Coupe Animath de Printemps

5 juin 2024

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. La somme de trois nombres vaut 96. Le premier d'entre eux vaut 6 fois le troisième, et le troisième vaut 40 de moins que le deuxième. Quelle est la valeur du premier nombre ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 1 Notons n_1, n_2, n_3 les trois nombres de l'énoncé. Comme la somme des trois nombres vaut 96 on peut écrire que

$$n_1 + n_2 + n_3 = 96. \tag{1}$$

L'énoncé assure aussi que

$$n_1 = 6n_3 \quad \textit{et} \quad n_2 = n_3 + 40.$$

En substituant les deux dernières équations dans l'équation (1), on obtient que

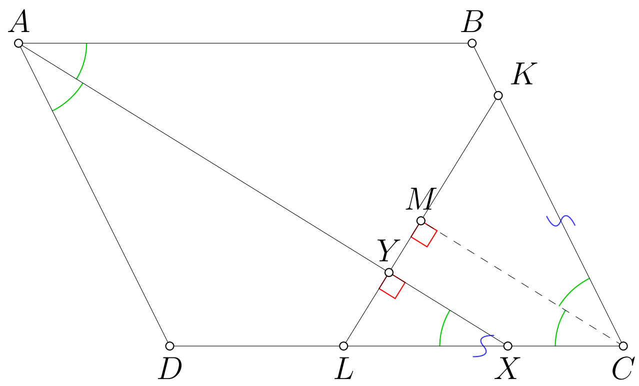
$$6n_3 + (n_3 + 40) + n_3 = 96,$$

ce qui assure que $8n_3 = 56$ et donc que $n_3 = 7$. Par suite $n_1 = 6n_3 = 42$.

Commentaire des correcteurs L'exercice est dans l'ensemble très bien réussi. Attention cependant à bien lire l'énoncé : certains élèves ont un raisonnement correct mais utilisent de mauvaises relations entre les nombres de l'énoncé, ou bien ne donnent pas le bon nombre comme réponse, ce qui est dommage. De plus, certains se trompent dans leurs calculs, malgré un raisonnement juste. Il est important de bien se relire pour éviter ce genre d'étourderie. Enfin, certains élèves qui n'avaient pas le bon résultat n'ont pas présenté de raisonnement, et n'ont donc pas pu obtenir de point.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit K un point du segment $[BC]$ et soit L un point du segment $[CD]$ tels que $CK = CL$. Montrer que la bissectrice de $\widehat{DAB}$ et la droite (KL) sont perpendiculaires.

Solution de l'exercice 2



Soit X le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAD}$ avec la droite (CD) et soit Y le point d'intersection des droites (AX) et (LK).

Montrons que $\widehat{YLX} + \widehat{YXL} = 90°$, ce qui permet de conclure que l'angle $\widehat{XYL}$ est droit.

Puisque les droites (AB) et (CD) sont parallèles, on a

$$\widehat{AXD} = \widehat{XAB} = \frac{1}{2}\widehat{DAB}.$$

D'autre part, comme le triangle KCL est isocèle en C, on a

$$180° = \widehat{KCL} + \widehat{LKC} + \widehat{KCL} = 2\widehat{KLC} + \widehat{KCL}.$$

En combinant avec l'égalité $\widehat{DAB} = \widehat{BCD}$, on déduit que

$$\widehat{KLC} = \frac{180° - \widehat{KCL}}{2} = 90° - \frac{\widehat{BCD}}{2} = 90° - \frac{\widehat{BAD}}{2}.$$

Ainsi,

$$\widehat{YLX} + \widehat{YXL} = \widehat{KLC} + \widehat{AXD} = 90°.$$

Solution alternative n°1 De même que précédemment, on établit que $\widehat{AXD} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}$. D'autre part, dans le triangle KCL isocèle en C, la bissectrice de l'angle $\widehat{KCL}$ est également la médiatrice du segment $[KL]$. Ainsi, en notant M le milieu de $[KL]$, on a

$$\widehat{MCL} = \frac{1}{2}\widehat{BCD} = \frac{1}{2}\widehat{BAD}.$$

Les angles $\widehat{AXD}$ et $\widehat{MCL}$ sont donc égaux et les droites (MC) et (AX) sont parallèles. Puisque (MC) et (KL) sont perpendiculaires, il en est de même des droites (KL) et (AX).

Commentaire des correcteurs Exercice globalement bien réussi. De nombreux élèves ont su restituer correctement les propriétés des parallélogrammes. Certains élèves ne savent pas exactement ce qu'est un parallélogramme, et le confondent avec le rectangle ou le carré. Il est à noter que dans un parallélogramme, la bissectrice d'un angle ne recoupe pas toujours le sommet opposé, ainsi (AC) n'était pas la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Il faut également rappeler que traiter un cas particulier (en fixant la mesure d'un angle ou la longueur d'un segment) n'a pas valeur de preuve, et ne suffit pas à résoudre complétement un exercice de géométrie. Enfin, faire une figure est toujours fortement conseillé, et permettait de faire de bonnes conjectures ici.

Exercice 3. Déterminer le plus petit entier n tel que le produit de n entiers positifs consécutifs est toujours divisible par 45.

Solution de l'exercice 3 Soit n le plus petit entier tel que le produit de n entiers consécutifs est toujours divisible par 45.

Donnons nous 6 entiers $n_1, \ldots, n_6$ consécutifs. Nous notons $P = n_1 n_2 n_3 n_4 n_5 n_6$ le produit de ces entiers.

- ▷ L'un des entiers n_1, n_2, n_3 est divisible par 3, car parmi 3 entiers consécutifs il y a toujours un multiple de 3. Il existe donc un entier a tel que $n_1 n_2 n_3 = 3a$
- ▷ L'un des entiers n_4, n_5, n_6 est divisible par 3, car parmi 3 entiers consécutifs il y a toujours un multiple de 3. Il existe donc un entier b tel que $n_4 n_5 n_6 = 3b$.

Il s'ensuit que $P = 9ab$ et donc que 9 divise P.

De plus, 5 divise $P = 9ab$ car il existe toujours un multiple de 5 parmi 5 entiers consécutifs (et donc à fortiori parmi 6 entiers consécutifs). Puisque les nombres 5 et 9 sont premiers entre eux, le lemme de Gauss assure que 5 divise ab, c'est-à-dire qu'il existe un entier k tel que $ab = 5k$. Il s'ensuit que $P = 9 \times 5k = 45k$, donc 45 divise P.

On a donc démontré que $n \leq 6$.

Par ailleurs, on constate que $1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 120$ n'est pas divisible par 9 donc n'est pas divisible par 45. Ceci montre que $n > 5$. **Il s'ensuit que $n = 6$.**

Commentaire des correcteurs L'exercice n'est pas très bien résolu par les élèves. Voici quelques remarques sur les points importants :

- ▷ Lorsqu'un exercice demande le plus petit entier satisfaisant une propriété, la solution doit obligatoirement comporter deux étapes :
  1. La preuve qu'un certain entier vérifie la propriété
  2. La preuve que tous les entiers plus petits ne vérifient pas la propriété

  On regrette que la seconde partie soit souvent manquante dans les raisonnements.
- ▷ L'écrasante majorité des élèves rédigent leur solution à l'envers : ils pensent montrer que $n \geq 6$ en donnant les arguments qui justifient que $n = 6$ marche.
- ▷ Leurs argument ne marchent pas pour montrer que $n \geq 6$ car ils sont de la forme "pour avoir deux multiples de 3, on est obligés de prendre 6 nombres" (en argumentant par exemple que si on a "pas de chance", ils vaudront modulo 3 : $1, 2, 0, 1, 2, 0$). En effet, avec 5 nombres, on peut n'avoir que 1 mutliple de 3, mais le produit de cae nombres peut tout de même être un multiple de 45 : $7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 11$ est un produit de 5 nombres consécutifs avec 1 seul mutliple de 3 et mais qui est un multiple de 45.
- ▷ La méthode la plus facile pour montrer que $n = 5$ ne marchait pas était celle du contre exemple : exhiber un contre exemple suffit amplement (par exemple $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$). On regrette que très peu d'élèves y aient pensé. De plus, on attendait un minimum de justifications pour le contre exemple : le calculer pour pouvoir affirmer qu'il n'est pas divisible par 45, ou dire qu'il n'était pas divisible par 9; comme dit précédement, simplement dire qu'il ne contient qu'un seul fcateur divisible par 3 ne suffit pas.
- ▷ Certains élèves traitent le cas de 0 à part, cependant ce n'était pas nécessaire, 0 est un multiple de 45, de 3 et de 5 comme un autre.

