Problème 1. Peut-on arranger les nombres $1, 1, 2, 2, \ldots, 50, 50$ de sorte que pour tout $1 \leqslant k \leqslant 50$, il y a exactement k éléments entre les deux nombres k ?

Problème 2. (IMO 2015 P1) Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de points du plan. On dit que $\mathcal{S}$ est *équilibré* si pour toute paire de points (A, B) de $\mathcal{S}$, il existe un point C de $\mathcal{S}$ tel que $AC = BC$. On dit que $\mathcal{S}$ est *excentrique* si, pour tous points A, B et C de $\mathcal{S}$ distincts, il n'existe pas de point P de $\mathcal{S}$ tel que $PA = PB = PC$.

a) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe un ensemble équilibré contenant exactement n points.
b) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe un ensemble équilibré et excentrique contenant exactement n points.

Problème 3. On colorie les points d'un cercle avec un nombre fini de couleurs. Montrer que l'on peut tracer deux droites parallèles coupant le cercle en quatre points distincts de même couleur.

Problème 4. (IMO SL 2014 C2) On dispose de 2^m feuilles de papier et sur chacune d'elles est écrit le nombre 1. Une étape consiste à choisir deux feuilles contenant respectivement les nombres a et b et de remplacer ces deux nombres tous les deux par le nombre $a + b$. Montrer qu'après $m2^{m-1}$ étapes, la somme des nombres écrits sur les feuilles vaut au moins 4^m.

Problème 5. (Balkan MO 2021 SL C1) Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des $n-$uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in \{0, 1, 2\}$. Un triplet d'éléments x, y, z de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* s'il existe un indice i tel que $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0, 1, 2\}$. Un sous-ensemble A de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* si trois éléments de A deux à deux distincts sont toujours un bon triplet.

Montrer que tout sous-ensemble bon de $\mathcal{A}_n$ possède au plus $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$ éléments.

Problème 6. (IMO SL 2016 C3) Soit n un entier positif premier avec 6. On colorie les sommets d'un $n-$gone régulier avec trois couleurs, de sorte que pour chaque couleur, le nombre de sommet de cette couleur est impair. Montrer qu'il existe un triangle isocèle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes.