Connaissances exigibles lors de l'épreuve du tour 2 de la Coupe Animath de Printemps

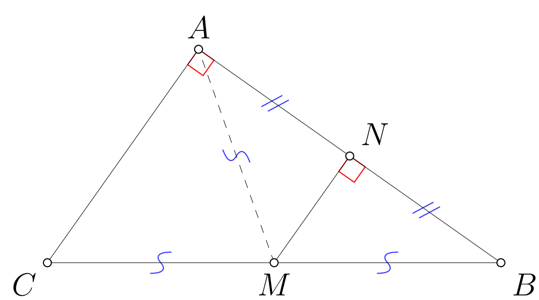
Par soucis de complétude, on présente ici les preuves des différentes propriétés exigibles des élèves au tour 2 de la coupe Animath. Nous espérons que ces preuves amélioreront la compréhension et l'assimilation de ces propriétés en vue de la préparation au concours.

Il n'est pas attendu des élèves qu'ils connaissent ces démonstrations le jour du concours.

Géométrie

Théorème. Soit ABC un triangle rectangle en A, alors son hypothénuse $[BC]$ est le diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC. En particulier, si M est le milieu du segment $[BC]$, $AM = BM = CM$.

Démonstration. Considérons la figure suivante :

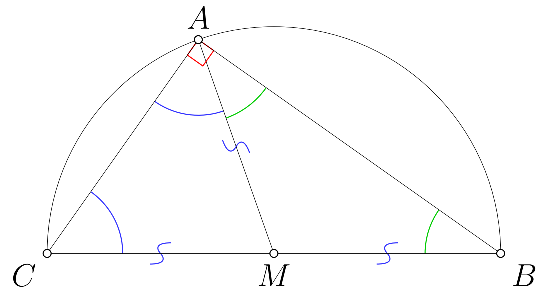


Soit N le milieu du segment $[AB]$ et soit ℓ la médiatrice du segment $[AB]$. On note M le point d'intersection de ℓ et du segment $[BC]$. Puisque M est sur ℓ, $MA = MB$.

Puisque les droites (AC) et (MN) sont perpendiculaires à (AB), elles sont parallèles. Puisque N est le milieu du segment $[AB]$, d'après la propriété de la droite des milieux, le point M est le milieu du segment $[BC]$. Ainsi, $MB = MC$. Le point M est équidistant des trois sommets du triangle, il est donc le centre de son cercle circonscrit, et $[BC]$ en est un diamètre.

Théorème. Soit ABC un triangle et soit Ω son cercle circonscrit. Si le segment $[BC]$ est un diamètre de Ω, alors le triangle ABC est rectangle en A.

Démonstration. Considérons la figure suivante :



Soit M le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.Par hypothèse, M est sur le segment $[BC]$.

Le triangle AMB est isocèle donc $\widehat{MAB} = \widehat{MBA}$. Puisque la somme des angles du triangle AMB vaut 180°, on a

$$180° = \widehat{AMB} + \widehat{ABM} + \widehat{MAB} = \widehat{AMB} + 2\widehat{MAB}.$$

Ainsi, $\widehat{MAB} = 90° - \dfrac{1}{2}\widehat{AMB}$. De la même façon, $\widehat{MAC} = 90° - \dfrac{1}{2}\widehat{AMC}$. Finalement :

$$\widehat{BAC} = \widehat{MAB} + \widehat{MAC} = 180° - \frac{1}{2}(\widehat{AMB} + \widehat{AMC}) = 90°.$$

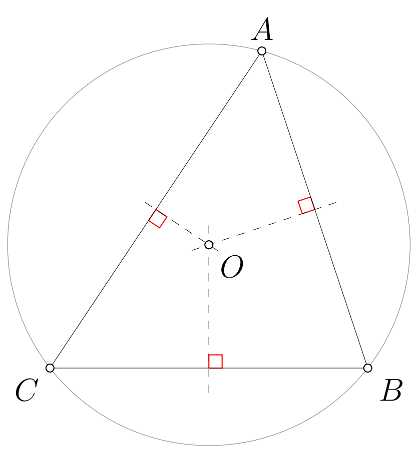
Le triangle ABC est donc bien rectangle.

