PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

Envoi 2 : Algèbre

À renvoyer au plus tard le 6 Janvier 2024

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que

$$(x^2+x+1)(y^2+y+1) \geqslant 9xy.$$

Quels sont les cas d'égalité ?

<u>*Solution de l'exercice 1*</u> On applique l'inégalité arithmético-géométrique pour avoir

$$x^2+x+1 \geqslant 3\sqrt[3]{x^3} = 3x$$

$$y^2+y+1 \geqslant 3\sqrt[3]{y^3} = 3y.$$

En multipliant ces deux inégalités, qui sont à termes positifs, on obtient l'inégalité de l'énoncé. Comme x^2+x+1 et y^2+y+1 sont strictement positifs, on a égalité lorsque l'on a égalité dans les deux inégalités arithmético-géométriques. Mais ceci arrive lorsque $x^2 = x = 1$ et $y^2 = y = 1$, et on a donc égalité pour $x = y = 1$.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> De manière générale, l'exercice a été très bien résolu. Plusieurs personnes oublient de faire le cas d'égalité.

Exercice 2. Soient a et b deux réels. Supposons que $2a + a^2 = 2b + b^2$. Montrer que si a est un entier (pas forcément positif), alors b est aussi un entier.

Solution de l'exercice 2 On réécrit l'égalité

$$2a - 2b = b^2 - a^2$$

$$2(a - b) = -(a + b)(a - b).$$

Alors soit $b = a$, et alors b est un entier, soit

$$2 = -a - b$$

d'où

$$b = -2 - a$$

et b est encore un entier.

Commentaire des correcteurs : Exercice bien traité dans l'ensemble, avec quelques erreurs de raisonnement. Presque tous les élèves ont évité le piège $a + 1 = -(b + 1)$.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de réels x, y, z strictement positifs tels que

$$(2x^2 + yz)(2y^2 + xz)(2z^2 + xy) = 26x^2y^2z^2.$$

Solution de l'exercice 3 On pourrait essayer de simplement appliquer l'inégalité arithmético-géométrique sur chacun des facteurs du côté gauche, mais ceci donne que le terme de gauche est supérieur ou égal à $16\sqrt{2}x^2y^2z^2$ ce qui ne suffit pas pour conclure (car $16\sqrt{2} < 26$). En fait, ceci vient du fait que l'on ne peut pas avoir égalité dans les trois inégalités arithmético-géométriques à la fois. On aimerait bien que le cas $x = y = z$ soit un cas d'égalité des inégalités arithmético-géométrique que l'on applique.
Prenons par exemple le premier terme $2x^2 + yz$. On le sépare en $x^2 + x^2 + yz$ (de façon à ce que chacun des termes soit égaux si $x = y = z$), on peut alors appliquer l'inégalité arithmético-géométrique :

$$2x^2 + yz \geqslant 3\sqrt[3]{x^2 \cdot x^2 \cdot yz} = 3\sqrt[3]{x^4yz}.$$

En appliquant l'inégalité arithmético-géométrique sur tous les termes qui sont positifs, on a

$$(2x^2 + yz)(2y^2 + xz)(2z^2 + xy) \geqslant 27\sqrt[3]{x^4yz \cdot y^4xz \cdot z^4yz} = 27\sqrt[3]{x^6y^6z^6} = 27x^2y^2z^2$$

ce qui est strictement supérieur à $26x^2y^2z^2$, on ne peut donc pas avoir égalité.

Commentaire des correcteurs : Exercice réussi dans l'ensemble. Bonnes utilsations de l'IAG, sauf quelques erreurs de raisonnement.

Exercice 4. Montrer que pour tous les réels x, y, z, on a

$$\frac{x^2-y^2}{2x^2+1}+\frac{y^2-z^2}{2y^2+1}+\frac{z^2-x^2}{2z^2+1}\leqslant 0.$$

Solution de l'exercice 4 On réécrit l'inégalité en

$$\frac{x^2}{2x^2+1}+\frac{y^2}{2y^2+1}+\frac{z^2}{2z^2+1}\leqslant\frac{y^2}{2x^2+1}+\frac{z^2}{2y^2+1}+\frac{x^2}{2z^2+1}.$$

L'inégalité n'étant pas symétrique, on ne peut pas supposer sans perte de généralité que $x^2 \leqslant y^2 \leqslant z^2$. Cependant, remarquons que les suites (x^2, y^2, z^2) et $(\frac{1}{2x^2+1}, \frac{1}{2y^2+1}, \frac{1}{2z^2+1})$ sont rangées dans l'ordre inverse (le plus grand de la première suite correspond au plus petit de la deuxième suite par exemple). On peut donc appliquer l'inégalité de réordonnement qui implique directement l'inégalité de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : Les élèves ayant abordé le problème l'ont plutôt bien réussi. Ils ont proposé trois types de solutions. Certains passent par l'inégalité de réarrangement (aussi appelée inégalité du tourniquet), à l'instar du corrigé. L'erreur la plus fréquente est alors de dire que l'inégalité est symétrique, ce qui n'est manifestement pas le cas, et de supposer un ordre. Dans le cadre de l'inégalité de réarrangement ceci n'est pas dramatique, mais ce type d'imprécisions reste dangereux : quelques élèves, en supposant illégalement un ordre commode, se sont dispensés d'utiliser l'inégalité de réarrangement, et leur raisonnement est tout à fait erroné. D'autres utilisent directement et efficacement l'inégalité arithmético-géométrique après avoir un peu transformé le problème. Une regrettable moitié enfin, se débarasse des fractions, développe, puis utilise l'IAG termes à termes. Rappelons que cette stratégie est hasardeuse car une faute de calcul rend complètement invalide la solution, et que les problèmes un peu plus durs (comme le problème 6) sont difficiles à résoudre ainsi.

Exercice 5. Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$ des réels. Déterminer la valeur maximale que peut prendre le plus petit des nombres

$$a_1 - a_1 a_2, a_2 - a_2 a_3, \ldots, a_n - a_n a_1$$

.

Solution de l'exercice 5 Soit i tel que a_i soit minimal. Alors on a $a_{i+1} \geqslant a_i$ (où $a_{n+1} = a_1$) et donc par inégalité arithmético-géométrique sur a_i et $1 - a_i$, on obtient

$$a_i - a_i a_{i+1} \leqslant a_i - a_i^2 = a_i(1 - a_i) \leqslant \frac{1}{4}(a_i + 1 - a_i)^2 = \frac{1}{4}$$

donc le minimum des nombres vaut au plus $\frac{1}{4}$. Il reste à vérifier que l'on peut trouver des a_i tel que le minimum soit égal à $\frac{1}{4}$. Si tous les a_i valent $\frac{1}{2}$, alors tous les $a_i - a_i a_{i+1}$ valent $\frac{1}{4}$ et le minimum vaut bien $\frac{1}{4}$.

Commentaire des correcteurs : Le problème est bien réussi dans l'ensemble. Il contenait deux étapes : prouver que l'expresison est toujours plus petite que 0.25 et donner un exemple en lequel cette borne est atteinte. Quelques élèves oublient l'une ou l'autre de ces deux étapes et perdent alors de précieux points.

