STAGE OLYMPIQUE DE VALBONNE 2023

Animath
Association pour l'animation mathématique

MINISTÈRE DE L'ÉDUCATION NATIONALE

cnrs

Jane Street

Avant-propos

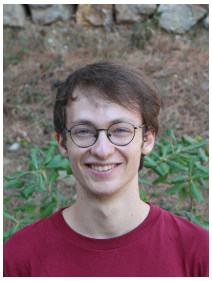
Le stage olympique de Valbonne 2023 a été organisé par l'association Animath.

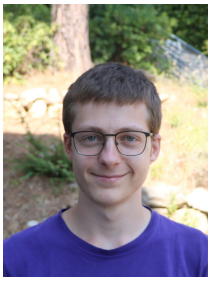
Son objet a été de rassembler 90 collégiennes, collégiens,
lycéennes et lycéens de la quatrième à la terminale,
de 11 à 17 ans, passionnés de mathématiques
sélectionnés parmi les près de 2000 candidats à la Coupe Animath,
dont certains représenteront la France aux compétitions internationales :
Olympiades Internationales de Mathématiques (IMO),
Olympiades Balkaniques Junior de Mathématiques (JBMO),
Olympiades Européennes de Filles de Mathématiques (EGMO),
Romanian Masters of Mathematics (RMM),
Olympiades Balkaniques de Mathématiques (BMO),
European Mathematical Cup (EMC),
Olympiade Francophone de Mathématiques (OFM).

Un peu plus qu'un tiers des stagiaires a pu découvrir la beauté des mathématiques olympiques,
tandis que les autres, ayant déjà une petite expérience dans ce domaine,
a pu approfondir ses connaissances.

Nous tenons à remercier le Centre International de Valbonne pour son excellent accueil.

Les animatheurs


Paul Avérous


Émile Avérous

Henry Bambury

Félix Breton

Aline Cahuzac

Gaspard Causse

Gaëtan Dautzenberg

Gaspard Delabre

Antoine Derimay

Raphael Ducatez

Aimeric Duchemin

Emilhan Dürrüoglu

Pierre-Marie Esmenjaud

Benoît Fanton

Aurélien Fourré

Quentin Hurez

Eva Jacob

Vincent Jugé

Maryam Kouhkan

Théo Lenoir

Rémi Lesbats

Elsa Lubek

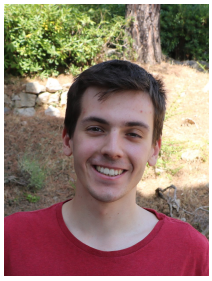
Augustin Molimard

Xavier Pigé

Maena Quemener

Martin Rakovsky

Jean Rax



Baptiste Serraille

Georges Tézé

Melvil Treilleux

Les élèves

Mattéo Argentin

Aymeric Arnaud de Forges

Anton Avilov

Alice Barret

Aminaa Batsaikhan

Hélie Bernard

Ulysse Bersillon

Serge Bidallier

Maxime Bindel

Arthur Blanc-Petavy

Zoé Blin

Antoine Borel

Ivy Bouchara

Apollinaire Bourin-Lecaille

Anatole Bouton

Adrien Bretin

Marc Bru

Ambre Caron

Hugo Chartoire

Maxime Chevalier

Lancelot Choné

Iris Ciarletta

Eva Corot

Maëlys Croisille

An Pha Dang

Charlie Dang

Claire Deloye

Louise Deloye

Erik Desurmont

Nils Desurmont

Savinien Didelot

Matthieu Diot

Matthieu Dubois

Elian Dumanowski

Roch Dumolard de Bonviller

Pierre Akin Dürrüoglu

Arthur Dusoulier

Malo Eav

Mohamed-Amine El Ouassaidi

Hadrien Faucheu

Samuel Faucheu

Rahif Fayad

Inès Fischler

Oscar Fischler

Amaël Giboulot

Henri Hovasse

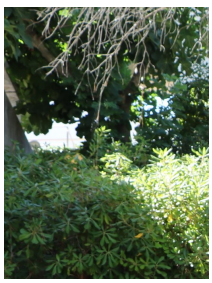
Noam Ismaaili Eerny

Matan Israël

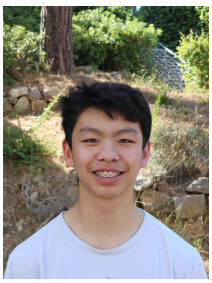
Olivia Kahn

Paul Laurent-Levinson

Léonard Lazzari



Nathanaël Lee



David Lei

Diego Marchal

Nicolas Marcus

Tom Martinal

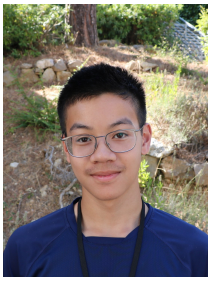
Arthur Massé

Mara Médecin

Mona Merlin-Weck

Pierre Misguich

Mona Müller



Anh Duc Nguyen

Lam Vien Nguyen

Tristan Nguyen

Chloé Pane

Manon Pasbeau

Camille Pawlowski

Anthony Pham

Dinh-Khanh Phan

Clémentine Pialoux

Solal Pivron-Djeddi

Bastien Puyou

Auguste Ramondou

Marin Renaudineau

Alexandre Roux

Thomas Schneider

Nathan Seillan

William Sithisak

Alicia Stamulescu

Margot Sur-Cortier

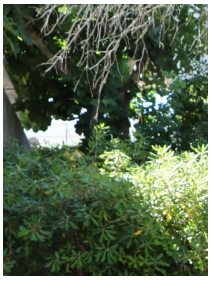
Vianney Teisseire

Arthur Teze

Thomas Thevenon

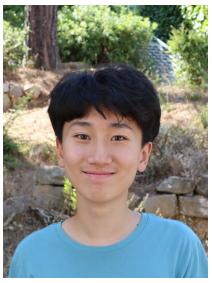
Eléanor Torres–Gajda

Lilas Treilleux



Florent Trinh

Andreï Vorontsov



Adrien Yuan

Akram Zakine

Benjamin Zheng

Michael Zhou

Table des matières

I Déroulement du stage **15**

II Coupe Animath de printemps 2023 **19**

III Groupe A **43**
1 Première partie : Arithmétique & Algèbre 44
1 Découverte des maths (Raphael) 44
2 Divisibilité et PGCD (Aline) 44
3 Inégalités 1 (Rémi) 56
4 Nombres premiers (Emilhan) 61
5 Inégalités 2 (Martin & Georges) 61
6 Modulos (Elsa) 69
7 Récurrence (Elsa) 74
8 Équations diophantiennes et factorisations (Théo & Gaspard D.) 82
2 Entraînement de mi-parcours 87
3 Deuxième partie : Géométrie & Combinatoire 90
1 Chasse aux angles (Pierre-Marie) 90
2 Principe des tiroirs (Maena) 90
3 Invariants/coloriages (Gaëtan & Vincent) 94
4 Angle tangent (Benoît) 101
5 Jeux (Théo & Augustin) 112
6 Triangles semblables (Rémi et Éva) 122
7 TD pot pourri/Pôle Sud (Antoine & Gaspard C.) 127
8 Principe de l'extremum (Aimeric) 138
4 Entraînement de fin de parcours 141

IV Groupe B **143**
1 Première partie : Géométrie & Algèbre 144
1 Chasse aux angles (Quentin) 144
2 Récurrence (Antoine) 156
3 Équations fonctionelles 1 (Henry) 156
4 Angle tangent (Vincent) 161
5 Triangles semblables (Baptiste) 170
6 Inégalités (Gaspard D.) 170
7 Équations fonctionnelles 2 (Rémi & Melvil) 175
8 TD de Géométrie (Martin & Maryam) 181
2 Entraînement de mi-parcours 193

3 Deuxième partie : Arithmétique & Combinatoire . . . 196
1 Divisibilité, PGCD (Paul) . . . 196
2 Principe des tiroirs (Aline) . . . 203
3 Nombres premiers (Xavier) . . . 210
4 Invariants/pavages/coloriages (Maena) . . . 213
5 Modulos (Jean) . . . 216
6 Principe de l'extremum (Paul) . . . 227
7 Comptage/ Pot pourri (Raphael) . . . 231
8 Équations diophantiennes, factorisation (Augustin & Éva) . . . 238
4 Entraînement de fin de parcours . . . 243

V Groupe C **247**
1 Première partie : Arithmétique & Algèbre . . . 248
1 Polynômes 1 (Vincent) . . . 248
2 Ordre 1 (Félix) . . . 259
3 Polynômes 2 (Georges) . . . 260
4 Ordre 2 (Melvil & Maryam) . . . 266
5 Inégalités (Thoé) . . . 274
6 Problèmes d'ordre de grandeur (Quentin) . . . 284
7 Équations fonctionnelles (Emilhan) . . . 289
8 TD Équations diophantiennes (Antoine) . . . 296
2 Entraînement de mi-parcours . . . 300
3 Deuxième partie : Géométrie & Combinatoire . . . 303
1 Double comptage 1 (Raphael) . . . 303
2 Puissance d'un point (Benoît & Martin) . . . 308
3 Pôle Sud (Aline) . . . 324
4 Graphes (Jean) . . . 336
5 Axes radicaux (Gaëtan & Gaspard C.) . . . 351
6 Variants/invariants (Aimeric) . . . 362
7 Double comptage 2 (Maena & Émile) . . . 366
8 TD de Géométrie (Pierre-Marie) . . . 370
4 Entraînement de fin de parcours . . . 381

VI Groupe D **385**
1 Première partie : Géométrie & Combinatoire . . . 386
1 Similitudes (Henry) . . . 386
2 Jeux (Emilhan & Aurélien) . . . 389
3 Graphes (Aline & Elsa) . . . 392
4 TD Idées simples (Raphael) . . . 406
5 Axes radicaux (Antoine) . . . 407
6 Invariants/monovariants (Félix) . . . 409
7 Inversions (Quentin) . . . 411
8 TD Petites SL (Baptiste) . . . 423
2 Entraînement de mi-parcours . . . 426
3 Deuxième partie : Algèbre & Arithmétique . . . 434
1 Algèbre non classique (Xavier) . . . 434
2 Rappels de théorie de l'ordre (Vincent) . . . 437

3 Lemme chinois (Théo) . . . 447
4 Inégalités (Martin) . . . 455
5 LTE et Zsigmondy (Pierre-Marie) . . . 470
6 Équations fonctionnelles (Benoît) . . . 476
7 Polynômes (Jean) . . . 478
8 TD petites SL (Rémi) . . . 490
4 Entraînement de fin de parcours . . . 493

