PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 19 AVRIL 2024

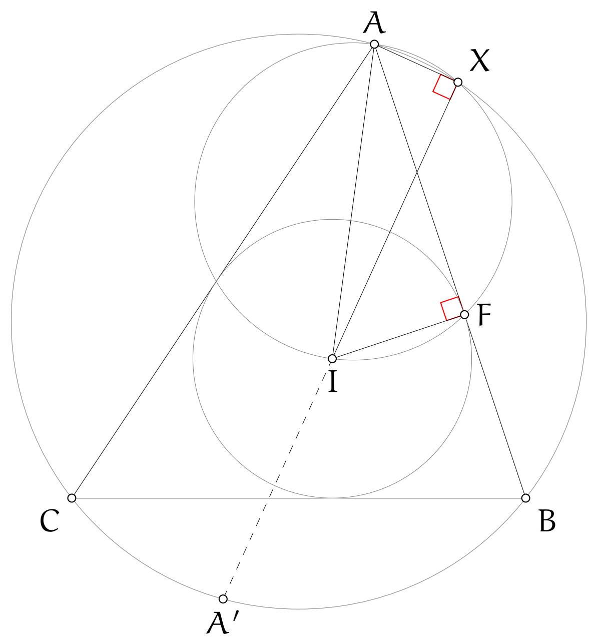
Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. On note A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle Ω. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés AC et AB respectivement. le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle Ω au point X. Montrer que les points A', I et X sont alignés.

Solution de l'exercice 1



Puisque F est le point de contact du cercle inscrit avec le côté $[AC]$, l'angle $\widehat{IFA}$ est droit et le segment $[IA]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AEF. On en déduit que

$$\widehat{AXI} = 90° = \widehat{AXA'},$$

où on a utilisé que $[AA']$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On déduit que les points A', I et X sont alignés.

Exercice 2. $2n-1$ tours sont placées sur échiquier de taille $(2n-1)\times(2n-1)$ de sorte que deux tours quelconques ne sont jamais sur la même ligne ou la même colonne. Montrer que tout carré de taille $n \times n$ contient une tour.

Solution de l'exercice 2 Commençons par remarquer qu'il y a exactement une tour par ligne et par colonne. En effet, par hypothèse il y a au plus une tour par ligne. Et puisqu'il y a $2n-1$ tours au total, il doit y en avoir exactement une par ligne, et de même pour les colonnes. Quitte à adapter légèrement le raisonnement, on peut supposer que le carré $n \times n$ est celui des cases situées en haut à gauche (c'est-à-dire les cases situées à la fois dans les n premières lignes et dans les n premières colonnes en partant du coin supérieur gauche). Supposons par l'absurde que ce carré ne contienne aucune tour. Alors parmi les n premières lignes, il doit y avoir n tours. Cependant, ces n tours doivent être dans les $n-1$ dernières colonnnes par hypothèse. Par principe des tiroirs, il y aura alors deux tours sur la même colonne, ce qui est absurde. Cela conclut.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers N tels que $2^N - 2N$ est un carré parfait.

<u>*Solution de l'exercice 3*</u> Montrons que les solutions sont $N = 0, 1$ ou 2.
On remarque déjà que $2^0 - 0 = 1^2$, $2^1 - 2 = 0^2$ et $2^2 - 4 = 0^2$. Donc les entiers 0, 1 et 2 sont solutions.
Supposons par l'absurde qu'il existe N un autre entier solution. On dispose alors de $x \in \mathbb{N}$ tel que $2^N - 2N = x^2$. Puisque 2^N doit être entier, on doit avoir $N \geqslant 0$, et donc $N \geqslant 3$. En outre, x est divisible par 2, donc x^2 est divisible par 4. Puisque $N \geqslant 2$, 2^N est également divisible par 4 et donc N est pair. On a

$$2N = 2^N - x^2 = (2^{\frac{N}{2}} - x)(2^{\frac{N}{2}} + x).$$

En outre, on vérifie que $N = 4$, $N = 6$ ou $N = 8$ ne sont pas des solutions car 8, 52 et 240 ne sont pas des carrés parfaits. Donc $N \geqslant 10$.
Enfin, puisque $2N > 0$, on doit avoir $2^{\frac{N}{2}} - x \geqslant 1$. Mais on montre par récurrence que $2^{\frac{N}{2}} > 2N$ pour tout N pair $\geqslant 10$. En effet, $2^5 = 32 > 20$ et si $2^{\frac{N}{2}} > 2N$, avec N pair $\geqslant 10$, alors

$$2^{\frac{N+2}{2}} = 2 \cdot 2^{\frac{N}{2}} > 4N > 2(N+2)$$

Mais alors on a

$$2^N - x^2 = (2^{\frac{N}{2}} - x)(2^{\frac{N}{2}} + x) \geqslant 2^{\frac{N}{2}} + x > 2N,$$

ce qui est absurde. Cela montre qu'il n'y a pas d'autre solution.
On a donc bien montré que les entiers solutions sont exactement $0, 1$ et 2.

Exercice 4. Soient a, b et c des réels tels que $0 \leqslant a, b, c \leqslant 2$. Montrer que

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leqslant 2.$$

<u>*Solution de l'exercice 4*</u> Notons qu'il y a 6 ordres possibles pour les variables a, b et c.

Dans les trois cas $b \geqslant a \geqslant c$, $a \geqslant c \geqslant b$ et $c \geqslant b \geqslant a$, le produit $(a-b)(b-c)(c-a)$ est négatif, de sorte que l'inégalité est vérifiée.