Exercice 6.

Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{b^4+1}{c^3+c^2+c}+\frac{c^4+1}{a^3+a^2+a}\geqslant 2.$$

Solution de l'exercice 6 On commence par appliquer l'inégalité arithmético-géométrique aux trois termes de l'énoncé :

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{b^4+1}{c^3+c^2+c}+\frac{c^4+1}{a^3+a^2+a}\geqslant 3\sqrt[3]{\frac{(a^4+1)(b^4+1)(c^4+1)}{(b^3+b^2+b)(c^3+c^2+c)(a^3+a^2+a)}}.$$

On cherche donc à minorer les quotients $\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a}$. Pour cela, on applique des inégalités arithmético-géométriques :

$$\begin{aligned}a^3+a^2+a &\leqslant \frac{1}{2}(a^4+a^2)+a^2+\frac{1}{2}(a^2+1)=\frac{1}{2}(a^4+1)+2a^2\\ &\leqslant \frac{1}{2}(a^4+1)+(a^4+1)=\frac{3}{2}(a^4+1)\end{aligned}$$

et ainsi $\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a}\geqslant\frac{2}{3}$. On a de même pour b et c, et donc

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{b^4+1}{c^3+c^2+c}+\frac{c^4+1}{a^3+a^2+a}\geqslant 3\sqrt[3]{\left(\frac{2}{3}\right)^3}=2.$$

Solution alternative :

On peut également réfléchir avec l'inégalité de réarrangement. L'inégalité n'est pas symétrique, on ne peut donc pas supposer sans perte de généralités $a\geqslant b\geqslant c$ ou quelque chose de similaire.
Cependant, par stricte croissance, (a^4+1, b^4+1, c^4+1) est dans le même ordre que (a, b, c). De même, $(a^3+a^2+a, b^3+b^2+b, c^3+c^2+c)$ est également dans le même ordre et $\left(\frac{1}{a^3+a^2+a}, \frac{1}{b^3+b^2+b}, \frac{1}{c^3+c^2+c}\right)$ est dans le sens inverse. Ainsi, par inégalité de réarrangement,

$$\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a}+\frac{b^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{c^4+1}{c^3+c^2+c}$$

est la valeur minimale que peut prendre une somme de produit de termes de (a^4+1, b^4+1, c^4+1) avec des termes de $\left(\frac{1}{a^3+a^2+a}, \frac{1}{b^3+b^2+b}, \frac{1}{c^3+c^2+c}\right)$. En particulier ici :

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{b^4+1}{c^3+c^2+c}+\frac{c^4+1}{a^3+a^2+a}\geqslant\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a}+\frac{b^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{c^4+1}{c^3+c^2+c}$$

On peut maintenant comme précédemment montrer $\frac{a^4+1}{a^3+a^2+a}\geqslant\frac{2}{3}$ et conclure par

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{b^4+1}{c^3+c^2+c}+\frac{c^4+1}{a^3+a^2+a}\geqslant 3\cdot\frac{2}{3}=2$$

Commentaire des correcteurs : Le problème est très bien réussi. Cependant, beaucoup d'élèves croient qu'on peut supposer $a \geqslant b \geqslant c$ car "l'inégalité est symétrique". Or l'inégalité n'est pas symétrique : si on change b et c l'inégalité est drastiquement changée. Heureusement qu'ici par chance, le raisonnement était rectifiable facilement (cf la solution 2 du corrigé). Cependant, les quelques copies qui ont tout multiplié et développé n'ont pas réussi, témoignant encore une fois du fait que réflechir avant de tout développer hasardeusement est toujours une bonne idée.

Exercice 7. Soient a, b, c, d quatre réels tels que $|a| > 1, |b| > 1, |c| > 1$ et $|d| > 1$. Supposons que $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$. Montrer que

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} > 0.$$

Solution de l'exercice 7 On sait d'après l'énoncé que aucun des a, b, c, d ne vaut 1. La condition de l'énoncé s'écrit alors

$$\frac{a+1}{a-1}\frac{b+1}{b-1}\frac{c+1}{c-1}\frac{d+1}{d-1} = 1.$$

Remarquons que comme $|a| > 1$, alors on a soit $a > 1$ et donc $a+1 > 0$ et $a-1 > 0$, ou alors $a < -1$ et donc $a+1 < 0$ et $a-1 < 0$. Ainsi, dans tous les cas $\frac{a+1}{a-1}$ est positif, et de même pour b, c, d. On peut donc appliquer l'inégalité arithmético-géométrique sur le produit précédent pour avoir

$$\frac{a+1}{a-1} + \frac{b+1}{b-1} + \frac{c+1}{c-1} + \frac{d+1}{d-1} \geqslant 4\sqrt[4]{\frac{a+1}{a-1}\frac{b+1}{b-1}\frac{c+1}{c-1}\frac{d+1}{d-1}} = 4.$$

On réécrit ceci sous la forme

$$\left(1 + \frac{2}{a-1}\right) + \left(1 + \frac{2}{b-1}\right) + \left(1 + \frac{2}{c-1}\right) + \left(1 + \frac{2}{d-1}\right) \geqslant 4$$

et donc

$$\frac{1}{a-1} + \frac{1}{b-1} + \frac{1}{c-1} + \frac{1}{d-1} \geqslant 0.$$

Mais l'énoncé nous demande de montrer que l'inégalité est stricte, on s'intéresse donc au cas d'égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. On a égalité si et seulement si

$$\frac{a+1}{a-1} = \frac{b+1}{b-1} = \frac{c+1}{c-1} = \frac{d+1}{d-1}.$$

Comme le produit de ces quatre termes vaut 1, nécessairement ces termes valent tous 1 ou tous -1. Dans le premier cas, on a $a+1 = a-1$ ce qui est impossible. Dans le deuxième cas, on a $a+1 = 1-a$ et donc $a = 0$, ce qui est aussi impossible car $|a| > 1$. Ainsi, on ne peut pas avoir égalité et l'inégalité est bien stricte comme dans l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : Le problème est peu abordé. Certains se sont lancés dans des calculs compliqués, et étonnamment très peu ont réussi à faire fonctionner cela. En inégalité, il est crucial d'essayer de faire apparaître les hypothèses plutôt que de bourriner les calculs.

Exercice 8. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)(1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

Quels sont les cas d'égalité ?

