PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 4 : COMBINATOIRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 15 MARS 2024

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Antoine propose à Baptiste de jouer à l'"alphabet en folie" : Ils commencent par se mettre d'accord sur une lettre. Puis, à tour de rôle, chacun peut choisir de prononcer entre 1 et 2 lettres suivantes dans l'alphabet en partant de A. Celui qui prononce la lettre choisie a gagné. Si Antoine commence, pour quelles lettres de départ dispose-t-il d'une stratégie lui permettant de gagner la partie à coup sûr ?

Voici un exemple de partie : la lettre choisie initialement est E. Antoine dit "A", Baptiste "BC", Antoine "CD" et Baptiste dit "E". Dans ce cas, Baptiste a gagné.

Solution de l'exercice 1 Montrons que Antoine a une stratégie gagnante si, et seulement si, le rang de la lettre choisie dans l'alphabet n'est pas un multiple de 3. Colorons les lettres de l'alphabet en bleu-blanc-rouge dans l'ordre. Si la lettre d'arrivée est rouge (c'est à dire que son rang dans l'alphabet est un multiple de 3), Baptiste possède la stratégie suivante : à chaque fois qu'Antoine choisit de dire une lettre, Baptiste en dit deux et à chaque fois qu'Antoine décide de dire deux lettres il n'en dit qu'une. Selon cette stratégie, quels que soient ses choix passés, Antoine n'a le choix à chaque tour qu'entre une lettre bleue ou une lettre bleue et une blanche et ne dira pas la lettre finale rouge. En revanche, si la lettre choisie est blanche ou bleue, Antoine possède une stratégie gagnante : il lui suffit de prendre A si la lettre finale est bleue ou A et B si elle est blanche, puis d'appliquer la stratégie qui était celle de Baptiste dans le cas rouge.

Exercice 2. Aurélien découpe une feuille de papier en 7 morceaux. Une étape consiste ensuite à choisir un morceau et à le découper en $4, 7$ ou 10 morceaux. Aurélien peut-il obtenir ainsi 2021 morceaux ?

Solution de l'exercice 2 L'exercice décrit une suite d'opérations et demande s'il est possible de passer d'un état initial à un état final, on peut donc légitimement chercher un invariant du système.

Ici, nous allons montrer que le nombre de morceausx d'Aurélien est toujours de la forme $3k + 1$, avec k un entier naturel.
C'est le cas dans la situation initiale, puisqu'Aurélien dispose de $7 = 3 \times 2 + 1$ morceaux. Puis, si c'est le cas lors d'une étape et qu'Aurélien dispose de $3k + 1$ morceaux avec k un entier naturel, Aurélien remplace un morceau par $3 \times 1 + 1$ morceaux, par $3 \times 2 + 1$ morceaux ou par $3 \times 3 + 1$ morceaux, de sorte qu'il lui reste, à la fin de l'opération, $3(k + 1) + 1, 3(k + 2) + 1$ ou $3(k + 3) + 1$ morceaux.
De proche en proche, on a bien le résultat annoncé. Comme $2021 = 3 \times 673 + 2$ n'est pas de la forme indiquée, on ne peut jamais obtenir 2021 morceaux par le processus décrit.

Exercice 3. On dispose de cinq couleurs et d'une grille 99×99. On colorie certains carrés de la grille avec l'une des cinq couleurs de sorte que

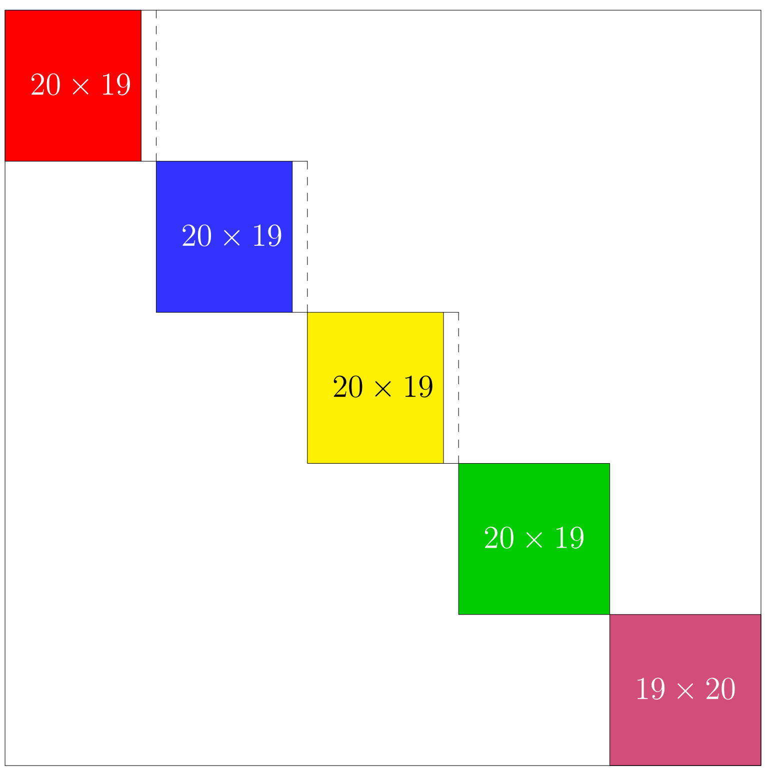
— Chaque couleur apparaît le même nombre de fois dans la grille.

— Aucune ligne et aucune colonne ne contient des cases de couleur différente.

Quelle est le plus grand nombre possible de cases que l'on peut colorier en suivant ces règles ?

Solution de l'exercice 3 **Réponse :** $N = 5 \times 19 \times 20 = 1900$.

Comme chaque ligne ou colonne ne peut contenir qu'une couleur, on va réfléchir en partant des lignes. On dit qu'une ligne ou colonne est d'une couleur (disons rouge) quand la seule couleur que peuvent avoir des cases de cette ligne ou colonne est le rouge. Si une ligne ou colonne n'a pas de couleur, on lui assigne arbitrairement une couleur. Ainsi, une case rouge se trouve forcément à l'intersection d'une ligne rouge et d'une colonne rouge. Par conséquent, on peut majorer le nombre de case rouge par le produit du nombre de ligne rouges par le nombre de colonnes rouges. Introduisons maintenant des notations. On numérotes les couleurs disponibles de 1 à 5 et on note x_i le nombre de lignes colorées de la i-ième couleur, et y_i le nombre de colonnes colorées de cette couleur. Notons enfin N le nombre de cases coloriées par couleur. On veut maximiser le nombre total de cases coloriées, $5N$. Les arguments précédemment cités montrent que $\forall i : N \leqslant x_i y_i$. ON a évidemment aussi, $x_1+x_2+\ldots+x_5 = y_1+y_2+\ldots y_5 = 99$. L'étude des petits cas nous montre que pour maximiser N il faut que les x_i et les y_i soient tous environs égaux, valant tous $\frac{99}{5}$ arrondi soit par excès ou par défaut. Une étude plus approfondie des petits cas où on remplace 99 par un petit nombre congru à 4 mod 5, comme 99, nous permet de conjecturer que la construction suivante est optimale :



Ici, on a $N = 19 \cdot 20$.