Si $a \geqslant b \geqslant c$, l'inégalité des moyennes appliquée à $a-b$ et $b-c$ et le fait que $c-a \leqslant 2$ car $a, c \in [0,2]$ donne :

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leqslant \left(\frac{a-b+b-c}{2}\right)^2 (a-c) = \frac{(a-c)^3}{4} \leqslant \frac{2^3}{4} = 2.$$

De même, si $b \geqslant c \geqslant a$, alors

$$(a-b)(b-c)(a-c) = (b-a)(b-c)(c-a) \leqslant (b-a)\left(\frac{b-c+c-a}{2}\right)^2 \leqslant \frac{(b-a)^3}{4} \leqslant 2.$$

Et enfin, si $c \geqslant a \geqslant b$, alors

$$(a-b)(b-c)(a-c) = (c-b)(c-a)(a-b) \leqslant (c-b)\left(\frac{c-a+a-b}{2}\right)^2 \frac{(c-b)^3}{4} \leqslant 2.$$

Si bien que l'inégalité est vraie dans tous les cas.

Exercice 5. Déterminer tous les entiers n ayant la propriété suivante : si l'on pose $a_k = \mathrm{ppcm}(k, k+1, \dots, k+n-1)$, alors la suite (a_k) est croissante.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u> Montrons que les naturels ayant cette propriété sont exactement 1 et 2. Déjà, si $n = 1$, $a_k = k$ est une suite croissante. Et si $n = 2$, puisque deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, $a_k = k(k+1)$ est une suite croissante également. Si $n = 3$, on remarque que $a_5 = 210 > a_6 = 168$, donc 3 n'a pas la propriété désirée.

Soit maintenant $n \geqslant 4$. L'idée pour montrer que n ne vérifie pas la propriété est de trouver un k tel que les $(k+i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ soient premiers entre eux, tandis que $k+1$ ait un grand facteur commun avec $k+n$, pour avoir $a_k > a_{k+1}$. C'est pourquoi on regarde $k = (n-1)! - 1$.
Posons $D = \mathrm{ppcm}(k+1, \dots, k+n-1)$. On a alors $a_k = \mathrm{ppcm}(k, D) = k \cdot D$. En effet, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\mathrm{pgcd}(k, k+i) = \mathrm{pgcd}(k, i) = 1$ car $i \mid k+1 = (n-1)!$.
En outre, $a_{k+1} = \mathrm{ppcm}(D, k+n)$. Or, $n-1$ divise à la fois $k+1$ (donc D) et $k+n$. Donc

$$a_{k+1} \leqslant D \cdot \big((n-2)! + 1\big) < D \cdot \big((n-1)! - 1\big) = a_k$$

En effet, pour tout $n \geqslant 4$, $(n-1)! - (n-2)! = (n-2) \cdot (n-2)! \geqslant 4 > 2$, donc $(n-1)! - 1 > (n-2)! + 1$.

Exercice 6. Démontrer, pour tous réels a, b, c strictement positifs, l'inégalité suivante :

$$\frac{a}{9bc+1}+\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1} \geqslant \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Solution de l'exercice 6 Vu la forme de l'inégalité, on est tenté d'appliquer l'inégalité des mauvais élèves. Seulement, si l'on applique l'inégalité en l'état, on trouve :

$$\frac{a}{9bc+1}++\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1} \geqslant \frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{9(ab+bc+ca)+3}.$$

Pour conclure, il faudrait alors montrer que $\frac{(\sqrt{a}+\sqrt{b}+\sqrt{c})^2}{9(ab+bc+ca)+3} \geqslant \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}$, mais cette inégalité n'est pas toujours vraie.
Pour faire apparaître $a+b+c$ au numérateur du membre de droite de l'inégalité des mauvais élèves, on peut par exemple multiplier en haut et en bas par a dans la première fraction du membre de gauche (et de même avec b et c dans les deux autres fractions). Ceci donne, en appliquant l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{a}{9bc+1}++\frac{b}{9ca+1}+\frac{c}{9ab+1} = \frac{a^2}{9abc+a}+\frac{b^2}{9abc+b}\frac{c^2}{9abc+c} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{27abc+a+b+c}.$$

Il suffit alors de montrer que

$$\frac{(a+b+c)^2}{27abc+a+b+c} \geqslant \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Pour cela, on peut appliquer l'inégalité des moyennes $27abc \leqslant (a+b+c)^3$ pour obtenir :

$$\frac{(a+b+c)^2}{27abc+a+b+c} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{(a+b+c)^3+(a+b+c)} = \frac{(a+b+c)}{(a+b+c)^2+1}$$

comme voulu.

Exercice 7. Déterminer tous les entiers x tels que $2^x + x^2 + 25$ est le cube d'un nombre premier.

Solution de l'exercice 7 L'exercice va utiliser deux idées :

- Les modulos pour obtenir des informations sur x.
- Des encadrements comparant 2^x et x^2 afin de montrer que le membre de gauche est souvent strictement compris entre deux cubes consécutifs (et ne peut donc être un cube d'entier).

Soit x un entier tel que $2^x + x^2 + 25$ est le cube d'un nombre premier p. Puisque $2^x = p^3 - x^2 - 25$ est un entier, x est positif. De plus $p^3 \geqslant 25$ donc $p > 2$ et p est impair.

Si $x = 0$, alors $2^x + x^2 + 25 = 26$ qui n'est pas un cube. Ainsi, $x \geqslant 1$. On déduit que $x^2 + 25$ est de la parité de p^3, c'est-à-dire impair. Ceci force x à être pair. En particulier, $x \geqslant 2$ donc $p^3 > 27$ et $p > 3$. Soit y l'entier tel que $x = 2y$. En regardant l'équation modulo 3, on trouve

$$2^{2y} + 4y^2 + 25 \equiv 1 + y^2 + 25 \equiv 2 + y^2 \mod 3.$$

Si y n'est pas divisible par 3, son carré vaut 1 modulo 3, ce qui implique que 3 divise p, ce qui est exclus. Ainsi, 3 divise y. Soit z l'entier tel que $y = 3z$. L'équation devient

$$2^{6z} + 36z^2 + 25 = p^3$$

Si $z = 1$, alors le membre de gauche vaut $125 = 5^3$. Ainsi, $x = 6 \times 1$ est solution.

