Cours en ligne Équations diophantiennes
10/12/2023

Le cours reprend le TD donné au stage de Valbonne 2021 au groupe C (Modulo bashing).

Notions utiles dans les équations diophantiennes :

- Valuation p-adique et décomposition en facteurs premiers
- Réduction de l'équation à des modulos $\rightarrow$ théorème d'Euler-Fermat
- Utilisation des inégalités $\rightarrow a|b \Rightarrow b = 0$ ou $|a| \leq |b|$
  $\rightarrow$ pour les grands n, on a : $n^k < a^n < n!$ (avec $k > 0$ et $a > 1$)

Exercices

Exercice 1
Déterminer tous les entiers strictement positifs x et n tels que

$$1! + 2! + \cdots + n! = x^4$$

Exercice 2
Déterminer tous les entiers naturels n, m tels que

$$n^3 - 3n^2 + n + 2 = 5^m$$

Exercice 3
Trouver tous les couples d'entiers naturels (x, y) tels que

$$y^2 - x^2 + 7y + 6 = 0$$

Exercice 4
Déterminer tous les couples d'entiers (x, y) tels que :

$$x^2 = y^5 + 7$$

Exercice 5
Déterminer tous les nombres premiers p et q tels que :

$$p|5^q + 1 \text{ et } q|5^p + 1$$

Exercice 6
Trouver tous les entiers naturels x, y, z tels que

$$x^2 + y^2 = 3 \cdot 2023^z + 77$$

Exercice 7
Déterminer tous les entiers naturels a et b tels que

$$|3^a - 2^b| = 1$$

Exercice 8
Montrer que le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{7}$ ne contient aucun point à coordonnées rationnelles.

Exercice 9
Déterminer tous les entiers naturels a, b tels que $2^a 3^b + 9$ soit un carré parfait.

Exercice 10 (P4 IMO 2019)
Déterminer tous les entiers n et k tels que

$$(2^n - 2^0)(2^n - 2^1)(2^n - 2^2) \cdots (2^n - 2^{n-1}) = k!$$

Solution de l'exercice 1
On regarde modulo 5 le terme de gauche, on suppose que $n \geq 4$. À partir de $5!$ les factoriels sont divisibles par 5. On a alors

$$1! + 2! + \cdots n! \equiv 1 + 2 + 1 + 4 \equiv 3[5]$$

Or une puissance quatrième est congrue à 0 ou 1 modulo 5 par le théorème de Fermat. Ainsi on a $n \leq 3$, on a pour $n = 2$ et $n = 3$ le même problème. On obtient finalement l'unique solution $(x, n) = (1, 1)$.

Solution de l'exercice 2
Une solution est rédigée dans le poly du stage de Valbonne 2021 groupe C 1.4 (Modulo Bashing), exercice 5.

Solution de l'exercice 3
Autrement dit, on cherche un carré égal $y^2 + 7y + 6$. On peut déjà remarquer que $y^2 + 7y + 6 < (y+4)^2 = y^2 + 8y + 16$. Par ailleurs pour $y > 3$:

$$y^2 + 7y + 6 > y^2 + 6y + 9 = (y+3)^2$$

Ainsi, on a pour $y > 3$, $y^2 + 7y + 6$ compris strictement entre les deux carrés consécutifs $(y+3)^2$ et $(y+4)^2$.

Pour $y = 0, 1, 2, 3$, on a $y^2 + 7y + 6 = 6, 14, 24, 36$, ainsi, la seule solution est $(y, x) = (1, 1)$.

Solution de l'exercice 4
On observe qu'on a des puissances 2e et 5e. Le théorème de Fermat dit que la puissance $p - 1$ est intéressante. Ici, on se place donc modulo $2 \times 5 + 1 = 11$ (qui est bien premier).
On peut alors faire la table de modulos :

n	1	2	3	4	5	-5	-4	-3	-2	-1
n^2	1	4	-2	5	3	3	5	-2	4	1

Pour y^5, on peut faire le calcul ou remarquer que par Fermat, on a (pour y premier avec 11)

$$11|\left(y^5\right)^2 - 1 = \left(y^5 - 1\right)\left(y^5 + 1\right)$$

Ainsi par le lemme d'Euclide y^5 est congru à 1 ou -1 modulo 11. On a donc finalement, $y^5 + 7$ congru à $-5, -4$ ou -3 modulo 11.

Solution de l'exercice 5
On se donne une solution (p, q) et on suppose $p \leq q$. Alors, $5^p \equiv -1[q]$ et donc $5^{2p} \equiv 1[q]$. Cela signifie que l'ordre ω de 5 modulo q divise $2p$.

— Si $\omega = 1$, on a $5 \equiv 1[q]$, donc $q = 2$. Ainsi, $p|5^2 + 1 = 26$. Ainsi, $p = 2, 13$.
— Si $\omega = 2$, on a $q|24$ et $q \neq |4$, donc $q = 3$. On a alors $p|126$, ainsi, $p = 2, 3, 7$, comme $3|5^p + 1$, on $p = 3, 7$.
— Si $\omega = p$ ou $2p$, on a $p|q - 1$ par le théorème de Fermat. Ainsi, $p \leq q - 1$, mais comme on a supposé, $p \geqslant q$, c'est exclu.

On vérifie aisément que toutes ces solutions conviennent ainsi que leur permutations.

Solution de l'exercice 6
On remarque $2023 = 7 \cdot 17^2$. On suppose $z \geqslant 1$, on a alors que le terme de droite est divisible par 7. En faisant une table de modulo (que je n'écris pas), on observe que $x^2 + y^2$ est congru à 0 modulo 7 uniquement lorsque x et y sont divisibles par 7. On écrit al :ors $x = 7a$ et $y = 7b$. L'équation devient :

$$7(a^2 + b^2) = 11 + 3 \cdot 289 \cdot 2023^{z-1}$$

Pour $z > 1$, 7 divise le membre de gauche et 2023^{z-1} et donc divise 11, c'est absurde.

Pour $z = 1$, on a pour le membre de droite, $11 + 3 \cdot 289 \equiv 3[7]$. C'est aussi impossible.

Pour $z = 0$, on a $x^2 + y^2 = 80$. En particulier, $x, y < 9$ et l'un des deux est supérieur strictement à 6. On trouve alors les solutions $\{(8, 4), (4, 8)\}$.

Solution de l'exercice 7
Une solution est rédigée dans le poly du stage de Valbonne 2021 groupe C 1.4 (Modulo Bashing), exercice 7.

Solution de l'exercice 8
Solution donnée en cours

Solution de l'exercice 9
Une solution est rédigée dans le poly du stage de Valbonne 2021 groupe C 1.4 (Modulo Bashing), exercice 10.

Solution de l'exercice 10
Une solution est rédigée dans le poly du stage de Valbonne 2022 groupe C 1.5 (Encadrements en arithmétique), exercice 10.