Prouvons maintenant l'optimalité. Supposons par l'absurde disposer d'une configuration valide où $N > 19 \times 20$, donc $\forall i : x_i y_i > 19 \times 20$. On remarque ensuite que $x_i + y_i > 39$. En effet,

$$x_i y_i = \frac{1}{4}\left((x_i+y_i)^2 - (x_i-y_i)^2\right)$$

Donc

$$38^2 < 4 \cdot 19 \cdot 20 = 39^2 - 1 < (x_i + y_i)^2 - (x_i - y_i)^2 < (x_i + y_i)^2$$

Donc $38 < x_i + y_i$. De plus, si $x_i + y_i = 39$, alors $(x_i - y_{i)}^2 < 1$ Donc $x_i = y_i$, ce qui est impossible car 39 est impair. Donc $x_i + y_i \geqslant 40$.
Le compte final $2 \cdot 99 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_5 + y_5) \geqslant 5 \times 40 = 200$ est une contradiction et termine la preuve.

Exercice 4. Une partie se joue sur un échiquier de taille $n \times n$. Au début, il y a 99 pierres sur chaque case. Tour à tour, Aimeric et Benoit choisissent une ligne ou une colonne et retirent une pierre de chaque case de la ligne ou de la colonne choisie. Ils ne peuvent choisir une ligne ou une colonne que si elle comporte au moins une pierre sur chaque case. Le premier joueur qui ne peut pas se déplacer perd la partie. Aimeric joue le premier tour. Déterminer tous les n pour lesquels Benoit a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 4 **Réponse :** Les n pairs.

Dans la suite, on numérote les colonnes de gauche à droite et les lignes de haut en bas.

Nous allons montrer qu'il y a exactement $99n$ tours de jeu, de sorte que si n est pair, Benoit aura eu le dernier tour de jeu (donc aura gagné), sinon c'est Aimeric.

Considérons les cases de l'une des grandes diagonales de la grille. Comme chaque ligne et chaque colonne contient exactement une de ces cases, à chaque étape, la somme du nombre de pierres sur ces cases diminue d'exactement 1. Si toutes les cases de la grande diagonale sont vides, il n'est plus possible d'effectuer aucune action. Montrons que réciproquement, si l'une des cases de la grande diagonale contient au moins un caillou, il est encore possible de jouer.

Supposons que cette case soit à l'intersection de la ligne i et de la colonne i. Si la ligne i et ou la colonne i ne contiennent pas de case vide, alors il est encore possible de jouer sur cette colonne ou cette ligne. On peut donc supposer que la ligne i contient une case vide, disons sur la colonne a, et que la colonne i contient une case vide, disons sur la ligne b. Notons r_i le nombre de fois que l'on a joué sur la ligne i, r_b le nombre de fois que l'on a joué sur la ligne b, c_i le nombre de fois que l'on a joué sur la colonne i et enfin c_a le nombre de fois que l'on a joué sur la colonne a.
Puisque la case à l'intersection de la ligne i et de la colonne a est vie, on a $c_a + r_i = 99$. De même, on a $r_b + c_i = 99$. Mais puisque $r_i + c_i < 99$ (car la case à l'intersection de la ligne et de la colonne i est non vide), on a $r_b + c_a > 99$, ce qui est absurde car la case à l'intersection de la ligne b et de la colonne a a perdu alors strictement plus que 99 cailloux.

On déduit que la partie finit si et seulement si chaque case de la grande diagonale est vide, donc au bout d'exactement $99n$ étapes, ce qui permet de conclure comme annoncé.

Exercice 5. Soit n un entier naturel. Joseph peut tirer $2n+1$ flèches. Chacun de ses tirs est un échec ou une réussite. Un tir est dit "équilibré" si le nombre d'échecs avant ce tir additionné au nombre de réussites après ce tir est égal à n. Déterminer si le nombre de tirs équilibrés est pair ou impair.

Solution de l'exercice 5 Montrons que le nombre de tirs équilibrés est impair.
Première remarque : considérons une succession de deux tirs telle que le premier est réussi et le suivant raté. Alors il y a autant de tirs ratés avant pour les deux et autant de tirs réussis après donc soit les deux tirs sont équilibrés, soit aucun des deux ne l'est. De même, si le premier est raté et le suivant réussi, en notant e le nombre d'échecs avant ces deux tirs et r le nombre de réussites après, le premier tir est équilibré si et seulement si $e+(1+r)=n$ et le deuxième est équilibré si et seulement si $(e+1)+r=n$. On remarque que ces deux conditions sont égales. Ainsi, puisque cela ne modifie pas l'équilibre des tirs précédents et suivants, supposer que pour une succession de 2 tirs dont l'un est réussi et l'autre est raté, c'est le premier qui est raté ne modifie pas la parité du nombre de tirs équilibrés. On peut donc se ramener au cas où Joseph commence par une succession d'échecs, puis de réussites. Dans l'ordre des tirs, le nombre de succès à venir additionné au nombre d'échecs passés débute au nombre de réussites total R, augmente strictement à chaque échec jusqu'à atteindre la valeur $2n$ puis diminue à chaque réussite jusqu'à atteindre le nombre d'échec total E. Or $E+R=2*n+1$ donc exactement une de ces deux valeurs E et R est plus petite que n et l'autre est strictement plus grande. La valeur n n'est donc atteinte que pour un seul tir dans cette configuration, et elle est donc impair dans le cas général.

Exercice 6. Dans une école il y a n cours et n élèves. Les élèves sont inscrits dans plusieurs cours de sorte que deux élèves différents n'ont jamais exactement les même cours. Prouver qu'on peut supprimer un cours de sorte qu'aucune paire d'élèves ne se retrouve avec exactement les mêmes cours.

Solution de l'exercice 6

On va montrer par récurrence forte sur n la propriété plus forte suivante :

$\mathcal{P}_n$:Pour tout $m \geqslant n$, dans une classe à n élèves et m cours telle que deux élèves n'ont jamais exactement les mêmes cours, alors il est possible de retirer un cours de sorte que les élèves ne suivent pas exactement les mêmes cours parmi les cours restants.

Initialisation : Si $n = 1$, il n'y a rien à démontrer.

Hérédité : Soit $n \geqslant 2$. Supposons que $\mathcal{P}_k$ est vraie pour tout $1 \leqslant k \geqslant n-1$. Soit $m \geqslant n$. Considérons alors une classe de n élèves qui suivent m cours notés $C_1, \ldots, C_m$. Si deux élèves ne suivent jamais les mêmes cours parmi les cours $C_1, \ldots, C_{m-1}$, alors on a démontré ce qu'il fallait. Sinon, il existe k paires d'élèves $(A_1, B_1), \ldots, (A_k, B_k)$ avec $k \geqslant 1$, telles que les élèves A_i et B_i suivent les mêmes cours parmi $C_1, \ldots, C_{m-1}$ (et alors exactement l'un d'eux, disons A_i, suit le cours C_m). Notons $E_1, \ldots, E_{n-2k}$ l'ensemble des élèves restant. Considérons le sous-ensemble de $n-k$ élèves $\{A_1, \ldots, A_k, E_1, \ldots, E_{n-2k}\}$ et l'ensemble de cours $\{C_1, \ldots, C_{m-1}\}$. D'après l'hypothèse de récurrence, puisque $n-k \leqslant m-1$, on dispose d'un cours, disons C_{m-1} qui, si on le retire, vérifie qu'aucune paire de deux élèves parmi les élèves considérés ne suivent les mêmes cours parmi $C_1, \ldots, C_{m-2}$. Alors, parmi ces $n-k$ élèves considérés, il n'y a pas de paire d'élèves ayant exactement les mêmes cours parmi $C_1, \ldots, C_{m-2}, C_m$. Mais alors un élève B_i ne suit pas exactement les mêmes cours que A_i (à cause du cours C_m ou qu'un autre élève (car A_i ne suit pas les mêmes cours qu'un autre élève parmi $C_1, \ldots, C_{m-2}$). Ceci achève la récurrence.