VII Groupe E **497**
1 Première partie : Géométrie, Combinatoire et Algèbre . . . 498
1 Séries génératrices (Théo) . . . 498
2 Géométrie analytique (Martin) . . . 498
3 Géométrie projective réelle (Baptiste) . . . 505
4 Algèbre combinatoire (Félix) . . . 510
5 Géométrie projective dynamique (Aurélien) . . . 511
6 Suites et inégalités non classiques (Henry) . . . 512
7 Géométrie combinatoire (Vincent) . . . 516
8 TD Petites idées simples (Aurélien) . . . 519
2 Entraînement de mi-parcours . . . 520
3 Deuxième partie : Arithmétique, Algèbre et Combinatoire . . . 526
1 Équations fonctionnelles sur Z (Rémi) . . . 526
2 Pot pourri algèbre (Émile) . . . 529
3 Techniques asymptotiques en arithmétique (Antoine) . . . 537
4 Équations fonctionnelles (Émile) . . . 545
5 Polynômes (Martin) . . . 553
6 TD Shortlists d'arithmétique (Vincent) . . . 561
7 Suites d'entiers (Théo) . . . 567
8 Graphes (Xavier) . . . 575
4 Entraînement de fin de parcours . . . 581

VIII La Muraille **589**

IX Citations mémorables **613**

I. Déroulement du stage

Du lundi 14 août au jeudi 25 août 91 stagiaires et 30 animatheurs se sont réunis au Centre International de Valbonne (CIV) pour un stage de mathématiques organisé par la Préparation Olympique Française de Mathématique (POFM) de l'association Animath.

La sélection des participants s'est faite via la Coupe Animath dont plus de 1900 candidats ont participé au premier tour en ligne et un peu moins de 600 au deuxième tour. In fine ont été sélectionnés environs 15 quatrièmes, 20 troisièmes, 25 secondes et 30 premières avec un système de bonus favorisant les filles et les plus jeunes. Les élèves sont répartis en 5 groupes de niveau en fonction de leur expérience en mathématiques olympiques.

Le stage est divisé en deux périodes de cinq jours, quatre de cours et séances d'exercices suivi d'un un entraînement de type olympique le matin du cinquième jour. Le programme est construit suivant ce qui est demandé lors des compétitions internationales : Arithmétique, Algèbre, Combinatoire et Géométrie. Des conférences étaient également organisées certains soirs du stage. On remercie Thierry Viéville et Nicolas Nisse, chercheurs à l'INRIA ainsi que Vincent J. et Raphael D. qui sont venus donner un exposé et ont parlé d'informatique, d'algorithmes et de formes géométriques à tous les élèves.

Des activités plus ludiques sont organisées les après-midi des entraînements et en dehors des cours les élèves ont pu profiter de la piscine, de séance de foot, de volley, d'un jeu de type chasse au trésor, de soirées astronomie et tout le long du stage d'un grand nombre de jeux de société.

Il est possible de retrouver les comptes rendus du stage au jour le jour sur le site de la POFM : https://maths-olympiques.fr/?p=12497

		Groupe A	**Groupe B**
lun 14	17 h	Introduction au stage (amphi CPGE), répartition dans les groupes	
	20 h	Remise des prix de la coupe Animath et présentation de la POFM	
mar 15	9 h	Découverte des mathématiques (Raphaël)	Géométrie : chasse aux angles (Quentin)
	13 h 30	Arithmétique : Divisibilité et PGCD (Aline)	Algèbre : récurrence (Antoine)
	20 h	Conférence : « Problème de Bob l'écureuil » (Vincent)	
mer 16	9 h	Algèbre : introduction aux inégalités (Rémi)	Algèbre : introduction aux équations fonctionnelles (Henry)
	13 h 30	Arithmétique : nombres premiers (Emilhan)	Géométrie : angle tangent (Vincent)
jeu 17	9 h	Algèbre : TD d'inégalités (Georges et Martin)	Géométrie : triangles semblables (Baptiste)
	13 h 30	Arithmétique: Découverte des modulos (Elsa)	Algèbre: TD d'inégalités (Gaspard D)
	20 h	Conférence : «Informatique et neurosciences» par Thierry Viéville (INRIA)	
ven 18	9 h	Algèbre : Récurrence (Elsa)	Algèbre : TD d'équations fonctionnelles (Melvil et Rémi)
	13 h 30	Arithmétique : équations diophantiennes (Gaspard et Théo)	Géométrie : TD récapitulatif (Martin et Maryam)
19		9 h : Entraînement, 14 h : activités libres, 20 h : correction	
dim 20	9 h	Géométrie : chasse aux angles (Pierre-Marie)	Arithmétique : Divisibilité et PGCD (Paul)
	13 h 30	Combinatoire : principe des tiroirs (Maena)	Combinatoire : principe des tiroirs (Aline)
	20h	Conférence : «Coins et Formes» (Raphael)	
lun 21	9 h	Combinatoire : invariants et coloriage (Gaëtan et Vincent)	Arithmétique : nombres premiers (Xavier)
	13 h 30	Géométrie : angle tangent (Benoît)	Combinatoire : invariants et coloriage (Maena)
mar 22	9 h	Combinatoire : problèmes de jeux (Augustin et Théo)	Arithmétique: Découverte des modulos (Jean)
	13 h 30	Géométrie : triangles semblables (Eva et Rémi)	Combinatoire : principe de l'extremum (Paul)
	20h	Conférence : «P=NP ? Une question à un million de dollars», Nicolas Nisse (INRIA)	
mer 23	9 h	Géométrie : TD récapitulatif (Antoine et Gaspard C)	Combinatoire : comptage et pot pourri (Raphaël)
	13 h 30	Combinatoire : principe de l'extremum (Aimeric)	Arithmétique : équations diophantiennes (Augustin et Eva)
24		9 h : Entraînement, 14 h : activités libres, 20 h : correction	

Groupe C	Groupe D	Groupe E
Introduction au stage (amphi CPGE), répartition dans les groupes		
Remise des prix de la coupe Animath et présentation de la POFM		
Algèbre : Polynômes (Vincent)	Géométrie : Similitudes (Henry)	Combinatoire : séries génératrices (Théo)
Arithmétique : Ordre (Félix)	Combinatoire : problèmes de jeux (Aurélien et Emilhan)	Géométrie : géométrie barycentrique (Martin)
Conférence : « Problème de Bob l'écureuil » (Vincent)		
Algèbre : Polynômes (Georges)	Combinatoire : graphes (Aline et Elsa)	Géométrie : géométrie projective (Baptiste)
Arithmétique : Ordre (Maryam et Melvil)	Géométrie : TD (Raphaël)	Algèbre : TD (Félix)
Algèbre : Inégalités (Théo)	Géométrie : axes radicaux (Antoine)	Géométrie : géométrie dynamique (Aurélien)
Arithmétique : problèmes de taille (Quentin)	Combinatoire : invariants/monovariants (Félix)	Algèbre : Inégalités non classiques (Henry)
Conférence : «Informatique et neurosciences» par Thierry Viéville (INRIA)		
Algèbre : équations fonctionnelles (Emilhan)	Géométrie : Inversion (Quentin)	Combinatoire : TD (Vincent)
Arithmétique : TD équations diophantiennes (Antoine)	Combinatoire : TD (Baptiste)	Géométrie : TD (Aurélien)
9 h : Entraînement, 14 h : activités libres, 20 h : correction		
Combinatoire : double comptage (Raphaël)	Algèbre : TD (Xavier)	Arithmétique : équations fonctionnelles dans Z (Rémi)
Géométrie : Puissance d'un point (Benoît)	Arithmétique : ordre (Vincent)	Combinatoire : TD (Emile)
Conférence : «Coins et Formes» (Raphael)		
Géométrie : pôle Sud (Aline)	Arithmétique : lemme chinois (Théo)	Arithmétique : TD (Antoine)
Combinatoire : graphes (Jean)	Algèbre : Inégalités (Martin)	Algèbre : équations fonctionnelles (Emile)
Géométrie : axes radicaux (Gaëtan et Gaspard C)	Arithmétique : LTE, Zsigmondy (Pierre-Marie)	Algèbre : polynômes (Martin)
Combinatoire : variants/invariants (Aimeric)	Algèbre : équations fonctionnelles (Benoît)	Arithmétique : TD (Vincent)
Conférence : «P=NP ? Une question à un million de dollars», Nicolas Nisse (INRIA)		
Combinatoire : double comptage (Emile et Maena)	Algèbre : polynômes (Jean)	Arithmétique : TD (Théo)
Géométrie : TD (Pierre-Marie)	Arithmétique : TD (Rémi)	Combinatoire : TD (Xavier)

II. Coupe Animath de printemps 2023

Le 8 juin avait lieu la coupe Animath de printemps ! Parmi les plus de 1000 candidats, 5 élèves se sont distingués en particulier, puisqu'ils ont fini en première position pour leur catégorie d'âge. Les lauréats de la coupe Animath de printemps de 2023 sont donc :

— Auguste RAMONDOU (parmi les élèves de première) ;
— Pierre-Akin DÜRRÜOGLU & Lancelot CHONÉ (parmi les élèves de seconde) ;
— Tristan NGUYEN (parmi les élèves de troisième) ;
— Benjamin ZHENG (parmi les élèves de quatrième) ;

Exercices collégiens

Exercice 1
Calculer le nombre

$$\frac{4^8}{8^4}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

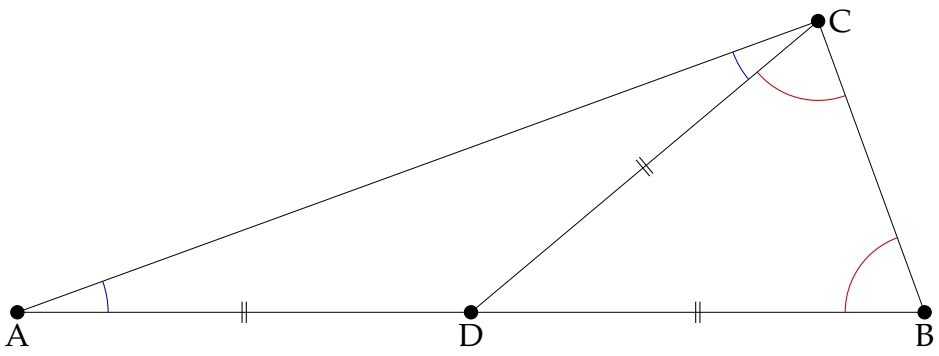
Solution de l'exercice 1
L'idée est de remarquer que 4 et 8 sont tous les deux des puissances de 2, ce qui va permettre de ne pas calculer le numérateur et le dénominateur explicitement. En effet, en utilisant la formule $(a^b)^c = a^{bc}$, on obtient

$$\frac{4^8}{8^4} = \frac{(2^2)^8}{(2^3)^4} = \frac{2^{2\times 8}}{2^{3\times 4}} = \frac{2^{16}}{2^{12}} = 2^{16-12} = 2^4 = 16.$$

Commentaire des correcteurs : À part la majorité des élèves qui calculent bien, il y a un grand nombre d'erreurs de calculs. Il est bon de relire ses calculs pour éviter ce type d'écueils.