▷ On demandait la plus petite valeur de n telle que tout produit de n entiers consécutifs est divisible par 45. Certains élèves ont simplement trouvé que $45 \mid 9 \cdot 10$ et en ont conclu que $n = 2$, or si on prend $1 \cdot 2$, ce produit de deux nombres consécutifs n'est clairement pas divisible par 45.

Exercice 4. Baptiste écrit n réels strictement positifs au tableau (pas forcément distincts). Il remarque ensuite que chaque réel écrit au tableau est strictement inférieur à la somme des $n-1$ autres réels. Baptiste voudrait alors colorier chaque réel en bleu, en vert ou en rouge, de sorte que, la somme des réels d'une même couleur est strictement inférieure à la somme des autres réels. Baptiste peut-il réaliser son souhait :

1) si $n = 4$?

2) si $n = 5$?

Solution de l'exercice 4

- Si $n = 4$, alors ce n'est pas toujours possible. En effet, supposons que Baptiste écrive au tableau le quadruplet $(1, 1, 1, 1)$. Cet ensemble vérifie la condition de l'énoncé puisque tous les réels sont strictement positifs et que chacun est plus petit que la somme des trois autres.
  Si on colorie ces nombres avec trois couleurs, il existe une couleur contenant au moins deux nombres 1 (sinon il y aurait au plus trois nombres écrits au tableau). La somme de ces 1 n'est alors pas strictement inférieure à la somme des nombres restant.

  En réalité, le cas où les quatre nombres écrits sont égaux est le seul cas dans lequel Baptiste ne peut pas réaliser son souhait. En effet, notons $a \leq b \leq c \leq d$ les quatre nombres écrits par Baptiste. Si Baptiste colorie a, b en rouge, c en bleu et d en vert, alors le coloriage vérifie :

  - $d < a + b + c$ par hypothèse;
  - $c < a + b + d$ par hypothèse;
  - Comme $a \leq c$ et $b \leq d$, $a + b \leq b + d$. De plus, on a égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$. Comme $a \leq b \leq c \leq d$ cela implique $a = b = c = d$. Ainsi si $a = b = c = d$ n'est pas vérifié, on a $a + b < c + d$.

  En particulier, si $a = b = c = d$ n'est pas vérifié, alors Baptiste peut réaliser son souhait.

- Si $n = 5$, alors c'est possible, ce que l'on démontre en construisant explicitement une telle répartition.
  Notons $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ les nombres de l'ensemble, considèrons la répartition

  $$(a_5), (a_1, a_3), (a_2, a_4).$$

  et vérifions que la somme des éléments de chaque ensemble est strictement inférieure à la somme des autres réels.

  1er ensemble : Par hypothèse, on a $a_5 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

  2eme ensemble : On a $a_1 \leq a_2$ et $a_3 \leq a_4$ ce qui assure que $a_1 + a_3 \leq a_2 + a_4$. Comme $a_5 > 0$, il s'ensuit que $a_1 + a_3 < a_2 + a_4 + a_5$.

  3eme ensemble : On a $a_2 \leq a_3$ et $a_4 \leq a_5$ ce qui assure que $a_2 + a_4 \leq a_3 + a_5$. Comme $a_1 > 0$, il s'ensuit que $a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_5$.

Commentaire des correcteurs L'exercice est plutôt mal réussi vis à vis de sa position dans le sujet. En effet,

- Beaucoup d'élèves ont cru que Baptiste choisissait les réels qu'il écrit. Vu l'énoncé et la formulation, il était assez clair que ce n'était pas vrai : les réels sont écrits avant. Les copies qui avaient compris cet énoncé n'ont pas eu de points, car ils ne répondaient pas aux questions voulues.

- ▷ Pour la première partie, beaucoup d'élèves ont trouvé le contre-exemple. Mais pour une bonne partie d'entre eux, seule une répartition avec deux éléments d'une couleur, et un élément de chaque autre couleur était possible. Nulle part il est dit que chaque couleur est utilisée, donc ça n'était à priori pas vrai. Pour avoir tous les points du contre-exemple, il fallait traiter tous les coloriages possibles : par exemple en disant qu'il y avait une couleur utilisée au moins deux fois.
- ▷ Pour la première partie, plusieurs élèves ont supposés que les réels étaient distincts. Ce qui n'était malheureusement pas correct.
- ▷ Pour la seconde partie, il fallait montrer que Baptiste pouvait toujours réaliser son choix. Une idée naturelle était d'ordonner les nombres : attention à ne pas oublier que certains peuvent être égaux.
- ▷ Un certain nombre d'élèves ont écrit les inégalités qui voulaient, fait des manipulations, puis trouvé une inégalité vraie, et ont conclu que c'était vrai. Malheureusement, il était toujours impossible de prouver à partir de cette inégalité les inégalités de départ.
- ▷ Certains ont bien compris comment grouper les nombres et n'ont pas prouvé les inégalités correspondantes $a_1 + a_3 < a_2 + a_4 + a_5$ et $a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_5$. Ce n'est pas du tout trivial, et méritait évidemment d'être prouvé.
- ▷ Certains élèves ont prouvé que Baptiste ne pouvait pas colorier les nombres car "s'il colorie le premier et le deuxième en rouge, le troisième en bleu et le quatrième et le cinquième en vert, alors si le premier et le deuxième valent 10 et les autres 1 ça ne marche pas". A priori Baptiste est intelligent, et peut adapter son coloriage à la valeur des nombres : par exemple, colorié $1, 1$ en vert, $1, 10$ en rouge, et 10 en bleu.
- ▷ Attention, le contraire de $A < B$ n'est pas $A > B$. L'oubli du cas $A = B$ a fait perdre à certains de nombreux points, car il était très dur à gérer.
- ▷ Attention : le contraire de $a = b = c = d$ n'est pas $a < b < c < d$. On peut aussi avoir $a = b < c = d$ par exemple.
- ▷ Attention à bien lire l'énoncé. Celui-ci demandait à chaque fois que les sommes soient strictement inférieures, pas inférieures ou égales.

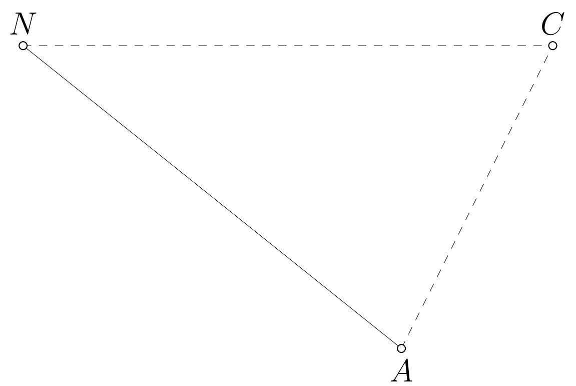
Exercice 5. Au pays d'Animath se trouvent au moins quatre villes. Deux villes quelconques sont reliées soit par une route en béton, soit par un sentier de terre (mais pas par les deux en même temps). Alice ne souhaite emprunter que des routes en béton. Elle remarque que pour aller à la capitale depuis sa ville natale, quel que soit le chemin, elle devra toujours passer par au moins deux villes intermédiaires.

Montrer qu'entre deux villes quelconques, il est toujours possible d'aller de l'une à l'autre en n'empruntant que des sentiers et en passant par au plus deux villes intermédiaires.

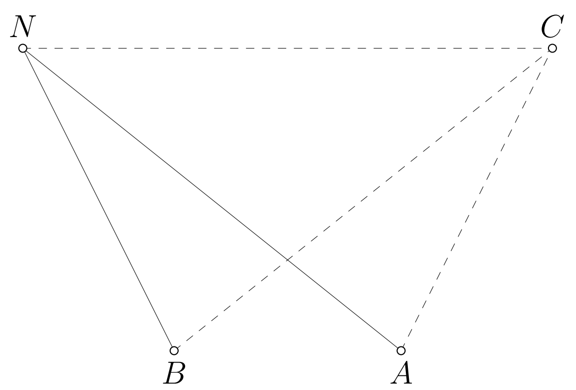
Solution de l'exercice 5 Notons N la ville natale d'Alice et C la capitale. Prenons deux villes quelconques A et B différentes de N et C.