<u>*Solution de l'exercice 8*</u> L'astuce est d'appliquer une inégalité arithmético-géométrique au côté gauche de l'inégalité, mais avec des coefficients $\sqrt{n}$ et $\frac{1}{\sqrt{n}}$:

$$\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)(1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n) = \sqrt{n}\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)\frac{1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n}{\sqrt{n}}$$

$$\leqslant \frac{1}{4}\left(\sqrt{n}\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)+\frac{1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n}{\sqrt{n}}\right)^2.$$

Pour chaque i, le coefficient de x_i est $\frac{\sqrt{n}}{i}+\frac{i}{\sqrt{n}}$. La fonction $t \mapsto t+\frac{1}{t}$ est décroissante pour $t<1$ et croissante pour $t>1$. En effet, par exemple pour $1<x<y$, on a $xy>1$ et donc :

$$y-x > \frac{y-x}{xy} = \frac{1}{x}-\frac{1}{y}$$

Ainsi, le coefficient maximal est atteint en $i=1$ ou $i=n$. Dans chaque cas, on trouve un coefficient $\sqrt{n}+\frac{1}{\sqrt{n}}=\frac{n+1}{\sqrt{n}}$, et donc

$$\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)(1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n) \leqslant \frac{1}{4}\left(\frac{n+1}{\sqrt{n}}(x_1+x_2+\ldots+x_n)\right)^2$$

$$\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)(1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

On s'intéresse aux cas d'égalité. Pour $1<i<n$, l'inégalité $\frac{\sqrt{n}}{i}+\frac{i}{\sqrt{n}} \leqslant \frac{n+1}{\sqrt{n}}$ est stricte, donc nécessairement x_i doit être égal à 0. Ensuite, il faut avoir égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, ce qui s'écrit

$$\sqrt{n}\left(x_1+\frac{x_n}{n}\right) = \frac{1}{\sqrt{n}}(x_1+nx_n)$$

$$\left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x_1 = \left(\sqrt{n}-\frac{1}{\sqrt{n}}\right)x_n.$$

Si $n=1$, on a toujours égalité (il n'y a qu'un seul x_i), sinon on a la condition $x_1=x_n$. Réciproquement, on peut vérifier que si $x_1=x_n$ et tous les autres x_i sont nuls, on a bien égalité dans l'inégalité de l'énoncé.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> Le problème est peu abordé, et encore moins résolu. Très peu de copies traitent les cas d'égalité, alors que cela fait partie de l'énoncé, et pouvait faire gagner des points. Veillez à bien connaître les énoncés des inégalités connues, mal appliquer une inégalité peut fausser toute une preuve.

Exercice 9. Soit c un entier positif ou nul. Trouver toutes les suites d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots$ telles que pour tout entier strictement positif n, a_n soit égal au nombre d'entiers i vérifiant $a_i \leqslant a_{n+1} + c$.

Solution de l'exercice 9 Soit (a_n) une suite vérifiant les conditions de l'énoncé pour la constante c. On commence par montrer que la suite est croissante. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $a_n > a_{n+1}$. Alors d'après l'hypothèse de l'énoncé, il y a strictement plus de a_i inférieurs ou égaux à $a_{n+1}+c$ que de a_i inférieurs ou égaux à $a_{n+2}+c$. Ceci signifie que nécessairement $a_{n+2} < a_{n+1}$. En continuant ainsi, on trouve que la suite des a_i est strictement décroissante à partir du rang n. Comme elle est à valeurs entières strictement positives, c'est absurde.
Montrons maintenant que la suite est d'abord constante jusqu'à un certain rang, puis strictement croissante. Supposons en effet que $a_i = a_j$ avec $i < j$. Alors si $i > 1$, a_{i-1} et a_{j-1} sont tous les deux les nombres de a_k inférieurs ou égaux à $a_i + c = a_j + c$, et donc $a_{i-1} = a_{j-1}$. Comme on a $i \leqslant j-1 < j$, on a $a_j = a_i \leqslant a_{j-1} \leqslant a_j$ et donc $a_{i-1} = a_{j-1} = a_j$ et donc $a_{i-1} = a_j$. On continue en diminuant successivement i de 1 jusqu'à avoir $a_j = a_1$. Toute la suite ne peut pas être égale à a_1, car par hypothèse seulement a_1 termes de la suite sont inférieurs ou égaux à $a_2 + c = a_1 + c > a_1$. Ainsi, la suite est constante égale à a_1 jusqu'à un certain rang N, puis croît strictement.
Soit $n \geqslant N$, alors on sait qu'il y a a_n éléments de la suite inférieurs ou égaux à $a_{n+1} + c$. Ces éléments sont les n premiers a_i (par croissance), ainsi que les éléments $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots, a_{n+k}$ pour un certain k. Ainsi, k est donné par les inégalités $a_{n+k} \leqslant a_{n+1} + c$ et $a_{n+k+1} > a_{n+1} + c$. Comme la suite est strictement croissante après le rang N, nécessairement

$$a_{n+k} \geqslant a_{n+k-1} + 1 \geqslant a_{n+k-2} + 2 \geqslant \ldots \geqslant a_{n+1} + k - 1$$

d'où $a_{n+1} + c \geqslant a_{n+k} \geqslant a_{n+1} + k - 1$ et $k \leqslant c + 1$. Ainsi, le nombre a_n d'éléments de la suite inférieurs ou égaux à $a_{n+1} + c$ est au plus

$$a_n = n + k \leqslant n + c + 1.$$

D'un autre côté, on sait que a_{n+k+1} vaut au moins $a_{n+1} + c + 1 \geqslant a_n + c + 2 = n + k + c + 2$. On a donc $a_{n+k+1} \geqslant n + k + c + 2$ ce qui est la même borne que la borne supérieure ci-dessus mais pour a_{n+k+1}. Alors pour tout $m \geqslant n + k + 1$, on a

$$m + c + 1 \geqslant a_m \geqslant a_{n+k+1} + (m - (n + k + 1)) \geqslant n + k + c + 2 + m - n - k - 1 = m + c + 1$$

et donc $a_m = m + c + 1$ pour tout m suffisamment grand.
Montrons que cette égalité est vraie pour tout m. Si par l'absurde elle était fausse, soit M maximal tel que $a_M \neq M + c + 1$. Alors a_M est le nombre de termes de la suite inférieurs ou égaux à $a_{M+1} + c = M + 2c + 2$, qui sont les M termes $a_1, \ldots, a_M$ ainsi que les termes $a_{M+1}, \ldots, a_{M+c+1} = M + 2c + 2$, et donc

$$a_M = M + (c + 1)$$

ce qui est absurde. Ainsi, pour tout n, $a_n = n + c + 1$.
Vérifions que cette solution fonctionne bien. Soit $n \geqslant 1$ entier. Alors $a_{n+1} + c = n + 2c + 2$ et les entiers i tels que $a_i = i + c + 1 \leqslant n + 2c + 2$ sont les i inférieurs ou égaux à $n + c + 1$, il y en a $n + c + 1 = a_n$, comme voulu.

Commentaire des correcteurs : Le problème est très peu abordé, et très rarement résolu. Les remarques sur le comportement de la suite valaient des points. Attention à bien vérifier les solutions candidates. Attention aussi à rester rigoureux dans la manipulation des inégalités.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient a et b deux réels. Supposons que $2a + a^2 = 2b + b^2$. Montrer que si a est un entier (pas forcément positif), alors b est aussi un entier.

Solution de l'exercice 10 On réécrit l'égalité

$$2a - 2b = b^2 - a^2$$

$$2(a-b) = -(a+b)(a-b).$$

Alors soit $b = a$, et alors b est un entier, soit

$$2 = -a - b$$

d'où

$$b = -2 - a$$

et b est encore un entier.

Commentaire des correcteurs : Le problème était réussi par presque tous. Attention aux erreurs de calcul pour ceux qui sont passés un peu vite.