Montrons que si $z \geqslant 2$, on a $(2^{2z})^3 < 2^{6z} + 36z^2 + 25 < (2^{2z} + 1)^3$, ce qui montrera que le côté gauche ne peut être le cube d'un entier. L'inégalité de gauche est toujours vraie car $36z^2 + 25 > 0$. Pour montrer l'inégalité de droite, il faut montrer que $3 \times 2^{4z} + 3 \times 2^{2z} + 1 > 36z^2 + 25$.

D'une part, si $z \geqslant 2$, on a $3 \times 2^{2z} \geqslant 3 \times 16 > 25$. D'autre part, on montre par récurrence sur z que $2^{4z} > 12z^2$.

Initialisation : Si $z = 2$, on a bien $2^{4z} = 256 > 48 = 12z^2$.

Hérédité : On suppose que $2^{4z} > 12z^2$ pour $z \geqslant 2$. Alors

$$2^{4(z+1)} = 16 \times 2^{4z} > 16 \times 12z^2 \geqslant 12 \times 4z^2 \geqslant 12(z^2 + 2z + 1) = 12(z+1)^2,$$

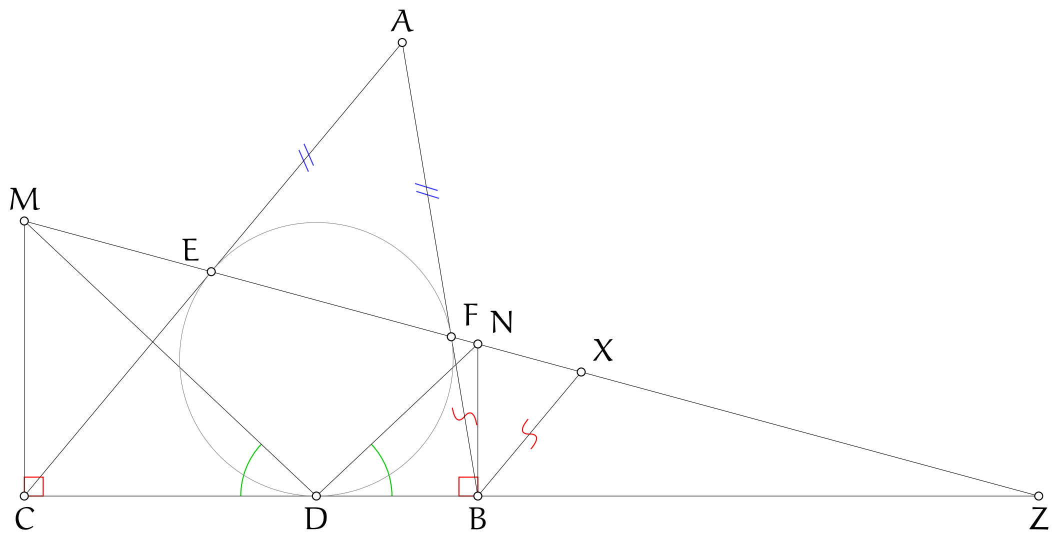
où on a utilisé que $z^2 \geqslant z$ et $z^2 \geqslant 1$ pour $z \geqslant 2$. Ainsi, la propriété est vraie pour $z + 1$, ce qui achève la récurrence.

On a donc bien $3 \times 2^{4z} + 3 \times 2^{2z} + 1 > 36z^2 + 25$, ce qui implique que le membre de gauche n'est pas le cube d'un entier pour $z \geqslant 2$.

L'unique solution est donc $x = 6$.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, ω son cercle inscrit et D, E et F les points de contact de ω avec les côtés BC, CA et AB respectivement. La perpendiculaire à (BC) en C coupe la droite (EF) en M et la perpendiculaire à (BC) en B coupe la droite (EF) en N. La droite (DM) recoupe ω en P et la droite (DN) recoupe ω en Q. Montrer que $DP = DQ$.

Solution de l'exercice 8



On commence par "éffacer" les points P et Q de la figure, c'est-à-dire qu'on commence par se ramener à un énoncé équivalent au problème original, mais qui n'implique pas les points P et Q.

Si l'énoncé est vrai, alors (DI) est la médiatrice du segment $[PQ]$, de sorte que la droite (DI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MDN}$. Réciproquement, si on prouve que la droite (DI) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MDN}$, les droites (DM) et (DN) seront alors symétriques par rapport à la droite (DI). Ainsi, puisque le cercle ω et ces droites sont symétriques par rapport à (DI), leurs intersections le sont aussi, et P et Q seront symétriques par rapport à (DI) et $DP = DQ$. Il suffit donc de montrer que $\widehat{MDI} = \widehat{NDI}$ ou encore, puisque les droites (DI) et (BC) sont perpendiculaires, $\widehat{MDC} = \widehat{NDB}$.

Cette égalité est en particulier vraie si les triangles MCD et NBD sont semblables. Comme ces deux triangles ont déjà un angle droit en commun, il suffit de montrer que $\frac{BD}{CD} = \frac{BN}{CM}$.

Soit Z le point d'intersection des droites (BC) et (EF) et soit X le point d'intersection de la parallèle à (AC) passant par B avec la droite (EF).
Les triangles AEF et FBX sont alors semblables, ainsi le triangle FBX est isocèle en B. On a donc, en utilisant le théorème de Thalès pour les points E, X, Z et C, B, Z :

$$\frac{BD}{CD} = \frac{BF}{CE} = \frac{BX}{CE} = \frac{ZB}{ZC}.$$

En appliquant ensuite Thalès aux points M, N, Z et C, B, Z, on trouve bien

$$\frac{BD}{CD} = \frac{ZB}{ZC} = \frac{BN}{CM},$$

ce qui permet de conclure.

Exercice 9. On dispose de $a + b$ bols alignés sur une rangée. Les a premiers bols contiennent une pomme tandis que les b derniers bols contiennent une poire.
Une opération consiste à déplacer une pomme du bol i au bol $i + 1$ et une poire du bol j au bol $j - 1$, où i et j sont deux entiers tels que $i - j$ est pair (Un bol peut contenir plusieurs fruits). On souhaite arriver à la situation finale où les b premiers bols contiennent une poire et les a derniers bols contiennent une pomme. Montrer que c'est possible si et seulement si ab est pair.