La propriété $\mathcal{P}_n$ est donc vraie pour tout n, en particulier, l'énoncé est vrai pour $m = n$ cours et n élèves.

Solution alternative :

Notons $E_1, \ldots, E_n$ les n élèves et $C_1, \ldots, C_n$ les n cours.
On procède par l'absurde et l'on suppose l'inverse : quelque soit le cours C_i que l'on supprime, il existe deux élèves E_{i_1} et E_{i_2} ayant exactement les mêmes cours en dehors du cours C_i. Si deux telles paires ou plus existent pour un même cours C_i, on n'en garde qu'une seule. Comme ces deux élèves ne suivent pas exactement les mêmes cours, l'un suit le cours C_i et l'autre ne le suit pas. Leurs cours ne coïncident donc pas si l'on supprime un autre cours C_j.

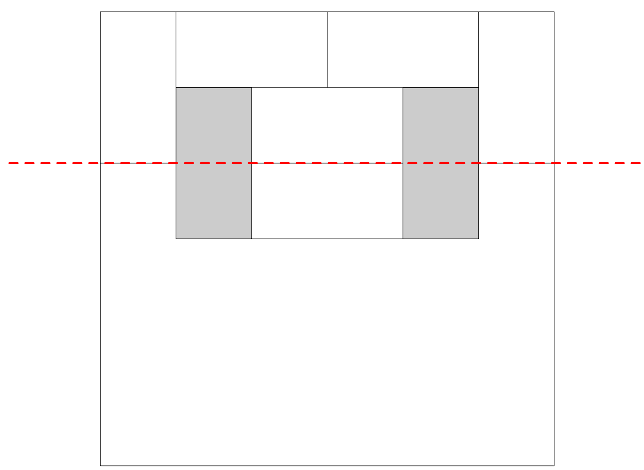
Considérons alors le graphe dont les sommets sont les élèves et deux élèves sont reliés par une arêtes s'il existe un i (qui est alors unique d'après le paragraphe précédent) tel que, si l'on supprime C_i, les deux élèves ont les mêmes cours. Comme chaque cours C_i induit une paire d'élèves reliés par une arête, le graphe obtenu admet au moins un cycle, que l'on note $E_{i_1} \ldots E_{i_k} E_{i_1}$, avec $k \leqslant n$. Notons j_ℓ le numéro du cours qui induit l'arête $E_{i_\ell} E_{i_{\ell+1}}$. Les élèves E_{i_1} et E_{i_k} suivent alors les mêmes cours parmi ceux qui ne sont pas $C_{j_1}, \ldots, C_{j_{k-1}}$. En particulier, soient ils suivent tous les deux le cours C_{j_k}, soient ils ne le suivent pas tous les deux, ce qui contredit le fait que l'arête $E_{i_k} E_{i1}$ appartient au graphe. On a la contradiction désirée.

Exercice 7. Déterminer le plus grand entier n pair ayant la propriété suivante : quelle que soit la façon de paver une grille $n \times n$ avec des dominos, il existe une ligne coupant le tableau en deux parties non vides et n'intersectant aucun domino.

Solution de l'exercice 7 **Réponse :** $n = 6$

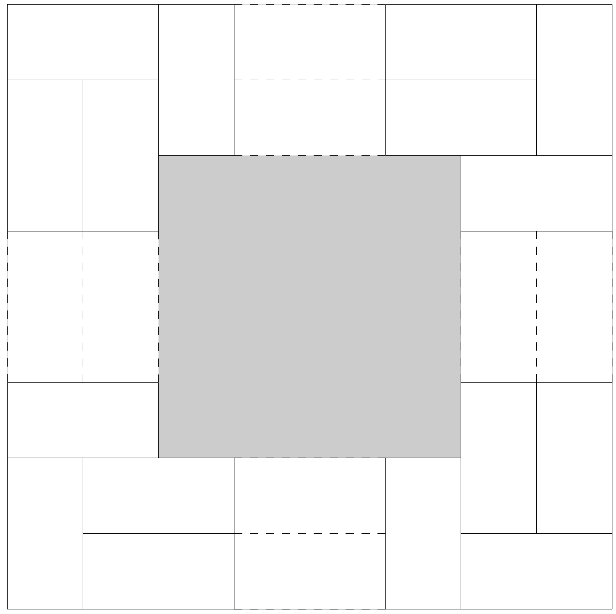
Mentionnons pour commencer que la réponse peut se deviner en essayant l'exercice pour des petites valeurs de n.
Le problème demande de trouver le plus grand entier n vérifiant une certaine propriété, il comporte donc nécessairement deux parties. Nous allons montrer d'abord que 6 vérifie la propriété, puis nous allons montrer que si $n \geqslant 8$, il existe une configuration de dominos ne respectant pas la propriété.

Cas n=6 : Supposons au contraire qu'il existe une configuration de dominos telle que chaque ligne coupant le tableau en deux parties non vides coupe au moins un domino. On ne va considérer que les lignes horizontales séparant deux rangées et les lignes verticales séparant deux colonnes du tableau, on appelle ces lignes des *séparatrices*, et les deux parties non vides du tableau obtenues avec une séparatrice des *sections*.
D'une part, un domino ne peut être intersecté que par au plus une séparatrice (et cette séparatrice coupe le domino en deux carrés égaux). D'autre part, une séparatrice intersecte un nombre pair de dominos, En effet, chaque section obtenue contient un nombre pair de cases (les sections sont des rectangles dont l'un des côtés est de longueur 6). Comme chaque domino sectionné recouvre exactement une case de la section et que les autres cases sont recouvertes par des dominos inclus dans la section et sont donc en nombre pair, on déduit bien qu'une séparatrice intersecte un nombre pari de dominos.

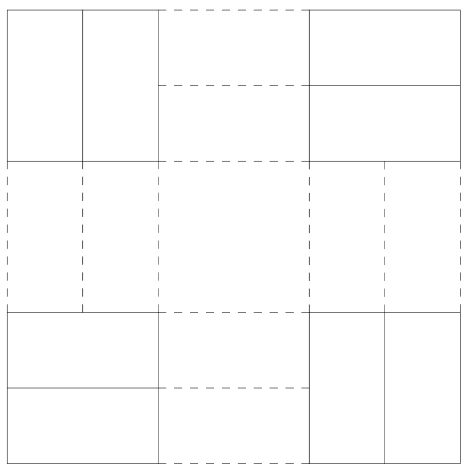


Par hypothèse, chaque séparatrice intersecte au moins un domino, donc elle en intersecte au moins 2. Il y a 10 séparatrices, donc au moins 20 dominos du pavage sont intersectés par une séparatrice. Or, le pavage d'un carré 6×6 contient exactement 18 dominos. On a abouti à une contradiction.