Exercice 2
Soit ABC un triangle vérifiant $\widehat{CAB} = 20°$. Soit D le milieu du segment $[AB]$. On suppose que $\widehat{CDB} = 40°$. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?

Solution de l'exercice 2



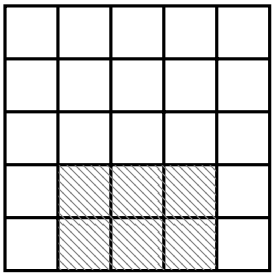
Comme $\widehat{CDB} = 40°$, on obtient par angles supplémentaires que $\widehat{CDA} = 180 - \widehat{CDB} = 140°$. Comme la somme des angles dans le triangle ADC vaut 180°, on obtient $\widehat{DCA} = 180 - \widehat{CAD} - \widehat{ADC} = 180 - \widehat{CAB} - \widehat{ADC} = 180 - 20 - 140 = 20°$. Ainsi le triangle CDA est isocèle en D, donc $DB = DA = DC$: le triangle CDB est également isocèle en D. Comme la somme des angles dans le triangle CDB vaut 180°, on a $180° = \widehat{DCB} + \widehat{DBC} + \widehat{CBD} = 2\widehat{DBC} + 40°$, donc $\widehat{DBC} = \frac{180-40}{2} = 70°$. Ainsi $\widehat{ABC} = 70°$.

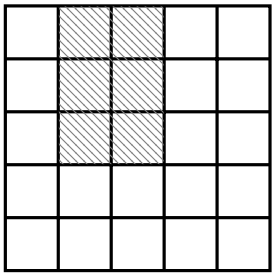
Solution alternative : On prouve de même que $DB = DA = DC$. Ainsi le milieu du segment $[AB]$ est le centre du cercle circonscrit à ABC. Ainsi le triangle ABC est rectangle en C. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont donc complémentaires : $\widehat{ABC} = 90 - \widehat{BAC} = 70°$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice est très bien réussi. Un certain nombre d'élèves font cependant la confusion entre médiane et bissectrice : ce n'est pas parce que dans un triangle, une droite passant par un sommet coupe le coté opposé en son milieu que l'angle au sommet est également coupé en deux. On déplore également un nombre significatif d'élèves qui ne rendent pas de figure pour appuyer leur raisonnement, ce qui est dommage. Certains élèves essayent également d'invoquer la réciproque du théorème de l'angle au centre, qui malheureusement n'est pas vraie dans le cas général.

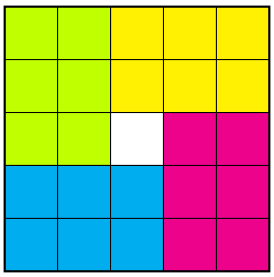
Exercice 3
On considère une grille 5×5, composée de 25 cases blanches. Vincent souhaite colorier en rouge certaines cases de la grille de telle sorte que tout rectangle 2×3 ou 3×2 contienne au moins une case coloriée. Quel est le plus petit nombre de cases qu'il peut colorier ?

Ci-dessous, à gauche une grille 5×5 où un rectangle 2×3 est hachuré, à droite une grille 5×5 où un rectangle 3×2 est hachuré.

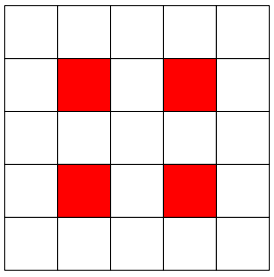




Solution de l'exercice 3
On remarque tout d'abord qu'il faut colorier au moins 4 cases. En effet, sur la figure suivante, on trace 4 rectangles 2×3 ou 3×2 qui sont tous disjoints : il faut donc au moins une case coloriée dans chacun d'entre eux.



Par ailleurs, on remarque que peu importe le rectangle 2×3 ou 3×2 dans le coloriage suivant, ce rectangle contient au moins une case coloriée.



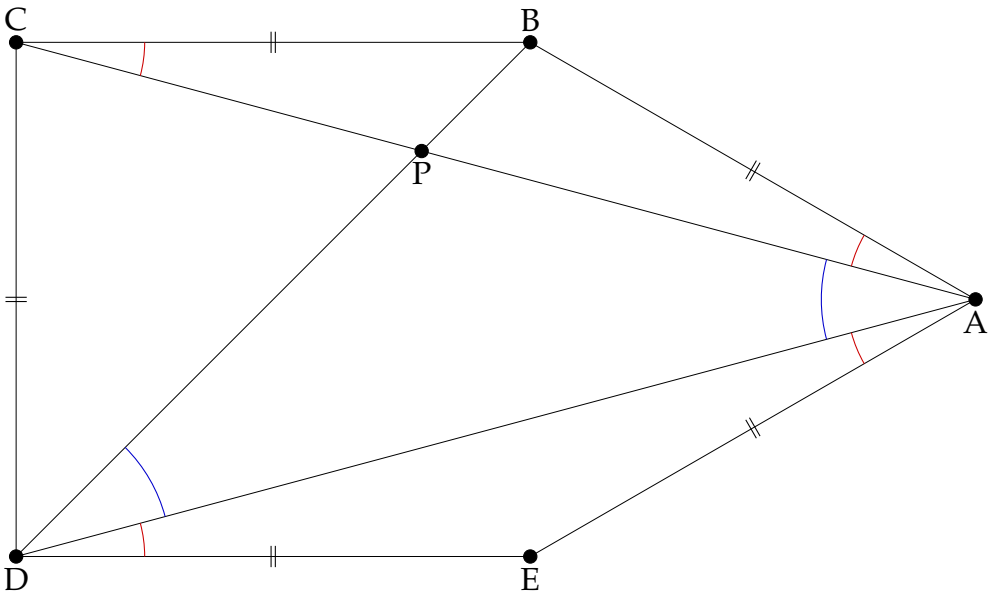
Ainsi, le plus petit nombre de cases qu'on doit colorier est 4.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était assez dur pour un problème 3, et très peu d'élèves ont reçu tous les points. La grande majorité des élèves a trouvé une configuration avec 4 cases coloriées, mais malheureusement de nombreux élèves n'ont pas pensé à montrer que 4 était la valeur minimale, alors qu'une configuration avec seulement 3 cases coloriées aurait pu exister. Même parmi les élèves qui ont essayé de faire cette vérification, la plupart se sont contentés de montrer le résultat dans certains exemples trop précis. L'argument "voici

une configuration de 4 cases qui fonctionne, si on en enlève une alors la configuration ne fonctionne plus, donc on ne peut pas avoir seulement 3 cases coloriées" par exemple a été vu à de nombreuses reprises, alors qu'il ne dénie pas l'existence d'une solution avec 3 cases coloriées. Enfin, les copies qui ont le mieux réussi sont en général celles qui utilisent des schémas pour illustrer leurs propos, plutôt que s'embrouiller dans de longs paragraphes peu clairs, et en général peu rigoureux.

Exercice 4
Soit $ABCDE$ un pentagone dont tous les côtés sont de même longueur, tel que les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDE}$ soient droits, et tel que le point A n'est pas à l'intérieur du quadrilatère $BCDE$. Soit P le point d'intersection des droites (AC) et (BD). Montrer que $AP = PD$.

Solution de l'exercice 4



Comme $\widehat{BCD}$ et $\widehat{CDE}$ sont droits, les droites (BC) et (DE) sont parallèles. Comme on a $BC = DE$, $BCDE$ est un parallélogramme. Un parallélogramme qui a un angle droit est un rectangle, et un rectangle avec deux côtés adjacents de même longueur est un carré, donc $BCDE$ est un carré. En particulier, $BE = EA = AB$: ABE est un triangle équilatéral.
À partir de là, on peut en déduire que $\widehat{ABC} = \widehat{ABE} + \widehat{EBC} = 60 + 90 = 150°$. Comme ABC est isocèle en B, on en déduit que $\widehat{BAC} = \frac{1}{2}(180 - 150) = 15°$.
De même, $\widehat{ADE} = \widehat{EAD} = 15°$. Ainsi,

$$\widehat{DAP} = \widehat{BAE} - \widehat{BAC} - \widehat{EAD} = 60 - 15 - 15 = 30°.$$

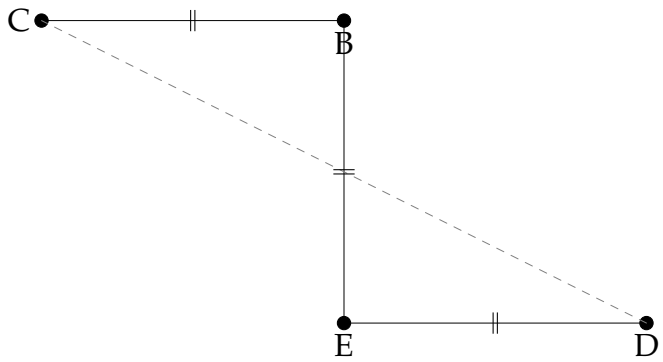
Aussi,

$$\widehat{PDA} = \widehat{BDE} - \widehat{ADE} = 45 - 15 = 30°$$

Ainsi, $\widehat{DAP} = \widehat{PDA} = 30°$, PAD est isocèle en P, et $AP = PD$ comme espéré.

Remarque : Dans la solution présentée, il y a une petite erreur (qui n'a pas été sanctionnée en cas d'oubli). En effet, on suppose sans le dire que le quadrilatère $BCDE$ est non croisé. Si celui-ci est croisé, c'est $BCED$ qui est un parallélogramme (comme dans la figure ci-dessous). Dans ce cas, si on note B' le symétrique de B par rapport à C, on a bien que $B'CDE$ est un

carré. Ainsi le triangle EBB' est rectangle en B', donc $EB > BB' = 2BC = EA + AB$ ce qui est impossible par inégalité triangulaire.



