

TD groupe A modulus dimanche 7 janvier 2024

January 4, 2024

1 Rappel de divisibilités

Exercice 1: Trouver tous les entiers positifs (p, n) tels que p soit premier et $p|n^2 - 4$

Exercice 2: Trouver tous les couples d'entiers (x, y) solutions de l'équation $x^2 = 7 + y^2$

Exercice 3: Déterminer tous les couples d'entiers (n, p) strictement positifs ou p est un nombre premier et tels que $n + p$ soit une puissance de n .

Exercice 4: Trouver tous les entiers n tel que $\frac{2n^3 + 2n + 3}{n + 2}$ est entier.

Exercice 5: Montrer que pour $p \geq 5$ premier, $360|p^5 - 5p^3 + 4p$

Exercice 6: Montrer que pour tout entier $y > 1$, $y - 1$ divise $y^{y^2 - y + 2} - 4y + y^{2021} + 3y^2$

Exercice 7: Trouvez tous les entiers positifs ou nuls x, y tels que : $2^x = y^2 + y + 1$

2 Modulos

Exercice 1: Trouver tout les entiers a tels que $5|a^3 + 3a + 1$

Exercice 2: Trouver tous les entiers a, b tels que $4|a^2 + b^2 + 1$

Exercice 3: Démontrer les critères de divisibilité pour les entier 9, 11.

Exercice 4: Calculer l'inverse de 380 modulo 144. Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que $7|a^2 + b^2 + c^2$. Montrer que $7|a^4 + b^4 + c^4$.

Exercice 5: Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$?

Exercice 6: Trouver tous les triplets d'entiers positifs (x, y, n) tels que : $x^2 + y^2 + 41 = 2^n$.

Exercice 7: Trouver les entiers a et b tels que : $3a^2 = b^2 + 1$

Exercice 8: Existe-t-il un entier $n \geq 0$ tel que $6^n + 19$ est premier ?

Exercice 9: Soit a_1, a_2, \dots la suite d'entiers telle que $a_1 = 1$ et, pour tout entier $n \geq 1$,

$$a_{n+1} = a_n^2 + a_n + 1$$

Démontrer, pour tout entier $n \geq 1$, que $a_n^2 + 1$ divise $a_{n+1}^2 + 1$.

3 Pour les plus rapides

Exercice 1: Trouver tous les x, y, z entiers tels que $x^2 + y^2 = 3z^2$

Exercice 2: Trouvez tous les (x, y) tels que $x^4 + 6 = y^3$

Exercice 3: Soit a, b, n tels que $a \equiv b[n]$. Montrer que $a^n \equiv b^n[n^2]$.

Exercice 4: Déterminer tous les entiers naturels a, b, c tels que $a! + 5^b = 7^c$

Exercice 5: Trouver tous les entiers n tels que $2^n + 3$ est un carré parfait. Même question avec $2^n + 1$.

Exercice 6: Trouver tous les quadruplets d'entiers positifs (x, y, z, n) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2^n$

Exercice 7: Déterminer toutes les x, y entiers positifs solution de $x^2 - 2y! = 2021$.