Coupe Animath de Printemps

5 juin 2024

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. La somme de trois nombres vaut 96. Le premier d'entre eux vaut 6 fois le troisième, et le troisième vaut 40 de moins que le deuxième. Quelle est la valeur du premier nombre ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit K un point du segment $[BC]$ et soit L un point du segment $[CD]$ tels que $CK = CL$. Montrer que la bissectrice de $\widehat{DAB}$ et la droite (KL) sont perpendiculaires.

Exercice 3. Déterminer le plus petit entier n tel que le produit de n entiers positifs consécutifs est toujours divisible par 45.

Exercice 4. Baptiste écrit n réels strictement positifs au tableau (non nécessairement distincts). Il remarque ensuite que chaque réel écrit au tableau est strictement inférieur à la somme des $n-1$ autres réels. Baptiste voudrait alors colorier chaque réel en bleu, en vert ou en rouge, de sorte que, la somme des réels d'une même couleur est strictement inférieure à la somme des autres réels. Baptiste peut-il réaliser son souhait :

1) si $n = 4$?

2) si $n = 5$?

Exercice 5. Au pays d'Animath se trouvent au moins quatre villes. Deux villes quelconques sont reliées soit par une route en béton, soit par un sentier de terre (mais pas par les deux en même temps). Alice ne souhaite emprunter que des routes en béton. Elle remarque que pour aller à la capitale depuis sa ville natale, quel que soit le chemin, elle devra toujours passer par au moins deux villes intermédiaires.

Montrer qu'entre deux villes quelconques, il est toujours possible d'aller de l'une à l'autre en n'empruntant que des sentiers de terre et en passant par au plus deux villes intermédiaires.

Exercice 6. Soient x, y, z trois réels non nuls (non nécessairement positifs) tels que

$$\frac{x+y}{z} = \frac{y+z}{x} = \frac{z+x}{y}.$$

Trouver toutes les valeurs que peut prendre le nombre

$$\frac{(x+y)(y+z)(z+x)}{xyz}.$$

Exercice 7. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du segment $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. La droite (BD) coupe le cercle de diamètre $[AC]$ au point E, de sorte que E et B sont de part et d'autre de $[AC]$. La médiatrice du segment $[EC]$ recoupe la droite (AG) au point H.

Montrer que la droite (BH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GBA}$.

Exercices lycéens

Exercice 8. Calculer
$$\frac{3^3+3^5}{54}.$$
Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soient a, b et c trois réels vérifiant les deux équations $4a+3b=c$ et $3a-4b=7c$. Montrer que $a^2+b^2=2c^2$.

Exercice 10. Soit ABC un triangle non plat. Soit I le centre de son cercle inscrit et soit D le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le segment $[BC]$. Montrer que $\widehat{BID} \neq 90°$.

Exercice 11. Baptiste écrit n réels strictement positifs au tableau (non nécessairement distincts). Il remarque ensuite que chaque réel écrit au tableau est strictement inférieur à la somme des $n-1$ autres réels. Baptiste voudrait alors colorier chaque réel en bleu, en vert ou en rouge, de sorte que, la somme des réels d'une même couleur est strictement inférieure à la somme des autres réels. Baptiste peut-il réaliser son souhait :

1) si $n=4$?

2) si $n=5$?

Exercice 12. Déterminer tous les nombres premiers p vérifiant la propriété suivante : si on écrit les entiers de 1 à p au tableau, on peut les séparer en plusieurs groupes de nombres consécutifs de même somme.

Exercice 13. On considère une grille 100×100 dont toutes les cases sont soit blanches soit noires. Une opération consiste à choisir une ligne ou une colonne de la grille, et changer la couleur de 99 des cases de cette ligne ou de cette colonne. Quel est le plus petit nombre d'opérations qu'il faut effectuer pour passer de la configuration d'une grille dont toutes les cases sont blanches à une grille où les cases sont coloriées selon un coloriage en échiquier ?

Un coloriage en échiquier est un coloriage dans lequel deux cases ayant un côté en commun sont toujours de couleur différente.

Exercice 14. Soit ABC un triangle isocèle en A. Soit D le milieu du segment $[AC]$ et G le centre de gravité du triangle ABC. La droite (BD) coupe le cercle de diamètre $[AC]$ au point E, de sorte que E et B sont de part et d'autre de $[AC]$. La médiatrice du segment $[EC]$ recoupe la droite (AG) au point H.

1) Montrer que la droite (BH) est la bissectrice de l'angle $\widehat{GBA}$.

2) Soit F le pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABC. Montrer que les droites (EF) et (BH) sont parallèles.

Exercice 15. Au stage Animath, il y a n élèves, numérotés de 1 à n, où $n \geqslant 2$ est un entier naturel. Théo dispose d'une infinité de cadeaux différents, où chaque cadeau n'existe qu'en un seul exemplaire. De plus, l'élève numéro i aime un nombre fini $x_i > 0$ de cadeaux parmi les cadeaux proposés par Théo.

Déterminer, en fonction de n, le plus grand réel $c > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Quelques soient les entiers strictement positifs $x_1, \ldots, x_n$, si $\dfrac{1}{x_1}+\dfrac{1}{x_2}+\ldots+\dfrac{1}{x_n} < c$, alors Théo peut s'arranger pour donner un cadeau à chaque élève de sorte que chaque élève a reçu un cadeau qu'il aime.