Exercice 11. Pour un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x (par exemple, $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$). On note aussi $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Trouver tous les réels x tels que

$$\lfloor x \rfloor \{x\} < x - 1.$$

Solution de l'exercice 11 On réécrit $x = \lfloor x \rfloor + \{x\}$ dans le terme de droite et on met tous les termes à gauche pour que l'inégalité devienne

$$\lfloor x \rfloor \{x\} - \lfloor x \rfloor - \{x\} + 1 < 0$$

ou encore

$$(\lfloor x \rfloor - 1)(\{x\} - 1) < 0.$$

Remarquons que pour tout x réel, on a $0 \leqslant \{x\} < 1$ et donc $\{x\} - 1 < 0$. Alors l'inégalité est équivalente à

$$\lfloor x \rfloor - 1 > 0$$

ou encore $\lfloor x \rfloor > 1$. Ceci veut précisément dire que $x \geqslant 2$. On peut vérifier que réciproquement, si $x \geqslant 2$, alors x vérifie bien l'inégalié de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile à aborder initialement car un terme en $\lfloor x \rfloor \{x\}$ est assez inhabituel, mais plutôt bien appréhendé par ceux qui l'ont traité. On pouvait raisonner par équivalence comme cela est fait dans le corrigé. Il faut faire attention dans ce cas à bien garder le résonnement par équivalence tout du long (ou expliquer que la réciproque est vraie). En particulier c'est un des cas où il faut mettre des signes $\Leftrightarrow$ entre chaque ligne mathématique. On pouvait également pour mieux se représenter les choses faire une disjonction de cas qui utilisait en général les mêmes idées.

Exercice 12. La suite (a_n) est définie par $a_1 = 1$ et

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}$$

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 3$, on a $a_m \leqslant 1$.

<u>*Solution de l'exercice 12*</u> On pose $P_n = \prod^n a_k$. On a

$$\frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{1}{n} + \frac{1}{P_{n-1}}$$

ce qui donne

$$nP_n = P_{n-1} + n$$

On pose alors $M_n = n!P_n$. On déduit

$$M_n = M_{n-1} + n!$$

On déduit que $M_n = \sum k!$. On déduit alors

$$a_n = \frac{P_n}{P_{n-1}} = \frac{\frac{1}{n!}\sum k!}{\frac{1}{(n-1)!}\sum k!}$$

Il reste à montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant \sum_{k=1}^{n-1} n \times k!$$

ce qui vient en utilisant $n \geqslant 3$ pour avoir notamment $n \geqslant 2 + 1$ et

$$\sum_{k=1}^{n} k! \leqslant 1 + 2 + \sum_{k=3}^{n} n \times (k-1)! \leqslant n + n\sum_{k=2}^{n-1} k!$$

Solution alternative :
A partir de l'équation sur les P_n, on veut donc montrer que $a_n \leqslant 1$ pour $n \geqslant 3$, c'est-à-dire que $P_n \leqslant P_{n-1}$. Ceci se réécrit

$$\frac{1}{n}P_{n-1} + 1 \leqslant P_{n-1}$$

$$P_{n-1} \geqslant \frac{n}{n-1}.$$

On cherche donc à montrer cette inégalité par récurence. Pour $n = 3$, on a bien

$$P_2 = \frac{1}{2} + 1 = \frac{3}{2} = \frac{3}{3-1}.$$

Si le résultat est vrai au rang n, on a, au rang $n + 1$,

$$P_n = \frac{1}{n}P_{n-1} + 1 \geqslant \frac{1}{n}\frac{n}{n-1} + 1 = \frac{n}{n-1} \geqslant \frac{n+1}{n}$$

ce qui conclut la récurrence.

Solution alternative 2 :
On a $a_{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{a_1 \dots a_n}$. Ainsi :

$$a_{n+1} - \frac{1}{n} = \frac{1}{a_1 \dots a_{n-1}} \frac{1}{a_n} = \left(a_n - \frac{1}{n-1}\right) \frac{1}{a_n}$$

Dès lors $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n(n-1)} + \frac{1}{n}$. On peut calculer les premiers termes pour avoir $a_3 = 1$. On peut ensuite prouver par récurrence sur n que $a_n \leqslant 1$.
Si le résultat est vrai au rang n, $a_{n+1} = 1 - \frac{1}{a_n(n-1)} + \frac{1}{n} \leqslant 1 - \frac{1}{n-1} + \frac{1}{n} \leqslant 1$. Ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : La plupart de ceux qui ont abordé l'exercice l'ont bien compris. Il s'agissait principalement de transformer la relation de récurrence forte en une relation de récurrence simple puis de faire une récurrence. Certains élèves ont donné des raisonnements qui demandaient de traiter les premiers termes à la main. Il ne faut pas oublier de le faire, surtout que cela peut permettre de déceler une erreur de raisonnement.

Exercice 13. Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels :

$$f(x)f(y)f(x-y) = x^2 f(y) - y^2 f(x)$$

Solution de l'exercice 13 Soit f une solution de l'équation.
Pour $x = y = 0$, on a :

$$f(0)^3 = 0$$

Ainsi, $f(0) = 0$. On exclut la fonction $f \equiv 0$ qui est effectivement solution du problème.

On considère maintenant, un nombre x tel que $f(x) = 0$. On a alors pour un y quelconque :

$$0 = x^2 f(y) - 0$$

Comme on a exclu le cas $f \equiv 0$, on peut trouver y tel que $f(y) \neq 0$ et donc $x = 0$. Ainsi, si $f(x) = 0$, on a $x = 0$.

On peut maintenant remarquer qu'échanger x et y dans l'équation, change le terme de droite en son oppposé, on a donc :

$$f(x)f(y)f(x-y) = x^2 f(y) - y^2 f(x) = -(y^2 f(x) - x^2 f(y)) = -f(y)f(x)f(y-x)$$

Ainsi pour x et y non nuls, on a $f(x-y) = -f(y-x)$. En posant $y = 2x$ avec $x \neq 0$, on obtient que pour tout $x \neq 0$, $f(-x) = -f(x)$. Comme $f(0) = 0$, f est impaire.

On peut maintenant prendre $x = 2y$, l'égalité de l'énoncé avec l'imparité donnent :

$$f(2y)f(y)^2 = 4y^2 f(y) - y^2 f(2y)$$

D'autre part, avec $x = -y$:

$$f(y)^2 f(2y) = 2y^2 f(y) \tag{1}$$

En utilisant ces deux égalités, on a :

$$f(2y)y^2 = 2y^2 f(y)$$

Si y est non nul, on a $f(y) \neq 0$, et donc l'égalité précédente s'écrit $f(2y) = 2f(y)$, et l'équation (1) s'écrit

$$2f(y)^3 = 2y^2 f(y)$$
$$f(y)^2 = y^2.$$

On trouve donc $f(y) = \pm y$. Attention, a priori, le signe pourrait dépendre de y. Soit, par l'absurde, a et b deux réels non nuls tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. En prenant $x = b$ et $y = a$, on obtient :

$$-abf(a-b) = ab(a+b)$$

Comme a et b sont non nuls, $f(a-b) = -(a+b)$. Mais $f(a-b) = \pm(a-b)$, et en fonction du signe on obtient soit $a = 0$, soit $b = 0$, ce qui est absurde. Pour $x = 0$, on a à la fois $f(x) = x$ et $f(x) = -x$, donc nécessairement f est de la forme :
$f(x) = 0$ pour tous x, ou $f(x) = -x$ pour tous x, ou $f(x) = x$ pour tous x.

