1 Exercices

Problème 1. (BXMO 2016) Soit n un entier strictement positif. On suppose que ses diviseurs positifs peuvent être répartis par paires de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous distincts et qu'aucun d'eux ne divise n.

Problème 2. (Olympiade Francophone 2020) Soit $\mathbb{N}_{\geq 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}_{\geq 1}$ et soit m un entier. On suppose que pour tout sous-ensemble fini non vide S de $\mathbb{N}_{\geq 1}$, le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier.

Montrer que parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, seul un nombre fini possède moins de m facteurs premiers distincts.

Problème 3. (IMO SL 2017 N2) Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Chacun à leur tour en commençant par Alice, ils choisissent un indice i dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ qui n'a pas encore été choisi précédemment par l'un des deux joueurs, puis choisissent un nombre a_i de $\{0, \ldots, 9\}$. Lorsque tous les indices sont choisis, on considère le nombre

$$M = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \ldots + a_{p-1} \cdot 10^{p-1}.$$

Alice gagne si M est divisible par p, Bob gagne sinon. Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Problème 4. (USAMO 2018 P4) Soit p un nombre premier et soient $a_1, \ldots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$

donnent au moins $\frac{1}{2}p$ restes distincts modulo p.

Problème 5. (IMO SL 2009 N2) Un entier strictement positif N est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ sont jolis.
b) Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$

Problème 6. (RMM 2015 P1) Existe-t-il une suite infinie $(a_n)_{n \geqslant 0}$ d'entiers strictement positifs telle que a_m et a_n sont premiers entre eux si et seulement si $|m - n| = 1$.

Problème 7. (IMO SL 2020 N2) Pour tout nombre premier, il existe un royaume $p-$Landia composé de p îles numérotées de 1 à p. Deux îles distinctes m et n sont reliées par un pont si et seulement si p divise le produit $(m^2 - n + 1)(n^2 - m + 1)$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels qu'il existe deux îles telles qu'on ne peut aller de l'une à l'autre en passant par des ponts.

Problème 8. (USAMO 2021 P4) Un ensemble fini S d'entiers strictement positifs possède la propriété que pour tout entier $s \in S$ et tout diviseur d de s, il existe un unique élément t de S tel que $\gcd(s, t) = d$. Déterminer toutes les valeurs que peut prendre $|S|$.

2 Solutions

Problème 1. (BXMO 2016) Soit n un entier strictement positif. On suppose que ses diviseurs positifs peuvent être répartis par paires de telle sorte que la somme de chaque paire est un nombre premier. Prouver que ces nombres premiers sont tous distincts et qu'aucun d'eux ne divise n.

Solution 1. Examinons l'hypothèse donnée. Etant donnée un couple (d_1, d_2) de dvisieurs, si ces diviseurs admettent un diviseur premier commun p, ce diviseur divise également leur somme, qui n'est donc pas un nombre premier. En conclusion, dans un couple (d_1, d_2), les nombres d_1 et d_2 sont premiers entre eux. En particulier, $d_1 d_2 \leqslant n$.

Or, le produit de tous les diviseurs de n vaut $n^{d(n)/2}$, avec $d()$ le nombre de diviseurs de n, et il y a $d(n)/2$ paires de diviseurs et le produit de chaque paire vaut au plus n. Donc le produit des produits de chaque n vaut au plus $n^{d(n)/2}$. Comme ce produit est effectivement égal à $n^{d(n)/2}$ donc il y a égalité dans chaque paire. En conclusion, dans chaque paire, $d_1d_2 = n$. Autrement dit, les paires de diviseurs sont de la forme $\left(d, \frac{n}{d}\right)$.

A présent, on résoud le problème. Soit d un diviseur de n et $p = d + \frac{n}{d}$ le nombre premier somme des éléments de la paire $\left(d, \frac{n}{d}\right)$. Si p divise n, p divise d ou n/d et est donc strictement inférieur à la somme $d + \frac{n}{d} = p$ ce qui est absurde. Ainsi, les nombres premiers des diverses paires ne divisent pas n.

