat{DC'C} = \widehat{DC'Q} = \widehat{DBQ} = \widehat{PBQ} = \widehat{PCQ} = \widehat{ACC'}$$

donc les droites $(C'D)$ et (AC) sont parallèles, comme voulu.

Solution alternative : Notons E l'intersection des droites (AD) et (BC) ainsi que Q (resp. R) le deuxième point d'intersection de ω_3 et ω_1 (resp. ω_2). On note M' l'intersection de la droite (BR) avec (AD) ainsi que M l'interseciton de la droite (CQ) avec (AD). On veut montrer que

$$b_{DAME} = b_{DAM'E}$$

pour conclure que $M = M'$. On note X l'intersection de la droite (QC) avec la droite (DB). On a par propriété standard du birapport,

$$b_{DAME} = b_{DPXB}$$

On va exprimer le birapport b_{DPXB} en fonction de DP et PB. On écrit la longueur DX en fonction de DP et PB. On a $DX^2 = XP{\cdot}XB$, ou encore $DX^2 = (DP-DX)(PB+DP-DX) = DP^2+DX^2-2DP\cdot DX+PB\cdot DP-PB\cdot DX$. Ou encore $DP^2+PB\cdot PD = DX\cdot(DP+PB)$, ainsi,

$$DX = \frac{DP^2 + PD\cdot PB}{2DP+PB}.$$

Par homogonéité, on peut supposer que $DP = 1$ et $PB = a$. On peut écrire,

$$DX = \frac{1+a}{2+a}.$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} b_{DPXB} &= \frac{DX}{PX}\cdot\frac{PB}{DB} \\ &= \frac{1+a}{2+a}\cdot\frac{2+a}{1}\cdot\frac{a}{1+a} \\ &= \frac{PB}{PD}. \end{aligned}$$

On peut montrer également que

$$\begin{aligned} b_{PAYC} &= \frac{1}{b_{PAYC}} \\ &= \frac{PA}{PC}. \end{aligned}$$

On conclut alors que $b_{PAYC} = b_{DPXB}$, d'après le théorème de Thalès. Cela montre donc bien que $b_{DAME} = b_{DAM'E}$.

Remarque 1. Dans la solution précédente, on a $b_{DAME} = PB/PD$. Or $PB/PD = -EA/ED$, on retrouve alors bien que M est le milieu du segment $[AD]$.

Exercice 3
(Taiwan TST 2022 Round 3 Mock Exam P6) Les entiers positifs n et k satisfaisant $n \geqslant 2k+1$ sont connus d'Alice. Il y a n cartes avec des nombres de 1 à n, mélangées aléatoirement comme un paquet, face cachée. À son tour, elle fait ce qui suit dans l'ordre :

(i) Elle retourne d'abord la carte du dessus du paquet et la pose face visible sur la table.

(ii) Ensuite, si Alice n'a signé aucune carte, elle peut signer la nouvelle carte maintenant.

Le jeu se termine après $2k+1$ tours, et Alice doit avoir signé une carte. Soit A le nombre sur la carte signée, et M le $(k+1)^{\text{ème}}$ plus grand nombre parmi les $2k+1$ cartes face visible. Le score d'Alice est $|M-A|$, et elle souhaite que le score soit aussi proche de zéro que possible.

Pour chaque (n,k), trouvez le plus petit entier $d = d(n,k)$ tel qu'Alice ait une stratégie pour garantir que son score ne dépasse pas d.

Solution de l'exercice 3
On va montrer que la réponse est

$$d(N,k) = \begin{cases} N-(2k+1) & \text{si } N \leqslant 3k+1 \\ \left\lfloor \dfrac{N-k-1}{2} \right\rfloor & \text{si } N \geqslant 3k+1. \end{cases}$$

On montre dans un premier temps le lemme suivant.

Lemme 2. On a $d(n,k) \leqslant N-(2k+1)$ dans tous les cas.

Démonstration. La médiane des cartes sorties se trouve entre $k+1$ et $N-k$, leur différence est $N-(2k+1)$. Une stratégie pour Alice peut être alors de choisir n'importe quelle carte dans l'intervalle $[\![k+1, N-k]\!]$, de cette manière $|M-A| \leqslant N-(2k+1)$. □

Le lemme suivant permet de conclure dans le cas où $N \leqslant 3k+1$.

Lemme 3. Si $N \leqslant 3k+1$, alors

$$d(N,k) = N-(2k+1).$$

Démonstration. On sait déjà d'après le lemme 2 que

$$d(N,k) \leqslant N-(2k+1).$$

On veut donc montrer qu'il n'est pas possible de faire mieux que cette borne. Pour cela on exhibe un ordre des cartes qui ne permette pas à Alice de faire mieux. On met les cartes

$$2, \ldots, k+1, N-k, \ldots, N-1$$

en haut du paquet. Il y a maintenant deux possibilités.

- Alice a choisit une carte parmis les $2k$ suivantes, sans perte de généralité dans la première moitié. Dans ce cas là, si la $2k+1$ carte est N, la médiane sera $M = N-k$ et ainsi
$$|M-A| \geqslant N-k-(k+1) = N-(2k+1).$$

- Alice n'a choisit aucune carte parmi les $2k$ premières cartes, dans ce cas si la $2k+1$-ème carte est 1, la médiane sera $M = k+1$ et ainsi

$$|M - A| \geqslant k + 1 - 1 = k \geqslant N - (2k+1),$$

d'après l'hypothèse que l'on a faite sur N.

□

Lemme 4. On a
$$d(N,k) \leqslant \left\lfloor \frac{N-k-1}{2} \right\rfloor .$$

Démonstration. On va établir une stratégie pour Alice qui convienne.
On pose $m := \lfloor (N-k-1)/2 \rfloor$. On traite le cas où $N-k$ est un nombre pair, on peut en déduire le cas impair en enlevant 1 à la valeur de N. On peut alors séparer nos nombres dans $[\![1, N]\!]$ de la manière suivante :

$$(1, \underbrace{2, \dots, k+1, k+2, \dots, m+1}_{m \text{ éléments}}, \underbrace{m+2, \dots, N-m-1, N-m, \dots, 2m+1}_{m \text{ éléments}}, \underbrace{2m+2, \dots, N}_{k+1 \text{ éléments}})$$

ou de la manière suivante :

$$(\underbrace{1, 2, \dots, k+1}_{k+1 \text{ éléments}}, \underbrace{k+2, \dots, m+1, m+2, \dots, N-m-1}_{m \text{ éléments}}, \underbrace{N-m, \dots, 2m+1, 2m+2, \dots}_{m \text{ éléments}}, N).$$

L'idée est que comme dans le lemme 2, la valeur de M est forcément dans l'intervalle $[\![k+1; N-k]\!]$. Ainsi, dès qu'une carte sort et porte un nombre dans l'intervalle

$$[\![N-k-m, k+1+m]\!] = [\![m+2, N-m-1]\!],$$

c'est-à-dire que l'on regarde l'intersection de l'intervalle du milieu dans le schéma du dessus avec celui du dessous, Alice peut choisir ce nombre et finir.

Si jamais aucune carte de cet intervalle sort, alors toutes les cartes qui sortent sont dans l'intervalle $[\![1, m+1]\!]$ (c'est à dire dans notre première intervalle du schéma plus haut) ou dans l'intervalle $[\![N-m, N]\!]$ (pareil mais en symétrique). Dès qu'il y a toutes les cartes qui sortent dans un des deux intervalles, alors il suffit de choisir cette carte. En effet, sans perte de généralité c'est l'intervalle des nombres les plus petits dans lequel il y a $k+1$ cartes sorties en premier. Dans ce cas, $M \leqslant m+1$ et $A \geqslant 1$, donc dans ce cas on a également

$$|M - A| \leqslant m.$$

□

On veut ensuite montrer l'inégalité dans l'autre sens.