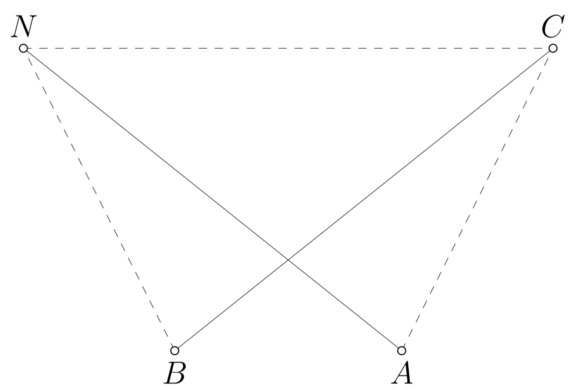
Tout d'abord, notons que N et C ne sont pas reliées par une route en béton par hypothèse, donc elles sont reliées par un sentier de terre, donc on peut aller de N à C directement en passant par des sentiers de terre.

Ensuite, supposons que l'on souhaite aller d'une des villes N et C vers une autre ville A. Comme on ne peut pas aller de N à C en passant par des routes de béton et en passant seulement par A, l'un des chemins AN et AC est un sentier de terre. Disons que AC est un sentier de terre. Alors on peut aller de A à N et C en passant uniquement par des sentiers de terre et en passant par au plus une ville intermédiaire.



Enfin, montrons qu'on peut aller de A à B en passant par au plus une ville et uniquement des sentiers de terre. Une fois encore, l'un des chmeins AN et AC est un sentier de terre. De même, l'un des chemins BN et BC est un sentier de terre. On distingue alors deux cas :





▷ Si A et B sont reliées à la même ville par un sentier de terre, disons par exemple C (figure de gauche), alors le chemin ACB permet d'aller de A à B par des sentiers de terre et en passant par au plus une ville. On traite de même le cas où A et B sont reliées à N par un sentier de terre.

▷ Supposons que A et B ne sont pas reliées à la même ville par un sentier de terre, disons par exemple que A est relié à N et B est relié à C par un sentier de terre. Notons que N et C ne sont pas reliées par une route de béton, donc elles sont reliées par un sentier de terre. Ainsi, le chemin $ANCB$ permet de passer de A à B en marchant uniquement sur des sentiers de terre et en passant par au plus deux villes intermédiaires.

Dans tous les cas, l'énoncé est vérifié.

Commentaire des correcteurs L'exercice était assez difficile et une petite cinquantaine d'élèves ont réussi à en venir à bout. On note 3 principales erreurs, qui se sont retrouvées dans de trop nombreuses tentatives de solutions :

- Certains élèves se contentent de fournir un ou plusieurs exemples. Bien que les exemples soient d'excellents moyens de se forger une intuition sur le problème, ils ne fournissent en aucun cas la preuve du problème général.
- Quelques élèves essayent de faire une récurrence sur les villes. Cela ne fonctionnait malheureusement pas ici.
- Presque toutes les copies ayant résolu le problème se sont vues attribuées la note de $6/7$. En effet, elles oubliaient de traiter le cas où l'une des deux villes que l'on cherche à relier par des sentiers de terre s'avérait être la ville natale ou bien la capitale. Cette erreur est d'autant plus regrettable que ces copies avaient réussi à démontrer des éléments bien plus complexes.

Exercice 6. Soient x, y, z trois réels non nuls tels que

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Trouver toutes les valeurs que peut prendre le nombre

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Solution de l'exercice 6 Pour démontrer cet exercice on effectue un raisonnement par analyse-synthèse.
Analyse :

En ajoutant 1 à chaque terme de l'hypothèse, on trouve

$$\frac{x+y+z}{z} = \frac{y+z+x}{x} = \frac{z+x+y}{y}.$$

On en déduit deux cas :
Cas 1 : $x+y+z \neq 0$. Dans ce cas, de l'égalité ci-dessus on déduit que $x = y = z$. Mais alors

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{2x \times 2x \times 2x}{x^3} = 8.$$

Cas 2 : $x+y+z = 0$. Dans ce cas,

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{(-z) \times (-x) \times (-y)}{xyz} = -1.$$

Synthèse :

Réciproquement, chacun des valeurs 8 et -1 peut être effectivement réalisée par un triplet (x, y, z) de réels non nuls.
Si on pose $x = y = z = 2$, on observe que

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = 8.$$

Si on pose $x = 1, z = 2, y = -3$. Alors on a bien

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = -1. \tag{2}$$

et donc

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = -1$$

On a donc démontré que les seules solutions possibles sont -1 et 8

Solution alternative n°1 Pour démontrer cet exercice on effectue un raisonnement par analyse-synthèse.

Analyse :
En multipliant la première expression par xyz on trouve que

$$xy(x+y) = yz(y+z) = xz(z+x)$$

c'est-à-dire que

$$x^2y + xy^2 = y^2z + yz^2 = z^2x + zx^2$$

Comme $x, y, z \neq 0$, il s'ensuit que

$$x^2 + xy = yz + z^2 \tag{3}$$
$$y^2 + yz = zx + x^2 \tag{4}$$
$$xy + y^2 = z^2 + zx \tag{5}$$

Maintenant on distingue deux cas :

Cas 1 : Si $x = y = z$, alors

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = 2$$

ce qui assure que

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = 8$$

Cas 2 : Si au moins deux des réels sont différents, disons $x \neq y$, alors l'équation (4) montre que

$$\begin{aligned} x^2 + xz = yz + y^2 &\iff x^2 - y^2 = zy - xz \\ &\iff (x-y)(x+y) = z(y-x) \\ &\iff x + y = -z. \end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\frac{x+y}{z} = \frac{-z}{z} = -1$ et donc que

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = -1.$$

En conclusion, les seules valeurs possibles seraient -1 et 8.

Synthèse :
Si on pose $x = y = z = 2$, on observe que

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = 8.$$

Si on pose $x = 1, z = 2, y = -3$. Alors on a bien

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y} = -1. \tag{6}$$

et donc

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz} = \frac{x+y}{z} \times \frac{y+z}{x} \times \frac{z+x}{y} = -1$$

On a donc démontré que les seules solutions possibles sont -1 et 8

<u>*Solution alternative n°2*</u> On propose une troisième méthode pour l'analyse. Posons $a = \frac{x+y}{z}$.
On a

$$
\begin{aligned}
a^3 &= \frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz} \\
&= \frac{2xyz + x^2y + y^2x + y^2z + z^2y + z^2x + x^2z}{xyz} \\
&= 2 + \frac{x+y}{z} + \frac{y+z}{x} + \frac{x+z}{y} \\
&= 2 + 3a
\end{aligned}
$$

On a donc

$$0 = a^3 - 3a - 2 = (a-2)(a^2+2a+1) = (a-2)(a+1)^2.$$

(Pour trouver cette factorisation, on pouvait notamment remarquer que $x = -1$ et$x = -2$ vérifient $x^3 - 3x - 2 = 0$.) On déduit que $a = -1$ ou $a = 2$. En particulier $\frac{(x+y)(y+z)(x+z)}{xyz} = a^3$ vaut 8 ou -1. De même que précédemment, on trouve deux exemples qui fonctionnent pour 8 et -1.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice était assez difficile et peu d'élèves ont réussi à obtenir plus de 1 point dans l'exercice, encore moins à obtenir tous les points. La majorité des élèves ayant rendu une copie a trouvé la solution 8 en prenant $x = y = z$, mais la plupart d'entre eux ont conjecturé que c'était la seule. Beaucoup d'élèves ont eu de bonnes idées, mais sont tombés dans un des nombreux pièges de l'exercice :

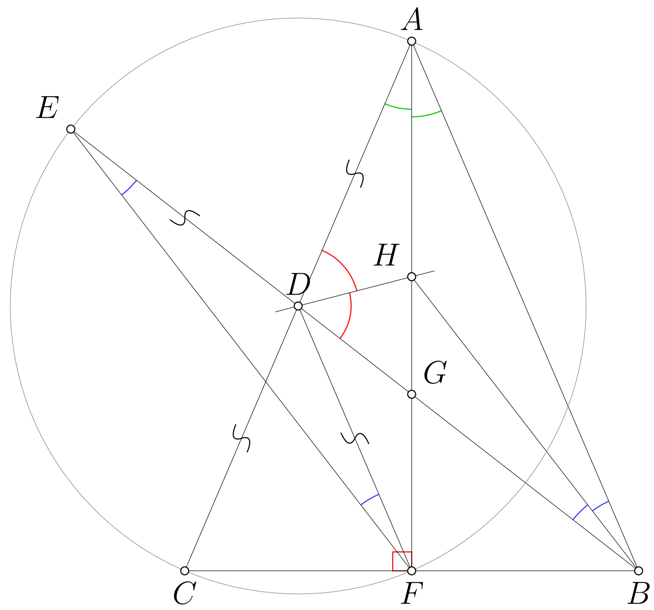
- Certains ont considéré que x, y, z étaient positifs (ou même entiers parfois), ce qui simplifiait beaucoup le problème puisqu'il pouvait se résoudre par des inégalités élémentaires.
- D'autres ont commencé avec la bonne approche mais ont divisé par des termes comme $x - y$ ou $x + y + z$ qui pouvaient à priori être nuls (et qui l'étaient pour une des solutions).
- Enfin, parmi les quelques élèves qui sont parvenus à la fin de la démonstration, très peu ont vérifié que -1 était effectivement une solution du problème en exhibant un triplet solution ou en vérifiant que les triplets vérifiant $x + y + z = 0$ étaient bien solution de l'énoncé.