On montre que les nombres premiers sont distincts. En effet, soient d_1 et d_2 deux diviseurs, il s'agit de montrer que $d_1 + \frac{n}{d_1} \neq d_2 + \frac{n}{d_2}$. Mais l'égalité est équivalente à $(n - d_1d_2)(d_1 - d_2) = 0$. Or les éléments d_1 et d_2 sont supposés être distincts et dans des paires distinctes. Ainsi, on ne peut ni avoir $d_2 = d_1$ ni avoir $d_2 = \frac{n}{d_1}$. On a donc le résultat désiré.

Problème 2. (Olympiade Francophone 2020) Soit $\mathbb{N}_{\geq 1}$ l'ensemble des entiers strictement positifs. Soit $a_1, a_2, a_3, \ldots$ une suite d'entiers de $\mathbb{N}_{\geq 1}$ et soit m un entier. On suppose que pour tout sous-ensemble fini non vide S de $\mathbb{N}_{\geq 1}$, le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier.

Montrer que parmi les entiers $a_1, a_2, \ldots$, seul un nombre fini possède moins de m facteurs premiers distincts.

Solution 2. Nous allons montrer qu'étant donné un nombre premier p, il existe un entier $N \geq 1$ tel que p divise tous les termes a_k pour $k \geq N$, ce qui nous donnera le résultat voulu.

On suppose par l'absurde qu'il existe une infinité d'entiers a_k qui ne sont pas divisibles par p. Alors d'après le principe des tiroirs, il en existe une infinité qui possède le même reste modulo p. On dispose donc de $p-1$ indices $i_1, \ldots i_{p-1}$ tels que $a_{i_1}, \ldots a_{i_{p-1}}$ possède le même reste modulo p, on note a ce reste. Puisqu'on en dispose d'une infinité, on peut choisir $a_{i_{p-1}}$ supérieur strictement à p. En prenant $S = \{i_1, \ldots, i_{p-1}\}$, on obtient que le nombre

$$-1 + \prod_{k \in S} a_k$$

est un nombre premier. Or d'après notre choix de $a_{i_{p-1}}$, ce nombre est strictement supérieur à p et d'après le théorème de Fermat :

$$\prod_{k \in S} a_k \equiv a^{p-1} \equiv 1 \mod p$$

donc le nombre $-1 + \prod_{k \in S} a_k$ est divisible par p. Comme il est strictement plus grand que p, ce n'est pas un nombre premier ce qui donne la contradiction.

Problème 3. (IMO SL 2017 N2) Soit $p \geqslant 2$ un nombre premier. Alice et Bob jouent au jeu suivant. Chacun à leur tour en commençant par Alice, ils choisissent un indice i dans $\{0, 1, \ldots, p-1\}$ qui n'a pas encore été choisi précédemment par l'un des deux joueurs, puis choisissent un nombre a_i de $\{0, \ldots, 9\}$. Lorsque tous les indices sont choisis, on considère le nombre

$$M = a_0 \cdot 10^0 + a_1 \cdot 10^1 + \ldots + a_{p-1} \cdot 10^{p-1}.$$

Alice gagne si M est divisible par p, Bob gagne sinon. Montrer qu'Alice dispose d'une stratégie gagnante.

Solution 3. On met de côté les cas $p = 2$ et $p = 5$, pour lesquels il suffit de choisir $a_0 = 0$ pour Alice. Posons $d = \dfrac{p-1}{2}$.

Dans la suite, on cherche à mettre en place une stratégie miroir. Alice commence pour cela par choisir $i = p-1$ et $a_{p-1} = 0$. Puis par la suite, on considère les paires d'indices $(i, d+i)$, qui partitionnent l'ensemble des indices restant. On doit donc aider Alice à bien choisir a_i ou a_{d+i} lorsque Bob a choisi l'un de ces indices. On distingue alors deux cas :

a) $10^d = -1 \mod p$.

b) $10^d = 1 \mod p$.

A noter qu'il n'y a pas d'autre cas car le petit théorème de Fermat indique que $p \mid 10^{2d} - 1 = (10^d - 1)(10^d + 1)$.

