1 Exercices

Problème 1. Peut-on arranger les nombres $1, 1, 2, 2, \ldots, 50, 50$ de sorte que pour tout $1 \leqslant k \leqslant 50$, il y a exactement k éléments entre les deux nombres k ?

Problème 2. (IMO 2015 P1) Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de points du plan. On dit que $\mathcal{S}$ est *équilibré* si pour toute paire de points (A, B) de $\mathcal{S}$, il existe un point C de $\mathcal{S}$ tel que $AC = BC$. On dit que $\mathcal{S}$ est *excentrique* si, pour tous points A, B et C de $\mathcal{S}$ distincts, il n'existe pas de point P de $\mathcal{S}$ tel que $PA = PB = PC$.

a) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe un ensemble équilibré contenant exactement n points.
b) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe un ensemble équilibré et excentrique contenant exactement n points.

Problème 3. On colorie les points d'un cercle avec un nombre fini de couleurs. Montrer que l'on peut tracer deux droites parallèles coupant le cercle en quatre points distincts de même couleur.

Problème 4. (IMO SL 2014 C2) On dispose de 2^m feuilles de papier et sur chacune d'elles est écrit le nombre 1. Une étape consiste à choisir deux feuilles contenant respectivement les nombres a et b et de remplacer ces deux nombres tous les deux par le nombre $a + b$. Montrer qu'après $m2^{m-1}$ étapes, la somme des nombres écrits sur les feuilles vaut au moins 4^m.

Problème 5. (Balkan MO 2021 SL C1) Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des $n-$uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in \{0, 1, 2\}$. Un triplet d'éléments x, y, z de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* s'il existe un indice i tel que $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0, 1, 2\}$. Un sous-ensemble A de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* si trois éléments de A deux à deux distincts sont toujours un bon triplet.

Montrer que tout sous-ensemble bon de $\mathcal{A}_n$ possède au plus $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$ éléments.

Problème 6. (IMO SL 2016 C3) Soit n un entier positif premier avec 6. On colorie les sommets d'un $n-$gone régulier avec trois couleurs, de sorte que pour chaque couleur, le nombre de sommet de cette couleur est impair. Montrer qu'il existe un triangle isocèle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes.

2 Corrigés

Problème 1. Peut-on arranger les nombres $1, 1, 2, 2, \ldots, 50, 50$ de sorte que pour tout $1 \leqslant k \leqslant 50$, il y a exactement k éléments entre les deux nombres k ?

Solution 1. La réponse est non, et c'est une histoire de parité. En effet, supposons que l'on peut effectivement placer les éléments sur une ligne comme indiqué. Colorions en rouge les éléments d'emplacement pair et en bleu les éléments d'emplacement impair.

Si k est pair, alors les deux éléments de numéro k sont alors de couleur différente. Ainsi, parmi les k impairs, il y a 25 bleus et 25 rouges. Pourtant, si k est impair, alors les deux nombres k sont de même couleur. Il y a donc par exemple un nombre pair de k impairs bleus, ce qui est absurde.

Problème 2. (IMO 2015 P1) Soit $\mathcal{S}$ un ensemble fini de points du plan. On dit que $\mathcal{S}$ est *équilibré* si pour toute paire de points (A, B) de $\mathcal{S}$, il existe un point C de $\mathcal{S}$ tel que $AC = BC$. On dit que $\mathcal{S}$ est *excentrique* si, pour tous points A, B et C de $\mathcal{S}$ distincts, il n'existe pas de point P de $\mathcal{S}$ tel que $PA = PB = PC$.

a) Prouver que pour tout entier $n \geqslant 3$, il existe un ensemble équilibré contenant exactement n points.
b) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe un ensemble équilibré et excentrique contenant exactement n points.

Solution 2. a) On cherche des configurations régulières, par exemple des configurations à bas de polygones réguliers. Si n est impair, on peut par exemple prendre $n-1$ points sur un cercle ainsi que le centre, en arrangeant les $n-1$ points en $(n-1)/2$ paires de sorte qu'ils forment un triangle équilatéral avec le cercle.

Si n est pair, on adapte cette configuration par exemple en faisant $(n-2)/2$ paires de points formant un triangle équilatéral avec le centre, et on greffe le dernier point à une paire pour former un losange dont les angles valent $60°$ et $120°$.

b) Si n est impaire, un polygone régulier convient. On montre désormais que ce sont les seules solutions. Pour cela, on veut mélanger l'hypothèse "équilibré" qui demande que les médiatrices des segments contiennent au moins un point avec l'hypothèse "excentrique" qui demande qu'un point ne soit sur des médiatrices que de paires disjointes. Ceci nous invite à compter l'ensemble suivant de deux façons différentes :

$$E = \{(A, B, C),\ \text{C est sur la médiatrice de } [A, B]\}.$$

D'un part, étant donné une paire (A, B) (il y a $\binom{n}{2}$ telles paires), il y a au moins un point C sur sa médiatrice, donc $|E| \geqslant \binom{n}{2}$.

D'autre part, étant donné un point C, il est sur les médiatrices de paires de points disjointes, et il y a au plus $\frac{n-1}{2}$ telles paires. Donc $|E| \geqslant \frac{n-1}{2}n$.