Solution de l'exercice 9 Commençons par montrer qu'il n'est pas possible d'y arriver lorsque a et b sont impairs tous les deux. Soit I la somme alternée des nombres de fruits dans les bols. Dans les positions initiales et finales décrites, on a alors $I = 0$ car $a + b$ est pair. En outre, lors de chaque opération, I est augmenté de ± 2 à cause de la condition $i - j$ pair.
Supposons par l'absurde qu'il soit possible de passer de la position intiale à la position finale décrite. Les pommes doivent passer des bols de numéros 1 à a vers les bols de numéros $b + 1$ à $a + b$, et au cours de chaque opération, une pomme augmente de un le numéro de son bol. Il faut donc

$$\sum_{k=1}^{a}(b+k) - \sum_{k=1}^{a} k = a \cdot b$$

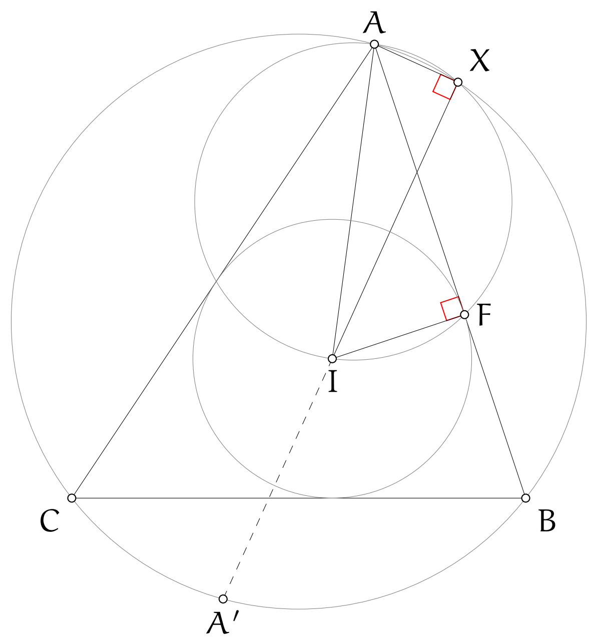
opérations pour passer de la position initiale à la position finale, avec ab impair par hypothèse. Ainsi, lorsque la position finale est atteinte, $I \equiv 2ab \equiv 2 \pmod 4$, ce qui est absurde car I est nul dans la position finale décrite.

Montrons maintenant par récurrence qu'il est possible de parvenir à la position finale lorsque a ou b est pair. Sans perte de généralité, nous traitons le cas où b est pair, l'autre cas s'obtenant directement par symétrie. Si $b = 0$, il n'y a rien à montrer. Supposons maintenant que la propriété soit vraie pour $b = n$ pair, et supposons $b = n + 2$. Par hypothèse de récurrence, en ignorant les deux dernières poires, nous pouvons arriver en un nombre fini d'opérations à la situation où nous avons, dans l'ordre, n bols avec une poire, puis a bols avec une pomme, puis 2 bols avec une poire. Si nous faisons deux opérations, entre les bols de numéros $i = a + n$ et $j = a + n + 2$, puis $i = j = a + n + 1$, les trois derniers bols contiennent maintenant dans l'ordre : une poire puis une poire puis une pomme. On réitère ces opérations permettant d'échanger une pomme avec les deux poires qui suivent jusqu'à arriver à la situation finale désirée.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. On note A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle Ω. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés AC et AB respectivement. le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle Ω au point X. Montrer que les points A', I et X sont alignés.

Solution de l'exercice 10



Puisque F est le point de contact du cercle inscrit avec le côté $[AC]$, l'angle $\widehat{IFA}$ est droit et le segment $[IA]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle AEF. On en déduit que

$$\widehat{AXI} = 90^\circ = \widehat{AXA'},$$

où on a utilisé que $[AA']$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle ABC.

On déduit que les points A', I et X sont alignés.

Exercice 11. $2n-1$ tours sont placées sur échiquier de taille $(2n-1)\times(2n-1)$ de sorte que deux tours quelconques ne sont jamais sur la même ligne ou la même colonne. Montrer que tout carré de taille $n\times n$ contient une tour.

Solution de l'exercice 11 Commençons par remarquer qu'il y a exactement une tour par ligne et par colonne. En effet, par hypothèse il y a au plus une tour par ligne. Et puisqu'il y a $2n-1$ tours au total, il doit y en avoir exactement une par ligne, et de même pour les colonnes. Quitte à adapter légèrement le raisonnement, on peut supposer que le carré $n\times n$ est celui des cases situées en haut à gauche (c'est-à-dire les cases situées à la fois dans les n premières lignes et dans les n premières colonnes en partant du coin supérieur gauche). Supposons par l'absurde que ce carré ne contienne aucune tour. Alors parmi les n premières lignes, il doit y avoir n tours. Cependant, ces n tours doivent être dans les $n-1$ dernières colonnes par hypothèse. Par principe des tiroirs, il y aura alors deux tours sur la même colonne, ce qui est absurde.

Exercice 12.

On définit la suite (a_n) par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et si $n \geqslant 3$:

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

Déterminer a_{2022}.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> En calculant les premiers termes de la suite, on effectue la conjecture suivante, que l'on montre par récurrence sur k :

$$\text{Si } k \geqslant 1, \text{ alors } a_{4k} = 1, a_{4k+1} = 1, a_{4k+2} = \left\lfloor \frac{4k+2}{3} \right\rfloor \text{ et } a_{4k+3} = 3.$$

<u>Initialisation :</u> On a $a_3 = 3$, $a_4 = 1$, $a_5 = 1$, $a_6 = 2$ et $a_7 = 3$, de sorte que la propriété est vérifiée pour $k = 1$.

