Combinatoire groupe C : monovariants

Aline Cahuzac

dimanche 4 février 2024

1 Quelques éléments d'introduction

Le lecteur a sans doute déjà entendu parler de l'usage des *invariants* en combinatoire : il s'agit, dans un problème mettant en jeu un processus itératif, d'identifier une quantité *préservée* lors de chaque opération. On peut en déduire certaines contraintes sur les configurations accessibles.

Le principe des *monovariants* est très similaire : il s'agit ici de trouver une quantité, dans le problème, qui varie *toujours dans le même sens*, autrement dit de façon *monotone*. Comme un invariant, un monovariant permet de contraindre les configurations accessibles dans le problème. Un autre cas d'usage important est la *terminaison d'algorithmes*, dans lequel la recherche d'un monovariant est complémentaire de l'utilisation du principe fameux de la descente infinie.

Exercice 1 On propose l'algorithme de tri suivant pour remettre les éléments d'un tableau $(a_1, \ldots, a_n)$ de taille n dans l'ordre croissant :

(i) On commence à la position 1.

(ii) On parcourt le tableau vers la droite jusqu'à trouver deux éléments consécutifs a_i, a_{i+1} tels que $a_i > a_{i+1}$.

(iii) On échange ces deux élements et on répète l'étape (ii) jusqu'à arriver au bout du tableau. On revient alors en (i).

(iv) Quand on parcourt le tableau sans trouver deux éléments voisins dans le mauvais ordre, on a fini.

Comment s'assurer que cet algorithme termine (*terminaison*) et que lorsqu'il termine, on ait un tableau bien trié (*correction*) ? *Remarque : cet algorithme est connu sous le nom de "tri à bulles".*

Solution de l'exercice 1 *Déjà, on se convainc assez facilement que si le tableau est mal trié, on trouvera à un moment ou un autre deux éléments voisins à inverser. Ceci répond au problème de correction (de façon très sommaire, mais ce n'est pas l'objet du cours). Passons au problème de terminaison : on considère pour cela la quantité I correspondant au nombre d'inversions. On appelle inversion une paire d'indices i, j tels que $i < j$ et $a_i > a_j$. Clairement, I est un entier naturel, et la situation $I = 0$ correspond exactement au cas d'arrêt de l'algorithme. Or chaque opération fait exactement diminuer I de 1. On utilise alors le principe de la descente infinie : toute suite décroissante d'entiers minorée est stationnaire. Comme I ne peut stationner qu'à la valeur 0, c'est bien que l'algorithme termine.*

Quand et comment utiliser des monovariants en pratique ?

Types de problèmes : ce sont rarement des problèmes statiques, et plustôt des problèmes dynamiques dans lesquels une configuration évolue selon certaines règles (jeu, algorithme constructif...).

Démontrer une impossibilité : Si la question est de la forme "est-il possible d'arriver à telle configuration", un invariant ou un monovariant peuvent servir à répondre par la négative en restreignant les configurations accessibles.

Démontrer une existence : En revanche, si la réponse est oui, ce n'est pas à l'aide d'un invariant que l'on aura la solution : un monovariant peut éventuellement y contribuer (descente infinie).

→ Dans un énoncé ouvert ("est-il possible de ... ?"), attention à ne pas se persuader d'une réponse et embarquer dans le mauvais schéma de preuve.

Où trouver le monovariant ? La quantité peut être donnée dans l'énoncé ou plus subtile. Parfois, franchement difficile à trouver.

Plus généralement (et philosophiquement), caractériser les lois régissant un problème est une démarche naturelle dans toute étude scientifique. En physique par exemple, on recherche ainsi des symétries dont on déduit des quantités conservées (énergie, nombre de particules, moment cinétique total...), mais on a aussi la deuxième loi de la thermodynamique qui dit que l'entropie ne peut qu'augmenter.

2 Exercices

Exercice 2 Le Professeur Tournesol étudie une bactérie capable de guérir les Duponts de leur maladresse. Il la cultive donc sur une grille $n \times n$ et constate que tous les jours, certaines nouvelles cases ont été colonisées. Il note cependant que la bactérie ne peut coloniser une nouvelle case que lorsque cette case a au moins deux voisines colonisées (on dit que deux cases sont voisines lorsqu'elles ont un côté en commun). Dans combien de cases au minimum doit-il déposer sa bactérie pour lui permettre de coloniser toute la grille ?

Solution de l'exercice 2 *On constate un monovariant : le périmètre du territoire colonisé par la bactérie décroît (pas nécessairement strictement) à chaque colonisation d'une nouvelle case : on perd au moins deux arêtes (entre chaque voisine colonisée et la case nouvellement recouverte) et on en rajoute au plus 2 (celles qui séparent la nouvelle case des zones encore non colonisées). Ainsi, comme le périmètre final est $4n$, il faut au moins n cases colonisées au départ. On remarque enfin que si le Professeur dépose sa bactérie sur toutes les cases d'une diagonale, la bactérie arrivera bien à remplir toute la grille.*

Exercice 3 La mairie a installé une superbe œuvre d'art sur le nouveau rond-point, constituée d'un certain nombre de tas (non-vides) de cailloux. Au total, il y a $\frac{n(n+1)}{2}$ cailloux. Chaque nuit, un plaisantin crée un nouveau tas en enlevant un caillou de chaque tas déjà existant. Peut-il arriver à une situation stable, dans laquelle le nombre de tas de chaque taille ne varie plus lors de ses opérations ?