Un certain nombre d'élèves ont des problèmes majeurs avec les manipulations algébriques : certains ont trouvé que la quantité valait 6 pour $x = y = z$, affirment que $(x+y)^2 = x^2 + xy + y^2$, affirment que $\frac{a}{b} = \frac{a-b}{1}$...

Exercice 7. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du segment $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. La droite (BD) coupe le cercle de diamètre $[AC]$ au point E, de sorte que E et B sont de part et d'autre de $[AC]$. La médiatrice du segment $[EC]$ recoupe la droite (AG) au point H.

Montrer que la droite (BH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GBA}$.

Solution de l'exercice 7



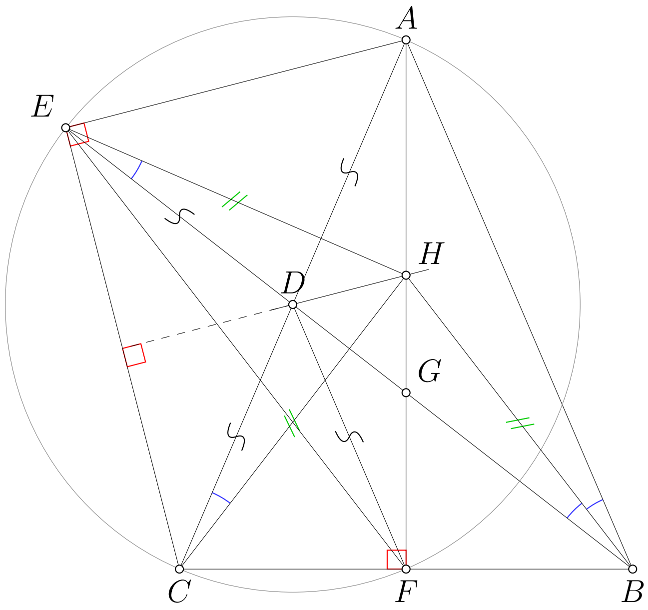
1) Nous allons montrer que H est le centre du cercle inscrit du triangle ADB. Pour cela, nous montrons que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ADB}$ et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$. Si c'est le cas, comme les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes, il viendra que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}$, et donc de l'angle $\widehat{ABG}$.

D'une part, comme le triangle ABC est isocèle en A, la médiane issue du sommet A est également la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Ainsi, H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'autre part, puisque D est le milieu du segment $[AC]$, il est le centre du cercle circonscrit au triangle AEC. Ainsi, D et H sont tous les deux sur la médiatrice du segment $[EC]$. Comme le triangle ECD est isocèle en D, cette médiatrice est également la bissectrice de l'angle $\widehat{EDC}$, et donc celle de l'angle $\widehat{ADB}$ qui lui est opposé par le sommet.

Ainsi H est bien sur le centre du cercle inscrit au triangle ABD comme annoncé.

Solution alternative n°1



Puisque H est sur la médiane issue du sommet A, qui est aussi l'axe de symétrie su segment $[BC]$, on a $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ ainsi que $HB = HC$. De même que dans la solution précécdente, D est le centre du cercle passant par A, C et E. Puisque D et H sont tous les deux sur l'axe de symétrie sur segment $[EC]$, on a aussi $\widehat{HCD} = \widehat{HED}$ ainsi que $HC = HE$. Il vient que $HE = HB$. Puisque le triangle EHB est isocèle en H, $\widehat{BEH} = \widehat{HBE}$. Finalement :

$$\widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{DCH} = \widehat{DEH} = \widehat{EBH} = \widehat{GBH},$$

ce qui est le résultat voulu.

Commentaire des correcteurs Problème plutot bien réussi pour un dernier exercice. Un grand nombre d'elève ne prend pas la peine de justifier que D est bien sur la médiatrice de $[EC]$, alors que c'est l'un des points clés de l'exercice. Parmi les tentatives infructueuses, on trouve beaucoup de confusions sur les droites remarquables d'un triangle, qui sont pourtant rappelées dans le formulaire des prérequis. Enfin, quelques élèves se sont directement placés dans le cas d'un triangle équilatéral, ce qui ne permet pas d'avancer sur le cas général.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer

$$\frac{3^3+3^5}{54}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 8 On peut factoriser le numérateur, ce qui permet d'obtenir que

$$\frac{3^3+3^5}{54} = \frac{3^3 \times (1+3^2)}{2 \times 3 \times 3 \times 3}.$$

En simplifiant par 3^3 au numérateur et au dénominateur on obtient que

$$\frac{3^3 \times (1+3^2)}{2 \times 3 \times 3 \times 3} = \frac{1+3^2}{2} = \frac{1+9}{2} = 5$$

La réponse attendue est donc 5.

Solution alternative n°1 On peut simplifier directement la fraction en faisant à la main tous les calculs :

$$\frac{3^3+3^5}{54} = \frac{27+243}{54} = \frac{270}{54} = 5.$$

La réponse attendue est donc 5.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été très bien réussi. La plupart des erreurs sont dûes à des inattentions lors des simplifications de fraction, ou lors du calcul des puissances de 3. On rappelle que détailler ses calculs sur la copie permet potentiellement d'obtenir des points partiels même en cas d'erreur de calcul.

Exercice 9. Soient a, b et c trois réels vérifiant les deux équations $4a+3b=c$ et $3a-4b=7c$. Montrer que $a^2+b^2=2c^2$.

Solution de l'exercice 9 En élevant au carré et en sommant les deux équations, on a

$$c^2+49c^2=(4a+3b)^2+(3a-4b)^2=16a^2+9b^2+24ab+9a^2+16b^2-24ab=25a^2+25b^2.$$

En simplifiant par 25, on trouve bien $a^2+b^2=2c^2$.

Solution alternative n°1 On résoud le système de deux équations à deux inconnues

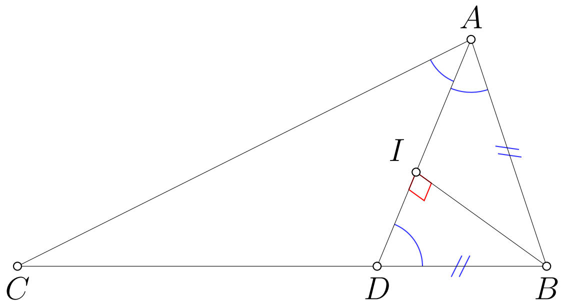
$$\begin{cases} 4a+3b=c \\ 3a-4b=7c \end{cases}$$

En multipliant par 4 la première équation et par 3 la deuxième équation et en sommant on trouve $25a=25c$, soit $a=c$. En multipliant par 3 la première équation et par 4 la deuxième équation et en faisant la différence, on trouve $25b=-25c$, soit $b=-c$. Ainsi, $a^2+b^2=2c^2$.

Commentaire des correcteurs L'exercice est très bien réussi. La majorité des élèves ont choisi de résoudre le système en fonction de a et b. Les quelques tentatives qui n'aboutissent pas à une solution complètes sont dûes à des erreurs de calcul dans l'une ou l'autre des approches du corrigé, ou à une erreur dans l'emploi des identités remarquables.

Exercice 10. Soit ABC un triangle non plat. Soit I le centre de son cercle inscrit et soit D le pied de la bissectrice issue du sommet A. Montrer que $\widehat{BID} \neq 90°$.