Ces trois fonctions sont bien solutions.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> Le problème a été tenté par un nombre important d'élèves, souvent avec les bonnes idées de substitutions. Un grand nombre doit faire plus attention à ne pas diviser par 0, même quand ce 0 se cache dans un $f(x)$ ou autre valeur. Cela mène à des raisonnements qui souvent retombent sur leur pattes, mais pour les mauvaises raisons. Une autre erreur très fréquente est celle des "multigraphes" : si l'on sait que $f(x)^2 = x^2$ pour tout x, alors on ne peut pas immédiatement conclure que f est plus ou moins la fonction identité. En effet la fonction pourrait alterner de façon arbitraire entre $+x$ et $-x$.

Exercice 14. Emile a créé un exercice pour Benoît. Il lui annonce qu'il a choisi secrètement un polynôme P unitaire de degré 2023 à coefficients entiers, c'est-à-dire de la forme

$$P(X) = X^{2023} + a_{2022}X^{2022} + a_{2021}X^{2021} + \ldots + a_1X + a_0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{2022}$ sont des entiers relatifs. Il donne à Benoît k entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$, où k est un entier positif, ainsi que la valeur du produit $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. A partir de ces connaissances, Benoît doit essayer de retrouver le polynôme P.
Trouver l'entier k minimal tel que Emile puisse trouver P et $n_1, \ldots, n_k$ afin de s'assurer que le seul polynôme coincidant avec les informations données à Benoît soit P.

Solution de l'exercice 14 Montrons que le k minimal est $k = 2023$. En effet, supposons d'abord que $k < 2023$ et qu'Emile choisisse P et $n_1, \ldots, n_k$. Posons

$$Q = P + (X - n_1)(X - n_2)\ldots(X - n_k)$$

qui est un polynôme à coefficients entiers, toujours unitaire de degré 2023, et différent de P. Alors P et Q sont égaux en chaque n_i, et donc les produits $P(n_1)\ldots P(n_k)$ et $Q(n_1)\ldots Q(n_k)$ sont égaux, donc Benoît ne peut pas retrouver la valeur du polynôme P.
Supposons maintenant que $k = 2023$. Emile peut alors choisir $n_1 = 3, n_2 = 6, \ldots, n_{2023} = 3 \cdot 2023$ et poser

$$P = (X - 3)(X - 6)\ldots(X - 3 \cdot 2023) + 1.$$

Alors le produit $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$ vaut 1. Soit Q un polynôme à coefficients entiers, unitaire de degré 2023 tel que le produit $Q(n_1)\ldots Q(n_k)$ soit égal à 1, il faut montrer que nécessairement $Q = P$.
Comme tous les $Q(n_i)$ sont entiers, ils valent tous soit 1, soit -1. On peut cependant remarquer que comme les n_i sont divisibles par 3 alors pour tout i, $Q(n_i)$ est congru au coefficient constant de Q. Comme 1 et -1 ne sont pas congrus modulos 3, tous les $Q(n_i)$ sont égaux. Comme 2023 est impair, ils ne peuvent pas tous être égaux à -1, donc ils valent tous 1. Alors $P - Q$ est un polynôme de degré au plus 2022 (car les termes d'ordre 2023 s'annulent) et est nul en chacun des 2023 valeurs des n_i, donc $Q = P$, ce qui conclut.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été plutôt bien compris et beaucoup d'élèves ont penser à créer un polynome P dont le produit $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k) = 1$ ce qui était la bonne façon de résoudre l'exercice. Attention cepandant à mieux justifier les arguments de division euclidienne sur les polynômes à coefficients entiers, certains sont allés un peu vite sur cette étape.

Exercice 15. Soit c un entier positif ou nul. Trouver toutes les suites d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \dots$ telles que pour tout entier strictement positif n, a_n soit égal au nombre d'entiers i vérifiant $a_i \leqslant a_{n+1} + c$.

Solution de l'exercice 15 Soit (a_n) une suite vérifiant les conditions de l'énoncé pour la constante c. On commence par montrer que la suite est croissante. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe un entier n tel que $a_n > a_{n+1}$. Alors d'après l'hypothèse de l'énoncé, il y a strictement plus de a_i inférieurs ou égaux à $a_{n+1}+c$ que de a_i inférieurs ou égaux à $a_{n+2}+c$. Ceci signifie que nécessairement $a_{n+2} < a_{n+1}$. En continuant ainsi, on trouve que la suite des a_i est strictement décroissante à partir du rang n. Comme elle est à valeurs entières strictement positives, c'est absurde.
Montrons maintenant que la suite est d'abord constante jusqu'à un certain rang, puis strictement croissante. Supposons en effet que $a_i = a_j$ avec $i < j$. Alors si $i > 1$, a_{i-1} et a_{j-1} sont tous les deux les nombres de a_k inférieurs ou égaux à $a_i + c = a_j + c$, et donc $a_{i-1} = a_{j-1}$. Comme on a $i \leqslant j-1 < j$, on a $a_j = a_i \leqslant a_{j-1} \leqslant a_j$ et donc $a_{i-1} = a_{j-1} = a_j$ et donc $a_{i-1} = a_j$. On continue en diminuant successivement i de 1 jusqu'à avoir $a_j = a_1$. Toute la suite ne peut pas être égale à a_1, car par hypothèse seulement a_1 termes de la suite sont inférieurs ou égaux à $a_2 + c = a_1 + c > a_1$. Ainsi, la suite est constante égale à a_1 jusqu'à un certain rang N, puis croît strictement.
Soit $n \geqslant N$, alors on sait qu'il y a a_n éléments de la suite inférieurs ou égaux à $a_{n+1} + c$. Ces éléments sont les n premiers a_i (par croissance), ainsi que les éléments $a_{n+1}, a_{n+2}, \dots, a_{n+k}$ pour un certain k. Comme la suite est strictement croissante après le rang N, nécessairement

$$a_{n+k} \geqslant a_{n+k-1} + 1 \geqslant a_{n+k-2} + 2 \geqslant \dots \geqslant a_{n+1} + k - 1$$

d'où $a_{n+1} + c \geqslant a_{n+1} + k - 1$ et $k \leqslant c + 1$. Ainsi, le nombre a_n d'éléments de ls suite inférieurs ou égaux à $a_{n+1} + c$ est au plus

$$a_n = n + k \leqslant n + c + 1.$$

D'un autre côté, on sait que a_{n+k+1} vaut au moins $a_{n+1} + c + 1 \geqslant a_n + c + 2 = n + k + c + 2$. On a donc $a_{n+k+1} \geqslant n + k + c + 2$ ce qui est la même borne que la borne supérieure ci-dessus mais pour a_{n+k+1}. Alors pour tout $m \geqslant n + k + 1$, on a