Commentaire des correcteurs : Un exercice que beaucoup de monde a abordé et réussi. Beaucoup d'élèves ont néanmoins perdu un point parce qu'ils n'ont pas justifié que le quadrilatère $BCDE$ était un carré, la configuration de l'énoncé n'est pas classique et les correcteurs ont exigé une démonstration : paraphraser l'énoncé en affirmant que la quadrilatère a deux angles droits consécutifs et trois côtés de même longueur ne constitue pas une justification, il fallait prouver pourquoi cela impliquait que la quadrilatère était un carré. Attention également aux faux théorèmes, il existe des triangles qui ont deux côtés en commun et un angle en commun mais qui ne sont pas semblables (il faut pour cela que l'angle ne se trouve pas entre les deux côtés dont on connaît la valeur).

Exercice 5
Théo a reçu ses notes du trimestre, qui sont toutes des entiers compris entre 1 et 5 (1 et 5 inclus). Il constate que la moyenne de ses notes est inférieure ou égale à 3. Ainsi, pour qu'il ne soit pas privé de dessert pendant une semaine, il compte remplacer sur son relevé de notes toutes ses notes égales à 1 par autant de notes égales à 3. Montrer qu'après cette transformation, la moyenne des notes reste inférieure ou égale à 4.

Solution de l'exercice 5
Notons a le nombre de notes 1 de Théo, b le nombre de notes 2 de Théo, et ainsi de suite, e le nombre de notes 5 de Théo, et n le nombre total de notes, autrement dit $n = a + b + c + d + e$. Lors du changement, les notes 1 deviennent des 3, donc la somme de toutes les notes est augmentée de $2a$, et donc la moyenne est augmentée de $\frac{2a}{n}$.

Supposons que la moyenne après transformation soit strictement plus grande que 4. Alors la moyenne a augmenté de strictement plus que 1, donc $\frac{2a}{n} > 1$. Mais alors, on a

$$\frac{3a + 2b + 3c + 4d + 5e}{n} \leq \frac{3a + 5b + 5c + 5d + 5e}{n} = \frac{3a + 5(n - a)}{n} = 5 - \frac{2a}{n} < 4,$$

contradiction. Ainsi, la moyenne après transformation est bien plus petite que 4.

Solution alternative : On garde les mêmes notations pour a, b, c, d, e, n que dans la solution précédente.
Remarquons que si la moyenne après transformation est strictement plus grande que 4, on doit avoir $e > a + b + c$. En effet,

$$\frac{3a + 2b + 3c + 4d + 5e}{n} \leq \frac{3(a + b + c) + 4d + 5e}{n},$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{3(a + b + c) + 4d + 5e}{n} > 4 \\ \iff & 3(a + b + c) + 4d + 5e > 4n = 4(a + b + c + d + e) \\ \iff & -(a + b + c) + e > 0. \end{aligned}$$

Ainsi, si la moyenne après transformation était plus grande que 4, on doit avoir $a + b + c < e$. Seulement, on a

$$\frac{a + 2b + 3c + 4d + 5e}{n} \geq \frac{a + b + c + 4d + 5e}{n},$$

et

$$\begin{aligned} & \frac{a + b + c + 4d + 5e}{n} > 3 \\ \iff & a + b + c + 4d + 5e > 3n = 3(a + b + c + d + e) \\ \iff & d + 2e > 2(a + b + c), \end{aligned}$$

qui est vrai car $e > a + b + c$ et $d \geq 0$.
Ainsi, si la moyenne de Théo après transformation est strictement plus grande que 4, la moyenne avant transformation est strictement plus grande que 3, et donc si la moyenne

avant transformation est plus petite que 3, la moyenne après transformation est plus petite que 4.

Commentaire des correcteurs : Un exercice assez difficile qui n'a été résolu complètement que par très peu d'élèves. Un bon réflexe dans ce type d'exercice est d'écrire l'énoncé sous forme d'équations (ici d'inégalités) et de voir quelles conditions cela revient à trouver. Même si il est souvent une bonne idée de traiter des cas particuliers, il est regrettable que nombre d'élèves se soient arrêtés à cette étape, considérant parfois qu'un exemple tient lieu de preuve. On retrouve dans de nombreuses copies l'évocation d'un soi-disant "meilleur cas" où l'on n'aurait uniquement des 1 et des 5. Bien que ce cas permette effectivement d'atteindre l'égalité, traiter ce cas n'est pas une démonstration, et la notion de "meilleur cas" ainsi que les pseudo-preuves que ce dernier est le "meilleur cas" sont toujours floues et vagues, et cela ne tient pas lieu de preuve. Les copies ayant bien avancé sur ce problème sont donc celles ayant tenté de le formaliser et de trouver des conditions suffisantes à l'inégalité qu'on souhaitait démontrer.

Exercice 6

Soit x, y des entiers positifs tels que $1 \leqslant y < x$, on dit que le couple (x, y) est *joli* si x et y ont exactement $x - y$ diviseurs positifs en commun. Par exemple, 30 et 42 ont exactement 4 diviseurs en commun : $1, 2, 3$ et 6. Comme $42 - 30 = 12 \neq 4$, le couple $(42, 30)$ n'est donc pas joli. Par contre, le couple $(8, 6)$ est joli, car 6 et 8 ont $8 - 6 = 2$ diviseurs positifs en commun : 1 et 2.

Pour tout entier $n \geq 2$, on note $s(n)$ le nombre de couples d'entiers (x, y) tels que $1 \leq y < x \leq n$ et que (x, y) soit joli.

a) Existe-t-il un entier $n \geq 2$ tel que $s(n) = 2022$?

b) Existe-t-il un entier $n \geq 2$ tel que $s(n) = 2023$?

Solution de l'exercice 6

Soit (x, y) un couple joli, et d un diviseur de x et de y. On pose $x = kd$ et $y = k'd$ avec k et k' des entiers, on a alors $x - y = d(k - k')$ donc d divise $x - y$.

Ainsi $x - y$ a au moins $x - y$ diviseurs. Or si un nombre positif divise $x - y$ il est forcément inférieur ou égal à $x-y$. Ainsi comme $x-y > 0$, tous les diviseurs de $x-y$ sont dans $\{1, \ldots, x-y\}$. Comme $x-y$ a $x-y$ diviseurs, et il y a $x-y$ éléments dans $\{1, \ldots, x-y\}$, ce sont tous des diviseurs de $x - y$.

Supposons $x - y > 1$. Comme $x - y \geqslant x - y - 1 \geqslant 1$, $x - y - 1$ divise $x - y$. Il existe ainsi un entier strictement positif k tel que $x - y = k(x - y - 1)$. On ne peut pas avoir $k = 1$, donc $k \geqslant 2$. Ainsi $x - y \geqslant 2(x - y - 1)$ donc $2 \geqslant x - y$. Ainsi on a forcément $x - y = 2$ ou 1.

Réciproquement si $x - y = 1$, comme tout diviseur de x et y divise $x - y = 1$, le seul diviseur en commun que x et y peuvent avoir est 1. Or 1 divise x et y. Ainsi si $x - y = 1$, (x, y) est joli.

Si $x - y = 2$, comme tout diviseur de x et y divise $x - y = 2$, les deux seuls diviseurs en commun que x et y peuvent avoir sont 1 et 2. Or 1 divise x et y, et 2 divise x et y si et seulement si x et y sont pairs. Comme $x = y + 2$, la dernière condition est équivalent au fait que y soit pair. ainsi si $x - y = 2$ et y est pair, alors (x, y) est joli.

Ainsi :

— Si $n = 2k$ les couples jolis (x, y) avec $1 \leqslant y < x \leqslant n$ sont les couples de la forme $(y + 1, y)$ avec $1 \leqslant y \leqslant n - 1$, et les couples de la forme $(2j, 2j + 2)$ avec $1 \leqslant j \leqslant k - 1$. Il y en a $s(n) = n - 1 + k - 1 = 3k - 2$.

— Si $n = 2k + 1$ les couples jolis (x, y) avec $1 \leqslant y < x \leqslant n$ sont les couples de la forme $(y + 1, y)$ avec $1 \leqslant y \leqslant n - 1$, et les couples de la forme $(2j, 2j + 2)$ avec $1 \leqslant j \leqslant k - 1$. Il y en a $s(n) = n - 1 + k - 1 = 3k - 1$.

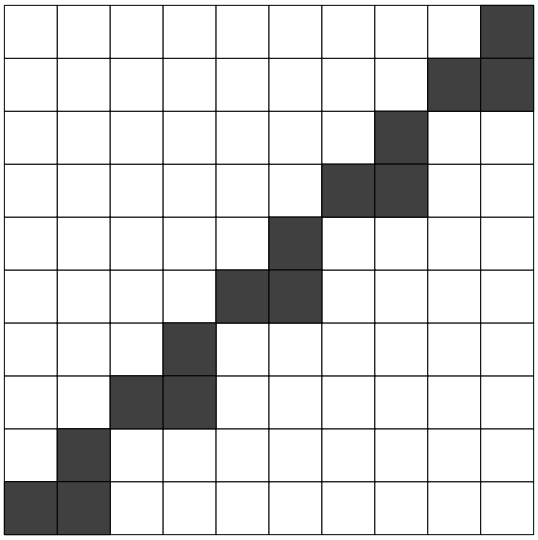
Il existe donc bien un entier $n \geqslant 2$ tel que $s(n) = 2023$: comme $2023 = 3 \times 675 - 2$, on a $s(2 \times 675) = s(1350) = 2023$. Néanmoins, $s(n)$ n'est jamais divisible par 3 (il s'écrit soit $3k - 2$, soit $3k - 1$), donc il n'existe pas d'entier n tel que $s(n) = 2022$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très peu traité comparé à l'exercice 7. C'est dommage car il était plus facile d'y obtenir des points. Il est dommage de voir que peu d'élèves ont essayé de trouver tous les couples jolis avec $x, y \leqslant 5$ (de tester des petits cas), et de calculer les valeurs de $s(n)$: il était facile de faire des conjectures de manière intelligente, et cela permettait de bien avancer. Beaucoup d'élèves admettent que si n a n diviseurs, alors $n = 1$ ou 2 : il fallait prouver ce fait crucial pour le problème.

Exercice 7
On considère une grille 10×10, composée de 100 cases. Les lignes de la grille sont numérotées de haut en bas dans l'ordre de 1 à 10 : la ligne la plus haute a le numéro 1, la plus basse le numéro 10. Les colonnes de la grille sont numérotées de gauche à droite dans l'ordre de 1 à 10 : la colonne la plus à gauche a le numéro 1, la plus à droite le numéro 10. Martin colorie certaines cases de la grille, de sorte que pour toute case coloriée c, il existe au plus une case coloriée différente de c dont le numéro de la colonne est supérieur ou égal à celui de la colonne de c et dont le numéro de la ligne est supérieur ou égal à celui de la ligne de c.