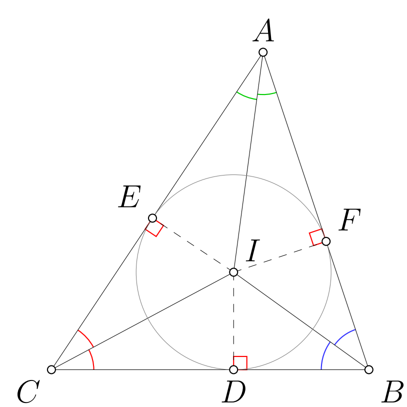
Propriété. Soit ABC un triangle.

- Les trois médiatrices du triangle concourent en un même point, qui est le centre du cercle circonscrit au triangle.
- Les trois bissectrices du triangle concourent en un même point, qui est est le centre du cercle inscrit au triangle.
- Les trois hauteurs du triangles concourent en un même point appelé *orthocentre*.
- Les trois médianes du triangle concourent un même point G appelé *centre de gravité* du triangle ABC.

  De plus, si M est le milieu du segment $[BC]$, alors $AG = \dfrac{2}{3}AM$. Autrement, dit le point G est situé aux deux tiers des médianes du triangle ABC.

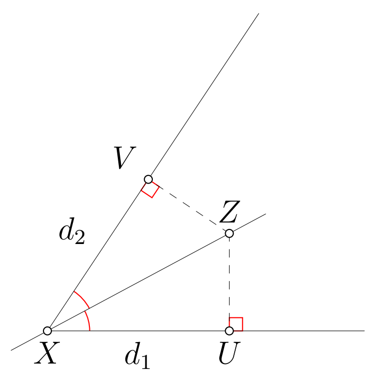
Démonstration. Considérons les figures suivantes :





• : **Montrons que les trois médiatrices sont concourantes.** Soit O le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec la médiatrice du segment $[CA]$. Puisque O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, on a $OB = OC$. Puisque O est sur la médiatrice du segment $[CA]$, on a $OC = OA$. On déduit que $OA = OB$, ce qui signifie que O est sur la médiatrice du segment $[AB]$. Ainsi, les trois médiatrices sont concourantes au point O, qui est équidistant des trois sommets du triangle. Il s'agit donc bien du centre du cercle circonscrit au triangle ABC.

• : **Montrons que les trois bissectrices sont concourantes.** On rappelle qu'un point X est sur la bissectrice de d'un angle délimité par deux demi-droites d_1 et d_2 si et seulement si il est à égale distance des deux droites. Prouvons le :



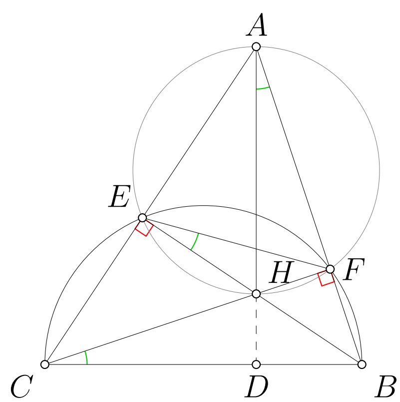
Notons X le point d'intersection des demi-droites d_1 et d_2. On prouve notre équivalence par double implication. La preuve qui suit utilise la notions de triangles semblables, dont les propriétés sont énoncées dans la proposition 5.2 du cours de géométrie pour débutants de la POFM.