Dans le premier cas : si Bob choisit l'indice i et le chiffre a_i, alors Alice choisit l'indice $i + d$ et le chiffre $a_{i+d} = a_i$, de sorte que $a_{i+d}10^{i+d} + a_i 10^i = a_i 10^i(10^d + 1)$ est bien divisible par p (de même, si Bob joue $(i + d)$ et a_{i+d}, Alice joue i et $a_i = a_{i+d}$. A la fin du jeu, M est bien divisible par p comme somme d'entiers divisibles par p.

Dans le second cas, Alice choisit a_i (ou a_{i+d}) de sorte que $a_i + a_{i+d} = 9$. Alors $a_{i+d}10^{i+d} + a_i 10^i \equiv 9 \cdot 10^i \mod p$, de sorte que

$$M \equiv \sum_{i=0}^{d-1} 9 \cdot 10^i = 10^d - 1 = 0 \mod p.$$

Dans tous les cas, Alice gagne.

Problème 4. (USAMO 2018 P4) Soit p un nombre premier et soient $a_1, \ldots, a_p$ des entiers. Montrer qu'il existe un entier k tel que les nombres

$$a_1 + k, a_2 + 2k, \ldots, a_p + pk$$

donnent au moins $\frac{1}{2}p$ restes distincts modulo p.

Solution 4. La première chose à faire est de regarder à quelle condition deux nombres $a_j + jk$ et $a_i + ik$ donnent le même reste modulo p. Cette condition se réécrit

$$a_j + jk \equiv a_i + ik \mod p$$

$$k \equiv -\frac{a_i - a_j}{i - j} \mod p$$

On souhaite donc trouver un ensemble S de $\frac{p+1}{2}$ entiers $i_1, \ldots i_{\frac{p+1}{2}}$ tels que pour tous les couples d'indices i, j dans cet ensemble $k \neq -\frac{a_i - a_j}{i-j} \mod p$.

On dispose de $\binom{p}{2} = \frac{p(p-1)}{2}$ couples $\{i, j\}$ donc d'après le principe des tiroirs, il existe un élément k de $\{0, \ldots, p-1\}$ tel qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ couples satisfaisant $k \neq -\frac{a_i - a_j}{i-j} \mod p$.

On suppose dès lors, par l'absurde, qu'il y a au plus $\frac{p-1}{2}$ restes distincts modulo p avec l'entier k obtenu. On note $c_1, \ldots, c_r$ ces restes distincts, et r_i le nombre d'élements de $\{a_1, \ldots, a_p\}$ tels que $a_l + lk = c_i \mod p$.

On obtient pour chaque i $\binom{a_i}{2}$ couples $\{s, t\}$ tels que $k \equiv -\frac{a_s - a_t}{s-t} \mod p$.

On obtient en tout $\binom{a_1}{2} + \ldots + \binom{a_p}{2}$ couples satisfaisant la congruence ci-dessus.

La fonction $x \mapsto \frac{x(x-1)}{2}$ est convexe donc d'après l'inégalité de Jensen,

$$\binom{a_1}{2} + \ldots + \binom{a_p}{2} \geqslant \frac{p(\frac{p}{r} - 1)}{2} \geqslant \frac{p(\frac{2p}{p-1} - 1)}{2} > \frac{p-1}{2}$$

ce qui est la contradiction voulue.

Problème 5. (IMO SL 2009 N2) Un entier strictement positif N est dit joli si $N = 1$ ou si N s'écrit comme un produit d'un nombre pair de facteurs premiers (pas forcément distincts). Pour toute paire (a, b) d'entiers strictement positifs, on pose $P(x) = (x + a)(x + b)$.

a) Montrer qu'il existe des entiers strictement positifs distincts (a, b) tels que $P(1), P(2), \ldots, P(50)$ sont jolis.

b) Montrer que si $P(n)$ est joli pour tout entier $n > 0$, alors $a = b$

Solution 5. a) On désire trouver des entiers a et b tels que le nombre de facteurs premiers des entiers $x+a$ et $x + b$ ont la même parité. Cela revient à trouver deux suites de 50 entiers consécutifs $a + 1, \ldots, a + 50$ et $b + 1, \ldots, b + 50$ tels que le nombre de facteurs premiers de $a + 1$ et $b + 1$ aient la même parité, le nombre de facteurs premiers de $a + 2$ et $b + 2$ aient la même parité, etc...