<u>Hérédité :</u> Supposons la propriété vérifiée pour $k \geqslant 1$ fixée. Alors on a successivement :

$$a_{4(k+1)} = \left\lfloor \frac{4(k+1)}{a_{4k+1}a_{4k+2}a_{4k+3}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4(k+1)}{3\lfloor (4k+2)/3 \rfloor} \right\rfloor,$$

or $\dfrac{4(k+1)}{3} < 2\left(\dfrac{4k+2}{3} - 1\right) < 2\left\lfloor \dfrac{4k+2}{3} \right\rfloor$ pour $k \geqslant 2$ et $\dfrac{8}{3} < 2\left\lfloor \dfrac{4 \times 1 + 2}{3} \right\rfloor$, de sorte que $a_{4(k+1)} = 1$.

$$a_{4(k+1)+1} = \left\lfloor \frac{4(k+1)+1}{a_{4k+2}a_{4k+3}a_{4(k+1)}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4(k+1)+1}{3\lfloor (4k+2)/3 \rfloor} \right\rfloor$$

et là aussi, on a $\dfrac{4(k+1)}{3} < 2\left\lfloor \dfrac{4k+2}{3} \right\rfloor$, de sorte que $a_{4(k+1)+1} = 1$.

$$a_{4(k+1)+2} = \left\lfloor \frac{4(k+1)+2}{a_{4k+3}a_{4(k+1)}a_{4(k+1)+1}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4(k+1)+2}{3} \right\rfloor$$

donc $a_{4(k+1)+2} = \left\lfloor \dfrac{4(k+1)+2}{3} \right\rfloor$.

Enfin,

$$a_{4(k+1)+3} = \left\lfloor \frac{4(k+1)+3}{a_{4(k+1)}a_{4(k+1)+1}a_{4(k+1)+2}} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{4(k+1)+3}{\lfloor (4(k+1)+2)/3 \rfloor} \right\rfloor.$$

Or on a bien

$$4(k+1)+3 \geqslant 3\left(\frac{4(k+1)+2}{3}\right) \geqslant 3\lfloor (4(k+1)+2)/3 \rfloor$$

et

$$4(k+1)+3 \leqslant 4\left(\frac{4(k+1)+2}{3} - 1\right) < 4\lfloor (4(k+1)+2)/3 \rfloor$$

pour $k \geqslant 1$, de sorte que $a_{4(k+1)+3} = 3$. Ceci achève la récurrence.

Ainsi $a_{2022} = a_{4\times 505+2} = \left\lfloor \dfrac{4 \times 505 + 2}{3} \right\rfloor = 674$.

Exercice 13. Déterminer tous les entiers n ayant la propriété suivante : si l'on pose $a_k = \text{ppcm}(k, k+1, \ldots, k+n-1)$, alors la suite (a_k) est croissante.

<u>*Solution de l'exercice 13*</u> Montrons que les naturels ayant cette propriété sont exactement 1 et 2. Déjà, si $n = 1$, $a_k = k$ est une suite croissante. Et si $n = 2$, puisque deux entiers consécutifs sont premiers entre eux, $a_k = k(k+1)$ est une suite croissante également. Si $n = 3$, on remarque que $a_5 = 210 > a_6 = 168$, donc 3 n'a pas la propriété désirée.

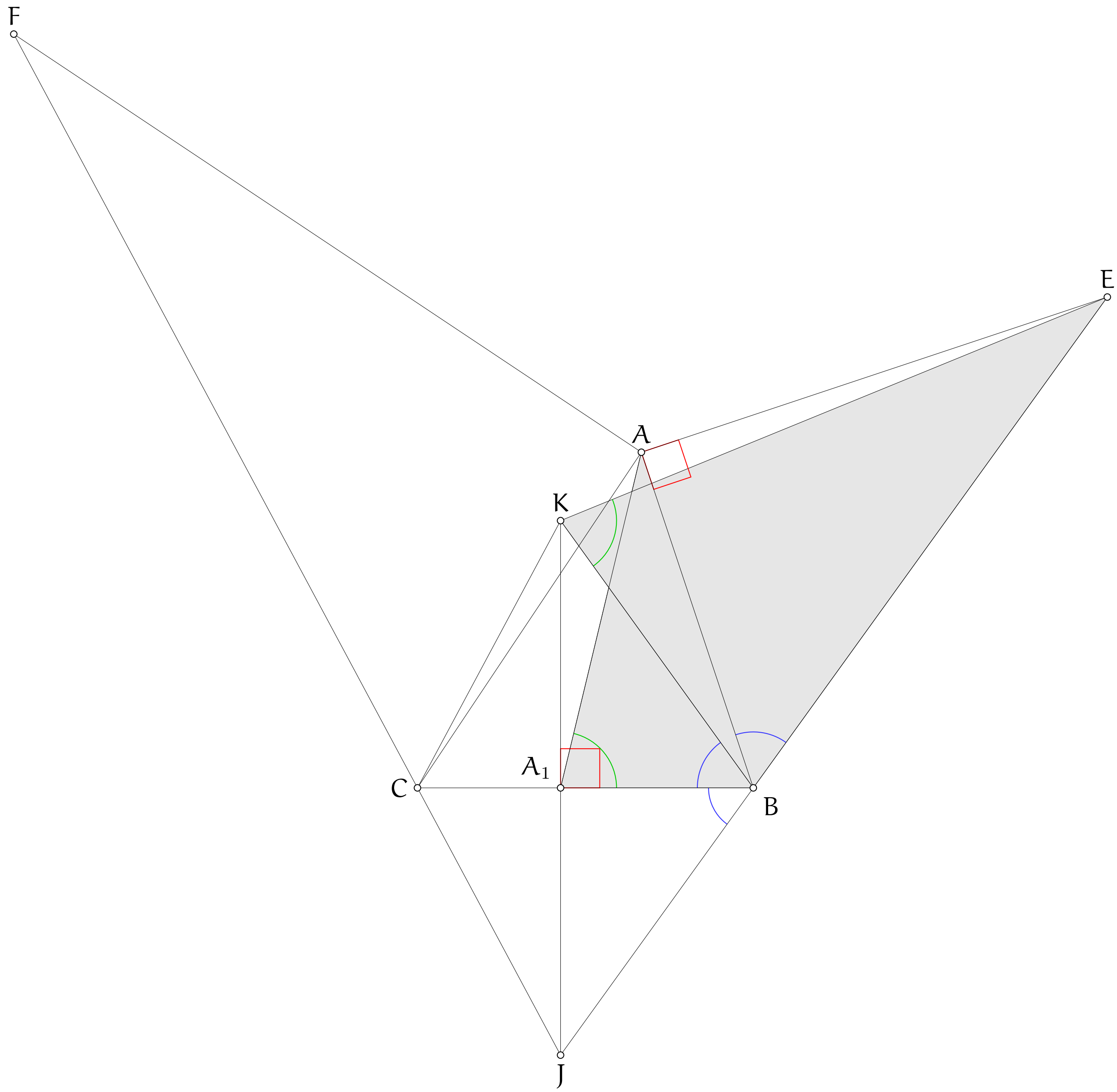
Soit maintenant $n \geqslant 4$. L'idée pour montrer que n ne vérifie pas la propriété est de trouver un k tel que les $(k+i)_{0 \leqslant i \leqslant n-1}$ soient premiers entre eux, tandis que $k+1$ ait un grand facteur commun avec $k+n$, pour avoir $a_k > a_{k+1}$. C'est pourquoi on regarde $k = (n-1)! - 1$.
Posons $D = \text{ppcm}(k+1, \ldots, k+n-1)$. On a alors $a_k = \text{ppcm}(k, D) = k \cdot D$. En effet, pour $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $\text{pgcd}(k, k+i) = \text{pgcd}(k, i) = 1$ car $i \mid k+1 = (n-1)!$.
En outre, $a_{k+1} = \text{ppcm}(D, k+n)$. Or, $n-1$ divise à la fois $k+1$ (donc D) et $k+n$. Donc