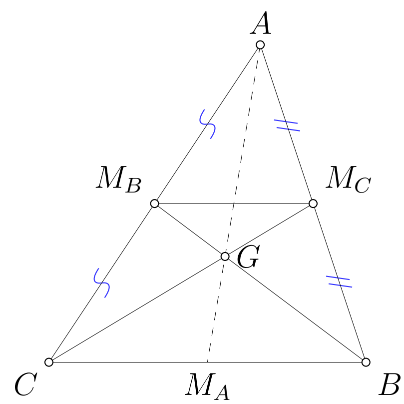
$\Rightarrow$ Prenons Z un point de la bissectrice de l'angle défini par d_1 et d_2 et notons U et V ses projetés orthogonaux sur les droites d_1 et d_2 respectivement. On souhaite montrer que $ZU = ZV$. Les triangles ZUX et ZVX ont deux angles en commun (les paires $(\widehat{ZXU}, \widehat{ZXV})$ et $(\widehat{ZUX}, \widehat{ZVX})$, ils sont donc semblables. On a donc $\dfrac{ZU}{ZV} = \dfrac{ZX}{ZX} = 1$.

$\Leftarrow$ Prenons Z un point à même distance des droites d_1 et d_2. Appelons U et V ses projetés orthogonaux comme précédemment. on souhaite montrer que $\widehat{ZXU} = \widehat{ZXV}$. Pour cela, notons que les triangles ZXU et ZXV ont deux paires de côtés de même longueur, à savoir (ZU, ZV) et (ZX, ZX). De plus, ils sont rectangles en U et V, donc d'après le théorème de Pythagore, $XU = \sqrt{ZX^2 - ZU^2} = \sqrt{ZX^2 - ZV^2} = XV$. Les triangles ZUX et ZVX ont donc leur trois côtés égaux deux à deux, ils sont donc semblables de rapport de similitude 1 (on dit qu'ils sont isométriques). En particulier, leurs angles sont égaux deux à deux et on trouve bien $\widehat{ZXU} = \widehat{ZXV}$.

Fort de cette propriété, montrons la concourance annoncée. Soit I le point d'intersection des bissectrices des angles $\widehat{ACB}$ et $\widehat{ABC}$. Soient D, E et F les projetés orthogonaux de I sur les côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$ respectivement. Puisque le point I est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ACB}$, $ID = IE$. Puisque le point I est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$, $ID = IF$. On a

donc $IE = IF$. I est donc à même distance des côtés AB et AC, ce qui implique qu'il est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Les trois bissectrices sont donc bien concourantes.
Puisque $\widehat{IDC} = 90°$, le cercle de centre I est de rayon ID est tangent à la droite (BC). De même, ce cercle est tangent aux deux autres côtés du triangle ABC, il s'agit donc bien de son cercle inscrit.





• : **Montrons que les trois hauteurs sont concourantes**. Cette preuve est la plus technique est fait appel au théorème de l'angle inscrit, dont on trouvera une démonstration dans la section 3.3 du cours de géométrie pour débutants de la POFM.

Soit E et F les pieds des hauteurs issues de B et C et soit H le point d'intersection des droites (BE) et (CF). On va montrer que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Pour cela on note D le point d'intersection des droites (AH) et (BC). On sait que $\widehat{BAD} + \widehat{ABD} + \widehat{BDA} = 180°$. Pour montrer que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires, il suffit donc de montrer que $\widehat{BAD} + \widehat{ABD} = 90°$.

Tout d'abord, puisque les triangles AEH et AFH partagent le même hypothénuse, ils partagent le même cercle circonscrit, à savoir le cercle de diamètre $[AH]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a $\widehat{FAH} = \widehat{FEH}$. De la même façon, les triangles BEC et BFC partagent le même cercle circonscrit, à savoir le cercle de diamètre $[BC]$. D'après le théorème de l'angle inscrit, on a donc $\widehat{BEF} = \widehat{BCF}$.
Il vient

$$\widehat{BAD} = \widehat{FAH} = \widehat{FEH} = \widehat{FEB} = \widehat{FCB} = 180° - \widehat{FBC} - \widehat{BFC} = 90° - \widehat{ABD}.$$

On a montré que les droites (AD) et (BC) sont perpendiculaires, donc le point H appartient à la hauteur issue du sommet A. Les trois hauteurs sont donc concourantes.