Quel est le nombre maximal de cases que Martin peut colorier ?

Solution de l'exercice 7
On montre que la réponse est 15.
Tout d'abord, on peut exhiber un coloriage avec 15 carrés coloriés :



Dans ce coloriage, toutes les cases sur la diagonale voient exactement une autre case coloriée, et les cases en dessous de la diagonale n'en voient aucune, ce coloriage est donc valide.

Supposons à présent qu'on ait un coloriage valide avec 16 cases (si on en a plus, on prend 16 cases quelconques parmi les cases coloriées).
Comme il est clairement impossible d'avoir trois cases coloriées sur une même ligne ou colonne, il y a au moins 6 lignes et 6 colonnes qui ont deux cases coloriées. Considérons l'une de ces lignes, mettons la ligne i. Si on considère la case la plus à gauche parmi les deux cases coloriées de la ligne i, on remarque que celle-ci ne peut avoir une autre case coloriée sur la même colonne qu'elle, mettons j. En effet, si cette éventuelle deuxième case est au-dessus de (i, j), alors la deuxième case verrait les deux cases coloriées de la ligne i, et si la deuxième case était en dessous de (i, j), (i, j) verrait à a fois cette case et la deuxième case de la ligne i. Dans tous les cas on aurait une contradiction : il n'y a qu'une seule case coloriée dans la colonne j.
Ce raisonnement étant valide pour chacune des 6 lignes sur lesquelles on a deux cases coloriées, on a donc 6 colonnes avec une seule case coloriée. Mais on avait dit qu'on avait 6 colonnes avec deux cases coloriées, contradiction.
Le nombre maximal est donc bien 15.

Solution alternative : On prouve de même qu'il est possible de colorier 15 cases via la configuration précédente.

Il est clairement impossible d'avoir 3 cases dans une même ligne. Supposons qu'il existe deux lignes, a et b contenant chacune deux cases coloriées et telles que la ligne a est au dessus de ligne b. Alors la case de gauche de la ligne a doit être strictement plus à droite que la case de droite de la ligne b. En effet, si ce n'était pas le cas, la case verrait à la fois la case de droite de la ligne a, et la case de gauche de la ligne b, ce qui est impossible.

Ainsi, toutes les cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées sont dans différentes colonnes. Il y a au plus 10 cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées, donc au plus 5 lignes contenant deux cases coloriées.

Ainsi il y a au plus $5 + 5 \times 2 = 15$ cases coloriées.

Le nombre maximal est donc bien 15.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été beaucoup abordé, mais finalement peu d'élèves ont véritablement compris l'énoncé : certains ont cru que Martin ne pouvait même pas colorier 10 cases (alors que colorier la diagonale était assez naturel), et certains ont colorié des cases d'une manière qui ne correspondait pas du tout à l'énoncé. Une fois la configuration du corrigé trouvée, beaucoup se sont contentés de dire qu'on ne pouvait pas colorier plus de cases et donc que c'était bel et bien le maximum. On peut pourtant en coloriant $(1, 1)$ et $(2, 2)$, trouver une configuration où on ne peut pas colorier plus de cases : pourtant 2 n'est pas la bonne réponse. Nous sommes également étonnés par le peu d'élèves ayant noté qu'il y avait au plus 2 cases par lignes. C'était une remarque toute simple, mais importante, et très peu d'élèves ont eu le réflexe de la faire.

Exercices lycéens

Exercice 8
Combien y a-t-il de nombres entiers n tels que $\frac{n}{3}$ et $3n$ soient tous deux des nombres entiers entre 1 et 1000 (1 et 1000 inclus) ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

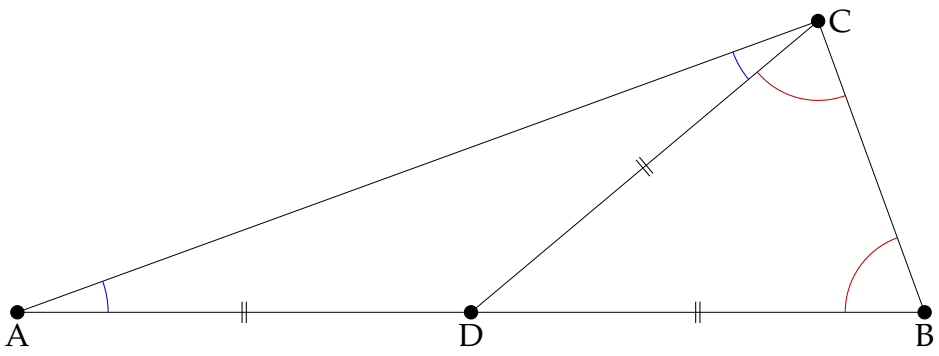
Solution de l'exercice 8
Si $\frac{n}{3}$ est entier, appelons cet entier k. Alors on doit avoir $1 \leq k \leq 1000$ et $1 \leq 9k \leq 1000$.
Réciproquement, si on a k un entier tel que $1 \leq 9k \leq 1000$, alors poser $n = 3k$ produit un n qui fonctionne. Ainsi, il y a autant de tels n qu'il y a d'entiers qui vérifient $1 \leq k$ et $9k \leq 1000$.
Il y en a $\left\lfloor \frac{1000}{9} \right\rfloor = 111$.

Solution alternative : Pour que $\frac{n}{3}$ soit un entier, il faut que n soit divisible par 3. Par ailleurs $3n \leq 1000$, donc $1 \leq n \leq 333$.
Réciproquement, tous les nombres multiples de 3 entre 1 et 333 fonctionnent, et il y en a 111.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi. Malheureusement, certains élèves qui n'avaient pas le bon résultat n'ont pas exposé leur raisonnement et n'ont donc pas obtenu de points.

Exercice 9
Soit ABC un triangle vérifiant $\widehat{CAB} = 20°$. Soit D le milieu du segment $[AB]$. On suppose que $\widehat{CDB} = 40°$. Que vaut l'angle $\widehat{ABC}$?

Solution de l'exercice 9



Comme $\widehat{CDB} = 40°$, on obtient par angles supplémentaires que $\widehat{CDA} = 180 - \widehat{CDB} = 140°$. Comme la somme des angles dans le triangle ADC vaut 180°, on obtient $\widehat{DCA} = 180 - \widehat{CAD} - \widehat{ADC} = 180 - \widehat{CAB} - \widehat{ADC} = 180 - 20 - 140 = 20°$. Ainsi le triangle CDA est isocèle en D, donc $DB = DA = DC$: le triangle CDB est également isocèle en D. Comme la somme des angles dans le triangle CDB vaut 180°, on a $180° = \widehat{DCB} + \widehat{DBC} + \widehat{CBD} = 2\widehat{DBC} + 40°$, donc $\widehat{DBC} = \frac{180-40}{2} = 70°$. Ainsi $\widehat{ABC} = 70°$.

Solution alternative : Comme $\widehat{CDB} = 40°$, on obtient $\widehat{CDA} = 140°$, et comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, on obtient $\widehat{DCA} = 20°$. Ainsi le triangle CDA est isocèle en D, donc $DB = DA = DC$: le milieu du segment AB est le centre du cercle circonscrit à ABC. Ainsi ABC est rectangle en C. Les angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$ sont donc complémentaires : $\widehat{ABC} = 70°$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été plutôt bien réussi par les lycéens. Beaucoup d'élèves font mal la différence entre ce qu'est une médiane et une bissectrice qui sont, la plupart du temps, deux droites différentes. Les élèves ayant choisi d'utiliser les propriétés de l'angle au centre sont très rarement allés au bout de l'exercice, en effet, si $\widehat{BDC} = 2\widehat{BAC}$, cela n'implique pas forcément que D est le centre du cercle circonscrit à ABC. Pour éviter de perdre des points, on conseille aux élèves de privilégier les chasses aux angles élémentaires et de tracer des figures que l'on a peu observées dans leur copie.

Exercice 10
En utilisant les nombres de 1 à 22 exactement une fois chacun, Antoine écrit 11 fractions : par exemple il peut écrire les fractions $\frac{10}{2}, \frac{4}{3}, \frac{15}{5}, \frac{7}{6}, \frac{8}{9}, \frac{11}{19}, \frac{12}{14}, \frac{13}{17}, \frac{22}{21}, \frac{18}{16}$ et $\frac{20}{1}$.

Antoine souhaite avoir autant que possible de fractions à valeurs entières parmi les fractions écrites : dans l'exemple précédent, il a écrit trois fractions à valeurs entières : $\frac{10}{2} = 5$, $\frac{15}{5} = 3$ et $\frac{20}{1} = 20$. Quel est le nombre maximal de fractions qui peuvent être à valeurs entières ?

Solution de l'exercice 10
Tout d'abord, il est possible de faire 10 nombres entiers, avec les fractions

$$\left\{\frac{22}{11}, \frac{20}{10}, \frac{18}{9}, \frac{16}{8}, \frac{14}{7}, \frac{12}{6}, \frac{21}{3}, \frac{19}{1}, \frac{15}{5}, \frac{4}{2}, \frac{17}{13}\right\}.$$

Par ailleurs, il est impossible d'avoir 11 fractions entières. En effet, il y a 3 nombres premiers qui n'ont aucun multiple plus petit que 22 : 19, 17 et 13. Ainsi la seule façon qu'a l'un de ces trois nombres de faire une fraction entière est avec le nombre 1, qui ne peut être utilisé qu'avec un seul de ces trois nombres.

Commentaire des correcteurs : L'exercice à été globalement très bien réussi. Cependant certains élèves, bien qu'ayant constaté l'importance de 13, 17 et 19, n'ont pas pensé à en associer 2 dans la même fraction, et n'obtiennent donc que 9 fractions entières, ce qui est bien dommage. D'autres élèves se sont contentés d'avoir une configuration à 10 fractions sans justification qu'elle soit optimale. Enfin, nous rappelons que $\frac{19}{8}$ n'est définitivement pas un entier.

Exercice 11
Soit $a_1, \ldots, a_{100}$ 100 entiers distincts tels que $1 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_{100} \leq 400$.

Pour tout entier i tel que $1 \leq i \leq 99$, on pose $d_i = a_{i+1} - a_i$. Montrer qu'il y a au moins 15 nombres parmi $d_1, d_2, \ldots, d_{99}$ qui sont égaux.