$$a_{k+1} \leqslant D \cdot \big((n-2)! + 1\big) < D \cdot \big((n-1)! - 1\big) = a_k$$

En effet, pour tout $n \geqslant 4$, $(n-1)! - (n-2)! = (n-2) \cdot (n-2)! \geqslant 4 > 2$, donc $(n-1)! - 1 > (n-2)! + 1$.

Exercice 14. Soit ABC un triangle et soit J le centre de son cercle $A-$exinscrit. Soit K le symétrique du point J par rapport au segment $[BC]$. Soient E et F les points sur les droites (BJ) et (CJ) tels que $\widehat{EAB} = \widehat{CAF} = 90°$. Montrer que $\widehat{FKE} + \widehat{FJE} = 180°$.

<u>*Solution de l'exercice 14*</u>



Puisque la droite (BJ) est la bissectrice extérieure de l'angle $\widehat{ABC}$, on a $\widehat{ABJ} = \widehat{CBJ} = 90° - \widehat{ABC}/2$. Puisque la symétrie axiale préserve les angles, on a ainsi $\widehat{KBC} = \widehat{ABE}$.
Notons A_1 le projeté orthogonale du point J sur le segment $[BC]$, de sorte que A_1 est également le milieu du segment $[JK]$. Les triangles KA_1B et BAE sont donc rectangles et ont un autre angle en commun, ils sont donc semblables. On a ainsi

$$\frac{BK}{BE} = \frac{BA_1}{BA}.$$

Cette égalité de rapport combinée avec l'égalité d'angle $\widehat{KBE} = \widehat{ABE} + \widehat{ABK} = \widehat{KBA_1} + \widehat{ABK} = \widehat{ABA_1}$ implique que les triangles KBE et A_1BA sont semblables (ce résultat peut également être formulé comme le fait que B est le centre de la smilitude envoyant la paire (A_1, K) sur la paire (A, E) et donc aussi le centre de la similitude envoyant la paire (A_1, A) sur la paire (K, E)).
On déduit que $\widehat{BKE} = \widehat{BA_1A}$. De la même façon, $\widehat{CKF} = \widehat{CA_1A}$. On a alors, toujours puisque la symétrie préserve les angles :

$$\widehat{EJF} + \widehat{EKF} = \widehat{BJC} + \widehat{EKF} = \widehat{BKC} + \widehat{EKF} = 360° - \widehat{BKE} - \widehat{CKF} = 360° - \widehat{BA_1A} - \widehat{CA_1A} = 180°.$$

Exercice 15. Soit $a, b, c > 0$ tels que $a^2 < 16bc$, $b^2 < 16ac$ et $c^2 < 16ab$. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac).$$

Solution de l'exercice 15 Remarquons tout d'abord que l'on a forcément $\sqrt{a} < \sqrt{b} + \sqrt{c}$. En effet, dans le cas contraire, on aurait

$$16bc > a^2 = \sqrt{a}^4 \geqslant (\sqrt{b} + \sqrt{c})^4 \geqslant 16bc$$

par IAG car $\sqrt{b} + \sqrt{c} \geqslant 2\sqrt[4]{bc}$, absurde.
Ainsi, $\sqrt{a} - \sqrt{b} < \sqrt{c}$. Mais par symétrie, on a aussi $\sqrt{b} - \sqrt{a} < \sqrt{c}$, et on a $\sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$. Donc

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| < \sqrt{c} < \sqrt{a} + \sqrt{b}$$

$$\begin{aligned} &\Longrightarrow a + b - 2\sqrt{ab} < c < a + b + 2\sqrt{ab} \\ &\Longrightarrow -2\sqrt{ab} < c - a - b < 2\sqrt{ab} \\ &\Longrightarrow (c - a - b)^2 < 4ab \\ &\Longrightarrow a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac) \end{aligned}$$

Exercice 16. Avant un championnat, chaque équipe participante propose au plus t couleurs différentes pour son maillot. Un ensemble S d'équipes est dit *identifiable* si l'on peut assigner à chaque équipe de S une couleur apparaissant dans son ensemble de propositions et n'apparaissant dans aucun ensemble de couleurs d'une autre équipe. Si l'on note n le nombre total de couleurs différentes proposées, déterminer le plus grand entier $g(n,t)$ tel que l'on puisse toujours trouver un ensemble d'équipes *identifiable* de taille au moins $g(n,t)$.