• : **Montrons que les trois médianes sont concourantes**. Soit M_B le milieu du segment $[CA]$ et M_C le milieu du segment $[AB]$. Soit G le point d'intersection des droites (BM_B) et (CM_C). D'après le théorème de la droite des milieux, les droites (M_BM_C) et (BC) sont parallèles et $BC = 2M_BM_C$. D'après le théorème de Thalès, on déduit que

$$\frac{GM_B}{GB} = \frac{GM_C}{GC} = \frac{M_BM_C}{BC} = \frac{1}{2}.$$

Il vient que $GB = 2GM_B$. On déduit aussi que $BM_B = GB + GM_B = GB + \frac{1}{2}GB = \frac{3}{2}GB$. De la même manière, si G' est le point d'intersection de la médiane issue du sommet A avec la droite (GM_B), on trouve $G'B = \frac{2}{3}BM_B$. On déduit que $G = G'$, de sorte que G est aussi sur la médiane issue du sommet A. Les trois médianes sont donc bien concourantes. En prime, on a montré que le centre de gravité est situé aux deux tiers de chaque médiane.

Arithmétique

Propriété (division euclidienne)**.** Soient a et b des nombres entiers strictement positifs. Il existe un unique couple (q, r) d'entiers tel que $0 \leqslant r < b$ et $a = qb + r$. Cette décomposition s'appelle la *division euclidienne de a par b*. L'entier q est appelé *quotient* et l'entier r *reste* de cette division euclidienne.

Démonstration. Existence : Soit k le plus grand multiple de b inférieur ou égal à a. On dispose d'un entier q tel que $k = qb$. On a alors $qb \leqslant a < (q+1)b$ par hypothèse. Si on note $r = a - qb$, on déduit que $0 \leqslant r < b$. Le couple (q, r) convient donc.

Unicité : Soient (q, r) et (q', r') deux couples d'entiers vérifiant $a = qb + r = q'b + r'$ et $0 \leqslant r, r' < b$. On a alors $(q - q')b = r' - r$. b est donc un diviseur de $r' - r$. Or, les inégalités sur r et r' impliquent que $-b < r - r' < b$. Le seul multiple de b vérifiant cette inégalité est 0. On déduit que $r - r' = 0$, soit $r = r'$. Par suite, $q = q'$. Il y a donc bien unicité de la décomposition.

Définition (Nombre premier)**.** Un entier strictement positif est dit *premier* s'il est différent de 1 et admet exactement deux diviseurs positifs, à savoir 1 et lui-même.

Exemple : 17 est un nombre premier. 21 n'est pas un nombre premier car il admet 3 pour diviseur.

2 est le seul nombre premier pair.

Définition (Nombres premiers entre eux)**.** Deux entiers a et b sont dit *premiers entre eux* si 1 est le seul entier strictement positif divisant à la fois a et b.

Propriété. Soient a, b, c, m et n cinq entiers. Si a divise b et si a divise c, alors a divise $mb+nc$.

Démonstration. Puisque a divise b et a divise c, on dispose de deux entiers k et ℓ tels que $b = ka$ et $c = \ell a$. Alors

$$mb + nc = mka + n\ell a = (mk + n\ell)a.$$

On déduit que a divise $mb + nc$.

Lemme (Gauss)**.** Soient a, b et c trois entiers tels que a divise bc. Si a est premier avec b, alors a divise c.

Démonstration. On rappelle le théorème de Bezout, dont on trouvera une démonstration à la section 2.1 du cours d'arithmétique pour débutants de la POFM : si a est premier avec b, on dispose de deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$.

De plus, puisque a divise bc, dispose d'un entier k tel que $bc = ka$. En multipliant par v des deux côtés de l'équation :

$$akv = cbv = c(1 - au).$$

En réarrangeant, on trouve $c = a(kv + au)$. Donc a divise bien c.