Si on pose $f(x) = 0$ si le nombre de facteurs premiers de x est pair et $f(x) = 1$ s'il est impair, on constate qu'il n'y a que $2^5 0$ suites de 0 ou 1 possibles pour la suite $f(a + 1), \ldots, f(a + 50)$.

Ainsi, parmi les suites $(f(1),\dots,f(50))$; $(f(51),\dots,f(100))$; ... ; $(f(2^{50}+1),\dots f(2^{50}+50))$, il y a deux suites égales. On dispose donc de deux entiers a et b tels que $(f(a+1),\dots f(a+50))$ et $(f(b+1),\dots,f(b+50))$ soient égales. Les entiers a et b conviennent donc.

b) On peut se convaincre, à la lumière de la question précédente, que la fonction $f(x)$ introduite à la question précédente n'est as périodique à partir d'un certain rang et donc que les entiers a et b ne peuvent pas être distincts, mais on propose un raisonnement rigoureux :

On suppose par l'absurde que $a \neq b$. On observe que $P(k(b-a)-a) = k(k+1)(b-a)^2$ pour k un entier suffisamment grand pour que $k(b-a)-a$ soit strictement positif. Le nombre $P(k(b-a)-a)$ admet cond un nombre pair de facteurs premiers si et seulement si $k(k+1)$ admet un nombre pair de facteurs premiers. Comme par l'absurde c'est le cas pour tout entier k suffisamment grand, cela implique que $f(k) = f(k+1)$ pour tout entier k suffisamment grand et donc que la fonction f soit constante à partir d'un certain rang. Mais pour tout nombre premier p, $f(p) = 1$ et pour tout entier k, $f(k^2) = 0$. La fonction n'est donc pas constante donc on a obtenu la contradiction désirée.

Problème 6. (RMM 2015 P1) Existe-t-il une suite infinie $(a_n)_{n\geqslant 0}$ d'entiers strictement positifs telle que a_m et a_n sont premiers entre eux si et seulement si $|m-n| = 1$.

Solution 6. Encore une fois par un algo glouton, mais qui nécessite de la préparation en amont. Pour se simplifier la vie, on va choisir nos termes comme des produits de facteurs premiers distincts (en gros, les valuations valent toutes 1).

Ici aussi, on va raisonner sur deux étages. On se donne deux familles (p) et (q) de nombres premiers, et on cherche une suite avec cette tête :

$$\begin{array}{ccccccc} \prod p_i & & \prod p_i & & \prod p_i & & \prod p_i \\ & \prod q_i & & \prod q_i & & \prod q_i & \end{array}$$

Avec cette construction, malheureusement, deux membres de duex étages différents sont premiers entre eux. Il faudrait donc multiplier les membres du premier étage par un facteur q, et inversement. Comme suit

$$\begin{array}{ccccccc} q_1\prod p_i & & q_2\prod p_i & & q_3\prod p_i & & q_4\prod p_i \\ & p_1\prod q_i & & p_2\prod q_i & & p_3\prod q_i & \end{array}$$

Le problème, c'est qu'alors deux nombres consécutifs ne sont plus forcément premiers entre eux. On pourrait ajuster les indices, mais en essayant on voit qu'il va falloir organiser un "roulement" des facteurs p et des facteurs q présents à chaque etage. Ceci motive la construction suivante :

$$\begin{array}{cccc} c_{n+1}b_{n+1}\prod^n a_k b_k & & c_{n+2}b_{n+2}\prod^{n+1} a_k b_k & \\ & d_{n+1}a_{n+1}\prod^n c_k d_k & & d_{n+2}a_{n+2}\prod^{n+1} c_k d_k \end{array}$$

Problème 7. (IMO SL 2020 N2) Pour tout nombre premier, il existe un royaume $p-$Landia composé de p îles numérotées de 1 à p. Deux îles distinctes m et n sont reliées par un pont si et seulement si p divise le produit $(m^2-n+1)(n^2-m+1)$. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers p tels qu'il existe deux îles telles qu'on ne peut aller de l'une à l'autre en passant par des ponts.

