PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 5 : POT POURRI

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 19 AVRIL 2024

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. On note A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle Ω. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés AC et AB respectivement. le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle Ω au point X. Montrer que les points A', I et X sont alignés.

Exercice 2. $2n-1$ tours sont placées sur échiquier de taille $(2n-1) \times (2n-1)$ de sorte que deux tours quelconques ne sont jamais sur la même ligne ou la même colonne. Montrer que tout carré de taille $n \times n$ contient une tour.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers N tels que $2^N - 2N$ est un carré parfait.

Exercice 4. Soient a, b et c des réels tels que $0 \leqslant a, b, c \leqslant 2$. Montrer que

$$(a-b)(b-c)(a-c) \leqslant 2.$$

Exercice 5. Déterminer tous les entiers n strictement positifs ayant la propriété suivante : si l'on pose $a_k = \text{ppcm}(k, k+1, \ldots, k+n-1)$ pour tout entier strictement positif k, alors la suite (a_k) est croissante.

Exercice 6. Démontrer, pour tous réels a, b, c strictement positifs, l'inégalité suivante :

$$\frac{a}{9bc+1} + \frac{b}{9ca+1} + \frac{c}{9ab+1} \geqslant \frac{a+b+c}{1+(a+b+c)^2}.$$

Exercice 7. Déterminer tous les entiers x tels que $2^x + x^2 + 25$ est le cube d'un nombre premier.

Exercice 8. Soit ABC un triangle, ω son cercle inscrit et D, E et F les points de contact de ω avec les côtés BC, CA et AB respectivement. La perpendiculaire à (BC) en C coupe la droite (EF) en M et la perpendiculaire à (BC) en B coupe la droite (EF) en N. La droite (DM) recoupe ω en P et la droite (DN) recoupe ω en Q. Montrer que $DP = DQ$.

Exercice 9. On dispose de $a+b$ bols alignés sur une rangée. Les a premiers bols contiennent une pomme tandis que les b derniers boles contiennent une poire.
Une opération consiste à déplacer une pomme du bol i au bol $i+1$ et une poire du bol j au bol $j-1$, où i et j sont deux entiers tels que $i-j$ est pair (Un bol peut contenir plusieurs fruits). On souhaite arriver à la situation finale où les b premiers bols contiennent une poire et les a derniers bols contiennent une pomme. Montrer que c'est possible si et seulement si ab est pair.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle et Ω son cercle circonscrit. On note A' le point diamétralement opposé à A dans le cercle Ω. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC, E et F les point de contact du cercle inscrit avec les côtés AC et AB respectivement. le cercle circonscrit au triangle AEF recoupe le cercle Ω au point X. Montrer que les points A', I et X sont alignés.

Exercice 11. $2n-1$ tours sont placées sur échiquier de taille $(2n-1)\times(2n-1)$ de sorte que deux tours quelconques ne sont jamais sur la même ligne ou la même colonne. Montrer que tout carré de taille $n \times n$ contient une tour.

Exercice 12.
On définit la suite (a_n) par $a_0 = a_1 = a_2 = 1$ et si $n \geqslant 3$:

$$a_n = \left\lfloor \frac{n}{a_{n-1}a_{n-2}a_{n-3}} \right\rfloor$$

Déterminer a_{2022}.

Exercice 13. Déterminer tous les entiers n strictement positifs ayant la propriété suivante : si l'on pose $a_k = \mathrm{ppcm}(k, k+1, \ldots, k+n-1)$ pour tout entier strictement positif k, alors la suite (a_k) est croissante.

Exercice 14. Soit ABC un triangle et soit J le centre de son cercle $A-$exinscrit. Soit K le symétrique du point J par rapport au segment $[BC]$. Soient E et F les points sur les droites (BJ) et (CJ) tels que $\widehat{EAB} = \widehat{CAF} = 90°$. Montrer que $\widehat{FKE} + \widehat{FJE} = 180°$.

Exercice 15. Soit $a, b, c > 0$ tels que $a^2 < 16bc$, $b^2 < 16ac$ et $c^2 < 16ab$. Montrer que

$$a^2 + b^2 + c^2 < 2(ab + bc + ac).$$

Exercice 16. Avant un championnat, chaque équipe participante propose au plus t couleurs différentes pour son maillot. Un ensemble S d'équipes est dit *identifiable* si l'on peut assigner à chaque équipe de S une couleur apparaissant dans son ensemble de propositions et n'apparaissant dans aucun ensemble de couleurs d'une autre équipe. Si l'on note n le nombre total de couleurs différentes proposées, déterminer le plus grand entier $g(n,t)$ tel que l'on puisse toujours trouver un ensemble d'équipes *identifiable* de taille au moins $g(n,t)$.

Exercice 17. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n tels que l'écriture de n^2 en base 4 ne contient que des 1 et des 2.

Exercice 18. Soit ABC un triangle et soient A_1, B_1 et C_1 les points de contact resepctifs du cercle $A-$exinscrit, noté ω_A, avec le côté BC et les demi-droites $[AC)$ et $[AB)$. Soit P le milieu du segment $[B_1C_1]$. La droite (A_1P) recoupe le cercle ω_A au point X. La tangente au cercle circonscrit au triangle ABC au point A et la tangente au cercle ω_A au point X se coupent en R. Montrer que $RX = RP$.