Lemme (Euclide)**.** Soit p un nombre premier et soient a et b deux entiers. Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.

Démonstration. Supposons que p ne divise pas a. Le plus grand commun diviseur d de p et a divise p, donc il vaut p ou 1. Mais si $d = p$, puisque d divise a, on trouve d divise a, ce qui est exclu par hypothèse. On a donc montré que $d = 1$, c'est-à-dire que les nombreds a et p sont premiers entre eux.

D'après le lemme de Gauss, p divise donc b. On a donc bien que p divise a ou p divise b.

Théorème (Existence et unicité de la décomposition en facteurs premiers)**.** Soit $n \geqslant 2$ un entier. Il existe une unique façon d'écrire n comme le produit de nombres premiers. Autrement dit, il existe un unique entier r et un unique ensemble de r nombres premiers $p_1, \ldots, p_r$ distincts tel qu'il existe des entiers strictement positifs $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ tels que

$$n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}.$$

Démonstration. La preuve nécessite probablement plusieurs lectures pour être complètement assimilée.

On reprend la preuve issue du cours complet d'arithmétique de la POFM.
Le théorème contient deux parties : l'existence de la décomposition et son unicité.

Existence : La preuve se fonde sur le principe de récurrence, dont on trouvera une explication dans la section 4 du cours de stratégies de base de la POFM.

Soit $\mathcal{P}(n)$ la propriété "tout entier compris entre 2 et n admet une décomposition en facteurs premiers". Nous allons démontrer par récurrence la propriété $\mathcal{P}(n)$.

Initialisation : Comme 2 est premier, il s'écrit bien comme le produit d'un ou plusieurs nombres premiers. Donc $\mathcal{P}(2)$ est vraie.

Hérédité : Supposons que $\mathcal{P}(n)$ est vraie pour un certain entier $n \geqslant 2$ fixé et montrons que $\mathcal{P}(n+1)$ est vraie. Pour cela, il suffit de montrer que $n+1$ admet une décomposition en facteurs premiers.

Si $n+1$ est un nombre premier, il s'écrit bien comme le produit d'un ou plusieurs nombres premiers. Sinon, il admet un diviseur d vérifiant $1 < d < n+1$. De plus, $\dfrac{n+1}{d}$ est un entier vérifiant $2 \leqslant \dfrac{n+1}{d} < n+1$. On peut donc appliquer l'hypothèse de récurrence et exhiber une décomposition en facteurs premiers de d et de $\dfrac{n+1}{d}$, disons $d = p_1 \ldots p_r$ et $\dfrac{n+1}{d} = q_1 \ldots q_{r'}$.
Il vient

$$n+1 = d \times \frac{n+1}{d} = p_1 \dots p_r q_1 \dots q_{r'}.$$

Ainsi, $n+1$ admet une décomposition en facteurs premiers, ce qui prouve $\mathcal{P}(n+1)$ et achève la récurrence.

En regroupant les facteurs premiers égaux dans la décomposition, on trouve bien la forme annoncée pour tout entier n.

Unicité : Supposons par l'absurde qu'il existe deux ensembles de nombres premiers $(p_1, \dots, p_k)$ et $(p'_1, \dots, p'_{k'})$ fournissant un contre-exemple à l'unicité, c'est-à-dire tels que

$$p_1 \dots p_k = p'_1 \dots p'_{k'}.$$

Pamri tous les contre-exemples, choisissons-en un pour lequel $\min(k, k')$ est minimal.
Le nombre premier p_1 divise le produit $p'_1 \dots p'_{k'}$. D'après le lemme d'Euclide, il divise p'_i pour un certain i. Puisque p'_i est premier et que p_1 en est un diviseur différent de 1, on a $p_1 = p'_i = p$. En simplifiant l'équation ci-dessus par p, on trouve un nouveau contre-exemple qui contredit la minimalité de $\min(k, k')$, ce qui est absurde.