Solution 7. Soit p un nombre premier. On pose $f\colon \mathbb{Z}/p\mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ la fonction définie par $f(x) = x^2+1$.

Lorsque deux îles n et m sont reliées, l'une des deux égalités $n = f(m)$ ou $m = f(n)$ est nécessairement vérifiée, de sorte que m et n appartiennent à une même orbite de f. On dit alors que deux résidus u et v modulo p sont *reliés* s'il existe deux entiers $k \geqslant 0$ et $\ell \geqslant 0$ tels que $f^k(u) = f^\ell(v)$. Il apparaît directement que, si l'on peut aller d'une île n à une autre m par un système de ponts, ces deux résidus sont reliés.

On cherche donc un nombre premier p tel qu'il existe deux résidus a et b modulo p qui ne sont pas reliés l'un à l'autre. Pour ce faire, le plus simple est que a et b soient des points fixes de f, c'est-à-dire que $(X-a)(X-b) \equiv X^2-X+1 \pmod p$.

Or, si X^2-X+1 admet une racine a modulo p, l'autre racine vaut $1/a$ (car a est non nul), ou encore $1-a$ (relations de Viète). Ces deux racines ne sont donc égales que si $1-a \equiv a \equiv 1/a \pmod p$, c'est-à-dire si $p \neq 2$ et $1/2 \equiv a \equiv \pm 1 \pmod p$. Or, on sait que $1/2 \equiv \pm 1 \pmod p$ si et seulement si $p = 3$.

Par conséquent, il suffit de choisir des nombres premiers différents de 3 qui divisent un nombre de la forme n^2-n+1. En pratique, pour vérifier qu'il y en a bien une infinité, il suffit de définir p comme le plus petit facteur premier du nombre $S_m = (m!)^2 - m! + 1$, où m est un entier plus grand que les nombres premiers construits précédemment. En effet, on sait que $S_m \geqslant 2$ et que S_m est premier avec $m!$. Ainsi, le plus petit facteur premier de S_m existe bien, et il est premier avec $m!$, donc strictement supérieur à m.

Problème 8. (USAMO 2021 P4) Un ensemble fini S d'entiers strictement positifs possède la propriété que pour tout entier $s \in S$ et tout diviseur d de s, il existe un unique élément t de S tel que $\gcd(s,t) = d$. Déterminer toutes les valeurs que peut prendre $|S|$.

Solution 8. On suppose que le problème est intéressant et que S est non vide et contient au moins deux éléments.

Notons que 1 n'est pas dans S car il est premier avec tous les autres nombres de S (y compris lui-même) donc on n'a pas d'unicité.

Ensuite, on remarque que $|S| \geqslant d(a)$ pour tout a. Maintenant si l'inégalité est stricte, par principe des tirois on a deux éléments t et s vérifiant $\gcd(s,a) = \gcd(t,a)$. Donc $|S| = d(a)$ pour tout a.

Maintenant on regarde $p^\beta \mid a$. La condition implique alors qu'il y a exactement $d(a/p^\beta)$ éléments de S non divisibles par p. Cela implique que $\beta/(\beta+1)$ des éléments de S sont divisibles par p. Comme on doit pouvoir mettre par pair les éléments premiers entre eux, on a $\beta/(\beta+1) \leqslant 1/2$, donc $\beta \leqslant 1$. On déduit que $\beta = 1$ et $d(a) = 2^k$.

Réciproquement, si $|S| = 2^k$, on prend $a_1, \ldots, a_k$ des nombres premiers, et $b_1 \ldots, b_k$ d'autres nombres premiers distincts. On prend $S = \{c_1 \ldots c_n\}$ avec $c_i = a_i$ ou $c_i = b_i$.