Solution de l'exercice 3 *On remarque que la configuration stable est celle qui comporte un tas de chaque taille entre 1 et n. Pour montrer que l'on y arrive un jour quelque soit la configuration initiale, représentons la situation ainsi : on range les cailloux dans une grille $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$, en plaçant les a_1 cailloux du plus gros tas dans les cases de coordonnées $(1,1), \ldots, (1, a_1)$, puis les a_2 cailloux du deuxième plus gros tas en $(2,1), \ldots, (2, a_2)$, et ainsi de suite. Une visite du plaisantin retire le caillou au sommet de chaque colonne et en crée une nouvelle, insérée à la bonne place selon sa taille. On vérifie ainsi que la quantité somme totale des coordonnées des cailloux diminue strictement à moins d'être dans la configuration minimale (et stable) mentionnée.*

Exercice 4 $2n$ ambassadeurs sont invités à un grand dîner. On sait que chaun possède au moins n amis dans ce groupe (l'amitié est une relation symétrique non réflexive) et quelques ennemis. Le stagiaire en charge du plan de table peut-il faire en sorte de placer chaque convive entre deux de ses amis, de sorte à éviter tout incident diplomatique ?

Solution de l'exercice 4 *On va montrer qu'à partir d'un plan de table (au hasard), on peut appliquer une suite d'opérations qui aboutit à une telle configuration (qui existe donc, puisque l'on vient de la créer). Pour y arriver, notons M (de cardinal $|M|$) l'ensemble des voisinages non-amis (l'ensemble des paires de voisins qui ne sont pas amis). Si $|M| > 0$, alors on peut considérer (A_1, A_2) deux ambassadeurs voisins non amis (donc dans M). Comme A_1 et A_2 ont chacun au moins n amis autour de la table, on peut trouver deux voisins A_i et A_{i+1} avec ami de A_1 et A_{i+1} ami de A_2. On inverse maintenant tout l'arc A_2A_i, autrement dit on fait les échanges $A_2 \leftrightarrow A_i$, $A_3 \leftrightarrow A_{i-1}$, et ainsi de suite. Que s'est-il passé dans cette opération ? Les seuls ambassadeurs qui ont changé de voisin sont A_1, A_2, A_i, A_{i+1}. A_1 et A_2 ont gagné un voisin ami, tandis que A_i, A_{i+1} ont au pire gagné 0 voisins amis (s'ils étaient déjà amis entre eux). Ainsi, M diminue d'au moins 2. En particulier, on peut aboutir en un nombre fini d'étapes à un plan de table convenable.*

Exercice 5 Le shérif écrit sur chacune des n fenêtres du château de Nottingham le nombre 1. Tous les jours, Robin Hood tire une flèche sur deux fenêtres, détruisant deux nombres, disons a et b. Le shérif, pour une raison étrange, n'en répare qu'une seule et y écrit le nombre $\frac{a+b}{4}$. Le $(n-1)$-ème jour, Robin ne trouve plus qu'une fenêtre encore entière, contenant le nombre x. Montrer que $x \geqslant \frac{1}{n}$

Solution de l'exercice 5 *Considérons la somme des inverses des nombres écrits aux fenêtres. Comme pour tout $a, b \in \mathbb{R}_+^*$ on a l'inégalité $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} \geqslant \frac{4}{a+b}$, la somme des inverses diminue à chaque passage de Robin Hood (pas nécessairement strictement). Ainsi, le dernier jour on obtient $\frac{1}{x} \leqslant n \times 1$, autrement dit $x \geqslant \frac{1}{n}$.*

Exercice 6 Les Dalton inventent un nouveau passe-temps : Joe écrit le mot RANTANPLAN sur le mur, puis chacun son tour, un des frères choisit une des lettres écrites, disons λ, l'efface, et la remplace par une suite finie de lettres strictement plus grandes que λ dans l'ordre alphabétique (il peut ne rien écrire). Peuvent-ils jouer à ce jeu de manière infinie ?

Solution de l'exercice 6 *On considère le "mot" $\Lambda_A \Lambda_B \ldots \Lambda_Y \Lambda_z$ dans lequel Λ_α est le nombre d'apparitions de la lettre α au mur. On remarque que chaque étape fait strictement diminuer ce mot dans l'ordre lexicographique. Or, on peut montrer qu'une suite de mots sur l'alphabet $\mathbb{N}$ et qui décroît strictement dans l'ordre lexicographique est finie (récurrence laissée au lecteur).*

Exercice 7 Au grand marché de la Saint-Glinglin, n stands sont en cercle et ont chacun un certain nombre de visiteurs. Toutes les minutes, deux des visiteurs d'un stand qui en a au moins 2, et strictement plus que ses deux voisins réunis, s'en vont (si un tel stand existe), l'un vers le stand immédiatement à droite et l'autre vers le stand immédiatement à gauche. On suppose qu'il n'y a pas d'autres mouvements de personnes.