Cas $n \geqslant 8$: Nous allons donner pour tout entier $n \geqslant 8$ un pavage de la grille $n \times n$ tel que toute ligne coupant le tableau en deux parties non vides intersecte au moins un domino.
On considère le motif suivant :



On pave ensuite l'intérieur du carré grisé avec le motif suivant :



On obtient bien de cette façon un pavage qui vérifie la propriété de l'énoncé.

Exercice 8. Aline et Elsa jouent au jeu suivant. Elles disposent de 100 pierres qu'elles séparent en deux piles (pas forcément de même taille) au début du jeu. Puis chacune à leur tour, en commençant par Aline, elles effectuent le mouvement suivant : elles choisissent une pile, puis un entier strictement positif inférieur ou égal à la moitié de la taille de la pile choisie et retirent ce nombre de pierres de la pile. La première joueuse qui ne peut plus effectuer de mouvement perd.

Déterminer toutes les configurations initiales pour lesquelles Elsa a une stratégie gagnante.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> Dans la suite, on désigne par (x, y) la configuration où la première pile est de taille x et la deuxième pile est de taille y.
On observe sur le cas à une seule pile en commençant par la fin que les solutions perdantes pour Aline sont les piles à $2^n - 1$ pierres.

Revenons au cas d'une configuration intiale générique (a, b). Par définition, la position $(1, 1)$ est perdante. (a, b) est perdante pour la personne qui doit jouer si $\dfrac{a+1}{b+1}$ est une puissance (positive ou négative) de 2. En effet, si $\dfrac{a+1}{b+1} = 2^n$, si on pioche dans a, on diminue le quotient mais strictement de moins qu'un facteur 2. À l'inverse, si on pioche dans la pile b on l'augmente mais strictement moins que d'un facteur 2 ce qui conserve bien une position gagnante pour la joueuse suivante.

Réciproquement, si $2^n(b+1) < a+1 < 2^{n+1}(b+1)$ avec $n \geqslant 0$ alors on prend le nombre nécessaire de pierres de la pile a de sorte qu'il en reste précisément $2^n(b+1) - 1$. Cela est possible car $a < 2^{n+1}(b+1) - 1$ donc $a \leqslant 2^{n+1}(b+1) - 2$ d'où $\frac{a}{2} \leqslant 2^n(b+1) - 1$ ce qui signifie qu'on en a laissé plus que la moitié.

Exercice 9. Soit N un entier strictement positif. On suppose qu'il existe quatre sous-ensembles A_1, A_2, A_3 et A_4 de $\{1, \ldots, N\}$, chacun de cardinal 500 et on suppose que, pour tous x, y dans $\{1, \ldots, N\}$, il existe un indice i tel que x et y sont dans A_i. Déterminer la plus grande valeur de N possible.

Solution de l'exercice 9 **Réponse :** 833.
Nous allons traiter ce problème avec le langage des graphes. La modélisation du problème pousse à considérer le graphe dont les sommets sont les éléments de S, qui sont reliés par une arête de couleur i si les deux sommets apprtiennent à l'ensemble A_i.

Dans la suite, on dira également qu'un graphe G_1 recouvre un graphe G_2 si toute arête de G_2 est une arête de G_1.

On note K_m le graphe constitué de m sommets et dont tous les sommets sont réliés. Un tel graphe est dit *complet*.
On note $K_{m,m}$ le graphe constitué de 2 ensembles de sommets S_1 et S_2, tous les deux de cardinal m et dans lequel chaque sommet de S_1 est relié à tous les sommets de S_2. Un tel graphe est communément appelé *bipartite complet*, et on appellera S_1 et S_2 les *équipes* de $K_{m,m}$.

Lemme : Soit $K_{m,m}$ un graphe bipartite complet et S_1 et S_2 ses équipes. Supposons qu'il est possible de recouvrir $K_{m,m}$ avec de graphes complets K_k et K_ℓ de taille respective $k, \ell < 2m$. Alors $m < \frac{k+\ell}{3}$.
Preuve du lemme : Commençons par montrer que K_k et K_ℓ contiennent chacun soit S_1 soit S_2. En effet, soit $v \in S_1$ n'appartenant pas à K_ℓ. Pour tout sommet w de S_2, l'arête vw appartient donc à K_k, mais alors w appartient à K_k, donc K_k contient tous les sommets de S_2. Mais alors, en raisonnant sur un sommet de S_1 n'appartenant pas à K_k, on obtient que K_ℓ contient aussi tous les éléments de S_2. Ainsi, chaque sommet de S_2 appartient à K_k et à K_ℓ et chaque sommet de S_1 appartient à K_k ou à K_ℓ, de sorte que $k + \ell \geqslant |S_1| + 2|S_2| = 3m$

Revenons au problème. On suppose par l'absurde que $N \geqslant 834$. Remarquons que si on pouvait avoir N encore plus grand, on pourrait se ramener au cas $N = 834$ en ajoutant arbitrairement des éléments de $\{1, ..834\}$ qui n'y étaient pas encore aux ensembles.
Nous partitionnons notre ensemble de points comme suit :
- Z l'ensemble des points dans A_1 et A_2.
- X l'ensemble des points dans A_1 mais pas A_2.
- Y l'ensemble des points dans A_2 mais pas A_1.
- W le reste (ni dans A_1, ni dans A_2).

On a alors $|X| + |Y| + |Z| + |W| = 834$ et $|X| + |Z| = |Y| + |Z| = 500$ ce qui nous donne $|W| - |Z| = -166$.

Cas 1 : $|W| = 0$. Il vient $|Z| = 166, |X| = |Y| = 334$. Ceci contredit notre lemme car cela implique que nous pouvons couvrir $K_{334,334}$ avec deux cliques de taille 500.

Cas 2 : $|W| > O$. Alors $Z \subset K_2 \cap K_3$ (c'est-à-dire que chacun de ses éléments est dans A_3 ou A_4) pour que chacun de ses sommets soit connecté aux éléments de $|W|$ donc $|K_3 \cap Z| + |K_4 \cap Z| \geqslant |Z|$. Ainsi, nous pouvons voir que si $|W| > 0$: (En utilisant que $W \subset K_3 \cap K_4$)

$$|K_3 \cap (X \cup Y)| + |K_4 \cap (X \cup Y)| \leqslant 1000 - 2|W| - |Z|$$

.
Alors, nous devons couvrir $K_{500-|Z|,500-|Z|}$ (graphe formé à l'aide des ensembles X et Y) avec deux cliques de tailles $|K_3 \cap (X \cup Y)|, |K_4 \cap (X \cup Y)$. Par notre lemme, $3(500 - |Z|) \leqslant 1000 - 2|W| - |Z|$ or comme $|Z| = |W| + 166$, on obtient une contradiction !

Par ailleurs, pour $N = 833$, on dispose d'une construction explicite : En reprenant nos notations X, Y, Z. Avec $|Z| = 167$ et $|X| = |Y| = 333$. On place tous les éléments de X dans A_3 et A_4 et un élément de $|Y|$ dans les deux, la moitié des éléments de Y qu'il reste dans A_3 et l'autre dans A_4.