Lemme 5. On a
$$d(N,k) \geqslant \left\lfloor \frac{N-k-1}{2} \right\rfloor .$$

En guise de motivation on va traiter d'abord le cas $k = 1$.

Lemme 6. On a, pour tout $N \geqslant 3$,

$$d(N,1) = \left\lfloor \frac{N-2}{2} \right\rfloor.$$

Démonstration. D'après le lemme 4, il suffit de démontrer que $d(N,1) \geqslant \left\lfloor \frac{N-2}{2} \right\rfloor$. On va donner un ordre de sorti des cartes qui convient. On commence par mettre la carte en $\lfloor N/2 \rfloor$ en haut du paquet. Il y a maintenant deux cas possibles.

- Alice décide de choisir la carte $\lfloor N/2 \rfloor = A$, dans ce cas si les cartes suivantes sont N et $N-1$, alors $M = N-1$ et ainsi,

$$|M-A| = N-1-\left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{2N-2-N}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{N-2}{2} \right\rfloor.$$

- Alice décide de ne pas choisir cette carte, dans ce cas si les cartes suivantes sont 1 puis N, quelque soit le choix d'Alice on a forcément $M = \lfloor N/2 \rfloor$ et donc

$$|M-A| \geqslant \left\lfloor \frac{N}{2} \right\rfloor - 1 = \left\lfloor \frac{N-2}{2} \right\rfloor.$$

Dans tous les cas on peut donc conclure. □

On va maintenant montrer le lemme 5.

Démonstration du lemme 5. On choisit en haut du paquet les $2(k-1)$ cartes suivantes $2, 3, \ldots, k$ puis $N, \ldots, N-k+2$. On fait maintenant encore une disjonction de cas.

- Si Alice a déjà choisi sa carte et qu'elle se trouve dans l'ensemble $2, 3, \ldots, k$, on fait alors en sorte que $N-k$ soit la médiane et alors $|M-A| \geqslant N-2k$ est strictement plus grand que notre borne.
- Si Alice a déjà choisi sa carte et si elle se trouve dans l'ensemble $N, N+1, \ldots, N-k+2$, on fait alors en sorte que $k+1$ soit la médiane et alors $|M-A| \geqslant N-2k$ qui est encore strictement plus grand que notre borne.
- Il reste le cas où Alice n'a pas choisi de carte, on va alors appliquer la stratégie du cas où $k=1$. En remplaçant le nombre N par $N-k+1$, pour cela il suffit de vérifier que les cartes que l'on choisi dans le lemme 6 sont bien présente et que la médiane reste la même. Ainsi,

$$|M-A| \geqslant \left\lfloor \frac{N-k+1-2}{2} \right\rfloor.$$

□

Cela conclut la preuve de l'exercice.

VIII. La Muraille

Instructions

Les exercices 1 à 42 sont dits de Niveau 1.
Les exercices 43 à 96 sont dits de Niveau 2.
Les exercices au-delà de 97 sont dits de de Niveau 3.
Un exercice est décoré de n étoiles lorsqu'il est resté sans solution à la muraille de n stages.
Les élèves des groupes A et B cherchent les exercices de Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe C cherchent les exercices de Niveau 2 (ou au-dessus). Les élèves des groupes D et E cherchent les exercices de Niveau 3.
- Une fois un exercice résolu, la solution doit être rédigée et donnée à une animatrice ou un animateur. Le nom de la personne ayant résolu un exercice sera écrit dans le polycopié.
- Il est possible de résoudre les exercices à plusieurs, le but est d'avoir tout résolu à la fin du stage !

Les prix de la muraille

À la fin du stage, quatre Grand Prix Mystère seront décernés aux quatre élèves ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille dans chacun des cinq groupes A, B, C, D, E.
À la fin du stage, un autre Grand Prix Mystère sera décerné à l'équipe (constituée d'au moins deux élèves et d'au plus quatre élèves) ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille.

Barème : Un exercice à x étoiles résolu rapporte $x + 1$ points. Dans une équipe, on prend en compte le groupe de l'élève le plus avancé.

Exercice 1
Trouver toutes les paires d'entiers strictement positifs (a, b) tels que $a+1 \mid a^3b-1$ et $b-1 \mid b^3a+1$.

Résolu séparément par Lilian CHARTON et Assem HAMWI

Exercice 2
Existe-t-il deux premiers p et q tels que $p^2(p^3-1) = q(q+1)$

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 3
Trouver tous les entiers n tels que $n^2 \mid (n-1)^2$.

Résolu par Arthur SEBAN et Assem HAMWI

Exercice 4
Trouver toutes les paires d'entiers positifs (x, y) telles que $2^x + 3^y$ soit un carré parfait.

Résolu par Arthur SEBAN et Assem HAMWI

Exercice 5 $\star\star$
Sur les côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC, se trouvent respectivement les points A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3, B_4 et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. On note que ces points ne sont pas confondus entre eux, ni avec les sommets du triangle ABC. Deux triangles sont considérés comme identiques si chaque sommet d'un triangle est aussi un sommet de l'autre.

Indiquez le nombre de triangles non-plats qui peuvent être formés à partir de tous ces points (y compris les sommets A, B, C)

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 6
Trouver tous les triplets d'entiers n, m, p avec p premier et

$$n^{2p} = n^2 + m^2 + p + 1$$

Exercice 7
Trouver tous les triplets de premiers (p, q, r) tels que

$$3p^4 - 5q^4 - 4r^2 = 26.$$

Résolu par Arthur SEBAN

Exercice 8
Trouver tous les triplets d'entiers positifs a, b, c tels que

$$2^a 3^b + 9 = c^2.$$

Résolu par Assem HAMWI

Exercice 9
Trouver tous les couples d'entiers $n, m > 0$ tels que $n^5 - m^5 = 16mn$.

Exercice 10
Trouver le plus grand n tel que pour tout $p > 7$ premier, $n \mid p^6 - 1$.

Résolu par Arthur SEBAN et Assem HAMWI

Exercice 11 ⋆⋆⋆
Soit E un ensemble de 2021 réels tels que pour tout couple d'éléments distincts $(a, b) \in E^2$, on ait $a^2 + b\sqrt{2}$ rationnel. Montrer que si $a \in E$, alors $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.
Résolu par Antoine CARRIOU

Exercice 12
On place $2n$ points dans le plans et on trace $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer que l'on peut trouver 3 points reliés deux à deux.
Résolu par Antoine CARRIOU

Exercice 13 ⋆⋆⋆⋆
Soit n un entier naturel. On souhaite choisir n entiers du tableau ci-dessous en en prenant exactement 1 par ligne et 1 par colonne.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

Déterminer la valeur maximale du produit de ces n nombres.

Exercice 14 ⋆⋆⋆⋆
Six cercles sont concourrants en un même point.

Montrer que l'un de ces cercles contient le centre d'un autre.

Exercice 15
Six cercles sont concourants. Montre que l'un de ces cercles a son centre à l'intérieur d'un autre (ou sur le bord).
Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 16 ⋆⋆⋆⋆
Soixante-dix employés travaillent pour une entreprise internationale. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par X et non parlée par Y, et une langue parlée par Y mais pas par X.

Quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés ?
Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 17
Soit O le centre du cercle circonscrit Γ du triangle ABC. La droite (BO) recoupe Γ en D. La droite perpendiculaire à (BC) passant par A recoupe Γ en E. Prouver que l'aire du quadrilatère $BECD$ est égale à l'aire du triangle ABC.
Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 18 ⋆

On dispose d'un 50-gone dont les sommets se trouvent sur un cercle. On suppose que les arcs reliant deux points consécutifs sur le cercle ont pour valeur $1, 2, 3, ..., 50$ dans un certain ordre. On suppose de plus que la différence de longueur entre deux arcs opposés (pour le polygone) vaut toujours 25. Montrer que le 50-gone a nécessairement deux côtés parallèles.

