Combi E

Janvier 2024

1 Échauffement

Exercice 1
Trouver le nombre de permutations p de $\{1, ..., n\}$ vérifiant $p(p(i))) \geq i$ pour un unique i.

Exercice 2
Soit G un graphe fini simple de cardinal n. Une arrête e de G est dite amusante si on peut partitionner les sommets de G en deux sous-ensembles disjoints A et B, tels que l'ensemble des arrêtes ayant une extrémité dans A et une dans B contient e et est de cardinal ≤ 100. Montrer qu'au plus $100n$ arrêtes de G sont amusantes.

2 Raney et stations d'essence

Exercice 3 (Problème des stations d'essence)
On dispose d'un circuit fermé sur lequel se trouvent des stations d'essence. La somme des essences contenues dans chaque station est exactement ce qu'il faut pour faire un tour complet du circuit en voiture. Montrer qu'il existe un endroit du circuit duquel on peut partir, le réservoir initialement vide, et faire le tour sans jamais tomber à cours d'essence.

Exercice 4 (Lemme de Rayney)
Soit $(x_1, ..., x_n)$ un tuple d'entiers de somme 1. Montrer qu'il existe un unique i tel que $\sum_{k=i}^{j} x_k \geq 0$ pour tout $i \leq j \leq n+i-1$ où les indices sont pris modulo n.

Exercice 5
Soient n, k des entiers avec $n > k \geq 1$. On a $2n+1$ élèves assis en cercle, dont $n+1$ filles et n garçons. Un élève S a $2k$ voisins : les k plus proches à droite et les k plus proches à gauche. Montrer qu'il existe une fille ayant k filles parmi ses voisins.

Exercice 6

Soit $n \geq 2$ un entier et $a_1, ..., a_n$ des entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs $b_1, ..., b_n$ vérifiant :
i) $a_i \leq b_i$ pour tout $i \in \{1, ..., n\}$
ii) $b_1, ..., b_n$ sont deux à deux distincts modulo n
iii) $b_1 + ... + b_n \leq n(\frac{n-1}{2} + \lfloor \frac{a_1+...+a_n}{n} \rfloor)$

Exercice 7

Soit n un entier strictement positif, et $x_1, ..., x_{2n}$ un ensemble de réels positifs de somme 4.
Montrer qu'il existe p, q des entiers avec $0 \leq q \leq n-1$ tels que $\sum_{i=1}^{q} x_{p+2i-1} \leq 1$ et $\sum_{i=q+1}^{n-1} x_{p+2i} \leq 1$, où les indices sont pris modulo $2n$.

Exercice 8

a) Un tuple $(p_1, ..., p_l)$ de 0 et de 1 est dit k-dominant si pour tout $1 \leq i \leq l$, le nombre de 1 dans $p_1, ..., p_l$ est strictement plus que k fois le nombre de 0.
On considère un tuple $(p_1, ..., p_{m+n})$ avec m fois 1 et n fois 0, avec $m \geq kn$. Montrer qu'il existe exactement $m - kn$ permutations cycliques du tuple qui sont k-dominantes.
b) Montrer que le nombre de forêts composées de s arbres t-aires sur n sommets est $\frac{s}{tn+s}\binom{tn+s}{n}$

3 Autres exercices

Exercice 9

Dans une compétition, il y a a participants et b juges, où $b \geq 3$ est un entier impair. Chaque juge donne à chaque partcipant une mention "succès" ou "échec". Soit k un entier tel que pour deux juges quelconques, leurs jugements coïncident pour au plus k participants. Montrer que $\frac{k}{a} \geq \frac{b-1}{2b}$.

Exercice 10

Soient n, k des entiers tels que $n > k^2 > 4$. Dans une grille $n \times n$, un k-groupe est un ensemble de k cases, toutes sur des lignes et colonnes différentes. Trouver le N maximal tel qu'il est possible de choisir N cases de la grille et de les colorier de sorte à ce que dans tout k-groupe inclu dans les N cases, on a à la fois deux cases de la même couleur et deux cases de couleurs différentes.

Exercice 11

On considère un $3n$-gone convexe dans le plan avec un robot placé sur chacun de ses sommets. Chaque robot émet un laser en direction d'un autre robot. À chaque coup, on peut choisir un robot et le rotater dans le sens trigonométrique jusqu'à ce que son laser pointe vers un autre robot. On dit que trois robots A, B, C forment un triangle si le laser de A pointe vers B, le laser de B vers C et le laser de C vers A. Trouver, en fonction de n, le nombre de coups minimal permettant de s'assurer de pouvoir former n triangles à partir de n'importe quelle configuration initiale.