

# I. Groupe $\mathcal{D}$

## 1 Arithmétique

### 1 Equations diophantiennes

Entrée :

#### Exercice 1

Résoudre des les entiers naturels  $(x + y)^m = x^k + y^k$

#### Exercice 2

Soit  $p$  un nombre premier. Résoudre dans les entiers naturels  $a^p - 1 = p^k$

#### Exercice 3

Trouver tous les entiers naturels non nuls  $x, y$  et  $z$  tels que  $(1 + \frac{1}{x})(1 + \frac{1}{y})(1 + \frac{1}{z}) = 2$

Plat :

#### Exercice 4

Résoudre dans les entiers naturels  $x^2 + y^2 = 2z^2$

#### Exercice 5

Résoudre dans les entiers naturels  $7^x = 3^y + 4$

#### Exercice 6

Résoudre dans les entiers  $x^2 + y^3 = 7$

Dessert :

#### Exercice 7

Montrer que le système suivant n'a pas de solution dans les entiers.  $x^6 + x^3 + x^3y + y = 127^{157}$   
 $x^3 + x^3y + y^2 + y + z^9 = 157^{147}$

#### Exercice 8

( Sophie Germain ) Soit  $p$  un nombre premier tel que  $q = 2p + 1$ . Montrer qu'il n'existe pas de triplet  $(x, y, z) \in \mathbb{Z}^{\neq}$  tel que :  $x^p + y^p = z^p$

#### Exercice 9

Trouver tous les triplets  $(x, y, z) \in \mathbb{N}^{\neq 3}$  tels que  $x \leq y \leq z$  et :  $x^3(y^3 + z^3) = 2012(xyz + 2)$