Exercice 19 ⋆⋆⋆⋆

On considère 4 cercles concentriques du plan. On suppose que leurs rayons forment une progression arithmétique strictement croissante.

Montrer qu'il est impossible d'avoir un carré dont chacun des 4 sommets appartient à un cercle différent.

Résolu par Martin VIDAL OGER

Exercice 20

Une compagnie internationale possède 70 employés. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par X et non parlée par Y, et une langue parlée par Y mais pas par X. Quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés ?

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 21

Soit $n > 0$ un entier. Prouver qu'un carré de $2^n \times 2^n$ cases unité, privé d'une case, peut être pavé par des coins (un coin est un carré 2×2 dont on a enlevé une case).

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 22

Soit A un point d'intersection de deux cercles Γ_1 et Γ_2 de rayons p et q. Soient respectivement B et C deux points de Γ_1 et Γ_2 tels que (BC) est tangente aux deux cercles. Prouver que $pq = R^2$, où R est le rayon du cercle circonscrit au triangle ABC.

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 23 ⋆

Pour quels entiers a existe-t-il un entier n strictement positif vérifiant $7an - 3n! = 2020$?

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 24 ⋆⋆

Soit f une fonction de $N^\star$ dans Z telle que $f(1) = 0$, $f(p) = 1$ si p premier et $f(xy) = xf(y) + yf(x)$. Déterminer le plus petit $n \geqslant 2015$ tel que $f(n) = n$.

Résolu par Arthur SBEAN et Assem HAMWI

Exercice 25 ⋆⋆⋆

Aurélien dispose n lampes en ligne. Toutes les minutes, il éteint les lampes déjà allumées. Il allume également les lampes éteintes qui étaient à côté d'exactement une lampe déjà allumée. Pour quels n existe-il une configuration initiale telle qu'il y ait toujours au moins une lampe allumée ?

Résolu par Antoine CARRIOU

Exercice 26 **
Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels il existe des entiers naturels x et y tels que :

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Exercice 27
Montrer que

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} \binom{n+k}{k} = 2^n$$

Exercice 28 *****
Soit n un entier strictement positif. On dit qu'un sous ensemble A de $\{1, 2, ..., n\}$ est "*fade*" si pour tout x, y dans A, $x + y$ n'est pas dans A. Selon la valeur de n, quel est le cardinal du plus grand ensemble *fade* ?

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 29
Deux personnes, à tour de rôle, mettent sur une table rectangulaire des pièces de monnaie identiques de sorte qu'elles ne se superposent pas. Celui qui perd est celui qui n'a plus aucune place où mettre une pièce ? Qui sera le vainqueur de ce jeu ?

Résolu par Antoine CARRIOU

Exercice 30 **
Soit p un nombre premier, $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_p$ des entiers (pas forcément distincts) de $\{1, \ldots, p-1\}$. Montrer qu'il existe deux entiers i et j tels que p divise $a_i b_j - a_j b_i$.

Résolu par Arthur SEBAN

Exercice 31 ****
Est-il possible de découper un triangle équilatéral en 4 pièces de sorte qu'il soit possible de les réassembler pour former un carré ?

Exercice 32
Déterminer en fonction de n le nombre de mots de $n \geq 1$ lettres choisies parmi a, b, c et qui contiennent un nombre pair de a.

Résolu par Arthur SEBAN

Exercice 33 ****
Quelle est la plus grande valeur que peut prendre le produit d'entiers strictement positifs de somme n ?

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 34
On colore chaque sommet d'un échiquier 8×8, soit en bleu, soit en rouge, de telle sorte que chaque case possède 2 sommets bleus et 2 rouges. De combien de façon peut-on effectuer un tel coloriage ?

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 35
Soient $a, b, c > 0$ des réels $abc = \frac{2}{3}$. Prouver que :

$$\frac{ab}{a+b} + \frac{bc}{b+c} + \frac{ca}{c+a} \geqslant \frac{a+b+c}{a^3+b^3+c^3}.$$

Résolu Arthur SEBAN et Assem HAMWI

Exercice 36
Soient $a, b, c > 0$ réels tels que $a+b+c+ab+bc+ca+abc = 7$. Prouver que $\sqrt{a^2+b^2+2} + \sqrt{b^2+c^2+2} + \sqrt{c^2+a^2+2} \geq 6$

Exercice 37 ****
Quarante et une équipes s'affrontent à *l'open de pétanque du stage de Valbonne*. Chaque équipe affronte successivement chaque autre lors de différents *matchs* (en 13 points, comme il se doit). Chaque match se conclut par une victoire pour une équipe, et une défaite pour l'autre, il n'y a pas de match nul.

Lors de la proclamation des résultats, Mathieu affirme : « *Difficile de dire quelle équipe a gagné. Non seulement chaque équipe a au moins perdu un match, mais pire, à chaque fois que l'on choisit deux équipes, on peut trouver une troisième équipe qui a battu chacune des deux premières équipes.* »
Est-ce possible, autrement dit, un tel tournoi existe-t-il ?

Exercice 38 ***
Soient a, b, c, d des réels tels que $a \geq b$ et $c \geq d$, montrer que le polynôme suivant est à racines réelles :

$$P(x) = (x+a)(x+d) + (x+c)(x+b)$$

Exercice 39
Calculer le terme général de la suite définie par $x_0 = 3, x_1 = 4$ et $x_{n+1} = x_{n-1}^2 - nx_n$ pour $n \geq 1$.

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 40
Cinq entiers naturels engendrent 10 sommes quand on les ajoute deux à deux de toutes les façons possibles. Est-il possible que ces 10 sommes soient 10 entiers naturels consécutifs ?

Résolu par Lilan CHARTON

Exercice 41 ******
Mathieu joue au billard sur un billard rectangulaire de 2,03 m sur 3,03 m. Sa boule, de 6 cm de diamètre, est placée au milieu d'un grand côté du billard et Mathieu la fait rouler, sans effet, selon un angle de 45 degré par rapport au côté du billard. En supposant que Mathieu lui ait donné suffisamment de force, à quelle distance du point de départ le centre de la boule sera-t-il au moment du 59e rebond ?

Résolu par Arthur SEBAN et Assem HAMWI

Exercice 42 ⋆⋆

Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On considère les centres des cercles circonscrits aux trois cercles $(ABD), (ADC)$ et (ABC). Montrer que le triangle formé par ces centres est isocèle.

Résolu par Arthur SEBAN et Assem HAMWI

Exercice 43

Existe-t-il des entiers a, b and un premier p tel que $a^3 - b^3 = 4p^2$

Exercice 44

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$:

$$\frac{1}{x^2} + \frac{y}{xz} + \frac{1}{z^2} = \frac{1}{2013}$$

.

Exercice 45 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Pour quels entiers $n \geqslant 1$ existe-t-il une bijection

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

de sorte que $|\sigma(i) - i| \neq |\sigma(j) - j|$ si $i \neq j$?

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 46

Déterminer tous les triplets (x, y, p) d'entiers strictement positifs tels que p est premier et $p = x^2 + 1$ et $2p^2 = y^2 + 1$.

Exercice 47 ⋆

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit A_1 le symétrique de A par rapport à (BI) et (B_1) le symétrique de B par rapport à (AI). Soit M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[A_1B_1]$. Montrer que $IM < IN$.

Exercice 48

Résoudre dans $\mathbb{Z}$ le système :

$$x^2 - y^2 = z$$

$$3xy + (x - y)z = z^2$$

Résolu par Henri HOVASSE

Exercice 49 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Soit P un point de l'espace et $r > 0$. Montrer qu'il existe 8 sphères disjointes de même rayon r qui cachent le point P, c'est-à-dire que toute demi-droite issue de P rencontre au moins l'une des sphères. On supposera que les centres des sphères sont tous à des distances $> r$ de P.