Exercices Seniors

Exercice 10. Aurélien découpe une feuille de papier en 7 morceaux. Une étape consiste ensuite à choisir un morceau et à le découper en $4, 7$ ou 10 morceaux. Aurélien peut-il obtenir ainsi 2021 morceaux ?

Solution de l'exercice 10 L'exercice décrit une suite d'opérations et demande s'il est possible de passer d'un état initial à un état final, on peut donc légitimement chercher un invariant du système.

Ici, nous allons montrer que le nombre de morceausx d'Aurélien est toujours de la forme $3k+1$, avec k un entier naturel.
C'est le cas dans la situation initiale, puisqu'Aurélien dispose de $7 = 3 \times 2 + 1$ morceaux. Puis, si c'est le cas lors d'une étape et qu'Aurélien dispose de $3k+1$ morceaux avec k un entier naturel, Aurélien remplace un morceau par $3 \times 1 + 1$ morceaux, par $3 \times 2 + 1$ morceaux ou par $3 \times 3 + 1$ morceaux, de sorte qu'il lui reste, à la fin de l'opération, $3(k+1)+1, 3(k+2)+1$ ou $3(k+3)+1$ morceaux.
De proche en proche, on a bien le résultat annoncé. Comme $2021 = 3 \times 673 + 2$ n'est pas de la forme indiquée, on ne peut jamais obtenir 2021 morceaux par le processus décrit.

Exercice 11. On dispose de cinq couleurs et d'une grille 99×99. On colorie certains carrés de la grille avec l'une des cinq couleurs de sorte que

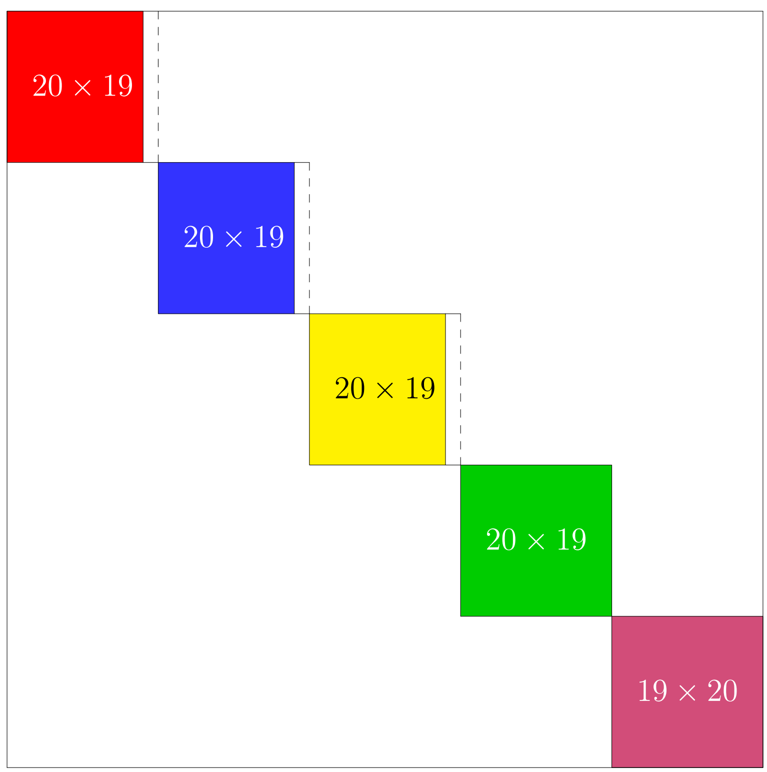
— Chaque couleur apparaît le même nombre de fois dans la grille.

— Aucune ligne et aucune colonne ne contient des cases de couleur différente.

Quelle est le plus grand nombre possible de cases que l'on peut colorier en suivant ces règles ?

Solution de l'exercice 11 **Réponse :** $N = 5 \times 19 \times 20 = 1900$.

Comme chaque ligne ou colonne ne peut contenir qu'une couleur, on va réfléchir en partant des lignes. On dit qu'une ligne ou colonne est d'une couleur (disons rouge) quand la seule couleur que peuvent avoir des cases de cette ligne ou colonne est le rouge. Si une ligne ou colonne n'a pas de couleur, on lui assigne arbitrairement une couleur. Ainsi, une case rouge se trouve forcément à l'intersection d'une ligne rouge et d'une colonne rouge. Par conséquent, on peut majorer le nombre de case rouge par le produit du nombre de ligne rouges par le nombre de colonnes rouges. Introduisons maintenant des notations. On numérotes les couleurs disponibles de 1 à 5 et on note x_i le nombre de lignes colorées de la i-ième couleur, et y_i le nombre de colonnes colorées de cette couleur. Notons enfin N le nombre de cases coloriées par couleur. On veut maximiser le nombre total de cases coloriées, $5N$. Les arguments précédemment cités montrent que $\forall i : N \leqslant x_i y_i$. ON a évidemment aussi, $x_1+x_2+\ldots+x_5 = y_1+y_2+\ldots y_5 = 99$. L'étude des petits cas nous montre que pour maximiser N il faut que les x_i et les y_i soient tous environs égaux, valant tous $\frac{99}{5}$ arrondi soit par excès ou par défaut. Une étude plus approfondie des petits cas où on remplace 99 par un petit nombre congru à 4 mod 5, comme 99, nous permet de conjecturer que la construction suivante est optimale :



Ici, on a $N = 19 \cdot 20$.

Prouvons maintenant l'optimalité. Supposons par l'absurde disposer d'une configuration valide où $N > 19 \times 20$, donc $\forall i : x_i y_i > 19 \times 20$. On remarque ensuite que $x_i + y_i > 39$. En effet,

$$x_i y_i = \frac{1}{4}\left((x_i+y_i)^2 - (x_i-y_i)^2\right)$$

Donc

$$38^2 < 4 \cdot 19 \cdot 20 = 39^2 - 1 < (x_i + y_i)^2 - (x_i - y_i)^2 < (x_i + y_i)^2.$$

Donc $38 < x_i + y_i$. De plus, si $x_i + y_i = 39$, alors $(x_i - y_{i)}^2 < 1$ Donc $x_i = y_i$, ce qui est impossible car 39 est impair. Donc $x_i + y_i \geqslant 40$.

Le compte final $2 \cdot 99 = (x_1 + y_1) + (x_2 + y_2) + \ldots + (x_5 + y_5) \geqslant 5 \times 40 = 200$ est une contradiction et termine la preuve.

Exercice 12. Soit k un entier strictement positif et P un point du plan. Déterminer le plus petit entier n ayant la propriété suivante : on peut tracer n droites ne passant pas par P de sorte que toute demi-droite d'origine le point P coupe au moins k droites.

Solution de l'exercice 12 **Réponse :** $n = 2k + 1$

L'énoncé demande de déterminer le plus petit entier n possédant une certaine propriété, il contient nécessairement deux parties. D'une part, on montre que si n est inférieur à $2k$, il ne vérifie pas la propriété, d'autre part on montre que $2k + 1$ vérifie la propriété.