$$m + c + 1 \geqslant a_m \geqslant a_{n+k+1} + (m - (n + k + 1)) \geqslant n + k + c + 2 + m - n - k - 1 = m + c + 1$$

et donc $a_m = m + c + 1$ pour tout m suffisamment grand.
Montrons que cette égalité est vraie pour tout m. Si par l'absurde elle était fausse, soit M maximal tel que $a_M \neq M + c + 1$. Alors a_M est le nombre de termes de la suite inférieurs ou égaux à $a_{M+1} + c = M + 2c + 2$, qui sont les M termes $a_1, \dots, a_M$ ainsi que les termes $a_{M+1}, \dots, a_{M+c+1} = M + 2c + 2$, et donc

$$a_M = M + (c + 1)$$

ce qui est absurde. Ainsi, pour tout n, $a_n = n + c + 1$.
Vérifions que cette solution fonctionne bien. Soit $n \geqslant 1$ entier. Alors $a_{n+1} + c = n + 2c + 2$ et les entiers i tels que $a_i = i + c + 1 \leqslant n + 2c + 2$ sont les i inférieurs ou égaux à $n + c + 1$, il y en a $n + c + 1 = a_n$, comme voulu.

Commentaire des correcteurs : Le problème, malgré sa position, n'a pas été beaucoup cherché ni résolu. La plupart des élèves ayant rendu une tentative ont bien compris la mécanique de la suite et ont les bons réflexes : chercher les variations (croissance, convexité) de la suite avant d'en déduire qu'elle est arithmétique. En revanche, beaucoup d'élèves, victimes du même tropisme, pensent montrer que la suite est strictement croissante dès le début de la preuve alors qu'ils n'ont que montré que la suite est constante puis strictement croissante à partir d'un certain rang. Enfin, on déplore que beaucoup d'élèves ont oublié de vérifier que la suite qu'ils trouvent à la fin est bien solution du problème.

Exercice 16. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels, on ait

$$f(x^2 + xy + f(y^2)) = xf(y) + f(x^2) + y^2$$

.

Solution de l'exercice 16 En posant $y = 0$, on trouve $f(x^2 + f(0)) = xf(0) + f(x^2)$. En remplaçant x par $-x$ dans cette équation, on trouve $f(x^2 + f(0)) = -xf(0) + f(x^2)$, et en combinant on obtient donc $2xf(0) = 0$ pour tout x, soit $f(0) = 0$.

En posant $x = 0$, on trouve $f(f(y^2)) = y^2 + f(0) = y^2$. En posant $y = -x$, on trouve cette fois-ci que $f(f(y^2)) = -yf(y) + y^2 + f(y^2)$. On en déduit que

$$f(y^2) = yf(y)$$

D'autre part, en posant $x = -f(y^2)/y$, on trouve

$$-\frac{f(y)f(y^2)}{y} + y^2 = 0$$

On déduit que si y est non nul, alors $y^3 = f(y)f(y^2) = yf(y)^2$, ou encore $f(y)^2 = y^2$. Puisque si $y = 0$, alors $f(0) = 0$, on a donc pour tout y réel que $f(y) = \pm y$.

Dans la suite, on suppose qu'il existe a et b tels que $f(a) = a$ et $f(b) = -b$. Notons qu'alors $f(a^2) = a^2$ et $f(b^2) = -b^2$, puisque $f(x^2) = xf(x)$.
En remplaçant $x = a$ et $y = b$ dans l'équation, on trouve

$$\pm(a^2 + ab - b^2) = -ab + b^2 + a^2$$

Le cas où le signe du LHS (Left Hand Side = membre de gauche de l'équation) est un $+$ donne que $b(a - b) = 0$. Si $b \neq 0$, alors $a = b$ ce qui donne $a = f(a) = f(b) = -b = -a$ donc $a = b = 0$. Dans tous les cas, a ou b est nul.
Le cas où le signe du LHS est un $-$ donne que $a^2 = 0$ donc $a = 0$.
On déduit que les seules solutions sont les fonction $f \equiv x$ et $f \equiv -x$.

Commentaire des correcteurs : Le problème a rencontré un certain succès. Cette équation fonctionnelle nécessitait de beaucoup jouer sur les "symétries" du problème, en particulier le fait que peu de termes changeaient si l'on changeait le signe d'un variable. Une fois cette remarque effectuée, on pouvait tenter les substitutions $(x, y), (-x, y), (x, -y)$ et $(-x, -y)$, qui donnaient que $f(0) = 0$ et que f est impaire. Plusieurs options étaient ensuite possibles, comme jouer sur le caractère involutif de f ou tenter de compenser deux termes de l'équation (c'est ce qui motive la substitution $x = -\frac{f(y^2)}{y}$ dans le corrigé).
La deuxième spécificité du problème est que la solution aboutissait à un problème de multigraphe : on a pour tout x soit $f(x) = x$ soit $f(x) = -x$. Notez qu'à ce stade, l'identité et moins l'identité ne sont pas les seules fonctions avec cette propriété, par exemple la fonction valeur absolue vérifie aussi cette propriété (et il y a en fait une large famille de fonctions vérifiant cela). On aimerait alors "inverser" cette formule pour montrer qu'on a soit $f(x) = x$ pour tout x, soit $f(x) = -x$ pour tout x. Cette subitlité a échappé à plusieurs élèves.

Une autre erreur récurrente a été de déduire de $xf(x) = -xf(-x)$ que $f(x) = f(-x)$ pour tout x non nul, d'en déduire que f est impaire et donc que $f(0) = 0$. Mais comme l'égalité $f(x) = -f(-x)$ n'est vraie que pour les x non nuls, on ne peut substituer $x = 0$ dans cette équation pour déduire $f(0)$.

Exercice 17. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $C > 0$ une constante réelle. On suppose qu'il existe une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de réels non tous nuls telle que :

— $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.

— Pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant n$, on a soit $x_i \leqslant x_{i+1}$, soit $x_i \leqslant x_{i+1} + Cx_{i+2}$ (où on définit $x_{n+1} = x_1$ et $x_{n+2} = x_2$).

1. Montrer que nécessairement $C \geqslant 2$.
2. On suppose que $C = 2$, montrer que n est nécessairement pair.

Solution de l'exercice 17 Dans toute la solution, on considèrera tous les indices modulo n. Remarquons que la condition de l'énoncé signifie que pour tout i, si $x_{i+2} \leqslant 0$, alors $x_i \leqslant x_{i+1}$ car la condition $x_i \leqslant x_{i+1} + Cx_{i+2}$ implique aussi $x_i \leqslant x_{i+1}$,. De la même façon dans le cas contraire, $x_i \leqslant x_{i+1} + Cx_{i+2}$ dès que $x_{i+1} \geqslant 0$. On s'intéresse donc au signe des différents termes x_k.