Résolu par Martin VIDAL OGER

Exercice 50 ⋆⋆

On se donne deux entiers $1 \leq k_1 \leq k_2$ et $n \geq k2$ points sur une droite, dont les abscisses sont exactement les entiers de 1 à n. On veut colorier ces points de sorte que deux points espacés d'exactement k_1 ou k_2 soient toujours de la même couleur. Quel est le nombre maximal de couleurs que l'on pourra utiliser ?

Exercice 51
Montrer que tout ensemble fini A d'entiers positifs est inclus dans un en- semble fini B d'entiers positifs tel que tout élément de B divise la somme des éléments de B

Exercice 52
On suppose qu'on a une fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ strictement croissante qui vérifie

$$f(f(n)) = 3n.$$

Calculer $f(2011)$.
Résolu par Vlad CONSTANTINESCU

Exercice 53 ****
Soit ABC un triangle, l une droite et L, M, N les pieds des perpendiculaires à l passant par A, B, C respectivement. Les perpendiculaires aux droites $(BC), (CA), (AB)$ passant par L, M, N respectivement sont notées a, b, c.

Montrer que a, b, c sont concourantes.

Exercice 54 **
Matthieu se trouve devant une forêt très particulière. Il sait que les arbres sont tous identiques, ponctuels et que leurs positions sont données exactement par l'ensemble des points du plan de coordonnées entières strictement positives. Il se place à l'origine $(0, 0)$ et observe la forêt : il remarque que certains arbres sont visibles depuis son point de vue, mais que d'autres sont masqués par d'autres arbres. Montrer que pour tout entier $r \geq 1$, il existe un carré de côté r (c'est-à-dire un ensemble d'arbres de coordonnées (x, y) avec $a + 1 \leq x \leq a + r$ et $b + 1 \leq y \leq b + r$ pour certains entiers a et b) dont Matthieu ne voit aucun arbre.

Exercice 55 **
On dit qu'un nombre premier p divise le polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ lorsqu'il existe un entier n tel que p divise $P(n)$. Montrer que tout polynôme non constant de $\mathbb{Z}[X]$ admet une infinité de diviseurs.

Exercice 56 *
Déterminer s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ telle que pour tous $x, y > 0$, on a

$$f(x + y) \geqslant yf(x) + f(f(x))$$

Exercice 57 ***
Un mot est une suite de 123 caractères parmi A, B et C contenant 42 consonnes (B et C) et 81 voyelles (A). Au maximum, combien peut-on prendre de mots distincts de telle manière que chaque paire de mots choisis admet une position où l'un des deux mots contient un B et l'autre un C.

Exercice 58 ⋆⋆
Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Soit X et Y sur AB et AC respectivement tels que le cercle circonscrit au triangle X, Y, O passe par A. Montrer que l'orthocentre de ce triangle est sur (BC).

Exercice 59
On considère un ensemble de $2n+1$ droites du plan, deux jamais parallèles ni perpendiculaires et trois jamais concourantes. Trois droites forment donc toujours un triangle non-rectangle. Déterminer le nombre maximal de triangles aigus qui puissent ainsi être formés.

Exercice 60 ⋆⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, O son centre du cercle circonscrit et R son rayon. Soient A', B', C' les symmétriques de A, B, C par rapport au droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.

Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si $OH = 2R$.

Exercice 61 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Déterminer tous les couples de polynômes non constants P et Q unitaires, de degré n et admettant n racines positives ou nulles (non nécessairement distinctes) tels que

$$P(x) - Q(x) = 1.$$

Exercice 62 ⋆⋆⋆⋆⋆
Montrer que pour tout réels positifs $x_1, x_2, ..., x_n$ on a :

$$\frac{1+x_1^2}{1+x_1x_2} + \frac{1+x_2^2}{1+x_2x_3} + \cdots + \frac{1+x_n^2}{1+x_nx_1} \geqslant n$$

Exercice 63 ⋆⋆⋆⋆⋆
Soit c un entier. Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers vérifiant les conditions suivantes ?

• $P(0) = 1$

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = P(x_n)$ (pour tout $n \geq 0$). Il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait pgcd$(x_n, n+c) > 1$.

Exercice 64 ⋆⋆
Soient 5 droites a, b, c, d, e dans le plan, jamais 2 parallèles, jamais 3 concourantes. Les cercles circonscrits aux triangles (a, b, c), (b, c, d), (c, d, e), (d, e, a) et (e, a, d) sont nommés respectivement B, C, D, E, A. Les cercles B, C se coupent une fois sur les 5 droites de départ et une fois en un autre point, nommé U. On définit de même V, X, Y, Z seconde intersection de (C, D), (D, E), (E, A), (A, B) respectivement. Montrer que $UVXYZ$ sont cocycliques.

Exercice 65 **
Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur. Le projeté de P sur (BC) s'appelle A_1 et celui sur la hauteur issue de A dans ABC est A_2. On définit de même B_1, B_2, C_1, C_2. Montrer que $(A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2)$ sont concourrantes.

Exercice 66 ***
Martin et Rémi jouent à cache cache. Initialement, Martin choisit un point A dans un carré 1×1. Rémi choisit ensuite consécutivement $P_0, ..., P_N$ des points de ce carré. Pour $k \geq 1$, une fois que Rémi a placé le point P_k, Martin lui dit "tu chauffes" si P_k est plus proche de A que P_{k-1} et "tu refroidis" sinon. Après la dernière réponse de Martin (pour le point P_N), Rémi choisit un point B sur le carré. Rémi gagne si et seulement si $AB \leq \frac{1}{2020}$. Montrer que si $N = 18$, Rémi ne peut pas être sur de gagner.
Résolu par Martin VIDAL OGER

Exercice 67 *
Soit n un entier strictement positif. Montrer que

$$\sum_{n \leqslant p \leqslant n^2} \frac{1}{p} < 2$$

Exercice 68 ****
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver tous les réels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\begin{cases} a_1a_2\ldots a_n &= (a_1+a_2)(a_2+a_3)\ldots(a_{n-1}+a_n)(a_n+a_1) \\ a_1^3a_2^3\ldots a_n^3 &= (a_1^3+a_2^3)\ldots(a_{n-1}^3+a_n^3)(a_n^3+a_1^3) \end{cases}$$

Exercice 69 ****
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, (AB) et (CD) leurs tangentes communes (A, C sur ω_1 et B, D sur ω_2). Soit M le milieu du segment $[AB]$. Les tangentes issues de M aux cercles ω_1 et ω_2 coupent (CD) en X et Y. Soit I le centre du cercle M-exinscrit au triangle MXY.

Montrer que $IC = ID$.
Résolu par Romain ELISSECHE

Exercice 70 *********
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et P un point à l'intérieur de ce triangle. On construit un triangle XYZ de côtés de longueur PA, PB et PC et on note F son point de Fermat. Montrer que $FX + FY + FZ = a$.

Exercice 71 ****
Soit $[EF]$ un segment inclus dans le segment $[BC]$ tel que le demi-cercle de diamètre $[EF]$ est tangent à $[AB]$ en Q et à $[AC]$ en P.

Prouver que le point d'intersection K des droites (EP) et (FQ) appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.
Résolu par Romain ELISSECHE

Exercice 72 ***

Dans une grille $n \times n$, chaque case est soit bleue soit rouge. On place certains dominos sur la grille, chaque domino couvrant deux cases (pas de recouvrement). Un domino est dit "uniforme" s'il couvre deux cases bleues ou deux cases rouges, "coloré" sinon. Trouver le plus grand entier positif k tel que, quelque soit le coloriage initial, on peut toujours avoir k dominos uniformes ou k dominos colorés.