En combinant les deux inégalités, on voit qu'on a égalité. En particulier, tout point est sur la médiatrice d'exactement $(n-1)/2$ paires de segments, donc ce nombre est entier et n est impair.

Problème 3. On colorie les points d'un cercle avec un nombre fini de couleurs. Montrer que l'on peut tracer deux droites parallèles coupant le cercle en quatre points distincts de même couleur.

Solution 3. Si l'on trace un $n+1-$gone régulier sur le cercle, il contiendra deux sommets A et B de même couleur. On itère ce processus suffisamment de fois pour obtenir deux paires (A, B) et (C, D) comme voulu.

En traçant $n \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ tels polygones, on obtient $n \times \lceil \frac{n-1}{2} \rceil + 1$ paires monochromes. Comme il y a n valeurs possibles pour la couleur et $\lceil \frac{n-1}{2} \rceil$ valeurs possibles pour la distance, le principe des tiroirs nous dit qu'il y a deux paires ayant la même caractéristique (couleur, distance), ce qui est le résultat voulu.

Problème 4. (IMO SL 2014 C2) On dispose de 2^m feuilles de papier et sur chacune d'elles est écrit le nombre 1. Une étape consiste à choisir deux feuilles contenant respectivement les nombres a et b et de remplacer ces deux nombres tous les deux par le nombre $a+b$. Montrer qu'après $m2^{m-1}$ étapes, la somme des nombres écrits sur les feuilles vaut au moins 4^m.

Solution 4. L'astuce ici c'est de regarder le produit des nombres et non la somme. En effet, après une étape, le produit des nombres écrits sur les feuilles vaut $(a+b)^2$ alors qu'il valait ab auparavant. Le produit est donc multiplié par 4 à chaque étape.

Ainsi, si S_n et P_n désignent la somme et le produit des numéros, on a

$$S_{m2^{m-1}} \geqslant 2^m P_{m2^{m-1}}^{1/2^m} \geqslant 2^m (4^{m2^{m-1}})^{1/2^m} = 4^m.$$

Problème 5. (Balkan MO 2021 SL C1) Soit $\mathcal{A}_n$ l'ensemble des $n-$uplets $x = (x_1, \ldots, x_n)$ avec $x_i \in \{0, 1, 2\}$. Un triplet d'éléments x, y, z de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* s'il existe un indice i tel que $\{x_i, y_i, z_i\} = \{0, 1, 2\}$. Un sous-ensemble A de $\mathcal{A}_n$ est dit *bon* si trois éléments de A deux à deux distincts sont toujours un bon triplet.

Montrer que tout sous-ensemble bon de $\mathcal{A}_n$ possède au plus $2\left(\frac{3}{2}\right)^n$ éléments.

Solution 5. Soit $\varepsilon = (\varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ et $E_\varepsilon = \{x \in \mathcal{A}_n, x_i \neq \varepsilon_i\}$. Par exemple pour $n = 3$, $E_{(0,1,2)}$ est l'ensemble des triplets dont le premier chiffre est soit 1 soit 2, le deuxième chiffre soit 0 soit 2 et le troisième chiffre soit 0 soit 1. Chaque E_ε contient donc 2^n éléments de $\mathcal{A}_n$ et chaque élément de $\mathcal{A}_n$ est dans au plus 2^n ensembles de la forme E_ε. Puisqu'un sous-ensemble bon contient au plus deux éléments dans un même E_ε, on déduit que si X est bon :

$$2^n|X| = \sum_\varepsilon |E_\varepsilon \cap X| \leqslant \sum_\varepsilon 2 = 2 \times 3^n.$$

Ainsi, $|X| \leqslant 2 \times \left(\frac{3}{2}\right)^n$.

Problème 6. (IMO SL 2016 C3) Soit n un entier positif premier avec 6. On colorie les sommets d'un $n-$gone régulier avec trois couleurs, de sorte que pour chaque couleur, le nombre de sommet de cette couleur est impair. Montrer qu'il existe un triangle isocèle dont les trois sommets sont de trois couleurs différentes.

Solution 6. Tout d'abord, puisque n n'est pas un multiple de 3, le $n-$gone ne contient pas de triangle équilatéral. D'autre part, étant donné un côté, comme il y a un nombre impair de sommets, étant donné un côté, celui-ci appartient à exactement trois triangles isocèles.

Maintenant que ces remarques sont faites, supposons par l'absurde que l'on n'a pas de triangle isocèle avec trois sommets de couleurs distinctes. Notons, b, r et v le nombre de sommets respectivement de la couleur 1, 2 et 3 et disons qu'un segment est bichrome si ses extrémités sont de couleurs distinctes.

Etant donné un segment bichrome, (il y a $br + rv + vb$ tels segments) il y a trois triangles isocèles pour lesquels ce segment est un côté. Ainsi, il y a $3(br+rv+vb)$ couples (triangle isocèle, côté bichrome). Mais pour chaque triangle isocèle ayant un côté bichrome, il a exactement deux côtés bichrome. Donc le nombre de couples (triangle isocèle, côté bichrome) est pair. Cela contredit que $3(br+rv+vb)$ est impair.