Soit n un entier inférieur ou égal à $2k$. Considérons un ensemble de n droites ne passant pas par P. Prenons d une droite passant par P et parallèle à l'une des n droites. La droite d coupe au plus $n - 1 \leqslant 2k - 1$ des autres droites. On peut répartir ces points d'intersection en deux groupes de points, de sorte que les points de chaque groupe sont situés du même côté sur d par rapport à P. L'un des groupes est de taille inférieure à $k - 1$, de sorte qu'il existe une demi-droite issue de P coupent au plus $k - 1$ droites.

Construction pour $n = 2k + 1$: Considérons un polygone régulier $A_1 \dots A_{2k+1}$ à $2k + 1$ côtés et dont le cercle circonscrit est de centre P et dont on prolonge les côtés. On obtient un ensemble de $2k + 1$ droites. Considérons une demi-droite d issue du sommet P, et disons qu'elle intersecte le segment $[A_1A_2]$ (éventuellement en l'une de ses extrémités) en effectuant un angle de $\theta \leqslant \dfrac{360}{2n}$ avec sa médiatrice, et de sorte que le point d'intersection entre d et $[A_1A_2]$ soit plus proche de A_2 que de A_1. Alors la demi-droit coupe la droite (A_rA_{r+1}) si et seulement si elle forme un angle inférieur à $\pi/2$ avec la médiatrice du segment $[A_rA_{r+1}]$. Cette condition induit l'inégalité suivante sur r

$$\frac{r}{n}360^\circ - \theta \leqslant 90^\circ.$$

Cette inégalité est valable pour les $r \leqslant \lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor$.
De la même façon, la demi-droite d coupe la droite $(A_{2k+2-r}A_{2k+1-r})$ pour les r satisfaisant $r \leqslant \lfloor \frac{k}{2} \rfloor - 1$. Il vient que la droite d coupe le segment $[A1A_2]$ et au moins $\lfloor \frac{k+1}{2} \rfloor + \frac{k}{2} \rfloor - 1 = k - 1$ droites, soit au moins k droites.

Exercice 13. Soit $k \geqslant 1$ un nombre entier.

Considérons $4k$ jetons, dont $2k$ sont rouges et $2k$ sont bleus. Une suite de ces $4k$ jetons peut être transformée en une autre suite par un mouvement, consistant à interchanger un certain nombre (éventuellement un seul) de jetons rouges consécutifs avec un nombre égal de jetons bleus consécutifs. Par exemple, un mouvement permet de passer de r$\underline{\text{bb}}$br$\underline{\text{rr}}$b à r$\underline{\text{rr}}$br$\underline{\text{bb}}$b où r désigne un jeton rouge et b désigne un jeton bleu.

Déterminer le plus petit nombre n (comme fonction de k) tel que, partant de n'importe quelle suite initiale des $4k$ jetons, il faut au plus n mouvements pour atteindre l'état dans lequel les $2k$ premiers jetons sont rouges.

Solution de l'exercice 13 **Réponse :** $n = k$.

Le problème demande de déterminer le plus petit n vérifiant une certaine propriété, il contient donc nécessairement deux parties. Ici, dans un premier temps, on montre qu'étant donnée une configuration initiale de jetons, il est toujours possible d'arriver à la configuration finale décrite en au plus k étapes. Dans un second temps, on donne une configuration initiale à partir de laquelle il faut au moins k étapes pour arriver à la situation finale.

On peut toujours atteindre la situation finale en au plus k opérations : Considérons une configuration initiale de $4k$ jetons. On appelle *première moitié* l'ensemble des $2k$ jetons les plus à gauche et *deuxième moitié* l'ensemble des $2k$ jetons les plus à droite. Parmi les $2k$ jetons de la première moitié, il y a au moins k jetons rouges ou au moins $k+1$ jetons bleus.

S'il y a au moins k jetons rouges, alors on peut échanger chacun des jetons bleus de la première moitié avec un jeton rouge de la deuxième moitié. Comme à chaque étape, on enlève au moins un jeton bleu de la première moitié pour le placer dans la deuxième moitié, il faut au plus k étapes pour échanger tous les jetons bleus.

S'il y au moins $k+1$ jetons bleus dans la première moitié, alors on peut, en au plus $k-1$ opérations, échanger tous les jetons rouges de la première moitié avec des jetons bleus de la deuxième moitié. A l'issue de ces étapes, les $2k$ jetons bleus sont dans la première moitié et les $2k$ jetons rouges sont la deuxième moitié. En échangeant alors les deux groupes de $2k$ jetons consécutifs, on a atteint la situation finale voulue en au plus $k-1+1$ opérations.

Il existe une configuration initiale pour laquelle il faut au moins k opérations : Considérons la configuration $\mathtt{brbr}\ldots\mathtt{br}$ (qui consiste en $2k$ blocs de la forme $\mathtt{br}$). Notons qu'à chaque opération, le nombre de blocs de jetons rouges consécutifs diminue d'au plus 2. Comme il y a $2k$ blocs de jetons rouges consécutifs dans la situation initiale et un seul bloc de jetons rouges consécutifs dans la situation finale voulue, on ne peut passer de l'une à l'autre en $k-1$ opérations ou moins. Il faut donc au moins k opérations.

Exercice 14. Aline et Elsa jouent au jeu suivant. Elles disposent de 100 pierres qu'elles séparent en deux piles (pas forcément de même taille) au début du jeu. Puis chacune à leur tour, elles effectuent le mouvement suivant : elles choisissent une pile, puis un entier strictement positif inférieur ou égal à la moitié de la taille de la pile choisie et retirent ce nombre de pierres de la pile. La première joueuse qui ne peut plus effectuer de mouvement perd.

Déterminer toutes les configurations initiales pour lesquelles Elsa a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 14 Dans la suite, on désigne par (x, y) la configuration où la première pile est de taille x et la deuxième pile est de taille y.

On observe sur le cas à une seule pile en commençant par la fin que les solutions perdantes pour Aline sont les piles à $2^n - 1$ pierres.

Revenons au cas d'une configuration intiale générique (a, b). Par définition, la position $(1, 1)$ est perdante. (a, b) est perdante pour la personne qui doit jouer si $\dfrac{a+1}{b+1}$ est une puissance (positive ou négative) de 2. En effet, si $\dfrac{a+1}{b+1} = 2^n$, si on pioche dans a, on diminue le quotient mais strictement de moins qu'un facteur 2. À l'inverse, si on pioche dans la pile b on l'augmente mais strictement moins que d'un facteur 2 ce qui conserve bien une position gagnante pour la joueuse suivante.

Réciproquement, si $2^n(b+1) < a+1 < 2^{n+1}(b+1)$ avec $n \geqslant 0$ alors on prend le nombre nécessaire de pierres de la pile a de sorte qu'il en reste précisément $2^n(b+1) - 1$. Cela est possible car $a < 2^{n+1}(b+1) - 1$ donc $a \leqslant 2^{n+1}(b+1) - 2$ d'où $\frac{a}{2} \leqslant 2^n(b+1) - 1$ ce qui signifie qu'on en a laissé plus que la moitié.

Exercice 15. Soit $n \geqslant 3$ un entier. On colorie $2n$ sommets d'un $4n+1$-gone régulier. Montrer qu'il existe trois sommets coloriés qui forment un triangle isocèle.