Résolu par Martin VIDAL OGER

Exercice 73

Déterminer tous les couples (x, k) d'entiers positifs qui vérifient l'équation :

$$3^k - 1 = x^3.$$

Résolu par Noah STUDNIA

Exercice 74 ****

On commence par 2 points du plan A et B. On construit le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A. On note C l'une des deux intersections obtenues. On trace le cercle de centre C passant par B. On note D l'une des deux intersections des cercles de centres B, C puis on trace le cercle de centre D passant par B. On note E l'une des deux intersections des cercles de centres B, D puis on trace le cercle de centre E passant par C et le cercle de centre A passant par E. On note F, G les points d'intersection de ces deux cercles. On contruit le cercle de centre F passant par E et de centre G passant par E. On note M leur deuxième intersection.

Montrer que M est le milieu de $[AB]$.
Sur le cercle de centre B, A, C, D, E sont ordonnés ainsi, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 75 *****

Soit ABC un triangle. Les médianes AM_A, BM_B, CM_C du triangle ABC s'intersectent en M. Soit Ω_A un cercle passant par le milieu de AM et tangent à BC en M_A. On construit similairement Ω_B et Ω_C .
Prouver que Ω_A, Ω_B et Ω_C s'intersectent en un même point.

Exercice 76

Déterminer tous les $\alpha \geqslant 0$ tels qu'il existe une fonction $f : \mathbb{R}^{+\star} \to \mathbb{R}^{+\star}$ telles que pour tous $x, y > 0$:

$$f(x^\alpha + y) = f(x + y)^\alpha + f(y).$$

Exercice 77 *****

Théo et Paul jouent à un jeu. Théo a face à lui n enveloppes indistingables et fermées. L'une d'elles contient n roubles. Théo choisit une enveloppe. Pour aider Théo, Paul ouvre une enveloppe (autre que celle de Théo) ne contenant rien si il y a au moins 3 enveloppes non ouvertes sur la table. Théo peut alors choisir soit d'ouvrir son enveloppe, soit de recommencer le même processus avec une nouvelle enveloppe (potentiellement la même) mais en enlevant 1 rouble de l'enveloppe contenant de l'argent. Soit E_n l'espérance du gain de Théo en jouant optimalement.
Calculer $\lim_{n \to \infty}(E_n)$

Exercice 78 *****

Soit ABC un triangle acutangle. On note I_A le centre du cercle A-exinscrit de ABC. Soit M le symétrique de I_A par rapport à BC. Montrer que (AM) est parallèle à la droite passant par l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à I_ACB.

Exercice 79 *******

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini de réels dont toutes les fonctions symétriques élémentaires sont strictement positives. Les éléments a_i sont-ils également strictement positifs ?

Note : La k-ème fonction symétrique élémentaire, notée σ_k, est la somme des produits k par k. Ainsi $\sigma_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\sigma_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \ldots$, et plus généralement, $\sigma_k = \sum_{1 \leqslant i_1 < \ldots < i_k \leqslant n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$.

Résolu par Romain ELISSECHE

Exercice 80 **

Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1/2$ et $x_{k+1} = x_k + x_k^2$.

On pose

$$A = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{100}+1}$$

Déterminer $\lfloor A \rfloor$.

Exercice 81

Soit P un polynôme à coefficients entiers et de degré au moins 2. Prouver qu'il existe une suite arithmétique infinie (dans les deux directions) qui ne contient aucun nombre de la forme $P(k)$ où $k \in \mathbb{Z}$.

Exercice 82

Soit S un ensemble infini de points du plan tel que si A, B et C sont trois points quelconques dans S, la distance de A à la droite (BC) soit un entier. Prouver que les points de S sont tous alignés.

Exercice 83 *******

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : on pose $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit u_n de sorte que $|u_n| = |u_{n-1} + 1|$. Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_{2017}| \ ?$$

Exercice 84 ***

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle de périmètre égal à 3. Montrer qu'on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{a+c-b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} \geq \frac{9}{ab+ac+bc}$$

Exercice 85 *****

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ de cardinal 2^k. On dit qu'une partie $B \subseteq A$ est admissible si B est telle que la somme de deux de ses éléments n'est jamais dans A. Montrer qu'il existe un sous ensemble de A de cardinal $k+1$ qui est admissible.

Exercice 86 *********
Soit ABC un triangle acutangle, avec $AC > BC$. On note H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit et M le milieu de $[AC]$. Soit F le pied de la hauteur issue de C, et P le symétrique de A par rapport à F. On note X l'intersection de (PH) avec (BC), Y l'intersection de (FX) avec (OM), et Z l'intersection de (OF) avec (AC). Montrer que F, M, Y et Z sont cocycliques.

Exercice 87 ***
Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et soit M un point de $[BC]$. Soient K et L les projections de M sur (AB) et (AC) respectivement. Montrer que (OM) passe par le milieu de $[KL]$.

Exercice 88
Alice et Bob jouent à un jeu : ils commencent par écrire l'entier 2 sur une feuille. Ensuite Alice y ajoute un entier entre 1 et 2011 et écrit l'entier obtenu. Puis c'est au tour de Bob d'ajouter un entier enter 1 et 2011 au nombre inscrit, etc. Le premier à écrire un nombre non-premier a perdu. On suppose qu'Alice et Bob sont tous les deux de très bons mathématiciens. Qui va gagner

Exercice 89
Soient a et b deux réels tels que $a^3 - 3ab^2 = 44$ et $b^3 - 3a^2b = 8$. Que vaut $a^2 + b^2$?
Résolu par Rey KWON

Exercice 90 ***
Déterminer s'il existe des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tous $x, y > 0$:

$$f(x+y) \geq yf(x) + f(f(x))$$

Exercice 91
Soit O le point d'intersection des diagonales d'un quadrilatère $ABCD$. Soient $E = (AB) \cap (CD)$ et $F = (BC) \cap (AD)$. Soient aussi $K = (EO) \cap (AD)$, $L = (EO) \cap (BC)$, $M = (FO) \cap (AB)$ et $N = (FO) \cap (CD)$. Montrer que les droites (KN), (LM) et (EF) sont concourantes

Exercice 92 ********
On se donne un certain nombre de polynômes unitaires de degré 2 de même discriminant. On suppose que la somme de deux quelconques de ces polynômes a toujours deux racines réelles distinctes. Montrer qu'il en est de même de la somme de tous les polynômes considérés.

Exercice 93 ***
Trouver le plus petit premier p qui ne peut pas s'écrire sous la forme $|3^a - 2^b|$ avec $a, b \geq 0$ deux entiers positifs.
Résolu par Vlad CONSTANTINESCU

Exercice 94 ***
Est-il possible de colorier le plan en 7 couleurs de sorte à ce que deux points à distance 1 soient toujours de couleur différente ?

Résolu par Vico CHE-HE

Exercice 95 ****
On dit que deux carré *se touchent* s'ils ont au moins un point de leurs bords respectifs en commun. Autour d'un carré de côté 1, il est possible de placer 8 autres carrés de côté 1 touchant le premier, sans jamais que deux carrés ne se superposent. Il suffit de placer les carrés comme dans un échiquier.

Est-il possible d'en placer 9 ?

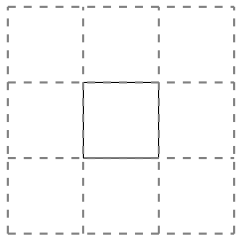


FIGURE 1 – Exemple : 8 carrés qui *touchent* le carré central sans se superposer

Exercice 96 ***
On considère une grille 2021×2021, et on place un point noir sur le centre de n cases de la grille. Trouver la plus grande valeur de n pour laquelle il est possible de placer n point tel que 3 points ne forment jamais un triangle rectangle.

Exercice 97 *****
On pose $P(x)$ un polynôme non constant à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, posons :

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1)$$

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels toutes les racines de $Q_n(x)$ sont réelles.

Exercice 98 S
oit $n \geq 2$ un entier. On considère n droites du plan en position générale. Montrer qu'on peut trouver un polygone non croisé à n côtés tel que chaque côté soit sur exactement une droite et que chaque droite contienne exactement un côté.