Solution de l'exercice 16 Montrons que le nombre recherché est $g(n,t) = \lceil \frac{n}{t} \rceil$.
Si n s'écrit sous la forme $k \cdot t + r$, avec $0 \leqslant r < t$, on peut considérer la situation où k équipes demandent chacunes t couleurs toutes distinctes deux à deux, puis une dernière équipe demandant r nouvelles couleurs. Dans cette situation, il y a $\lceil \frac{n}{t} \rceil$ équipes demandant au moins une couleur, donc cela montre déjà que $g(n,t) \leqslant \lceil \frac{n}{t} \rceil$.
Montrons maintenant avec une sorte d'algorithme glouton que $g(n,t) \geqslant \lceil \frac{n}{t} \rceil$. On considère le graphe bipartite dont les sommets sont les équipes et les couleurs demandées, et où l'on relie chaque équipe à toutes ses couleurs demandées. Ainsi, le degré d'une équipe est par hypothèse inférieur ou égal à t, tandis que le degré d'une couleur est > 0. Soit C la couleur de degré minimal $d > 0$ et soit E une équipe reliée à C. On ajoute alors l'équipe E à notre ensemble identifiable S en cours de construction, et on lui associe la couleur C. Ensuite, on supprime dans notre graphe toutes les équipes reliées à C et on supprime également toutes les couleurs demandées par E. Ce faisant, si on ajoute une arête du graphe (c'est-à-dire une équipe et une couleur) à notre ensemble identifiable, il le restera car la nouvelle couleur n'aura été demandée par aucune équipe précédente, et la nouvelle équipe n'aura demandé aucune des couleurs précédentes. Il suffit maintenant de montrer que toutes les couleurs qui apparaissent encore dans notre graphe ont un degré > 0. Puisqu'à chaque étape, on supprime au plus t couleurs du graphe, cela permettra de conclure.
Supposons par l'absurde qu'il existe une couleur a apparaissant encore dans le graphe après l'ajout de E à l'ensemble identifiable, mais telle que son degré soit nul. Cela signifie que les $d' = deg(a)$ équipes qui étaient reliées à a juste avant l'ajout de E à S avaient toutes demandé la couleur C. Or, puisque a est encore dans le graphe, cela signifie que E n'avait pas demandé la couleur a. Cela montre que dans le graphe avant la suppression de E, $d = deg(C) \geqslant d' + 1 = deg(a) + 1$, ce qui contredit la minimalité du degré de C, et nous fournit la contradiction recherchéé.

Exercice 17. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que l'écriture de n^2 en base 4 ne contient que des 1 et des 2.

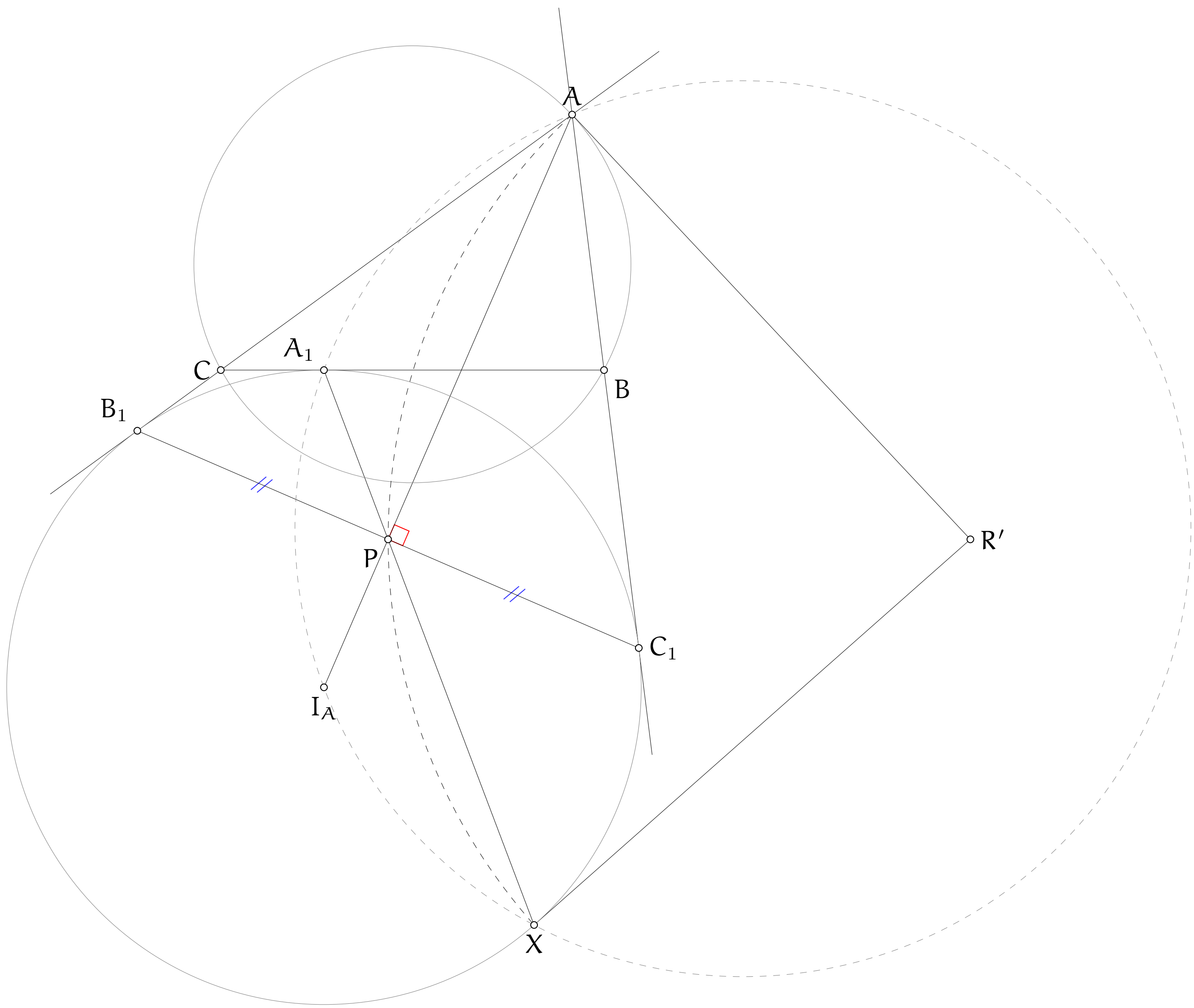
<u>*Solution de l'exercice 17*</u> On montre un résultat un peu plus fort, qui se prête mieux à un raisonnement par récurrence : il existe une infinité d'entiers n tels que l'écriture de n^2 en base 4 ne contient que des 1 et des 2, et tels que le premier et le dernier chiffre de l'écriture en base 4 de n^2 vaut 1. Un premier exemple est le nombre $5^2 = 25 = 121_4$. Ensuite, on montre que si l'on a un tel n, on peut en construire un nouveau qui lui est strictement supérieur, ce qui montrera bien qu'il existe une infinité d'entiers ayant la propriété recherchée.
Soit donc n tel que l'écriture de n^2 en base 4 ne contient que des 1 et des 2, et commence et se termine par un 1. On suppose que cette écriture contient k chiffres. On pose alors $m = 2^{2k-1} \cdot n + n$. On a