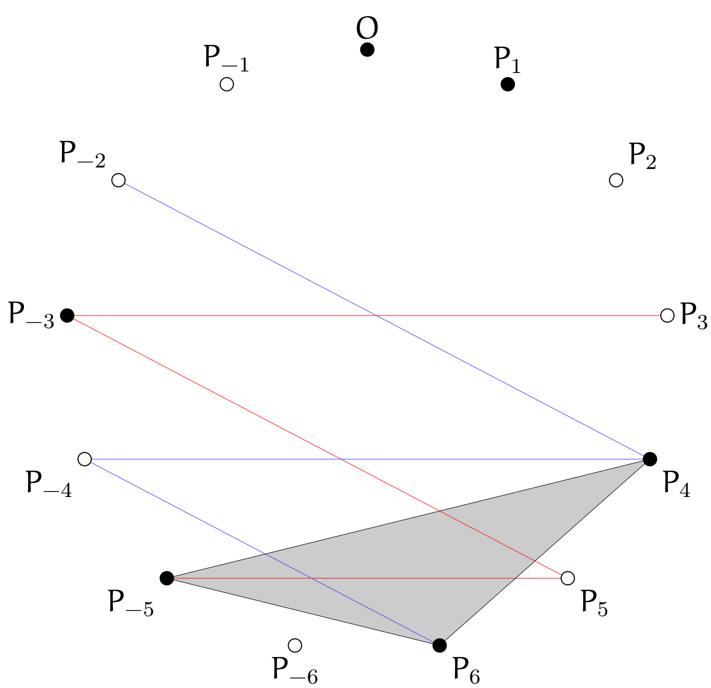
Solution de l'exercice 15 On porcède par l'absurde en supposant qu'aucun triplet de sommets coloriés ne forme de triangle isocèle.

Dans un premier temps, fixons un sommet colorié O et notons $OP_1 \ldots P_{2n}P_{-2n} \ldots P_{-1}$ le reste du polygone. Puisque le triangle OP_iP_{-i} est isocèle pour $1 \leqslant i \leqslant 2n$, au plus l'un des deux sommets P_i et P_{-i} est colorié.

Supposons que deux sommets consécutifs ne sont jamais tous les deux coloriés. En particulier, P_1 et P_{-1} ne sont pas coloriés car ils sont adjacents à O qui est colorié. Mais alors chacune des $2n-1$ paires (P_i, P_{-i}) de sommets restants contient au plus un point colorié, et au moins $2n-1$ sommets parmis les P_i sont coloriés. On conclut que chaque paire (P_i, P_{-i}) avec $i \geqslant 2$ contient exactement un sommet colorié. Ainsi, soit P_i soit P_{-i} est colorié pour $i \geqslant 2$.
Supposons que P_{2n} est colorié. Alors P_{2n-1} n'est pas colorié, donc P_{-2n+1} est colorié. Mais alors P_{-2n+2} n'est pas colorié, donc P_{2n-2} est colorié. Le triangle $P_{2n-2}, P_{2n}, P_{-2n+1}$ étant isocèle et colorié, on trouve une contradiction.

On a montré qu'il existe deux sommets consécutifs coloriés, disons 0 et P_1. Les sommets P_{-1} et P_2 ne sont alors pas coloriés, sous peine de créer un triangle isocèle avec O et P_1. De même, le triangle OP_1P_{-2n} est isocèle en P_{-2n} dont P_{-2n} n'est pas colorié.
Considérons alors la suite de sommets suivante, de longueur $2(n-1)$: $P_3, P_{-3}, \ldots, P_{2i-1}, P_{-2i+1}, \ldots, P_{2n-1}, P_{-2n+1}$
Deux sommets consécutifs de cette suite forment un triangle isocèle avec O ou avec P_1, et ne peuvent pas être tous les deux coloriés.
Il en va de même pour la suite $P_{-2}, P_4, \ldots, P_{-2i}P_{2i+2}, \ldots, P_{-2n+2}, P_{2n}$.

Ces deux suites contiennent donc chacune au plus une moitié de sommets coloriés. Mais comme elles contiennent ensemble exactement $2n-2$ sommets coloriés, les inégalités précédents sont saturées et dans chaque suite, exactement un sommet sur deux est colorié.
Si P_3 est colorié, alors P_5 est colorié et le triangle $P_1P_3P_5$ est isocèle colorié. De même, si P_{-2} est colorié, alors P_{-4} est colorié et le triangle $OP_{-2}P_{-4}$ est isocèle colorié. On déduit que P_{-2n+1}, P_{2n} et P_{2n-2} sont coloriés et forment un triangle isocèle, ce qui conclut.



Exercice 16. On considère un 2022-gone régulier de côté 1. Les points sont numérotés $A_1, \ldots, A_{2022}$ dans un certain ordre. Au départ, Elie part du point A_1 , puis saute de point en point vers le point A_2, puis de A_2 vers A_3 etc... chaque fois en prenant l'arc le plus court. Lorsqu'il atteint A_{2022}, il rejoint finalement A_1. Déterminer la valeur maximale de la somme des longueurs des arcs qu'a parcouru Elie, parmi toutes les numérotations de points possibles.

Solution de l'exercice 16 **Réponse :** Si $N = 1011$, La valeur maximale est $2(N^2 - N + 1)$.

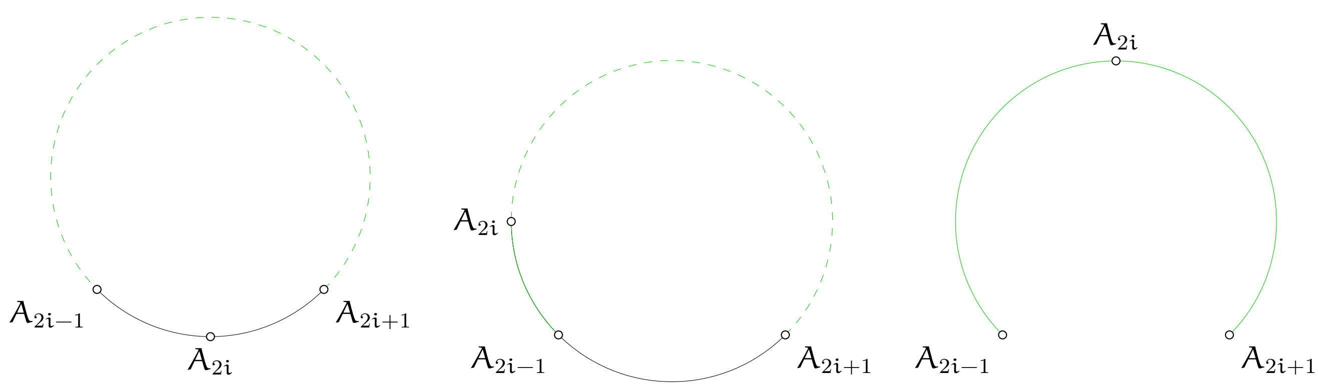
Le problème demande de trouver la valeur maximale d'une somme de longueurs, il contient nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que le chemin parcouru par Elie est forcément de longueur inférieure à $2(N^2 - N + 1)$, cette partie s'appelle l'analyse. Dans un second temps, on donne l'exemple d'une numérotation pour laquelle le chemin parcouru est exactement de longueur $2(N^2 - N + 1)$, cette étape s'appelle la construction.