Commençons par montrer qu'il n'existe jamais deux termes négatifs ou nuls à la suite parmi les x_k. Supposons par l'absurde que ce soit le cas et qu'il existe donc i avec $x_i \leqslant 0$ et $x_{i+1} \leqslant 0$. Alors on applique la propriété à l'indice $i-1$. Comme $x_{i+1} \leqslant 0$, on a donc $x_{i-1} \leqslant x_i \leqslant 0$. En réappliquant ceci à l'indice $i-1$, on trouve $x_{i-2} \leqslant 0$, et en continuant ainsi on trouve successivement que tous les x_k sont négatifs ou nuls. Mais comme la somme des x_k vaut 0, ceci veut dire qu'ils sont tous nuls, ce qui est impossible d'après l'énoncé.

Soient $i_1, \ldots, i_K$ les indices i où x_i est négatif ou nul. Maintenant, on peut écrire toutes les inégalités que l'on connaît entre les x_i : pour tout j,

$$x_{i_j+1} \leqslant x_{i_j+2} + Cx_{i_j+3}, \quad x_{i_j+2} \leqslant x_{i_j+3} + Cx_{i_j+4}, \ldots, \quad x_{i_{j+1}-3} \leqslant x_{i_{j+1}-2} + Cx_{i_{j+1}-1},$$
$$x_{i_{j+1}-2} \leqslant x_{i_{j+1}-1}, \quad x_{i_{j+1}-1} \leqslant x_{i_{j+1}} + Cx_{i_{j+1}+1}.$$

La seule inégalité intéressante faisant apparaître les termes négatifs x_{i_j} est cette dernière, on a donc pour tout j, $x_{i_j} \geqslant x_{i_j-1} - Cx_{i_j+1}$. Mais on sait que la somme des termes positifs doit se compenser avec la somme des termes négatifs car la somme de tous les x_k vaut 0, et on écrit donc

$$-(x_{i_1} + x_{i_2} + \ldots + x_{i_K}) \leqslant (Cx_{i_1+1} - x_{i_1-1}) + (Cx_{i_1+1} - x_{i_1-1}) + \ldots + (Cx_{i_1+1} - x_{i_1-1}).$$

Le terme de gauche vaut la somme des termes positifs, et en réordonnant les termes à droite on trouve

$$(x_{i_1+1} + x_{i_1+2} + \ldots + x_{i_2-1}) + (x_{i_2+1} + x_{i_2+2} + \ldots + x_{i_3-1}) + \ldots + (x_{i_K+1} + x_{i_K+2} + \ldots + x_{i_1-1})$$
$$\leqslant (Cx_{i_1+1} - x_{i_2-1}) + (Cx_{i_2+1} - x_{i_3-1}) + \ldots + (Cx_{i_K+1} - x_{i_1-1}).$$

La raison pour mettre les termes de cette manière est la suivante : les seules inégalités qui nous restent parmi les inégalités citées précédemment ne prennent qu'en compte les x_k pour k entre un $i_j + 1$ et le $i_{j+1} - 1$ suivant, c'est-à-dire dans une des suites de termes strictement positifs successifs. On va alors montrer que si $C < 2$, alors on a nécessairement pour tout j,

$$x_{i_j+1} + x_{i_j+2} + \ldots + x_{i_{j+1}-1} > Cx_{i_j+1} - x_{i_{j+1}-1}.$$

On va alors montrer que pour toute suite $a_1, a_2, \ldots, a_m$ de termes strictement positifs vérifiant les inégalités

$$a_1 \leqslant a_2 + Ca_3, \quad a_2 \leqslant a_3 + Ca_4, \ldots, \quad a_{m-2} \leqslant a_{m-1} + Ca_m, \quad a_{m-1} \leqslant a_m,$$

alors nécessairement $a_1 + \ldots + a_m > Ca_1 - a_m$. Pour cela, on écrit

$$Ca_1 - a_m = a_1 + (C-1)a_1 - a_m \leqslant a_1 + (C-1)a_2 + C(C-1)a_3 - a_m$$
$$= a_1+(C-1)a_2+(C-1)^2a_3+(C-1)a_3-a_m \leqslant a_1+(C-1)a_2+(C-1)^2a_3+(C-1)a_4+C(C-1)a_5-a_m.$$

On peut continuer ainsi jusqu'à obtenir, selon la parité de m,

$$\leqslant \begin{cases} a_1 + (C-1)a_2 + (C-1)^2a_3 + \ldots + (C-1)a_{m-1} + C(C-1)a_m - a_m & \text{si } m \text{ est impair} \\ a_1 + (C-1)a_2 + (C-1)^2a_3 + \ldots + (C-1)a_{m-2} + C(C-1)a_{m-1} - a_m & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases}.$$

Dans le deuxième cas, on utilise la dernière inégalité $a_{m-1} \leqslant a_m$ pour obtenir

$$\leqslant \begin{cases} a_1 + (C-1)a_2 + (C-1)^2a_3 + \ldots + (C-1)a_{m-1} + (C(C-1)-1)a_m & \text{si } m \text{ est impair} \\ a_1 + (C-1)a_2 + (C-1)^2a_3 + \ldots + (C-1)a_{m-2} + (C(C-1)-1)a_{m-1} & \text{si } m \text{ est pair} \end{cases}.$$

Lorsque $C < 2$, tous les coefficients devant les a_i sont strictement inférieurs à 1 et donc $Ca_1 - a_m$ est strictement inférieur à $a_1 + a_2 + \ldots + a_m$. Ceci conclut alors la première partie de l'exercice par ce qu'on a vu précédemment.
Maintenant, supposons que $C = 2$. Remarquons que dans l'étude de la suite a_i, on a toujours l'inégalité $Ca_1 - a_m \leqslant a_1 + \ldots + a_m$, mais par ce que l'on a montré précédemment l'inégalité est toujours stricte dans le cas où m est pair (car a_m strictement positif). Ainsi, pour que $C = 2$, il faut que les suites de termes positifs consécutifs soient toujours de taille impaire., ce qui signifie que tous les $i_{j+1} - i_j$ sont pairs (car on compte aussi un terme négatif). Mais alors comme tous les $i_{j+1} - i_j$ sont pairs, ceci signifie en sommant sur j que n est nécessairement pair.

Commentaire des correcteurs : L'exercie a été très peu réussi. Le point clef était de séparer les éléments de la suite entre termes positifs et négatifs (voir la vidéo sur la chaîne sur le sujet). Malheuresement, un certain nombre d'entre vous ont pensé démontrer que deux termes consécutifs ne pouvaient pas être strictement positifs, or c'est tout à fait possible (on peut facilement trouver un contre-exemple pour $n = 4$). Souvent l'erreur était d'être trop optimiste dans l'utilisation des inégalités alors que l'énoncé est en fait assez miraculeux.

