TD Invariants Junior A 2023

Invariants

Exercice 1
On écrit les nombres $2, 3, 5, 7, 11$ sur un tableau. En une opération, on peut remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique. Peut-on obtenir 5 nombres égaux après un certain nombre d'opérations ?

Exercice 2
Les entiers de 1 à 2022 sont écrits au tableau. À chaque étape, on en choisit deux, qu'on efface et remplace par leur différence. Peut-on obtenir 0 à la fin ? Et si on avait écrit les entiers de 1 à 2023 ?

Mêmes questions si on autorise également de remplacer deux nombres par leur somme.

Exercice 3
Peut-on répartir les nombres $1, 2, \ldots, 33$ en 11 groupes de 3 tels que dans chaque groupe, un des trois nombres soit la somme des deux autres ?

Exercice 4
2022 bâtons sont posés au sol. Chacun à leur tour, en commençant par Alice, elle et Bob enlèvent entre 1 et 3 bâtons. Le gagnant est celui qui prend le dernier bâton. Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 5
On considère un tableau 4×4 rempli de 0 et de 1. À chaque étape, on choisit une ligne, une colonne ou une diagonale et on y remplace tous les 0 par des 1, et inversement. Est-il possible, dans chacun des cas suivants, de n'obtenir que des 0 à un moment donné ?

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Exercice 6
34 caméléons vivent sur une île. Au début, il y en a 7 jaunes, 10 rouges et 17 verts. Quand deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils adoptent simultanément la troisième couleur. Un jour, Darwin arrive sur l'île et observe que tous les caméléons sont de la même couleur. Quelle est cette couleur ?

Exercice 7
On écrit au tableau les nombres $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$. À chaque étape, on choisit deux nombres a et b écrits au tableau, on les efface et on écrit à la place $a + b + ab$. Quel peut être le dernier nombre qui figure au tableau ?

Exercice 8
On vous donne 20 cartes, chacune contenant exactement un chiffre. Chaque chiffre apparaît

sur exactement deux cartes. Est-il possible de réarranger les cartes de telles manière à ce que pour chaque chiffre i, il y a exactement i cartes entre les deux cartes qui contiennent i ?

Exercice 9
Dix nains sont assis autour d'une table. Au début, l'un d'eux a dix pièces d'or. Toutes les minutes, les nains regardent si l'un d'eux possède plus d'une pièce. Si oui alors exactement un de ceux-ci donne une pièce à chacun de ses deux voisins. Est-il possible d'arriver à la situation où chaque nain a exactement une pièce ?

Pavages et coloriages

Exercice 10
On considère un échiquier de dimension 8×8, et des dominos de taille 2×1 (que l'on peut tourner si on veut, mais qui ne peuvent pas se chevaucher).

1. On enlève l'un des coins de l'échiquier. Peut-on le recouvrir entièrement par les dominos ?
2. Même question si on enlève deux coins opposés.

Exercice 11
Pour quels $n \geqslant 1$ peut-on paver une grille carrée de taille $n \times n$ avec des pièces en forme de T (dont chacune recouvre 4 cases de la grille) sans qu'elles ne se recouvrent ni débordent ? Les rotations sont autorisées.

Exercice 12
Soit $k \in \mathbb{N}^*$. Pour quels n, m peut on paver une grille $n \times m$ avec des dominos $1 \times k$? Les rotations sont autorisées.

Exercice 13
Partons de la séquence 10. En une opération, on peut soit insérer à un endroit une séquence de la forme XXX, où X est une séquence de 0 et de 1, soit supprimer une séquence du même type n'importe où. Peut-on arriver à la séquence 01 en un nombre fini d'opérations ?

Exercice 14
On considère une grille infinie. Alice et Bob placent un pion chacun à leur tour, blanc pour Alice, noir pour Bob. Alice gagne si elle parvient à aligner cinq pions blancs, et Bob gagne si Alice ne parvient jamais à les aligner. Qui possède une stratégie gagnante ?