Solution de l'exercice 10



Supposons par l'absurde que $\widehat{BID} = 90°$. Alors $\widehat{BIA} = 90°$ également. Ainsi, en utilisant que la somme des angles d'un triangle vaut $180°$ et que $\widehat{ABI} = \widehat{IBD}$, on a

$$\widehat{IAB} = 90° - \widehat{ABI} = 90° - \widehat{IBD} = \widehat{BDA}.$$

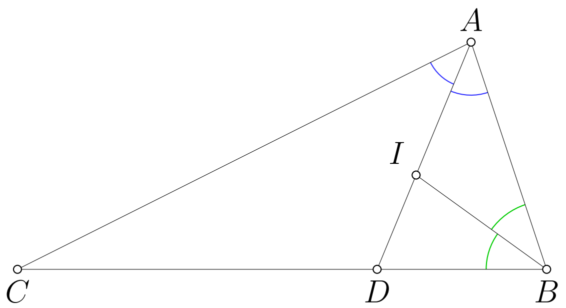
Or, le point I est sur la bissectrice de l'angle en A, de sorte que

$$\widehat{ADB} = \widehat{BAD} = \widehat{DAC}.$$

Par égalité des angles alternes internes, on déduit que les droites (BC) et (CA) sont parallèles, donc confondues, ce qui contredit le fait que le triangle est non plat.

Ainsi, $\widehat{BID} \neq 90°$.

Solution alternative n°1



On propose un raisonnement direct. La somme des angles dans le triangle $\widehat{BIA}$ vaut $180°$, de sorte que :

$$\widehat{BID} = 180° - \widehat{BIA} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}.$$

En utilisant que le point I appartient à la bissectrice de chacun des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{ABC}$, on trouve

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}\widehat{BAC} + \frac{1}{2}\widehat{ABC}.$$

Puisque le triangle ABC est non plat, l'angle $\widehat{ACB}$ est strictement positif et

$$\widehat{BID} = \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC}) < \frac{1}{2}(\widehat{BAC} + \widehat{ABC} + \widehat{ACB}) = \frac{1}{2}180^\circ = 90^\circ.$$

On trouve donc bien que $\widehat{BID} \neq 90^\circ$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été beaucoup abordé et dans l'ensemble a été très bien réussi par les élèves, qui ont pour la plupart rendu un raisonnement clair et complet. Néanmoins, un bon nombre sont passés à côté de l'exercice, notamment à cause de confusions entre bissectrices et médiatrices ou entre point d'intersection de la bissectrice et point de tangence du cercle inscrit. Les correcteurs tiennent à insister sur le fait que ce sont des notions fondamentales qu'il est important de maîtriser. Enfin, certains élèves se sont contentés d'argumenter qu'ils ne pouvaient pas dessiner un angle de 90° et donc que c'était impossible. Nous rappelons qu'un dessin n'est pas une preuve, et le fait de ne pas réussir à dessiner une figure avec un angle de 90° ne saurait suffire à résoudre l'exercice.

Exercice 11. Baptiste écrit n réels strictement positifs au tableau (pas forcément distincts). Il remarque ensuite que chaque réel écrit au tableau est strictement inférieur à la somme des $n-1$ autres réels. Baptiste voudrait alors colorier chaque réel en bleu, en vert ou en rouge, de sorte que, la somme des réels d'une même couleur est strictement inférieure à la somme des autres réels. Baptiste peut-il réaliser son souhait :

1) si $n = 4$?

2) si $n = 5$?

Solution de l'exercice 11

- Si $n = 4$, alors ce n'est pas toujours possible. En effet, supposons que Baptiste écrive au tableau le quadruplet $(1, 1, 1, 1)$. Cet ensemble vérifie la condition de l'énoncé puisque tous les réels sont strictement positifs et que chacun est plus petit que la somme des trois autres.
  Si on colorie ces nombres avec trois couleurs, il existe une couleur contenant au moins deux nombres 1 (sinon il y aurait au plus trois nombres écrits au tableau). La somme de ces 1 n'est alors pas strictement inférieure à la somme des nombres restant.

  En réalité, le cas où les quatre nombres écrits sont égaux est le seul cas dans lequel Baptiste ne peut pas réaliser son souhait. En effet, notons $a \leq b \leq c \leq d$ les quatre nombres écrits par Baptiste. Si Baptiste colorie a, b en rouge, c en bleu et d en vert, alors le coloriage vérifie :
  - $d < a + b + c$ par hypothèse ;
  - $c < a + b + d$ par hypothèse ;
  - Comme $a \leq c$ et $b \leq d$, $a + b \leq b + d$. De plus, on a égalité si et seulement si $a = c$ et $b = d$. Comme $a \leq b \leq c \leq d$ cela implique $a = b = c = d$. Ainsi si $a = b = c = d$ n'est pas vérifié, on a $a + b < c + d$.

  En particulier, si $a = b = c = d$ n'est pas vérifié, alors Baptiste peut réaliser son souhait.
- Si $n = 5$, alors c'est possible, ce que l'on démontre en construisant explicitement une telle répartition.
  Notons $a_1 \leq a_2 \leq a_3 \leq a_4 \leq a_5$ les nombres de l'ensemble, considèrons la répartition

  $$(a_5), (a_1, a_3), (a_2, a_4).$$

  et vérifions que la somme des éléments de chaque ensemble est strictement inférieure à la somme des autres réels.

  1er ensemble : Par hypothèse, on a $a_5 < a_1 + a_2 + a_3 + a_4$.

  2eme ensemble : On a $a_1 \leq a_2$ et $a_3 \leq a_4$ ce qui assure que $a_1 + a_3 \leq a_2 + a_4$. Comme $a_5 > 0$, il s'ensuit que $a_1 + a_3 < a_2 + a_4 + a_5$.

  3eme ensemble : On a $a_2 \leq a_3$ et $a_4 \leq a_5$ ce qui assure que $a_2 + a_4 \leq a_3 + a_5$. Comme $a_1 > 0$, il s'ensuit que $a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_5$.

Commentaire des correcteurs L'exercice est plutôt mal réussi vis à vis de sa position dans le sujet. En effet,

- Beaucoup d'élèves ont cru que Baptiste choisissait les réels qu'il écrit. Vu l'énoncé et la formulation, il était assez clair que ce n'était pas vrai : les réels sont écrits avant. Les copies qui avaient compris cet énoncé n'ont pas eu de points, car ils ne répondaient pas aux questions voulues.

- ▷ Pour la première partie, beaucoup d'élèves ont trouvé le contre-exemple. Mais pour une bonne partie d'entre eux, seule une répartition avec deux éléments d'une couleur, et un élément de chaque autre couleur était possible. Nulle part il est dit que chaque couleur est utilisée, donc ça n'était à priori pas vrai. Pour avoir tous les points du contre-exemple, il fallait traiter tous les coloriages possibles : par exemple en disant qu'il y avait une couleur utilisée au moins deux fois.
- ▷ Pour la première partie, plusieurs élèves ont supposés que les réels étaient distincts. Ce qui n'était malheureusement pas correct.
- ▷ Pour la seconde partie, il fallait montrer que Baptiste pouvait toujours réaliser son choix. Une idée naturelle était d'ordonner les nombres : attention à ne pas oublier que certains peuvent être égaux.
- ▷ Un certain nombre d'élèves ont écrit les inégalités qui voulaient, fait des manipulations, puis trouvé une inégalité vraie, et ont conclu que c'était vrai. Malheureusement, il était toujours impossible de prouver à partir de cette inégalité les inégalités de départ.
- ▷ Certains ont bien compris comment grouper les nombres et n'ont pas prouvé les inégalités correspondantes $a_1 + a_3 < a_2 + a_4 + a_5$ et $a_2 + a_4 < a_1 + a_3 + a_5$. Ce n'est pas du tout trivial, et méritait évidemment d'être prouvé.
- ▷ Certains élèves ont prouvé que Baptiste ne pouvait pas colorier les nombres car "s'il colorie le premier et le deuxième en rouge, le troisième en bleu et le quatrième et le cinquième en vert, alors si le premier et le deuxième valent 10 et les autres 1 ça ne marche pas". A priori Baptiste est intelligent, et peut adapter son coloriage à la valeur des nombres : par exemple, colorié $1, 1$ en vert, $1, 10$ en rouge, et 10 en bleu.
- ▷ Attention, le contraire de $A < B$ n'est pas $A > B$. L'oubli du cas $A = B$ a fait perdre à certains de nombreux points, car il était très dur à gérer.
- ▷ Attention : le contraire de $a = b = c = d$ n'est pas $a < b < c < d$. On peut aussi avoir $a = b < c = d$ par exemple.
- ▷ Attention à bien lire l'énoncé. Celui-ci demandait à chaque fois que les sommes soient strictement inférieures, pas inférieures ou égales.