Exercice 99
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Trouver la valeur minimale de λ, tellq eu pour tout a_1, a_2, $\cdots$, a_n and b réels, on ait

$$\lambda \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i - b|} + \sqrt{n \left| \sum_{i=1}^{n} a_i \right|} \geqslant \sum_{i=1}^{n} \sqrt{|a_i|}.$$

Exercice 100
Soit A, B deux points fixes sur ω, cercle fixe de rayon 1, tels que $\sqrt{2} < AB < 2$. Soit P un point mobile sur ω, qui se déplace en respectant que ABP soit acutangle et $AP > AB > BP$.

Soit H l'orthocentre de ABP et S du petit arc AP tel que $SH = AH$. Soit T un point du petit arc AB tel que $TB||AP$. soit $(ST) \cap (BP) = Q$.

Montrer que le cercle de diamètre $[HQ]$ passe par un point fixe.

Résolu par David LEI

Exercice 101 $\star$

Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ surjectives et telles que, pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$f(xyz + xf(y) + yf(z) + zf(x)) = f(x)f(y)f(x)$$

Exercice 102 $\star$

Dans un pays il y a $n \geqslant 5$ villes, desservies par deux compagnies aériennes. Toute paire de villes est reliée par zéro, une ou par les deux compagnies. Cependant chaque compagnie a interdiction de proposer un cycle de longueur inférieur strictement à 6. Montrer que les deux compagnies ont à elles deux moins de $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ vols.

Exercice 103 $\star$

Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel (AB) et (CD) sont parallèles. Soit T un point à l'intérieur du trapèze tel que $\widehat{ATD} = \widehat{BTC}$. La droite (AT) recoupe le cercle circonscrit au triangle ACD au point K. La droite (BT) recoupe le cercle circonscrit au triangle BCD au point L. Montrer que les droites (AB) et (KL) sont parallèles.

Résolu par David LEI

Exercice 104 $\star\star\star\star$

Alice et Bob jouent au jeu suivant :

— D'abord, Bob dessine un triangle ABC et un point P à l'intérieur.

— Ensuite ils choisissent chacun à leur tour, une permutation $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ du triplet $\{A, B, C\}$, de telle sorte qu'Alice choisisse les permutations σ_1 et σ_3, c'est-à-dire qu'elle commence.

— Alice trace enfin un triangle $V_1V_2V_3$.

Pour $i = 1, 2, 3$, soit ψ_i la similitude qui envoie $\sigma_i(A), \sigma_i(B), \sigma_i(C)$ sur V_i, V_{i+1} et X_i tel que le triangle $V_iV_{i+1}X_i$ soit à l'extérieur du triangle $V_1V_2V_3$ (on note que $V_4 = V_1$). Soit enfin $Q_i = \psi_i(P)$. Alice gagne si le triangle $Q_1Q_2Q_3$ est semblable au triangle ABC, Bob gagne sinon.

Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 105

Soient $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ des cercles tangents deux-à-deux. Les trois cercles sont aussi tangents à une droite l. Soit B_1 le point de tangence de Γ, Γ_1, B_2 le point de tangence de Γ, Γ_2 et C le point de tangence de Γ_1, Γ_2. $\Gamma, \Gamma_1, \Gamma_2$ sont tangents à l en A, A_1, A_2 respectivement, avec A entre A_1 et A_2. Soient $D_1 = (A_1C) \cap (A_2B_2)$, $D_2 = (A_2C) \cap (A_1B_1)$. Montrer que (D_1D_2) est parallèle à l.

Résolu par David LEI

Exercice 106

Soit n un entier sans facteur carré, S est un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que $|S| \geq n/2$. Montrer qu'il existe $a, b, c \in S$ (non nécessairement distincts), tels que $ab \equiv c \pmod{n}$.

Exercice 107
Pour $ABCD$ un quadrilatère ocnvexe, on appelle un point un P équilibré si il est à l'intérieur mais pas sur une diagonales, et que si les droites AP, BP, CP, DP recoupent les bords du quadrilatère en A', B', C', D', alors

$$AP \cdot PA' = BP \cdot PB' = CP \cdot PC' = DP \cdot PD'$$

Combien au maximum un quadrilatère peut-il avoir de points équilibrés ?

Exercice 108 *****
On considère 10 points distincts du plan. Montrer qu'on peut les recouvrir par des disques disjoints de rayon 1.
Résolu par An Pha DANG

Exercice 109
Soit $r > 1$ un entier et soit F une famille infinie d'ensembles différents de cardinal r telle que deux ensembles de cette famille ne soient jamais disjoints. Montrer qu'il existe un ensemble de cardinal $r-1$ qui intersecte tous les ensembles de la famille F.

Exercice 110 **
Trouver tous les entiers naturels non nuls a, b et c deux à deux distincts et tels que

$$a^b + b^c + c^a = a^c + b^a + c^b.$$

Exercice 111
Soit $n!_0$ le nombre obtenu en enelveant tous les zéros à la fin de la représentation décimal de $n!$. Trouver tous les triplets d'entiers positifs a, b, c, tels que $a!_0 + b!_0 = c!_0$.

Exercice 112
Soit ABC un triangle et $P_1, \cdots, P_n$ des points à l'intérieur sans jamais trois alignés. Montrer qu'on peut partitionner le triangle en $2n+1$ triangles dont les sommets sont parmi $A, B, C, P_1, \cdots, P_n$ et au moins $n + \sqrt{n} + 1$ d'entre eux contiennent A, B ou C (ou non exclusif).

Exercice 113 *
Des réels a, b et c strictement positifs vérifient le système

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab &= 11^2 \\ b^2 + c^2 + bc &= 13^2 \\ c^2 + a^2 + ac &= 20^2 \end{aligned}$$

Exercice 114 *
Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit I le centre de son cercle inscrit. On note A_1 le point de contact du cercle $A-$exinscrit avec $[BC]$. On définit de façon analogue les points B_1

et C_1. Montrez que les trois cercles circonscrits aux triangles AIA_1, BIB_1 et CIC_1 se recoupent en un même point distinct de I.

Résolu par David LEI

Exercice 115 $\star\star$

Déterminer toutes les fonctions f allant de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{Z}$ telles que pour tout (m, n) :

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = f(m)$$

Exercice 116 $\star$

Une bande d'épaisseur w est l'ensemble des points compris entre deux droites parallèles à distance w l'une de l'autre. On suppose qu'un ensemble de n points S est tel que pour chaque triplet de point on puisse trouver une bande d'épaisseur 1 qui les recouvrent. Montrer qu'il existe une bande d'épaisseur 2 qui recouvre tous les points de S.

Résolu séparement par An Pha DANG et David LEI

Exercice 117 $\star\star$

Théo t'es où ?! Une maison de laquelle Théo et Corentin ne peuvent sortir (mais que les deux connaissent bien) est représentée par un graphe, où les pièces sont des sommets et les portes des arêtes. Il est toujours possible de trouver un chemin entre deux pièces quelconques de la maison, et le nombre de pièces est dénombrable(1).

Chaque jour, Corentin essaye de retrouver Théo en visitant une pièce précise de la maison pour vérifier s'il n'y est pas, pour lui demander de l'aider avec les corrections ; avant de retourner à ses occupations s'il n'est pas ici. Il peut vérifier la même pièce plusieurs fois d'affilée.

Théo, lui, reste toute la journée dans la pièce sur son ordinateur pour faire cours en visio à ses élèves. Mais la nuit, il décide de se déplacer dans une pièce adjacente pour le jour prochain, de façon à éviter de s'ennuyer. Et il fait cela toutes les nuits.

Pour quelles maisons Corentin possède-t-il une stratégie(2) trouvant toujours Théo, quelle que soit la position initiale de Théo et les portes qu'il décide d'emprunter ?