$$m^2 = 4^{2k-1} \cdot n^2 + 4^k \cdot n^2 + n^2$$

En base 4, m^2 est donc constitué de trois copies de n^2, avec n^2 et $4^k \cdot n^2$ qui sont deux copies disjointes adjacentes, et $4^{2k-1} \cdot n^2$ et $4^k \cdot n^2$ qui ont exactement une puissance de 4 en commun dans leur écriture, à savoir 4^{2k-1}. Mais par hypothèse, les coefficients devant 1 et devant 4^{k-1} de n^2 sont des 1, donc le coefficient devant 4^{2k-1} de m^2 est un 2. En outre, tous les autres coefficients de l'écriture en base 4 de m^2 apparaissaient dans celle de n^2, et sont donc bien des 1 ou des 2. Enfin, les premiers et derniers coefficients de l'écriture en base 4 de m^2, à savoir les coefficients devant 4^0 et 4^{3k-2}, sont bien des 1 par hypothèse de récurrence.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et soient A_1, B_1 et C_1 les points de contact resepctifs du cercle $A-$exinscrit, noté ω_A, avec le côté BC et les demi-droites $[AC)$ et $[AB)$. Soit P le milieu du segment $[B_1C_1]$. La droite (A_1P) recoupe le cercle ω_A au point X. La tangente au cercle circonscrit au triangle ABC au point A et la tangente au cercle ω_A au point X se coupent en R. Montrer que $RX = RP$.

Solution de l'exercice 18



En traçant le cercle de centre R de rayon RA, on s'aperçoit que celui-ci passe également par P. On va donc plutôt introduire R' le centre du cercle circonscrit au triangle APX et montre que les droites (AR') et (XR') sont respectivement tangentes aux cercles circonscrits au triangle ABC et au triangle $A_1B_1C_1$.

Pour cela, notons que puisque P est le milieu du segment $[B_1C_1]$ dont la droite (AI_A) est la médiatrice, les points A, P et I_A sont alignés. De plus, puisque $\widehat{I_AB_1A} = 90° = 180° - \widehat{I_AC_1A}$, les points B_1, I_A, C_1 et A sont cocycliques. Par puissance d'un point, on a :

$$PA \times PI_A = PB_1 \times PC_1 = PA_1 \times PX$$

de sorte que les points A_1, I_A, X et A sont cocycliques par la réciproque de la puissance d'un point.

Montrons à présent que (AR') est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC. D'une part, d'après le théorème de l'angle au centre :

$$\widehat{PAR'} = 90^\circ - \widehat{PXA}.$$

Mais en utilisant la cocyclicité des points A_1, I_A, X et A, on a trouve

$$\widehat{PAR'} = 90^\circ - \widehat{A_1XA} = 90^\circ - \widehat{A_1I_AA}.$$

Soit alors D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et S le pôle Sud su sommet A dans ABC. D et S sont alignés avec A et I_A. Alors

$$90^\circ - \widehat{A_1I_AA} = \widehat{CDI_A} = 180^\circ - \widehat{ABC} - \frac{1}{2}\widehat{BAC} = \widehat{ABC} + \frac{1}{2}\widehat{ACB} = \widehat{ACP}.$$

Ainsi, $\widehat{PAR'} = \widehat{ACP}$, donc la droite (AR') est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC.

Montrons que la droite $(R'X)$ est tangente au cercle circonscrit au triangle $A_1B_1C_1$. On a là aussi par angle au centre :

$$\widehat{A_1XR'} = \widehat{PXR'} = 90^\circ - \widehat{PAX} = 90^\circ - \widehat{I_AAX}.$$

Puis, par angle inscrit dans le cercle passant par A, A_1, I_A et X, et en utilisant que le triangle I_AA_1X est isocèle en I_A, on a

$$90^\circ - \widehat{I_AAX} = 90^\circ - \widehat{I_AA_1X} = \frac{1}{2}\widehat{A_1I_AX} = \widehat{A_1B_1X},$$

où l'on a utilisé le théorème de l'angle au centre dans le cercle ω_A. Ainsi, la droite $(R'X)$ est tangente à ω_A et $R = R'$, ce qui conclut.