Exercice 12. Déterminer tous les nombres premiers p vérifiant la propriété suivante : si on écrit les entiers de 1 à p au tableau, on peut les séparer en plusieurs groupes de nombres consécutifs de même somme.

Solution de l'exercice 12 On constate que $p = 2$ ne convient pas, car les groupes ={1} et {2} ne sont pas de même somme. On peut donc sans perte de généralité supposer que l'on cherche à déterminer les nombres premiers $p \geq 3$ vérifiant la propriété de l'énoncé.

On montre par un raisonnement d'*analyse-synthèse* que 3 est le seul nombre premier qui vérifie la propriété de l'énoncé.

Analyse : Soit $p \geq 3$ un tel nombre premier et donnons nous une division des nombres $\{1, \ldots, p\}$ en $g > 1$ groupes de nombres consécutifs ayant ayant chacun pour somme S. Tout d'abord, la répartition des entiers en p groupes $\{1\}, \{2\}, \ldots, \{p\}$ ne vérifie pas la condition car $1 \neq p$. Ainsi, il y a strictement moins de p groupes, c'est-à-dire que $g < p$. On note k le nombre d'éléments dans le premier groupe. On a

$$gS = 1 + \ldots + p = \frac{p(p+1)}{2}.$$

ce qui assure que $p \mid gS$. Puisque $g < p$ et que p est premier, il s'ensuit que p est premier avec g et donc que $p|S$ par le lemme de Gauss.

Or, le premier groupe assure que $S = 1 + \ldots + k = \frac{k(k+1)}{2}$, ce qui assure que $p \mid k+1$. Il s'ensuit que $p \leq k+1$. On a donc $k < p \leq k+1$ ce qui démontre que $p = k+1$ et donc que le premier groupe est constitué des nombres $\{1, \ldots, p-1\}$.
On a donc deux groupes :

$$\{1, \ldots, p-1\}, \{p\}.$$

Par hypothèse, $p = 1 + \ldots + (p-1) = \frac{(p-1)p}{2}$ donc $\frac{p-1}{2} = 1$ donc $p - 1 = 2$ ce qui assure que $p = 3$.

Synthèse : Le nombre $p = 3$, convient puisqu'on peut faire la répartition $\{1, 2\}, \{3\}$.

Commentaire des correcteurs La plupart des élèves trouvent bien le cas $p = 3$ et conjecturent qu'il s'agit de l'unique solution. Certains écrivent des calculs un peu compliqués lorsque des considérations arithmétiques suffisent. Nous avons été surpris de voir un certain nombre de copies appliquer le lemme d'Euclide dans le mauvais sens, concluant que S divisait p ou $\frac{p+1}{2}$. Un petit nombre d'élèves conjecturent (ou affirment) qu'il n'y a aucune solution alors que trouver $p = 3$ était abordable : il faut toujour tester les petits cas lorsque cela est possible. Enfin, il est dommage que certaines copies obtiennent la note de 6/7 pour avoir oublié de montrer explicitement que $p = 3$ fonctionnait bien ou pour avoir oublié d'exclure $p = 2$.

Exercice 13. On considère une grille 100×100 dont toutes les cases sont soit blanches soit noires. Une opération consiste à choisir une ligne ou une colonne de la grille, et modifier la couleur de 99 des cases de cette ligne ou de cette colonne. Quel est le plus petit nombre d'opérations qu'il faut effectuer pour passer de la configuration d'une grille dont toutes les cases sont blanches à une grille où les cases sont coloriées selon le coloriage d'un échiquier.

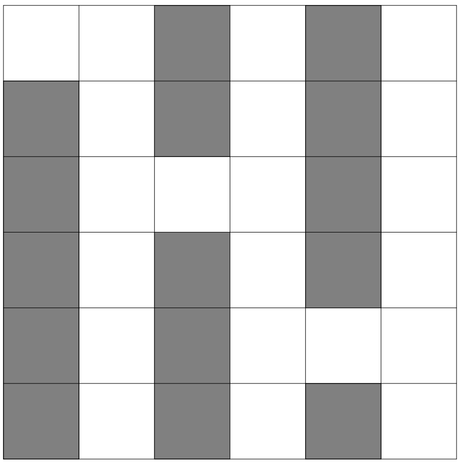
Un coloriage en échiquier est un coloriage dans lequel il y a autant de cases blanches que de cases noires et où deux cases blanches n'ont jamais de côté en commun.

Solution de l'exercice 13 **Réponse :** 100 opérations sont nécessaires et suffisantes.

Dans cet exercice, on demande de trouver le plus petit nombre d'opérations pour aboutir à une configuration. Il faut donc nécessairement distinguer deux parties : d'une part montrer que si l'on parvient à la configuration voulue en n opérations, on a nécessairement $n \geqslant 100$ (cette étape est appelée l'*analyse*) et d'autre part qu'il est bien possible d'obtenir la configuration voulue en 100 opérations (c'est ce qu'on appelle la *synthèse*).

Analyse : Supposons que l'on a effectué n opérations, après lesquelles la grille dispose du coloriage de l'échiquier. Comme l'échiquier est de longueur paire, l'une des grandes diagonales de la grille contient alors 100 cases noires. Comme deux quelconques de ces cases ne sont jamais sur la même colonne ou la même ligne, elles n'ont pas pu changer d'état au cours de la même opération. Il y a donc eu au moins 100 opérations.

Synthèse : Numérotons les colonnes de gauche à droite de 1 à 100 et les lignes de haut en bas de 1 à 100. Notons A la grande diagonale de l'échiquier partant du coin supérieur gauche et allant au coin inférieur bas. On commence, sur chaque colonne de numéro impaire, par colorier toutes les cases en noir sauf les cases de la diagonale A. Après opération, on obtient le schéma suivant :



Pour l'instant, toutes les cases de la forme $(i, 2j+1)$ pour $i \neq 2j+1$ sont de couleur noire, et les autres cases sont blanches.

Après ça, on effectue une opération sur chaque ligne de numéro impair en modifiant la couleur des 99 cases qui ne sont pas sur A. Les cases de la forme $(2i+1, 2j+1)$ deviennent blanches, les cases de la forme $(2i+1, 2j)$ pour $j \neq i$ deviennent noires, les cases de la forme $(2i, 2j)$ restent blanches et les cases de la forme $(2i, 2j+1)$ deviennent noires. On obtient bien un échiquier.

Solution alternative n°1 On propose une autre façon de réaliser l'analyse :

On s'intéresse aux cases qui sont noires dans l'échiquier final. On les appellera dans la suite les cases « gentilles ». On remarque que chaque ligne et chaque colonne contient exactement 50 cases gentilles. On en déduit déjà que l'échiquier contient $50 \cdot 100 = 5000$ cases gentilles.

De plus, la couleur de chaque case gentille doit être modifiée au moins une fois (car les cases gentilles sont initialement blanches, mais sont noires sur l'échiquier final). Or, en une opération, on peut modifier la couleur d'au plus 50 cases gentilles (car on opère sur une ligne ou une colonne seulement, et on a vu que chaque ligne et chaque colonne contient exactement 50 cases gentilles). Ainsi, pour modifier la couleur des 5000 cases gentilles, il faut au moins $\frac{5000}{50} = 100$ opérations, ce qui montre qu'il faut au moins 100 opérations pour obtenir un échiquier.

Solution alternative n°2 On propose une troisième façon de réaliser l'analyse.

Supposons par l'absurde qu'au plus 99 opérations ont été effectuées. Alors il existe une ligne et une colonne qui n'ont subi aucune opération. La case à leur intersection est donc une case blanche. Les cases noires présentes sur l'union de la ligne et de la colonne ont donc vu leur état modifié au cours d'opérations différentes, et il y en a 100, ce qui donne la contradiction.

Solution alternative n°3 On propose une quatrième façon de réaliser l'analyse.

Supposons à nouveau par l'absurde qu'il y a au plus 99 opérations d'effectuées. Alors (par symétrie), au plus 49 lignes ont été utilisées et une colonne au moins n'a pas été utilisée. Cette colonne possède 50 cases noires, qui ont vu leur état changer au cours d'opérations différentes, contredisant qu'il y avait au plus 49 lignes utilisées.

Commentaire des correcteurs Cet exercice était difficile, la plupart des copies rendues n'ont pas réussi à obtenir beaucoup de points et peu d'élèves ont résolu complètement l'exercice. La preuve se décomposait en deux parties, il fallait dans un premier temps (la synthèse) démontrer que 100 opérations étaient suffisantes en exhibant une suite d'opération qui produit un échiquer et dans un deuxième temps (l'analyse) il fallait démontrer que l'on ne pouvait pas faire mieux que 100 opérations. Dans cette dernière partie plusieurs approches différentes étaient possibles, elle a également été considérée plus difficile.

