

# TN B : Modulos

Janvier 2024

## Exercice 1

- Trouver tous les nombres premiers  $p$  tels que  $p + 1$  est aussi premier.
- Trouver tous les nombres premiers  $p$  tels que  $p + 2$  et  $p + 4$  sont aussi premiers.

## Exercice 2

Soit  $n$  un entier naturel et  $A$  un ensemble de  $n + 1$  entiers. Montrer qu'il existe  $a, b$  appartenant à  $A$  tels que  $p \mid a - b$ .

## Exercice 3

Résoudre  $a^2 + b^2 = 3c^2$  pour  $a, b, c$  des entiers.

## Exercice 4

Résoudre  $2^x + 3^y = z^2$  pour  $x, y, z$  des entiers naturels.

## Exercice 5

Soient  $x, y$  des entiers. Montrer que pour tout  $a \in \{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ , il existe un unique  $b$  dans ce même ensemble tel que  $2x + 3y$  est divisible par 7 si et seulement si  $ax + by$  est divisible par 7.

## Exercice 6

Montrer que  $p$  divise  $(p - 1)! + 1$  si et seulement si  $p$  est premier.

## Exercice 7

Soit  $p > 3$  un nombre premier. Montrer que  $p^2$  divise le numérateur de  $1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$  écrit sous forme de fraction irréductible.

## Exercice 8

Résoudre  $a^5 + b^5 + 5 = c^{10}$  dans les entiers.

## Exercice 9

Trouver le chiffre des unités de  $7^{7^7}$  en base 10.

## Exercice 10

Trouver le pgcd des entiers de la forme  $n^7 - n$ .

## Exercice 11

Montrer que pour tout  $p$  premier, il existe  $n$  naturel tel que  $p \mid 2^n + 3^n + 6^n - 1$ .