Solution de l'exercice 11
Procédons par l'absurde, en supposant donc qu'il y a à chaque fois au plus 14 d_i égaux. Soit e_i la liste des d_i, mais réordonnée, de sorte que $e_i \leq e_j$ si $i \leq j$.
Alors $e_i \geq 1$ pour tout i, mais on ne peut pas avoir $e_{15} = 1$ d'après notre hypothèse, donc $e_{15} \geq 2$. Ici encore, si $e_{29} = 2$ on devrait avoir $e_{15} = e_{16} = \cdots = e_{29} = 2$, en contradiction avec notre hypothèse. Ainsi $e_{29} \geq 3$. En continuant ainsi, on obtient $e_{14k+1} \geq k + 1$, et en particulier $e_{14k+i} \geq k + 1$ pour tout $1 \leq i \leq 14$.
À présent, comme

$$a_{100} - a_1 = d_1 + d_2 + \cdots + d_{99} = e_1 + e_2 + \cdots + e_{99},$$

on a

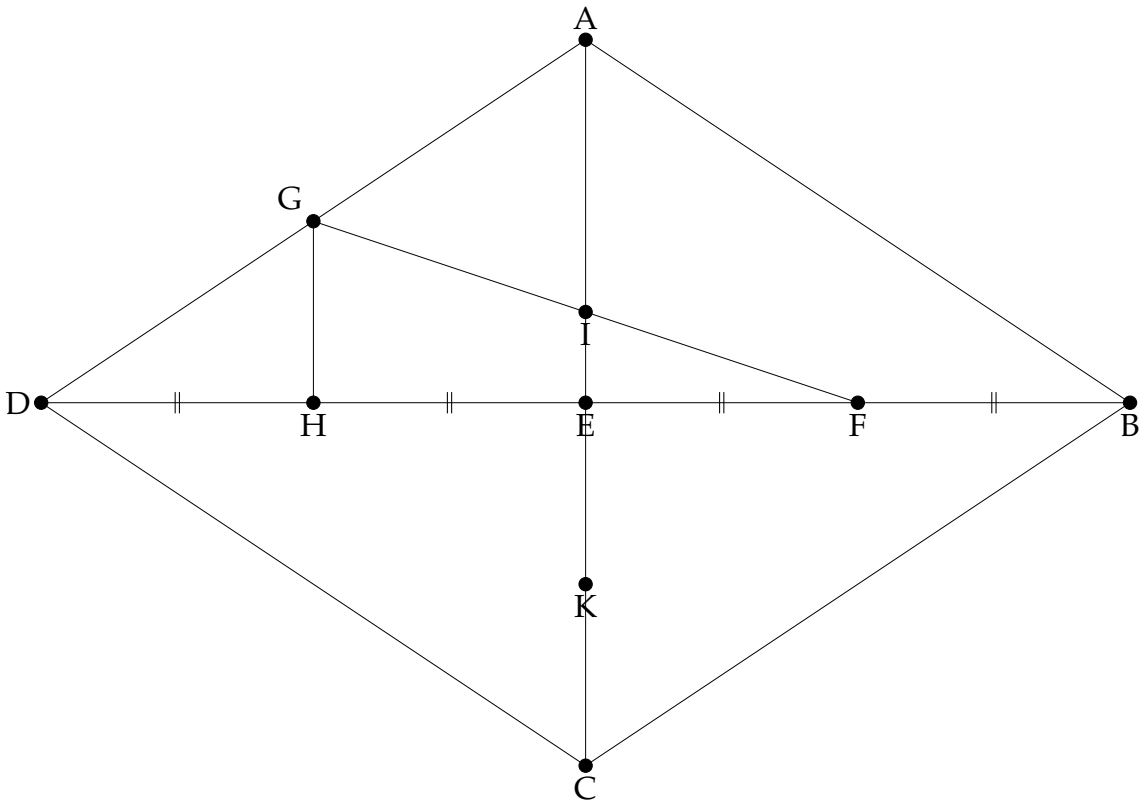
$$a_{100} - a_1 \geq \underbrace{1 + \cdots + 1}_{14 \text{ fois}} + \underbrace{2 + \cdots + 2}_{14 \text{ fois}} + \cdots + \underbrace{7 + \cdots + 7}_{14 \text{ fois}} + 8 = 14(1 + 2 + \cdots + 7) + 8 = 14 \times 28 + 8 = 400.$$

Cependant, comme $1 \leq a_1 < a_{100} \leq 400$, on a $a_{100} - a_1 \leq 399$, ce qui est une contradiction avec notre observation précédente.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été plutôt bien réussi. Cependant, très peu d'élèves ont obtenu le dernier point du barème car beaucoup ne justifiaient pas dans quelle mesure le cas optimal permettait de résoudre le cas général. La grande majorité des élèves a trouvé la configuration optimale mais malheureusement beaucoup ont fait des erreurs de calculs sur la somme et n'ont donc pas obtenu les points associés au calcul. Un nombre conséquent d'élèves a aussi mal interprété la question, et la manière dont les 15 d_i étaient égaux deux à deux, croyant que cela signifiait que tous les autres devaient être distincts deux à deux.

Exercice 12
Soit $ABCD$ un losange, et soit E le point d'intersection des diagonales. Soit F le milieu du segment $[BE]$, et G le milieu du segment $[AD]$. Soit I le point d'intersection des droites (FG) et (AC), et soit K le symétrique de A par rapport au point I. Que vaut $\dfrac{EK}{EA}$?

Solution de l'exercice 12



Notons que par symétrie, $EK = IK - IE = AI - IE = AE - 2IE$. Il suffit donc d'exprimer IE en fonction de EA pour calculer le rapport EK/EA.

Introduisons H le milieu du segment $[DE]$. Ainsi $HE = \frac{DE}{E} = \frac{BE}{2} = EF$, donc E est le milieu de $[HF]$.

Le théorème de la droite des milieux nous donne que (HG) et (EA) sont parallèles. Ainsi (EI) et (HG) sont parallèles, donc comme E est le milieu de $[HF]$, par le théorème de la droite des milieux, I est le milieu de $[FG]$ et $EI = \frac{HG}{2}$. Par le théorème de la droite des milieux dans le triangle AEG, $GH = \frac{AE}{2}$, donc $EI = \frac{AE}{4}$.

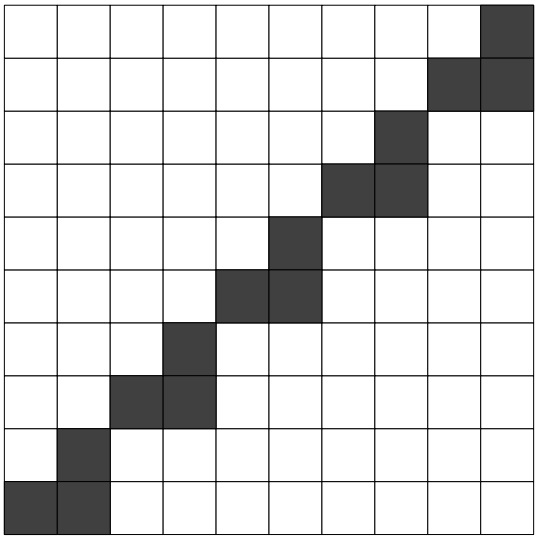
Ainsi $EK = AE - 2IE = \frac{AE}{2}$ donc $\frac{AE}{AK} = \frac{1}{2}$.

Commentaire des correcteurs : La plupart des élèves avaient une bonne intuition de l'exercice et arrivaient à trouver ou observer le résultat. Il faut cependant faire attention à bien justifier ses réponses : même quand des droites sont parallèles ou perpendiculaires sur la figure, il faut le justifier. Cela peut souvent se faire par le théorème de Thalès ou sa version raffinée de la droite des milieux. Certains élèves ont remarqué à juste titre que l'exercice pouvait se traiter de manière analytique. Cependant, il faut faire très attention car les repères naturels peuvent ne pas être orthonormés et on ne peut donc pas utiliser la formule habituelle des normes qui repose sur Pythagore.

Exercice 13
On considère une grille 10×10, composée de 100 cases. Les lignes de la grille sont numérotées de haut en bas dans l'ordre de 1 à 10 : la ligne la plus haute a le numéro 1, la plus basse le numéro 10. Les colonnes de la grille sont numérotées de gauche à droite dans l'ordre de 1 à 10 : la colonne la plus à gauche a le numéro 1, la plus à droite le numéro 10. Martin colorie certaines cases de la grille, de sorte que pour toute case coloriée c, il existe au plus une case coloriée différente de c dont le numéro de la colonne est supérieur ou égal à celui de la colonne de c et dont le numéro de la ligne est supérieur ou égal à celui de la ligne de c.

Quel est le nombre maximal de cases que Martin peut colorier ?

Solution de l'exercice 13
On montre que la réponse est 15.
Tout d'abord, on peut exhiber un coloriage avec 15 carrés coloriés :



Dans ce coloriage, toutes les cases sur la diagonale voient exactement une autre case coloriée, et les cases en dessous de la diagonale n'en voient aucune, ce coloriage est donc valide.

Supposons à présent qu'on ait un coloriage valide avec 16 cases (si on en a plus, on prend 16 cases quelconques parmi les cases coloriées).
Comme il est clairement impossible d'avoir trois cases coloriées sur une même ligne ou colonne, par le principe des tiroirs, il y a au moins 6 lignes et 6 colonnes qui ont deux cases coloriées. Considérons l'une de ces lignes, mettons la ligne i. Si on considère la case la plus à gauche parmi les deux cases coloriées de la ligne i, on remarque que celle-ci ne peut avoir une autre case coloriée sur la même colonne qu'elle, mettons j. En effet, si cette éventuelle deuxième case est au-dessus de (i, j), alors la deuxième case verrait les deux cases coloriées de la ligne i, et si la deuxième case était en dessous de (i, j), (i, j) verrait à a fois cette case et la deuxième case de la ligne i. Dans tous les cas on aurait une contradiction : il n'y a qu'une seule case coloriée dans la colonne j.
Ce raisonnement étant valide pour chacune des 6 lignes sur lesquelles on a deux cases coloriées, on a donc 6 colonnes avec une seule case coloriée. Mais on avait dit qu'on avait 6 colonnes avec deux cases coloriées, contradiction.
Le nombre maximal est donc bien 15.

Solution alternative : On prouve de même qu'il est possible de colorier 15 cases via la configuration précédente.

Il est clairement impossible d'avoir 3 cases dans une même ligne. Supposons qu'il existe deux lignes, a et b contenant chacune deux cases coloriées et telles que la ligne a est au dessus de ligne b. Alors la case de gauche de la ligne a doit être strictement plus à droite que la case de droite de la ligne b. En effet, si ce n'était pas le cas, la case verrait à la fois la case de droite de la ligne a, et la case de gauche de la ligne b, ce qui est impossible.