Exercice 18. Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$ telles que pour tous $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{Z}$, on ait

$$P(r) \mid Q(r) \iff (f(P))(r) \mid (f(Q))(r).$$

Solution de l'exercice 18 Soit f une fonction solution de l'énoncé. Commençons par remarquer que si P, Q, r sont tels que $|P(r)| = |Q(r)|$, alors $f(P)(r)$ et $f(Q)(r)$ se divisent mutuellement, et donc $|f(P)(r)| = |f(Q)(r)|$.
Remarquons aussi que si P et Q sont deux polynômes tels que pour une infinité d'entiers r, $P(r)|Q(r)$, alors c'est aussi le cas pour $f(P)$ et $f(Q)$, et donc $f(P)$ divise $f(Q)$ dans $\mathbb{Q}[X]$. En effet, on écrit la division euclidienne $f(Q) = Rf(P) + S$ avec $R, S \in \mathbb{Q}[X]$ et $\deg(S) < \deg(f(P))$. On multiplie par les dénominateurs des coefficients de R et S pour obtenir une égalité de la forme $af(Q) = R'f(P) + S'$ avec a entier et R', S' deux polynômes à coefficients entiers. Alors pour une infinité de r entiers, $af(P)(r) \mid S'(r)$. Comme $|af(P)(r)|$ croît plus rapidement que $|S'(r)|$ lorsque $|r|$ tend vers l'infini, on obtient que nécessairement $S' = 0$ et donc que $f(P) = Rf(Q)$ et $f(P)$ divise $f(Q)$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Notamment, $f(Q) = 0$ ou $\deg(f(Q)) \geqslant \deg(f(P))$. On utilisera souvent la conséquence suivante : si P divise Q dans $\mathbb{Z}[X]$, alors $f(P)$ divise $f(Q)$ dans $\mathbb{Q}[X]$.
Commençons par trouver les antécédents du polynôme nul par f. Soit Q tel que $f(Q) = 0$. Alors pour tout polynôme P, on a que pour tout r, $f(P)(r) \mid f(Q)(r) = 0$, et alors $P(r) \mid Q(r)$. Par la remarque précédente, $Q = 0$ ou $\deg(Q) \geqslant \deg(P)$. Comme on peut prendre P quelconque, on a nécessairement $Q = 0$. Ainsi, $f(P) \neq 0$ pour tout $P \neq 0$.
On va s'intéresser à l'image des constantes par f. Pour toute constante c non nulle, posons $P(X) = c$ et $Q(X) = X$, alors $P(kc) \mid Q(kc)$ pour tout entier k, et donc $f(c)$ doit diviser $f(Q) = f(X)$ dans $\mathbb{Q}[X]$. Notamment, $\deg(f(c)) \leqslant \deg(f(X))$. Comme les degrés des images des constantes sont bornés, il existe donc une constante $C \neq 0$ dont le degré est maximal. Alors pour tout entier k, $f(C)$ divise $f(kC)$ dans $\mathbb{Q}[X]$, mais $\deg(f(kC)) \leqslant \deg(f(C))$, et donc il existe un rationnel $g(k)$ tel que $f(kC) = g(k)f(C)$.
Montrons que la fonction g ainsi définie est, au signe en chaque point près, un polynôme à coefficients rationnels. Pour cela, remarquons que pour tout entier k, on a $|kC| = |P(kC)|$ avec $P(X) = X$, et donc $|f(kC)(kC)| = |f(X)(kC)|$, et donc

$$|f(X)(kC)| = |g(k)||f(C)(kC)|.$$

Mais on sait déjà que $f(C)$ divise $f(X)$ dans $\mathbb{Q}[X]$, soit $\hat{g}$ leur quotient (qui est un polynôme dans $\mathbb{Q}[X]$), alors on a

$$\forall k \in \mathbb{Z}, |g(k)| = |\hat{g}(Ck)|.$$

Appliquons maintenant la propriété de l'énoncé avec $P(X) = kC$ et $Q(X) = X + a$ pour k, a deux entiers. On sait que $|P(r)| = |Q(r)|$ en $r = kC - a$, et on a donc

$$|f(X + a)(kC - a)| = |f(kC)(kC - a)|$$

$$|f(X + a)(kC - a)| = |\hat{g}(kC)||f(C)(kC - a)|.$$

Or, deux polynômes dont les valeurs absolues sont égales en une infinité d'entiers sont égaux au signe près. En faisant varier k, on trouve donc l'égalité polynomiale (au signe près)

$$f(X + a)(T) = \pm\hat{g}(T + a)f(C)(T)$$

où le signe ne dépend pas de T, mais peut dépendre de a. A présent, on peut calculer les valeurs de f en toutes les constantes : soit n un entier, on a pour tout a entier,

$$|f(n)(a)| = |f(X+n-a)(a)| = |\hat{g}(n)f(C)(a)|$$

et on a donc l'égalité polynomiale $f(n) = \pm\hat{g}(n) \cdot f(C)$. Enfin, pour un polynôme P quelconque, on peut écrire pour tout r entier,

$$|f(P)(r)| = |f(P(r))(r)| = |\hat{g}(P(r))f(C)(r)|$$

et donc $f(P) = \pm\hat{g}(P) \cdot f(C)$. Il reste à trouver les formes de $\hat{g}$ qui conviennent. On sait que si $m \mid n$ sont deux entiers, alors pour tout entier r, $f(m)(r) \mid f(n)(r)$, et donc $\hat{g}(m)f(C)(r) \mid \hat{g}(n)f(C)(r)$. En choisissant r tel que $f(C)(r) \neq 0$ (possible car $f(C) \neq 0$), on obtient $\hat{g}(m) \mid \hat{g}(n)$. Mais alors pour tout entier k, on sait que lorsque $n \to +\infty$, $\hat{g}(nk)/\hat{g}(n)$ est un entier qui doit tendre vers $k^{\deg(\hat{g})}$. Ainsi, pour n assez grand, $\hat{g}(nk) = k^{\deg(\hat{g})}\hat{g}(n)$, et donc les polynômes $\hat{g}(kX)$ et $k^{\deg(\hat{g})}\hat{g}(X)$ sont égaux. Ainsi, on trouve $\hat{g}(k) = \hat{g}(1)k^{\deg(\hat{g})}$ et $\hat{g}$ est donc un monôme de la forme $\hat{g}(X) = aX^n$ pour un rationnel a et un entier positif n.
Ainsi, on a montré qu'il existait un polynôme $A = af(C) \in \mathbb{Q}[X]$ et un entier n positif ou nul tel que pour tout $P \in \mathbb{Z}[X]$,

$$f(P)(X) = \pm A(X)P(X)^n$$

où le signe dans le $\pm$ peut dépendre de P, mais pas de X. Avec $P = 1$, on obtient que A est un polynôme à coefficients entiers. De plus, en posant $P = 2$, $Q = 3$ dans l'hypothèse de l'énoncé, on obtient que pour tout entier r,

$$A(r)2^n \mid A(r)3^n \iff 2 \mid 3.$$

Ceci implique que $A(r) \neq 0$ pour tout r, et que $n \geqslant 1$.
Supposons maintenant que f soit de la forme ci-dessus, avec $A \in \mathbb{Z}[X]$ ne s'annulant en aucun entier et $n \geqslant 1$. Alors on a bien que pour tout r entier et $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$,

$$P(r) \mid Q(r) \iff \pm A(r)P(r)^n \mid \pm A(r)Q(r)^n$$

et donc f vérifie la condition de l'énoncé.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très peu réussi, mais certains ont réussi à avoir des avancées partielles sur le problème.