PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 3 : ARITHMÉTIQUE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 11 FÉVRIER 2024

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient a, b deux entiers relatifs. Montrer que, si ni a, ni b n'est multiple de 3, alors $a^4 - b^2$ est multiple de 3.

Exercice 2. Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 2$. On note d le plus grand diviseur de n différent de n. On suppose que $d > 1$. Démontrer que $n + d$ n'est pas une puissance de 2.

Exercice 3. Déterminer tous les entiers $n \geqslant 0$ tels que $2023 + n!$ est un carré parfait.

Exercice 4. Déterminer tous les triplets (p, q, r) de nombres premiers tels que $p + q^2 = r^4$.

Exercice 5. Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) d'entiers positifs avec a, b, c strictement positifs tels que

$$\begin{aligned} \text{PPCM}(b, c) &= a + d \\ \text{PPCM}(c, a) &= b + d \\ \text{PPCM}(a, b) &= c + d \end{aligned}$$

Exercice 6. Un entier $n \geqslant 2$ est écrit au tableau. Chaque jour, quelqu'un choisit p un diviseur premier de l'entier écrit n au tableau, efface celui-ci et écrit $n + \frac{n}{p}$ à la place. Montrer que $p = 3$ est choisi une infinité de fois.

Exercice 7. Soit k un entier premier avec n vérifiant $1 \leqslant k < n$. Augustin colorie les entiers de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ avec autant de couleur qu'il le souhaite. Cependant, si j est un entier vérifiant $1 \leqslant j \leqslant n - 1$, les entiers j et $n - j$ sont de la même couleur. De plus, si i est un entier vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $i \neq k$, les entiers i et $|i - k|$ sont de la même couleur.
Démontrer que Augustin a colorié tous les entiers de la même couleur.

Exercice 8. Déterminer tous les couples (a, p) d'entiers strictement positifs, avec p premier, tels que pour tout couple (m, n) d'entiers strictement positifs, le reste de la division euclidienne de a^{2^n} par p^n est non nul, et est le même que celui de a^{2^m} par p^m.

Exercice 9. Déterminer tous les quadruplets (x, y, z, t) d'entiers strictement positifs tels que $2^x 3^y + 5^z = 7^t$.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient a, b deux entiers relatifs. Montrer que, si ni a, ni b n'est multiple de 3, alors $a^4 - b^2$ est multiple de 3.

Exercice 11. Soit n un entier vérifiant $n \geqslant 2$. On note d le plus grand diviseur de n différent de n. On suppose que $d > 1$. Démontrer que $n + d$ n'est pas une puissance de 2.

Exercice 12. Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) d'entiers positifs avec a, b, c strictement positifs tels que

$$\begin{aligned} \text{PPCM}(b, c) &= a + d \\ \text{PPCM}(c, a) &= b + d \\ \text{PPCM}(a, b) &= c + d \end{aligned}$$

Exercice 13. Un entier $n \geqslant 2$ est écrit au tableau. Chaque jour, quelqu'un choisit p un diviseur premier de l'entier écrit n au tableau, efface celui-ci et écrit $n + \frac{n}{p}$ à la place. Montrer que $p = 3$ est choisi une infinité de fois.

Exercice 14. Soit k un entier premier avec n vérifiant $1 \leqslant k < n$. Augustin colorie les entiers de $\{1, 2, \ldots, n-1\}$ avec autant de couleur qu'il le souhaite. Cependant, si j est un entier vérifiant $1 \leqslant j \leqslant n-1$, les entiers j et $n - j$ sont de la même couleur. De plus, si i est un entier vérifiant $1 \leqslant i \leqslant n$ et $i \neq k$, les entiers i et $|i - k|$ sont de la même couleur.
Démontrer que Augustin a colorié tous les entiers de la même couleur.

Exercice 15. Soit $(P_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite de polynômes à coefficients entiers. On suppose qu'il existe un polynôme Q unitaire à coefficient entier tel que $P_{n+1} - P_n = Q$ pour tout $n \geqslant 0$. On suppose de plus que pour tout $n \geqslant 0$, P_n a une racine entière. Montrer qu'on est dans un des deux cas suivants :
- P_0 et Q ont une racine entière en commun
- Il existe un polynôme à coefficients entiers R tel que $P_0 = RQ$ et le degré de R est 1.

Exercice 16. Soit p un nombre premier et n un entier vérifiant $n \geqslant 2$.
- A quelle condition existe-t-il $n + 1$ entiers (pas forcément distincts) tels que, pour tout choix de n entiers parmi les $n + 1$, leur somme est une puissance de p ?
- A quelle condition existe-t-il $n + 1$ entiers strictement positifs (pas forcément distincts) tels que, pour tout choix de n entiers parmi les $n + 1$, leur somme est une puissance de p ?

Exercice 17. Soient a, b deux entiers tels que $\text{pgcd}(a, b)$ a au moins deux facteurs premiers distincts. Soit $S = \{x \in \mathbb{N} | x \equiv a[b]\}$. Un élément de S est dit irréductible s'il ne peut pas s'écrire comme un produit d'au moins deux éléments de S (pas forcément distincts).
Montrer qu'il existe $N > 0$ tel que tout élément de S s'écrit comme produit d'au plus N éléments irréductibles de S (pas forcément distincts).

Exercice 18. Pour tout entier $k \geqslant 1$, on note $p(k)$ le plus petit nombre premier ne divisant pas k. Soit $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ une suite telle que $a_0 \in \mathbb{N}^*$ et pour tout $n \geqslant 0$, a_{n+1} est le plus petit entier strictement positif différent de $a_0, \ldots, a_n$ tel que $a_n^{a_{n+1}} - 1$ est divisible par $p(a_n)$. Démontrer que tout entier strictement positif apparaît une unique fois dans la suite $(a_n)_{n \in \mathbb{N}}$.