Ainsi, toutes les cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées sont dans différentes colonnes. Il y a au plus 10 cases appartenant à des lignes contenant 2 cases coloriées, donc au plus 5 lignes contenant deux cases coloriées.

Ainsi il y a au plus $5 + 5 \times 2 = 15$ cases coloriées.

Le nombre maximal est donc bien 15.

Commentaire des correcteurs : La borne de 15 et la construction ont été trouvé par un nombre important d'élèves, mais peu parmi eux sont parvenus à en démontrer l'optimalité. On compte par ailleurs de nombreuses copies prétendant résoudre l'exercice mais contenant des preuves erronées. Il faudrait retenir que dans ce genre d'exercice dont la résolution se décompose en une partie construction et une partie preuve d'optimalité, les deux parties sont indépendantes : la construction va donc rarement servir à la résolution. Nombreux sont les élèves ayant invoqué un argument du style : « on ne peut plus rajouter de cases à ma construction donc celle-ci est optimale », ce qui est bien entendu faux. On ne peut par exemple pas non plus rajouter de case coloriée à la configuration obtenue en coloriant uniquement le coin supérieur gauche et le coin inférieur droit. Nombreux sont ceux qui élaborent un procédé de construction en disant qu'à chaque fois ils font le meilleur choix, sans aucune preuve, et à la fin clament qu'on ne pouvait faire plus que 15 cases (ou parfois 13, ou 19, ce qui montre directement que l'argument ne fonctionne pas). Une autre erreur courante a été de prétendre que la configuration optimale s'obtenait nécessairement en rajoutant des cases coloriées à une configuration maximisant le nombre de cases sans qu'une d'entre elles n'aie un numéro de ligne et de colonne supérieurs à ceux d'une autre : cela n'a pas de raison d'être vrai.

Exercice 14
Soit n un entier strictement positif. Aline souhaite écrire $2n$ nombres réels au tableau de sorte que

— les $2n$ nombres écrits ne sont pas tous égaux,

— si Aline entoure n nombres écrits au tableau, quel que soit le choix d'Aline, la somme des n nombres entourés est égale au produit des n nombres qui ne sont pas entourés.

Pour quelles valeurs de n Aline peut-elle réaliser son souhait ?

Solution de l'exercice 14
Soit n un entier pour lequel Aline peut réaliser son souhait, et $x_1, \dots x_{2n}$ les $2n$ nombres écrits au tableau. Puisqu'ils ne sont pas tous égaux il y en a deux qui sont différents, supposons sans perte de généralités qu'il s'agit de x_1 et x_2.
Prenons maintenant $i, j \geq 3$ deux nombres différents, on montre que $x_i = x_j$.
Si Aline entoure x_1 et $n-1$ nombres parmi $x_3, \dots x_{2n}$, on doit avoir $x_1 + S = x_2 \times P$, où S est la somme des $n-1$ nombres entourés qui ne sont pas x_1, et P est le produit des $n-1$ nombres autres que x_2 qui n'ont pas été entourés. En entourant x_2 et les mêmes $n-1$ nombres, on obtient maintenant $x_2 + S = x_1 \times P$.
En soustrayant les deux équations ainsi obtenues, on a $x_1 - x_2 = P(x_2 - x_1)$.
Comme $x_1 \neq x_2$, on en déduit $P = -1$. Comme ce raisonnement est faisable pour n'importe quelle répartition de $x_3, \dots, x_{2n}$ en deux paquets de $n-1$ éléments, tout produit de $n-1$ éléments parmi $x_3, \dots x_{2n}$ est égal à -1. En particulier $x_3 x_5 x_6 \cdots x_{n+2} = x_4 x_5 x_6 \cdots x_{n+2}$, et enfin $x_3 = x_4$ (le produit est bien non nul). En répétant ce raisonnement, on obtient que $x_3 = x_4 = \cdots = x_{2n}$. De plus, on doit avoir $x_3^{n-1} = -1$, mais ce n'est possible que si n est pair.

Réciproquement, si n est pair, on a déjà montré que $x_3 = x_4 = \cdots = x_{2n} = -1$. Au moins l'un des deux nombres x_1 et x_2 est différent de -1, mettons qu'il s'agisse de x_1. Alors le même raisonnement que précédemment en remplaçant x_2 par x_3 nous donne qu'on a également $x_2 = -1$. À présent, il ne reste plus qu'à trouver s'il y a une valeur possible pour x_1.
Si Aline n'entoure pas x_1, on trouve $-n = (-1)^{n-1} x_1$. Comme n est pair, cela impose $x_1 = n$. Il ne reste plus que le cas où Aline entoure x_1. On a alors $n + (n-1) \times (-1) = (-1)^n$, et les deux côtés de l'équation valent bien 1.
Ainsi, les nombres pour lesquels Aline réalise son souhait sont précisément les nombres pairs.

Solution alternative : Pour une liste X de nombres, on note $S(X)$ la somme des nombres, et $P(X)$ le produit des nombres. On suppose qu'Aline peut écrire ses $2n$ nombres, on va chercher des résultats qui pourraient nous donner des informations sur quels n pourraient marcher. On note Z la liste des $2n$ nombres qu'Aline a écrit.
Avec ces notations, si X est n'importe quelle liste de n éléments de Z, on a donc

$$S(X) = P(Z \setminus X) \text{ et } S(Z \setminus X) = P(Z).$$

Ainsi, on a $S(X) + S(Z \setminus X) = S(Z)$ et $S(X) \times S(Z \setminus X) = P(X) \times P(Z \setminus X) = P(Z)$, d'où $S(X)$ et $S(Z \setminus X)$ sont les deux racines du polynôme $T^2 - S(Z)T + P(Z)$.
Quand X varie, $S(X)$ prend donc au plus deux valeurs distinctes : celle où X contient les n valeurs minimales et celle où X contient les n valeurs maximales.
Par conséquent, partant des valeurs minimales, si on enlève le minimum et qu'on le remplace

par le maximum, on a déjà n valeurs maximales. Ainsi, les nombres qu'on n'a pas changés sont à la fois parmi les n plus petits et les n plus grands : ils sont tous égaux. On a donc $2n-2$ nombres égaux, encadrés par un maximum et un minimum. Si ces trois valeurs étaient distinctes, on pourrait créer trois sommes différentes ($n-1$ nombres du milieu, et on complète avec les trois valeurs différentes possibles). Donc ou alors le minimum, ou alors le maximum doit être égal aux $2n-2$ nombres égaux : on a même $2n-1$ nombres égaux.

Mettons qu'on a $2n-1$ fois le nombre A, et une fois le nombre B.
Alors on doit avoir $nA = A^{n-1}B$ et $(n-1)A + B = A^n$. Mais alors $A \neq 0$, et $n = A^{n-1}(A^{n-1} - (n-1))$.
On reconnaît là un polynôme de degré 2 en A^{n-1}, qui vaut donc n ou -1.
Le cas $A^{n-1} = n$ est impossible, car l'équation $nA = A^{n-1}B$ deviendrait $A = B$, qui est exclu car alors tous nos nombres seraient égaux. Ainsi, $A^{n-1} = -1$, donc n est pair, $A = -1$ et $B = n$.

Mais alors les deux équations $nA = A^{n-1}B$ et $(n-1)A + B = A^n$ sont satisfaites, donc si Aline choisit ces nombres, elle gagne.
Les nombres pour lesquels Aline peut réaliser son souhait sont donc précisément les nombres pairs.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile. La plupart des solutions se ramenaient plus ou moins directement à la solution 1 du corrigé. Il y a eu un certain nombre de copies qui divisaient par zéro ($a \cdot b = 0 \iff a = 0$ OU $b = 0$). D'autres copies ont également utilisé des inégalités, qu'elles ont multipliées entre elles sans se soucier du signe (impossible pour des nombres négatifs). Attention à bien lire l'énoncé, un bon nombre de copies ont mal lu certaines parties de l'énoncé.

Exercice 15
Soit $n \geq 2$ un entier fixé. Un nombre S est dit *spécial* si pour tout entier strictement positif k et pour toute décomposition de n en somme de k entiers strictement positifs

$$n = n_1 + n_2 + \cdots + n_k$$

avec $n_1 \leq n_2 \leq \cdots \leq n_k$, on peut trouver des entiers $0 \leq a_1 < a_2 < \cdots < a_k$ tels que

$$a_1 n_1 + a_2 n_2 + \cdots + a_k n_k = S.$$

a) Montrer que $n^2 - 2n$ n'est **pas** spécial.

b) Trouver tous les nombres spéciaux.

Solution de l'exercice 15
a) Posons $k = 2$, $n_1 = 1$ et $n_2 = n - 1$.
Si $n^2 - 2n$ était spécial, on aurait $a_1 < a_2$ tels que $n^2 - 2n = a_1 + (n-1)a_2$.
Cependant, comme $n^2 - 2n = (n-2)(n-1) + (n-2)$, le reste de la division euclidienne de $n^2 - 2n$ par $n - 1$ est $n - 2$.
Autrement dit, $n^2 - 2n - (n-2) = a_1 - (n-2) + (n-1)a_2$ est divisible par $n-1$, et donc $a_1 - (n-2)$ est multiple de $n - 1$. Si on avait $a_1 < n - 2$, on devrait donc avoir $a_1 - (n-2) = \alpha(n-1) < 0$, et donc $\alpha < 0$. Cela entraînerait $\alpha \leq -1$, puis $a_1 < 0$, une contradiction.
Ainsi $a_1 \geq n - 2$, et comme $a_2 > a_1$, on a $a_2 \geq n - 1$. Mais alors

$$n^2 - 2n = a_1 + (n-1)a_2 \geq n - 2 + (n-1)^2 > n^2 - 2n,$$

une contradiction. Ainsi $n^2 - 2n$ n'est pas spécial.

b) Notons que pour $k = 1$, on trouve qu'un nombre spécial est multiple de n.
De plus, si S est spécial, $S + \alpha n$ l'est également pour tout $\alpha \in \mathbf{N}$. En effet, soit $n = n_1 + \cdots + n_k$ une décomposition de n, et soit $a_1, \ldots, a_k$ les entiers donnés par le fait que S est spécial, c'est-à-dire $0 \leq a_1 < \cdots < a_k$ et $S = a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k$. Mais alors $S + \alpha n = a_1 n_1 + \cdots + a_k n_k + \alpha(n_1 + \cdots + n_k) = (a_1 + \alpha)n_1 + \cdots + (a_k + \alpha)n_k$.
Comme de plus $a_1 + \alpha < \cdots < a_k + \alpha$, $S + \alpha n$ est bien spécial.