Un certain nombre d'élèves ont pu obtenir des points résolvant la synthèse.

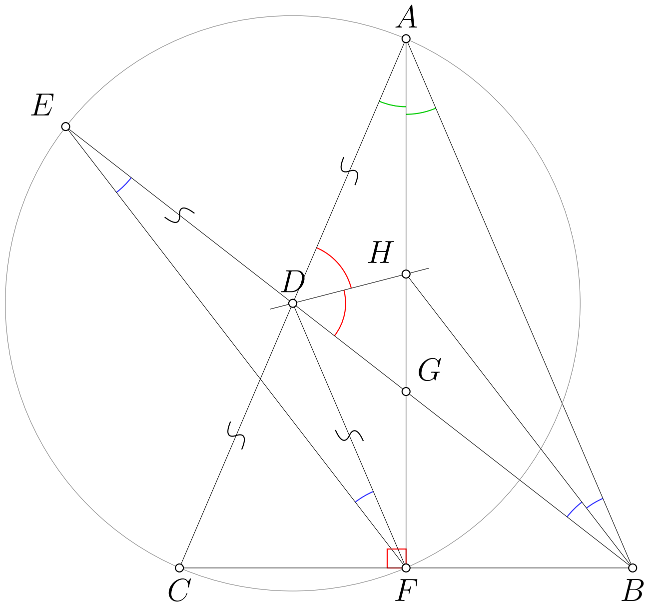
La plupart des tentatives pour démontrer l'analyse ont échoué, la majorité des élèves ayant essayé de sommer des résultats d'optimalité pour plusieurs lignes. Ce genre de raisonnement avait peu de chance d'aboutir, en effet il ne prenait pas en compte le fait qu'une opération sur une colonne peut avoir un impact sur deux lignes différentes rendant caduque toute preuve qui considérait les lignes de manières indépendantes. Une des preuves de l'analyse utilisait la grande diagonale noire, la plupart des élèves ayant utilisé cette méthode ont oublié de démontrer que cette diagonale existait bien, en effet si la taille de l'échiquier n'était pas paire cette diagonale n'avait aucune raison d'exister. Nous n'avons pas pris cela en compte dans notre notation et avons accordé tous les points.

Exercice 14. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du segment $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. La droite (BD) coupe le cercle de diamètre $[AC]$ au point E, de sorte que E et B sont de part et d'autre de $[AC]$. La médiatrice du segment $[EC]$ recoupe la droite (AG) au point H.

1) Montrer que la droite (BH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GBA}$.

2) Soit F le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABC. Montrer que les droites (EF) et (BH) sont parallèles.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>



1) Nous allons montrer que H est le centre du cercle inscrit du triangle ADB. Pour cela, nous montrons que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ADB}$ et sur la bissectrice de l'angle $\widehat{DAB}$. Si c'est le cas, comme les trois bissectrices d'un triangle sont concourantes, il viendra que H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABD}$, et donc de l'angle $\widehat{ABG}$.

D'une part, comme le triangle ABC est isocèle en A, la médiane issue du sommet A est également la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Ainsi, H est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

D'autre part, puisque D est le milieu du segment $[AC]$, il est le centre du cercle circonscrit au triangle AEC. Ainsi, D et H sont tous les deux sur la médiatrice du segment $[EC]$. Comme le triangle ECD est isocèle en D, cette médiatrice est également la bissectrice de l'angle $\widehat{EDC}$, et donc celle de l'angle $\widehat{ADB}$ qui lui est opposé par le sommet.

Ainsi H est bien sur le centre du cercle inscrit au triangle ABD comme annoncé.

2) On va montrer que $\widehat{FED} = \widehat{HBD}$. Pour cela, on remarque que puisque $\widehat{CFA} = 90°$, le point F est sur le cercle de diamètre $[AC]$. Ainsi, le triangle DEF est isocèle en D. On obtient alors que

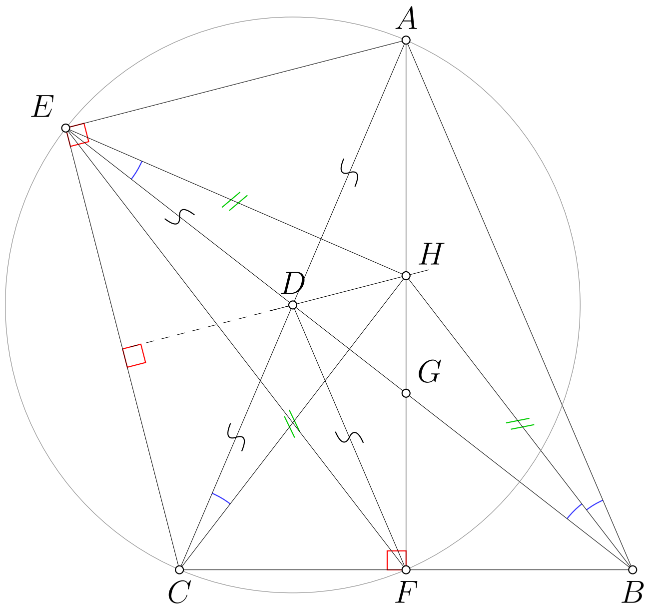
$$\widehat{FED} = \frac{1}{2}(\widehat{FED} + \widehat{EFD}) = \frac{1}{2}(180° - \widehat{EDF}) = \frac{1}{2}\widehat{FDB}.$$

Puisque les points D et F sont milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[BC]$, les droites (DF) et (AB) sont parallèles. Il vient que $\widehat{FDB} = \widehat{DBA}$. En utilisant la question 1), on déduit que

$$\widehat{FED} = \frac{1}{2}\widehat{FDB} = \frac{1}{2}\widehat{DBA} = \widehat{HBD}.$$

Les angles $\widehat{FED}$ et $\widehat{HBD}$ sont donc alternes-internes et les droites (EF) et (BH) sont parallèles.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On propose une solution alternative pour la question 1 et pour la question 2.



1) Puisque H est sur la médiane issue du sommet A, qui est aussi l'axe de symétrie su segment $[BC]$, on a $\widehat{ABH} = \widehat{ACH}$ ainsi que $HB = HC$. De même que dans la solution précécdente, D est le centre du cercle passant par A, C et E. Puisque D et H sont tous les deux sur l'axe de symétrie sur segment $[EC]$, on a aussi $\widehat{HCD} = \widehat{HED}$ ainsi que $HC = HE$. Il vient que $HE = HB$. Puisque le triangle EHB est isocèle en H, $\widehat{BEH} = \widehat{HBE}$. Finalement :

$$\widehat{ABH} = \widehat{ACH} = \widehat{DCH} = \widehat{DEH} = \widehat{EBH} = \widehat{GBH},$$

ce qui est le résultat voulu.

2) Nous allons montrer que $\dfrac{GE}{GB} = \dfrac{GF}{GH}$, ce qui permet de conclure d'après la réciproque du théorème de Thalès. Pour cela, on rappelle que le point G est situé aux deux tiers de chaque médiane du triangle BAC, de sorte que $GA = 2GF$ et $GB = 2GD$.

De plus, puisque le point E est sur le cercle de diamètre $[AC]$, on a $\widehat{CEA} = 90°$. Les droites (DH) et (AE) sont alors toutes les deux perpendiculaires à la droite (EC), elles sont donc parallèles. On déduit d'après le théorème de Thalès que

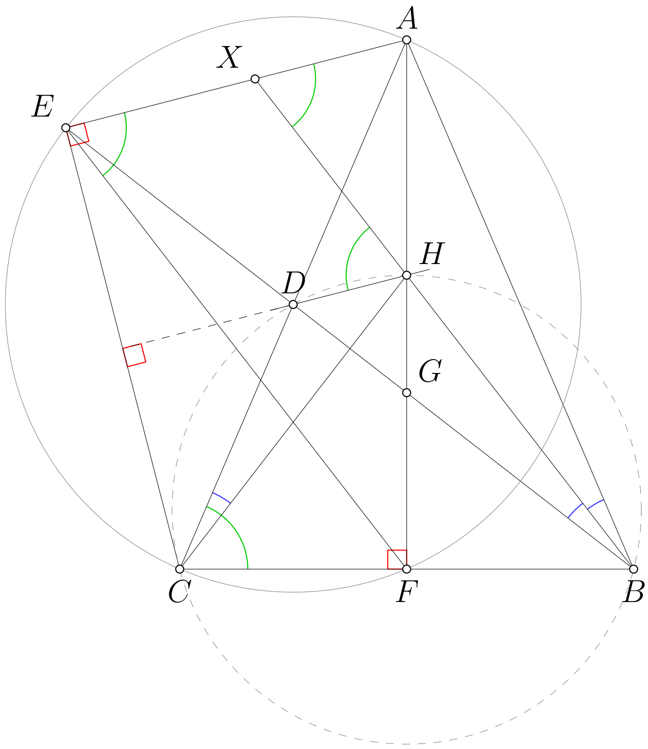
$$\frac{GE}{GD} = \frac{GA}{GH}.$$

Mais alors

$$\frac{GE}{GB} = \frac{GE}{2GD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{GE}{GD} = \frac{1}{2}\frac{GA}{GH} = \frac{GF}{GH},$$

qui est l'égalité de rapports annoncée.