Une stratégie est une suite prédéfinie (potentiellement infinie) de pièces dans laquelle Corentin va s'il n'a pas trouvé Théo à la pièce précédente (terme précédent de la suite), où le terme initial est la première pièce où il cherche.

Exercice 118

Soit S un ensemble à $n \geqslant 3$ éléments. Déterminer le plus grand entier k_n tel que :

pour tout choix de k_n triplets d'éléments de S il est possible de colorier les éléments de S avec deux couleurs de sorte qu'aucun des k_n triplets n'est monochormatique.

Exercice 119 $\star\star\star\star$

f et g sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait :

$$f(g(n)) = f(n) + 1 \text{ et } g(f(n)) = g(n) + 1$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 120 ******

Soit Γ un cercle et A, B et C trois points à l'extérieur de Γ. Soient C_1 et C_2 les deux cercles passant par B et C et tangent à Γ. On note X et X' les points de tangence de ces cercles avec Γ. On définit de manière cyclique les points Y, Y', Z et Z'. Montrer que les cercles circonscrits à AXX', BYY' et CZZ' sont coaxiaux.

Exercice 121 *

Soit ABC un triangle et D, E et F des points tels que $DB = DC, EC = EA, FA = FB$ et $\widehat{BDC} = \widehat{CEA} = \widehat{AFB}$. Soit Ω_D le cercle de centre D passant par B et C. On définit de façon similaire les cercles Ω_E et Ω_F. Montrer que le centre radical des cercles Ω_D, Ω_E et Ω_F appartient à la droite d'Euler du triangle DEF.

Exercice 122 **

Pour un ensemble A, on note $|A|$ le nombre d'éléments de l'ensemble (aussi appelé cardinal) et $s(A)$ la somme des éléments de A. Si $A = \emptyset$, alors $|A| = s(A) = 0$.

On note S l'ensemble d'entiers positifs tel que :

— il y a deux nombres $x, y \in S$ tel que $x \wedge y = 1$

— pour tout couple $(x, y) \in S^2$, $x + y \in S$.

On note T l'ensemble des entiers positifs n'appartenant pas à S. Montrez que $s(T) \leq |T|^2 < +\infty$

Exercice 123 *

Déterminer toutes les fonctions f injectives de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ telles que, pour tout ensemble fini S d'entiers strictement positifs tel que $\sum_{s\in S} \dfrac{1}{s}$ est entier, le nombre $\sum_{s\in S} \dfrac{1}{f(s)}$ est également entier.

Exercice 124 ****

Déterminer s'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'entiers strictement positifs telle que pour tout n, $a_n \leqslant n^3$ et tout entier strictement positif peut être écrit d'une unique façon comme différence de deux entiers de la suite.

Exercice 125

Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} > \widehat{CBA} > \widehat{BCA}$. Les triangles AC_1B et CB_1A sont isocèles en C_1 et B_1 et semblables (points par points). Les doites (BB_1) et $CC_1)$ se ocupent en T. Montrer que si tous les points sont distincts, alors l'angles $\widehat{ATC}$ n'est pas droit.

Exercice 126 **

Dans tout cet exercice, les cas particuliers ayant une probabilité nulle de se produire (droites concourantes par ex) pour des droites prises au hasard pourront être ignorés. Montrer qu'on peut associé, à chaque famille de $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ en position générale, un cercle, et à chaque famille de $2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ droites un point de manière que les propriétés suivantes soient vérifiées.

— Le point associé à deux droites est leur point d'intersection.

— Le cercle associé à $2n + 1$ droites passe par les $2n + 1$ points associés à chaque sous-ensemble de $2n$ de ces droites.

— Le point associé à $2n + 2$ droites est sur chacun des $2n + 2$ cercles associés à chaque sous-ensemble de $2n + 1$ de ces droites.

Exercice 127 *

Soit ABC un triangle et H, I et O respectivement l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. Soit M le second point d'intersection du cercle passant par H et tangent à (OI) en I avec le cercle passant par O et tangent à (IH) en I. Montrer que M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Résolu par David LEI

Exercice 128 ***********

Soit n un entier. Dans les lignes d'un tableau de 2^n lignes et n colonnes on place tous les n-uplets formés de 1 et de -1. Ensuite, on efface certains de ces nombres, et on les remplace par des 0.

Prouver que l'on peut trouver un ensemble de lignes dont la somme est nulle (i.e., tel que, pour tout i, la somme des nombres appartenant à la colonne i d'une ligne de notre ensemble soit nulle).

Exercice 129 ****

Soit k un entier strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier strictement positif l satisfaisant la propriété suivante : pour tous entiers n et m premiers avec l tels que $m^m \equiv n^n \mod l$, on a $m \equiv n \mod k$.

Résolu par Maxime CHEVALIER

Exercice 130 *

Soit ABC un triangle. On construit, à l'extérieur du triangle ABC, des carrés dont les bases sont les côtés du triangle et dont les centres sont respectivement notés O_A, O_B et O_C. On suppose que le point A appartient au cercle passant par O_A, O_B et O_C. Montrer que le centre de ce cercle est sur l'un des côtés du triangle ABC.

Résolu par David LEI

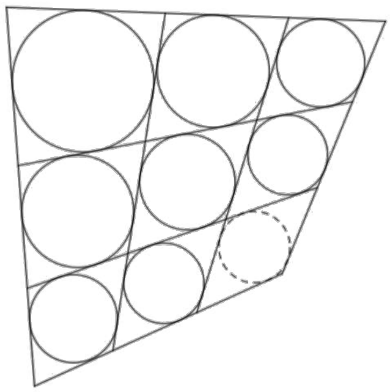
Exercice 131 ****

Dans une classe, un groupe d'élèves est dit dominant si chaque élève de la classe possède un ami dans ce groupe. On sait qu'il y a au moins 100 groupes dominants différents dans la classe.

Montrer qu'il y a en fait au moins 101 groupes dominants dans la classe.

Exercice 132 *****

On considère une grille 3×3 (cf. figure) telle toutes les cases sauf un coin soient circonscriptibles. Montrer que cette dernière case est circonscriptible.



Résolu par An Pha DANG

Exercice 133
Dans le trinagle ABC, les tangentes au cercle circonscrit (de centre O) passant par A (resp. B) et B (resp. C) se coupent en X (resp. Y). (AX) coupe (BC) en D et (CY) coupe (AB) en F. La demi-droite $[DF)$ coupe le cercle circonscrit en P et la parallèlle à (BO) passant par P coupe (AB) et (AC) e Q et R respectivement. Supposons que $PQ^2 = PR_c dotQR$. En déduire la valeur de l'angle $\widehat{ACB}$

Exercice 134 ⋆⋆
Une grille 1000×1000 est remplie avec des 0 ou des 1. Montrer qu'il existe soit un ensemble de 10 lignes telles que chaque colonne ait un 1 parmi ces lignes ou un ensemble de 10 colonnes telles que chaque ligne ait un 0 parmi ces 10 colonnes.

Exercice 135 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a + b + c = 3$. Prouver que :

$$\frac{ab}{b^3+1} + \frac{bc}{c^3+1} + \frac{ca}{a^3+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Exercice 136 ⋆⋆
Soit P un polynôme de degré 20 à coefficients entiers. Trouver le nombre maximal de nombres entiers dont l'image est un entier entre 0 et 10 inclus.

Exercice 137 ⋆
Aurélien et Baptiste jouent à un jeu dans lequel Aurélien choisit un entier $n \in \{1, 2, \ldots, 1001\} = S$. Baptiste doit alors deviner la valeur de n. Pour cela, il dispose de trois manches. Lors de la $i-$ème manche, il choisit k_i sous-ensembles de S et Aurélien lui indique combien de ces sous-ensembles ont n comme éléments.

Quelle est la plus petite valeur de $k_1 + k_2 + k_3$ telle que Baptiste dispose d'une stratégie pour déterminer l'entier choisi par Aurélien ?

