Connaissances exigibles lors de l'épreuve du tour 2 de la Coupe Animath de Printemps

Le présent document délimite les notions de mathématiques susceptibles d'être nécessaires à la résolution des exercices du tour 2 de la Coupe Animath.

Sauf mention explicite, les résultats cités ci-après sont exigibles de la part des collégiens et des lycéens.

En plus des résultats cités ci-après, **tous les résultats au programme de quatrième sont exigibles des collégiens, et tous les résultats au programme de seconde sont exigibles des lycéens.**

Les preuves des résultats sont disponibles dans un document annexe et ne sont pas exigibles.

Géométrie

Théorème. Soit ABC un triangle rectangle en A, alors son hypothénuse $[BC]$ est le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. En particulier, si M est le milieu du segment $[BC]$, $AM = BM = CM$.

Théorème. Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Si le segment $[BC]$ est un diamètre de Ω, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Propriété. Soit ABC un triangle.

- Les trois médiatrices du triangle concourent en un même point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.
- Les trois bissectrices du triangle concourent en un même point, qui est est le centre du cercle inscrit au triangle.
- Les trois hauteurs du triangles concourent en un même point appelé *orthocentre*.
- Les trois médianes du triangle concourent un même point G appelé *centre de gravité* du triangle ABC.

  De plus, si M est le milieu du segment $[BC]$, alors $AG = \frac{2}{3}AM$. Autrement, dit le point G est situé aux deux tiers des médianes du triangle ABC.

Arithmétique

Propriété (division euclidienne)**.** Soient a et b des nombres entiers strictement positifs. Il existe un unique couple (q, r) d'entiers tel que $0 \leqslant r < b$ et $a = qb + r$. Cette décomposition s'appelle la *division euclidienne de a par b*. L'entier q est appelé *quotient* et l'entier r *reste* de cette division euclidienne.

Exemple. Pour tout entier n, il existe un entier k tel que n s'écrit sous la forme $3k, 3k+1$ ou $3k+2$.

Définition (Nombre premier)**.** Un entier strictement positif est dit *premier* s'il est différent de 1 et admet exactement deux diviseurs positifs, à savoir 1 et lui-même.

Exemple : 17 est un nombre premier. 21 n'est pas un nombre premier car il admet 3 pour diviseur.

2 est le seul nombre premier pair.

Définition (Nombres premiers entre eux)**.** Deux entiers a et b sont dit *premiers entre eux* si 1 est le seul entier strictement positif divisant à la fois a et b.

Propriété. Soient a, b, c, m et n cinq entiers. Si a divise b et si a divise c, alors a divise $mb+nc$.

Lemme (Gauss)**.** Soient a, b et c trois entiers tels que a divise bc. Si a est premier avec b, alors a divise c.

Lemme (Euclide)**.** Soit p un nombre premier et soient a et b deux entiers. Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.

Théorème (Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers)**.** Soit $n \geqslant 2$ un entier. Il existe une unique façon d'écrire n comme le produit de nombres premiers. Autrement dit, il existe un unique entier r et un unique ensemble de r nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ distincts tel qu'il existe des entiers strictement positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Algèbre

Propriété (identités remarquables)**.** Soient a et b deux réels. On observe les identités :

- $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2$,
- $(a-b)^2 = a^2 - 2ab + b^2$,
- $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$.

Propriété (Somme des premiers entiers, exigible uniquement des lycéens)**.** Soit n un entier strictement positif. On a l'égalité :

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Propriété (Somme des premières puissances d'un réel, exigible uniquement des lycéens)**.** Soit q un réel différent de 1 et soit n un entier positif. On a l'égalité :

$$q^0 + q^1 + \ldots + q^n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1} - 1}{q - 1}.$$

En particulier,

$$1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Définition (Partie entière, partie supérieure et partie fractionnaire)**.** Soit x un réel.

- On appelle *partie entière* de x, notée $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- On appelle *partie supérieure* de x, notée $\lceil x \rceil$ le petit entier supérieur ou égal à x.
- On appelle partie fractionnaire de x la quantité $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Exemple : Si $x = 1,2$, alors $\lfloor x \rfloor = 1, \lceil x \rceil = 2$ et $\{x\} = 0,2$. Si $x = 3$, alors $\lfloor x \rfloor = 3, \lceil x \rceil = 3$ et $\{x\} = 0$. Si $x = -2,4$, $\lfloor x \rfloor = -3, \lceil x \rceil = -2$ et $\{x\} = 0.6$.

Propriété. Soit x un nombre réel. On a les inégalités suivantes :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \quad , \quad \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1 \quad , \quad \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

$$0 \leqslant \{x\} < 1.$$