1. Pour quels $n \geqslant 3$ existe-t-il une configuration de départ telle qu'il soit possible de faire un nombre infini de mouvements ?
2. Même question dans le cas où l'on rajoute la contrainte suivante : un stand ne peut pas perdre de clients s'il en possède strictement moins que 3.

Solution de l'exercice 7

1. *On trouve la configuration suivante qui permet de trouver une séquence infinie de mouvements pour tout n : Supposons que tous les stands ont exacement un client, à l'exception d'un stand qui en a 2 et d'un de ses voisins, qui n'en a aucun. On voit alors que la configuration se décale d'un cran à chaque mouvement mais reste autrement inchangée, on peut continuer indéfiniment comme cela.*
2. *Le nombre total de clients, S, est un invariant. En revanche, on voit que chaque opération tend à réduire les "inégalités" d'affluence entre les stands. Si c'est bien le cas, alors on devrait pouvoir le constater par exemple sur la somme des carrés du nombre de clients de chaque stand, C. Regardons alors ce qui arrive lorsqu'un stand avec k clients en perd 2 au profit de ses voisins qui en ont a et b respectivement $(a+b<k)$:*

$$(a+1)^2+(k-2)^2+(b+1)^2-a^2-b^2-k^2=2a+1-4k+4+2b+1=2(a+b+1-k)+2(2-k)$$

Comme on s'y attendait, avec la nouvelle contrainte $k \geqslant 3$, cette différence entre la nouvelle et l'ancienne valeur de C vaut au plus -2, autrement dit C diminue strictement. On conclut par descente infinie.

Exercice 8 On écrit 1000 entiers relatifs sur la première ligne d'un tableau. Puis sur la ligne suivante, on note le nombre d'occurences de chacun des entiers : par exemple, si le nombre 2024 apparaît 42 fois, on note le nombre 42 sous chaque occurence de 2024. On réitère le procédé sur les lignes suivantes. Montrer qu'au bout d'un moment, toutes les lignes sont identiques.

Solution de l'exercice 8 *A partir de la deuxième ligne, on écrit des nombres d'occurence donc si l'on écrit b en-dessous de a, on sait que $b \geqslant a$. Or tous les éléments de la liste sont majorés par 1000 (on ne peut pas compter plus de 1000 occurences). On applique donc une variante du principe de la descente infinie, qui dit que toute suite croissante d'entiers majorée stationne à partir d'un certain rang. On obtient que chaque colonne du tableau forme une suite stationnaire à partir d'un certain rang. Lorsque toutes les suites sont stationnaires, les lignes du tableau sont toutes identiques.*

Exercice 9 Théo considère un pentagone dont les sommets portent chacun un entier (relatif) inscrit. On sait que la somme des entiers inscrits est strictement positive. Il peut effectuer l'opération suivante :

1. Choisir 3 sommets consécutifs, dont on note x, y, z les entiers correspondants, et où $y<0$.
2. Remplacer les entiers selon le schéma

$$x \mapsto x+y \qquad y \mapsto -y \qquad z \mapsto y+z$$

Peut-il effectuer un enchaînement infini de telles opérations ?

Solution de l'exercice 9 *Numérotons les sommets par les éléments de $\mathbb{Z}/5\mathbb{Z}$ $\bar{1}, \ldots, \bar{5}$, et $x_{\bar{k}}$ l'entier inscrit sur le sommet $\bar{k}$. On considère ensuite ce qui se passe lors d'une opération pour diverses quantités que l'on peut former à partir des $\{x_{\bar{k}}\}$:*

- *Comme* $(x+y)-y+(z+y)=x+y+z$*, la somme* S *portée par l'ensemble des 5 sommets ne change pas.*
- *Comme on "déplace" les quantités d'un sommet vers ses voisins, on peut penser à regarder des sommes qui font intervenir les produits d'entiers de sommets voisins, par exemple des sommes quadratiques comme*

$$T = \sum_{k=0}^{4} (3x_{\bar{k}}^2 + 2x_{\bar{k}}x_{\overline{k+1}}) = \sum_{k=0}^{4} (x_{\bar{k}}^2 + (x_{\bar{k}} + x_{\overline{k+1}})^2)$$

Lorsque Théo effectue une opération sur le sommet $\bar{k}$ *et ses deux voisins immédiats,* T *varie de la quantité* $2x_{\bar{k}}S$*. Comme* $S > 0$ *(invariant) et* $x_{\bar{k}} < 0$ *(condition pour pouvoir jouer), Il s'agit d'une diminution stricte. Or,* $T \in \mathbb{N}$ *(somme de carrés d'entiers), donc d'après le principe de la descente infinie, Théo ne peut effectuer qu'un nombre fini d'opérations.*