Algèbre

Propriété (Somme des premiers entiers, exigible uniquement des lycéens)**.** Soit n un entier strictement positif. On a l'égalité :

$$1 + \ldots + n = \frac{n(n+1)}{2}.$$

Démonstration. Considérons le réarrangement suivant :

$$2(1 + \ldots + n) = 1 + \ldots + n + 1 + \ldots + n = (1+n) + (2+n-1) + \ldots + (n+1).$$

Le membre de droite est composé de n termes entre parenthèse, et chacune des sommes entre parenthèse vaut $n+1$. Ainsi, le membre de droite vaut $n(n+1)$. En réarrangeant, on trouve bien l'égalité voulue.

Propriété (Somme des premières puissances d'un réel, exigible uniquement des lycéens)**.** Soit q un réel différent de 1 et soit n un entier positif. On a l'égalité :

$$q^0 + q^1 + \ldots + q^n = 1 + q + \ldots + q^n = \frac{q^{n+1}-1}{q-1}.$$

En particulier,

$$1 + 2 + \ldots + 2^n = 2^{n+1} - 1.$$

Démonstration. Considérons le réarrangement suivant :

$$\begin{aligned}(q-1)(q^0+q^1+\ldots+q^n) &= q(q^0+q^1+\ldots+q^n)-(q^0+q^1+\ldots+q^n)\\ &= q+q^2+\ldots+q^{n+1}-(q^0+q^1+\ldots+q^n)\\ &= (q-q)+(q^2-q^2)+\ldots+(q^n-q^n)+q^{n+1}-q^0\\ &= q^{n+1}-1\end{aligned}.$$

En réarrangeant, on trouve l'égalité voulue.

Définition (Partie entière, partie supérieure et partie fractionnaire)**.** Soit x un réel.

- On appelle *partie entière* de x, notée $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier inférieur ou égal à x.
- On appelle *partie supérieure* de x, notée $\lceil x \rceil$ le petit entier supérieur ou égal à x.
- On appelle partie fractionnaire de x la quantité $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.

Exemple : Si $x = 1,2$, alors $\lfloor x \rfloor = 1, \lceil x \rceil = 2$ et $\{x\} = 0,2$. Si $x = 3$, alors $\lfloor x \rfloor = 3, \lceil x \rceil = 3$ et $\{x\} = 0$. Si $x = -2,4$, $\lfloor x \rfloor = -3, \lceil x \rceil = -2$ et $\{x\} = 0.6$.

Propriété. Soit x un nombre réel. On a les inégalités suivantes :

$$x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x \;\; , \;\; \lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1.$$

$$x \leqslant \lceil x \rceil < x + 1 \;\; , \;\; \lceil x \rceil - 1 < x \leqslant \lceil x \rceil.$$

$$0 \leqslant \{x\} < 1.$$

Démonstration. Puisque $\lfloor x \rfloor$ est le plus grand entier inférieur ou égal à x, il est en particulier inférieur ou égal à x, autrement dit $\lfloor x \rfloor \leqslant x$. D'autre part, si on avait $x \geqslant \lfloor x \rfloor + 1$, alors $\lfloor x \rfloor + 1$ serait un entier supérieur strictement à $\lfloor x \rfloor$ mais inférieur ou égal à x, contredisant l'hypothèse sur $\lfloor x \rfloor$. On a donc bien $x < \lfloor x \rfloor + 1$. Cette deuxième inégalité se réécrit $x - 1 < \lfloor x \rfloor$. On a donc bien les encadrements annoncés.

De la même façon, on obtient les encadrements sur $\lceil x \rceil$.

Enfin, en retranchant $\lfloor x \rfloor$ à chacun des termes de l'encadrement $\lfloor x \rfloor \leqslant x < \lfloor x \rfloor + 1$, on obtient $0 \leqslant x - \lceil x \rceil < 1$, soit $0 \leqslant \{x\} < 1$.