<u>*Solution alternative n°2*</u> 2) On propose une troisième façon de résoudre l'exercice à l'aide du théorème de l'angle inscrit.



De même que dans les précédentes solutions, le point D est le centre du cercle de diamètre $[AC]$ auquel appartiennent les points E et F, avec en particulier, $\widehat{CEA} = 90°$. On déduit, de même que dans la solution précédente, que les droites (DH) et (EA) sont parallèles.

Notons X le point d'intersection des droites (BH) et (EA). Nous allons montrer que les angles $\widehat{BXA}$ et $\widehat{FEA}$ sont égaux, ce qui implique bien que les droites (EF) et (BH) sont parallèles.

D'une part, d'après le théorème de l'angle inscrit appliqué au cercle de diamètre $[AC]$,

$$\widehat{FEA} = \widehat{FCB} = \widehat{BCD}.$$

D'autre part, la symétrie d'axe (AH) échange les points B et C, de sorte que $\widehat{HCA} = \widehat{HBA}$ (de même que dans la deuxième solution de la question 1)). En utilisant la question 1), on trouve que

$$\widehat{HCD} = \widehat{HCA} = \widehat{HBA} = \widehat{HBD}.$$

D'après la réciproque du théorème de l'angle inscrit, on déduit que les points D, C, B et H sont cocycliques. Ainsi, d'après le théorème de l'angle inscrit,

$$\widehat{DCB} = 180° - \widehat{DHB} = \widehat{XHD}.$$

En utilisant le parallélisme des droites (DH) et (EA) et en utilisant l'égalité des angles alternes-internes $\widehat{XHD}$ et $\widehat{HXA}$, on trouve bien

$$\widehat{FEA} = \widehat{BCD} = \widehat{XHD} = \widehat{HXA},$$

ce qui donne l'égalité d'angles annoncée.

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice, malgré sa position, a été beaucoup abordé, même pour ne tracer que la figure ou pour effectuer des observations élémentaires. Ce constat est assez encourageant. On compte un grand nombre de solutions à la première question et un nombre conséquent de

solutions complètes pour la deuxième question. La figure était assez riche en propriétés, ce qui permettait plusieurs approches et rendaient beaucoup d'observations pertinentes pour l'une ou l'autre des approches.

On relève les erreurs récurrentes suivantes :

- Confondre bissectrice et médiane dans la question 1.
- Manquer de justifier soigneusement que D est sur la médiatrice du segment $[EC]$.

Exercice 15. Au stage Animath, il y a n élèves, numérotés de 1 à n, où $n \geqslant 2$ est un entier naturel. Théo dispose d'une infinité de cadeaux différents, où chaque cadeau n'existe qu'en un seul exemplaire. De plus, l'élève numéro i aime un nombre fini $x_i > 0$ de cadeaux parmi les cadeaux proposés par Théo.

Déterminer, en fonction de n, le plus grand réel $c > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Quelques soient les entiers $x_1, \ldots, x_n$, si $\dfrac{1}{x_1} + \dfrac{1}{x_2} + \ldots + \dfrac{1}{x_n} < c$, alors Théo peut s'arranger pour donner un cadeau à chaque élève de sorte que chaque élève a reçu un cadeau qu'il aime.

Solution de l'exercice 15

Réponse : $\alpha = \dfrac{n}{n-1}$

Dans cet exercice, on cherche à démontrer que $\dfrac{n}{n-1}$ est le plus grand réel vérifiant la propriété de l'énoncé. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si Théo peut s'arranger pour distribuer les cadeaux comme voulu quelques soient les entiers $x_1, \ldots, x_n$, alors $\alpha \leqslant \dfrac{n}{n-1}$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre que dans le cas où $\alpha = \frac{n}{n-1}$, Théo peut toujours distribuer des cadeaux de sorte à plaire à tous les élèves, cette étape s'appelle *la construction* ou encore *la synthèse*.

Analyse :

On montre que $\alpha = \frac{n}{n-1}$. Tout d'abord, $\alpha \leq \frac{n}{n-1}$, car pour $x_1 = \cdots = x_n = n-1$, on a $\sum \frac{1}{x_i} = \frac{n}{n-1}$, et si les voeux de tous les enfants sont identiques, Théo ne pourra donner le cadeau que personne ne veut à personne sans briser l'un des rêves.

Synthèse :

Supposons maintenant qu'on est dans le cas où $\frac{1}{x_i} + \ldots + \frac{1}{x_n} < \frac{n}{n-1}$, et montrons que Théo peut toujours s'arranger pour que chaque élève reçoive un cadeau qu'il aime.

Remarquons tout d'abord que pour tout $k \leq n$, il y a au plus k enfants avec une liste de taille plus petite que k. C'est vrai pour $k = n$, supposons maintenant que $k < n$. Alors, si ce n'était pas le cas, on aurait $k+1$ enfants avec une liste de taille plus petite que k, et donc

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} \geqslant \frac{k+1}{k} = 1 + \frac{1}{k} \geqslant 1 + \frac{1}{n-1} = \frac{n}{n-1}.$$

On obtient une contradiction avec notre hypothèse sur α.

Théo peut alors distribuer les cadeaux de la façon suivante : quitte à renuméroter les élèves, on peut supposer que $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$. Théo commence alors par distribuer un cadeau à l'élève numéro 1 parmi les x_1 cadeaux voulus par cet élève. On suppose ensuite que Théo a distribué un cadeau aux élèves numéros $1, \ldots, k-1$. Alors $x_k \geqslant k$ par la remarque précédente, de sorte que l'élève k a dans sa liste de cadeaux qu'il souhaite un cadeau qui n'est pas l'un des $k-1$ déjà distribués. Théo lui attribue alors ce cadeau. De proche en proche, on obtient que Théo peut distribuer un cadeau aux n élèves.

Il commence par donner son cadeau à l'éventuel enfant qui a une liste de taille 1, puis il donne un cadeau restant parmi les deux éventuels enfants qui ont une liste de taille plus petite que 2, et ainsi de suite. À chaque étape, mettons k, il est certain de pouvoir donner un cadeau qui correspond à chaque enfant qui a une liste de taille k, car il a donné au plus k cadeaux et chaque enfant accepte k cadeaux.
Ainsi, Théo peut effectivement réaliser tous les rêves lorsque $\sum \frac{1}{x_i} < \frac{n}{n-1}$, et $\alpha = \frac{n}{n-1}$

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile et n'a été résolu que par quelques élèves. Il était constitué de deux parties : une partie consistait à montrer que forcément $c \leq \frac{n}{n-1}$. Celle-ci demandait simplement de donner un exemple de choix de $x_1, \ldots, x_n$ pour lequel Théo ne pouvait pas répartir les cadeaux vérifiant $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$. C'était la partie facile du problème, et il est dommage que peu d'élèves aient vu cette répartition, et obtenu l'inégalité voulue.

Une seconde partie était de prouver que $c = \frac{n}{n-1}$ convenait : le plus simple était de donner un algorithme permettant de donner à chacun un cadeau. Cependant, il fallait voir pourquoi si $\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n} < \frac{n}{n-1}$ alors l'algorithme fonctionnait. Le plus simple était d'ordonner les x_i, montrer que $x_i \geq i$ et conclure.

Cependant plusieurs élèves ont affirmé que si $x_i \geq i$ il était clair qu'on pouvait distribuer les cadeaux sans preuve : cela n'est pas du tout évident. Autant il est clair que si $x_1, \ldots, x_i$ valent tous au plus $i - 1$, il peut y avoir un problème pour distribuer les cadeaux si ceux-ci sont identiques, autant la réciproque est loin d'être évidente.