Résolu par David LEI

Exercice 138 ***

Raphaël et Yaël jouent à un jeu sur un échiquier infini, chaque case étant repérée par deux coordonnées entières (x, y). Initialement Raphaël pose une bille sur la case de coordonnées $(0, 0)$. A chaque coup, si la bille se trouve sur un point de coordonnées (x, y), Raphaël peut la déplacer sur une case de coordonnées $(x+1, y+k)$ avec $k \in [\![-2021, 2021]\!]$. Pour l'en empêcher, à chaque fois que Raphaël déplace sa bille, Yaël peut choisir de *bloquer* une case, qui ne sera plus jamais accessible pour Raphaël. Yaël peut-il faire en sorte que Raphaël ne puisse plus déplacer sa bille ?

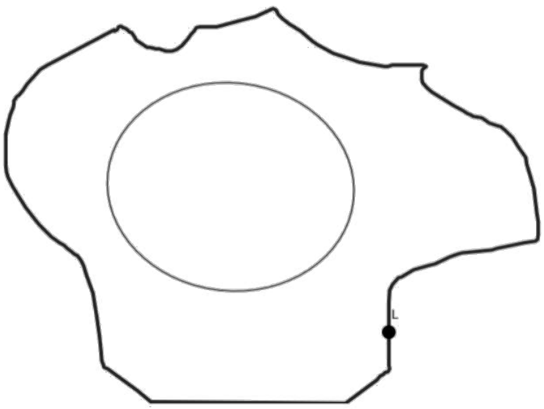
Exercice 139

Soit ABC isocèle en A. D est un point mobile tel que $AD \parallel BC$, $BD > CD$. E est sur l'arc BC du cercle ABC ne contenant pas A, tel que $EB < EC$. La demi-droite $[BC)$ continent F avec $\widehat{ADE} = \widehat{DFE}$. Si la demi-droite $[FD)$ coupe $[BA)$ en X, et coupe $[CA)$ en Y, montrer que $\widehat{XEY}$ est fixe.

Résolu par David LEI

Exercice 140 *****

Timothée a attaché son léopard noté L à un poteau en forme d'ellipse. La laisse du léopard est une boucle de longueur fixée qui fait le tour du poteau. Montrer que la limite de la zone que peut parcourir le léopard est aussi une ellipse.



Résolu par An Pha DANG

Exercice 141 ***

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant $m-n \mid q_m - q_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. On suppose également qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|q_n| \leq P(n)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $q_n = Q(n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 142 $\star\star\star$

Alice et Bob jouent coopérativement à un jeu. Sur un collier se trouvent $6n$ perles. $3n$ perles sont blanches et $3n$ perles sont noires, de sorte que 3 perles consécutives ne sont jamais toutes de la même couleur. Tour à tour Alice et Bob enlèvent 3 perles consécutives du collier. Alice peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *noir-blanc-noir* et Bob peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *blanc-noir-blanc*. Montrer que si Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Alice commence, alors Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Bob commence.

Exercice 143 $\star\star$

11 piles de 10 cailloux sont disposées. Aurélien et Rémi s'affrontent dans le jeu suivant : chacun leur tour en commençant par Aurélien, il vont prendre 1, 2 ou 3 cailloux, Aurélien devant tous les prendre dans la même pile et Rémi ne pouvant en prendre au plus un par pile. Celui qui ne peut plus jouer perd. Qui gagne ?

IX. Citations mémorables

- *Arthur à Akin (devant les citations mémorables)* : « Hey Akin, viens dire des trucs rigolos. »
- *Théo au groupe A* : « $1+2$ ça fait $2+1$. »
- *Mano* : « Il faut les sommer pas les additionner. »
- *Paul A* : « À quelle condition ta condition est vraie ? »
- *Rémi* : « Prenez des notes quand on dit des bêtises. »
- *Paul A* : « Pour montrer ce théorème, tracez un cercle moins patastrophique que le mien. »
- *Arthur A* : « Ils jouent beaucoup Alice et Bob. Ils ont pas un travail ? »
- *Rémi* : « Il est pas très ... enfin bon, on a tous nos difficultés. »
- *Manon* : « Je ne comprends pas, ça ne marche pas sur les carrés 8×6. »
- *Rémi écrit au tableau :* « ... les couleurs peuvent apparaître. »
  Iris : « T'as fait une faute d'orthographe, il fallait écrire « apparaîtrent ». »
- *Andrei R* : « Je veux montrer que(ST) est la bissectrice de $\widehat{ATB}$, donc je commence par supposer que (ST) est la bissectrice de $\widehat{ATB}$. »
- *William* : « Pair et impair c'est la même parité. »
- *Martin (à propos du cours d'algèbre linéaire)* : « On a fait 2 semaines de prépa en 3 heures. »
  Solal (après le cours) : « Il est allé très lentement... »
- *Elias* : « Là, j'copie sur toi. »
- *Noé* : « Nous allons procéder par combinatoire. »
- *Hadriel* : « Plus tu fais de la géométrie, plus tu es imprécis. »
- *Apollinaire (en parlant du théorème des restes chinois)* : « J'applique le théorème des chinois. »
- *Lancelot* : « 1 n'est pas entier. »
- *Antoine* : « Dans le sens qui fait sens. »
- *Mathurin* : « Pourquoi on ne fait pas l'exo 4, c'est trop facile ? »
  Gaëtan : « C'est toi qui est trop facile. »
- *Melvil* : « Ok montre moi tes calculs. » *Arthur* : « T'inquiète, ils sont super. »
- *Martin* : « Ces exos sont souvent mal traités, et donc maltraités. »
- *Rémi* : « Demain soir, j'aimerais que tout le monde soit à 23h en chambre, et que je n'aie pas à envoyer de gens vous surveiller, comme je ne le fais pas bien sûr. »

— *Théo* : « L'entraînement du groupe D dure 4h, l'enterrement du groupe E dure $4h30$. »
— *Théo* : « En plus il faut qu'on aille à la douche... euh à la piscine. »
— *Amaël* : « Je ne suis ni shadow, ni hunter, ni neutre, je suis polygame. »
— *Martin* : « Ce n'est pas la betterave qui fait l'homme, c'est l'homme qui fait la betterave. »
— *Anonyme* : « Pourquoi mon triangle rectangle est-il équilatéral. »
— *Assem* : « Vous faites quel exo ? »
Octave : « Le 11, on saute le 10. »
Assem : « Vous êtes racistes. »
Noé : « De ? »
Assem : « Bah de l'exo 10. »
Noé : « Parce que l'exo 11 et l'exo 10 ont différentes races ? »
— *Martin* : « Ce problème d'arithmétique fonctionne comme la prison. Il faut détruire le plus fort et après on se fait respecter. »
— *Lilas* : « C'est quoi ce cercle tout pourri au milieu. » Quelques instants plus tard. « Aaaah, en fait c'est O. »
— *Henri (au Code Names, Henri doit faire deviner* 5 *mots à son équipe alors qu'il reste* 1 *mot à son équipe adverse)* : « Eh ! Vous savez quoi ? Je dis rien, vous avez toutes les clés en main ! »
Son équipe : « ... »
— *Conférencier* : « De quand datent les premiers algorithmes ? »
Solal : « L'invention de la bière. »
— *Rémi* : « Vous inquiétez pas si vous avez rien résolu du cours, c'était le but. »
— *Théo (lors de l'alarme incendie)* : « Ceci n'est pas un test... c'est un entraînement. »
— *Horia* : « Le principe des tiroirs, c'est trop puissant, ça ouvre tout. »
— *Antoine (pendant son cours de sin bash)* : « Mais arrêtez de réfléchireuh... »
— *Martin* : « C'est marrant, la plupart des gens ils sont plus beaux quand ils sourient, mais Apollinaire je préfère quand il est triste. »
— *Gaspard* : « Eva elle dort complètement. »
Eva : « C'est pas vrai je suis très déréveillée. »