Analyse : Dans la suite, on garde la notation $N = 1011$. On note également $\underline{PQ}$ la longueur de l'arc le plus court reliant P et Q et $\overline{PQ}$ la longueur de l'arc le plus long. Considérons une numérotation $A_1, \ldots, A_{2N}$ dans un ordre quelconque. On pose aussi $A_{2N+1} = A_1$.

Puisque majorer chaque portion $\underline{A_iA_{i+1}}$ par sa longueur minimale est une estimation trop grossière, on va plutôt minorer la somme $\underline{A_1A_2} + \ldots + \underline{A_{2N}A_1}$ en majorant des paquets de terme. Plus précisément, nous allons regarder le chemin parcouru entre deux sommets impairs consécutifs.

Soit $1 \leqslant i \leqslant N$. On désire montrer que $\underline{A_{2i-1}A_{2i}} + \underline{A_{2i}A_{2i+1}} \leqslant \overline{A_{2i-1}A_{2i+1}}$, autrement dit, que passer par A_{2i} est moins coûteux que prendre le grand arc $A_{2i-1}A_{2i+1}$. La volonté de démontrer une telle inégalité peut venir de tentatives sur des petits cas.

Si A_{2i} est sur le petit arc $A_{2i-1}A_{2i+1}$, alors $\underline{A_{2i-1}A_{2i}} + \underline{A_{2i}A_{2i+1}} = \underline{A_{2i-1}A_{2i+1}} \leqslant \overline{A_{2i-1}A_{2i+1}}$. Supposons désormais que A_{2i} est sur le grand arc $A_{2i-1}A_{2i+1}$. Si le petit arc $A_{2i}A_{2i+1}$ ne contient pas A_{2i-1} ou si le petit arc $A_{2i-1}A_{2i}$ ne contient pas A_{2i+1}, alors $\underline{A_{2i-1}A_{2i}} + \underline{A_{2i}A_{2i+1}} = \overline{A_{2i-1}A_{2i+1}}$. Si maintenant A_{2i-1} est sur le petit arc $A_{2i}A_{2i+1}$, alors A_{2i+1} est sur le grand arc $A_{2i-1}A_{2i}$ et $\underline{A_{2i-1}A_{2i}} + \underline{A_{2i}A_{2i+1}} \leqslant \underline{A_{2i-1}A_{2i}} + \overline{A_{2i}A_{2i+1}} = \overline{A_{2i-1}A_{2i+1}}$. Le cas où A_{2i-1} est sur le petit arc $A_{2i}A_{2i+1}$ se traite de façon similaire.



On a donc

$$\begin{aligned}
\underline{A_1A_2} + \ldots + \underline{A_{2N}A_1} &\leqslant \overline{A_1A_3} + \ldots + \overline{A_{2N-1}A_1} \\
&= (2N - \underline{A_1A_3}) + \ldots + (2N - \underline{A_{2N-1}A_1}) \\
&= 2N^2 - (\underline{A_1A_3} + \ldots + \underline{A_{2N-1}A_1}).
\end{aligned}$$

Il suffit donc de minimiser la somme $\underline{A_1A_3} + \ldots + \underline{A_{2N-1}A_1}$. Pour cela, notons qu'il existe deux sommets A et B de numéro impair à distance au moins $N - 1$ (car il y a N sommets impairs). Comme la somme est cyclique, on peut supposer que $A = A_1$ (quitte à renuméroter les sommets). Mais alors le chemin $A_1 \ldots A_{2N-1}A_1$ nécessite de parcourir un arc $\underline{A_1B}$ pour aller de A_1 vers B puis un arc $\underline{BA_1}$ pour aller de B vers A_1. Un tel chemin est donc de longueur au moins le double du petit arc AB, soit $2(N-1)$.

Il vient

$$\underline{A_1A_2} + \ldots + \underline{A_{2N}A_1} \leqslant \overline{A_1A_3} + \ldots + \overline{A_{2N-1}A_1} \geqslant 2N^2 - 2(N-1) = 2(N^2 - N + 1).$$

Construction : Réciproquement, numérotons les sommets dans l'ordre $A_1A_3 \ldots A_{2N-1}A_2 \ldots A_{2N}$. Le chemin d'Elie est alors de longueur

$$\underline{A_1A_2}+\ldots+\underline{A_{2N}A_1} \leqslant \overline{A_1A_3}+\ldots+\overline{A_{2N-1}A_1} = \underbrace{N + N - 1 + \ldots + N + N - 1}_{N-1 \text{ fois}} + N + 1 = 2N^2 - 2N + 2.$$

Exercice 17. On considère 51 entiers strictement positifs de somme 100 sur une ligne. Montrer que pour tout entier $1 \leqslant k < 100$, il existe des entiers consécutifs de somme k ou $100 - k$.

Solution de l'exercice 17 On reformule légèrement l'énoncé pour le rendre plus visuel : on se représente un cercle de périmètre 100 gradué (de 0 à 99 par exemple) sur-lequel on a marqué en noir 51 graduations et en pointillés les 49 autres. Sans perte de généralité on marque en noir la graduation 0. Nos entiers positifs correspondent aux longueurs entre les graduations noires. On vérifie facilement qu'il s'agit d'une représentation bijective du problème. Pour tout k, par principe des tiroirs, comme l'application qui à j associe $j + k$ est injective (modulo 100), il existe une graduation marquée en noir j telle que son image $j + k$ l'est aussi. Deux cas se présentent alors. Soit le segment $[j, j + k]$ ne coupe pas 0 et alors on a bien les entiers souhaités. Soit il coupe 0 et alors $[j + k, j]$ ne coupe pas 0 et est de longueur $n - k$. Dans les deux cas, on a trouvé des entiers consécutifs de somme k ou $n - k$.

Exercice 18. Soient $C_1, C_2, ...C_n$ des cercles de même rayon disposés dans le plan de sorte qu'ils ne soient jamais tangents 2 à 2 et qu'il existe toujours un chemin passant par les cercles pour aller d'un point de l'un d'entre eux à un autre (autrement dit, les cercles sont connectés). En notant S l'ensemble des points d'intersection des cercles, montrer que $|S| \geqslant n$.

Solution de l'exercice 18 Dans un premier temps, on reformule le problème en termes de graphes. On note C l'ensemble des centres des cercles et S l'ensemble des points d'intersections qui constituent les sommets d'un graphe G. On relie par une arête tout couple $(c, s) \in C \times S$ si s appartient au cercle de centre c. Remarquons alors que pour toute arête (c, s), $deg(c) \geqslant deg(s)$. En effet, d'après l'énoncé, à tout point c_i relié à s autre que c on peut associer un autre point d'intersection de c_i avec c car les cercles ne sont pas tangents. Étant donnés c_i et c_j distincts, ces deuxièmes points s_i et s_j ne peuvent pas être confondus puisque tous les cercles sont de même rayons. Maintenant que le problème est reformulé, on peut raisonner uniquement sur le graphe : G est un graphe bipartite entre C et S tel que pour toute arête (c, s), $deg(c) \geqslant deg(s)$. Il vient aisément que $|C| \leqslant |S|$ En effet, en notant A l'ensemble des arêtes et $a = (c_a, s_a)$ ces arêtes : $|C| = \sum_{a \in A} \frac{1}{deg(c_a)} \leqslant \sum_{a \in A} \frac{1}{deg(s_a)} = S$ ce qui conclut.