Donc si on avait un multiple de n plus petit que $n^2 - 2n$ qui était spécial, $n^2 - 2n$ serait également spécial, donc aucun nombre plus petit que $n^2 - 2n$ n'est spécial.
Par ailleurs, si on venait à montrer que $n^2 - n$ est spécial, on aurait trouvé tous les nombres spéciaux, puisque les nombres qui ne sont pas multiples de n ne sont pas spéciaux, les nombres multiples de n plus petits que $n^2 - 2n$ ne sont pas spéciaux, et les nombres multiples de n plus grands que $n^2 - n$ seraient spéciaux.

Soit $n = n_1 + \cdots + n_k$ une décomposition de n. Alors on peut écrire

$$\begin{aligned} n(n-1) &= (n_1 + \cdots + n_k)(n_1 + \cdots + n_k - 1) \\ &= n_1 \underbrace{(n_1 - 1)}_{a_1} + n_2 \underbrace{(n_2 + 2n_1 - 1)}_{a_2} + \cdots + n_k \underbrace{(n_k + 2n_{k-1} + \cdots + 2n_1 - 1)}_{a_k} \end{aligned}$$

Comme $n_1 \geq 1$, $a_1 \geq 0$, et comme $a_{i+1} - a_i = n_{i+1} + n_i > 0$, on a bien $a_{i+1} > a_i$, donc $n(n-1)$ est spécial.

Ainsi, les nombres spéciaux sont exactement les multiples de n plus grands que $n^2 - n$.

Solution alternative : La seule partie de la solution qui change est la preuve que $n(n-1)$ est spécial, qu'on fait ici par récurrence forte sur n.

Pour $n = 2$, on a $n^2 - n = 2$, et deux décompositions possibles pour 2 : 2 et 1 + 1. Il suffit de prendre $a_1 = 1$ pour la première, et $a_1 = 0, a_2 = 2$ pour la deuxième.

Supposons à présent que pour un certain n, pour tout $2 \leq m < n$, $m^2 - m$ soit spécial. On montre que $n^2 - n$ est spécial pour n.
Commençons par écarter le cas $k = 1$: dans ce cas il suffit de prendre $a_1 = n - 1$.
On suppose donc $k \geq 2$. Alors $n - n_1$ est plus grand que 2. En effet, si $n = 3$ on doit avoir $n_1 = 1$ si $k \geq 2$, et comme $n \geq kn_1 \geq 2n_1$, on a $n - n_1 \geq 2$ si $n \geq 4$.
Notons que

$$\begin{aligned}(n-n_1)^2 - (n-n_1) &= n^2 - n - 2n_1(n-n_1) - n_1(n_1-1)\\ \iff n^2 - n &= (n-n_1)(n+n_1-1) + n_1(n_1-1),\end{aligned}$$

et d'après l'hypothèse de récurrence, $(n-n_1)(n-n_1-1)$ est spécial pour $n - n_1$. En particulier, pour la décomposition $n - n_1 = n_2 + \cdots + n_k$, on a des entiers b_i, $2 \leq i \leq k$ tels que $0 \leq b_2 < \cdots < b_k$ et

$$(n-n_1)(n-n_1-1) = b_2n_2 + \cdots + b_kn_k.$$

Mais alors

$$(n-n_1)(n+n_1-1) = n_2(b_2+2n_1) + n_3(b_3+2n_1) + \cdots + n_k(b_k+2n_1),$$

et donc

$$n(n-1) = n_1\underbrace{(n_1-1)}_{a_1} + n_2\underbrace{(b_2+2n_1)}_{a_2} + n_3\underbrace{(b_3+2n_1)}_{a_3} + \cdots + n_k\underbrace{(b_k+2n_1)}_{a_k}.$$

On a clairement $a_2 < a_3 < \cdots < a_k$, et comme de plus $b_2 \geq 0$ et $n_1 \geq 1$, on a bien $0 \leq n_1 - 1 < b_2 + 2n_1$. Ainsi $n^2 - n$ est bien spécial, et les nombres spéciaux sont exactement les multiples de n plus grands que $n^2 - n$.

Commentaire des correcteurs : Un exercice difficile, très peu d'élèves ont réussi à obtenir des points. Nombreux sont ceux qui ont mal compris l'énoncé, surtout dans le a). Il ne s'agissait pas de trouver un n tel que $n^2 - 2n$ n'est pas un nombre spécial, mais de montrer que, quel que soit n, ce nombre n'est jamais spécial. D'autres ont écrit $n^2 - 2n = (n-2)n_1 + \cdots + (n-2)n_k$ et ont conclu que $n^2 - 2n$ n'était pas spécial, car on avait $a_1 = \cdots = a_n$, en oubliant que d'autres décompositions pourraient totalement être possibles. Tout de même, un certain nombre de participants a intuité que la décomposition $n = 1 + (n-1)$ serait la décomposition problématique, parfois sans aller au bout du raisonnement. Enfin, le b) a été bien traité les très rares fois où il a été traité.

III. Groupe A

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique & Algèbre 44
1 Découverte des maths (Raphael) 44
2 Divisibilité et PGCD (Aline) 44
3 Inégalités 1 (Rémi) 56
4 Nombres premiers (Emilhan) 61
5 Inégalités 2 (Martin & Georges) 61
6 Modulos (Elsa) 69
7 Récurrence (Elsa) 74
8 Équations diophantiennes et factorisations (Théo & Gaspard D.) 82
2 Entraînement de mi-parcours 87
3 Deuxième partie : Géométrie & Combinatoire 90
1 Chasse aux angles (Pierre-Marie) 90
2 Principe des tiroirs (Maena) 90
3 Invariants/coloriages (Gaëtan & Vincent) 94
4 Angle tangent (Benoît) 101
5 Jeux (Théo & Augustin) 112
6 Triangles semblables (Rémi et Éva) 122
7 TD pot pourri/Pôle Sud (Antoine & Gaspard C.) 127
8 Principe de l'extremum (Aimeric) 138
4 Entraînement de fin de parcours 141

1 Première partie : Arithmétique & Algèbre

1 Découverte des maths (Raphael)

Reprise d'éléments de cours des polys des années précédentes.

2 Divisibilité et PGCD (Aline)

Introduction à la théorie des nombres

Les nombres sont l'objet mathématique par excellence, et leur étude est une très ancienne branche des mathématiques : il y a des millénaires, elle a intéressé les Babyloniens, les Grecs, les Égyptiens, les Chinois... On a depuis distingué plusieurs catégories de nombres, mais la plus immédiate, la plus intuitive, est celle des **entiers naturels**. Ce sont ceux qui nous permettent de compter des objets indivisibles : 0, 1, 2, ... Le cadre de la *théorie des nombres* est légèrement plus vaste : on va ici parler des propriétés des **nombres entiers relatifs**, donc positifs ou négatifs.

Définition 1 (Nombres entiers naturels et nombres entiers relatifs)**.**

1. On appelle $\mathbb{Z}$ l'ensemble des **(nombres) entiers (relatifs)** $\{\dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots\}$.
2. On note de la même façon $\mathbb{Z}^*$ l'ensemble des **(nombres) entiers (relatifs) non nuls**.
3. On appelle $\mathbb{N}$ l'ensemble des **(nombres) entiers naturels** $\{0, 1, 2, \dots\}$. Ce sont exactement les entiers (relatifs) positifs.
4. On note $\mathbb{N}^*$ l'ensemble des entiers naturels non nuls $\{1, 2, \dots\}$, autrement dit les entiers (relatifs) strictement positifs.

On appelle parfois *arithmétique* la théorie des nombres et vous verrez probablement très souvent cette appellation dans des cours ou des livres.

Multiples et diviseurs

Commençons par quelques définitions fondamentales. Dans la suite, pour plus de concision, on omettra le plus souvent le symbole de multiplication $\times$.

Exemple 2 (Notation concise de la multiplication)**.**
Soit $a, b, c, d \in \mathbb{Z}$. On utilisera les notations suivantes.

1. $ab = a \times b$
2. $2a = 2 \times a$
3. $4a(b + c)(d - 1) = 4 \times a \times (b + c) \times (d - 1)$

On utilisera aussi la notion de valeur absolue sur les entiers relatifs :

Définition 3 (Valeur absolue)**.**
Soit $a \in \mathbb{Z}$. On définit la valeur absolue $||a||$ de a par :

Si $a \geqslant 0$: $||a|| = a$

Si $a < 0$: $||a|| = -a$

Ainsi, $||a|| \in \mathbb{N}$.

Pour rappel, les opérations sur les nombres relatifs fonctionnent de la manière suivante :

Rappel 4 (Nombres relatifs et opérations)**.** Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On a

1. $a + (-b) = a - b$
2. $a - (-b) = a + b$
3. $a \times (-b) = -ab$
4. $(-a) \times (-b) = -a \times (-b) = -(-ab) = ab$

Si les nombres entiers nous intéressent, c'est parce que l'on dispose sur eux de deux opérations fondamentales : l'addition et la multiplication. On peut y rajouter la soustraction, qui est en fait l'addition d'un nombre de signe opposé. La division est un peu à part, puisqu'en général diviser un entier par un autre ne donne pas un entier. Cependant, ces deux opérations fondamentales d'addition et de multiplication permettent de définir la notion de diviseur d'un nombre.

Définition 5 (Diviseur d'un entier relatif)**.**
Soit deux nombres $a, d \in \mathbb{Z}$. On dit que d est un **diviseur** de a lorsqu'il existe un entier $k \in \mathbb{Z}$ tel que $a = dk$. Dans ce cas, on note

$$d \mid a$$

et on dit aussi que a est un **multiple** de d.

Exemple 6 (Diviseurs et multiples)**.**
Soit $a \in \mathbb{Z}$ quelconque.

1. a est un diviseur de lui-même puisque $a \times 1 = a$.
2. 1 est un diviseur de a.
3. a divise 0 puisque $0 \times a = 0$.
4. Le seul multiple de 0 est 0.
5. Le seul diviseur positif de 1 est 1.
6. Si d est un diviseur de $a \in \mathbb{Z}$, alors on a aussi $-d \mid a$, $d \mid -a$, $-d \mid -a$ et $||d|| \mid ||a||$. Pour cette raison, quand on parle de divisibilité, on se restreint souvent aux entiers naturels puisque l'on peut mettre des valeurs absolues partout.
7. Si $d \mid a$ et $d \neq 0$, alors $||d|| \leqslant ||a||$.

Exercice 1
Trouver tous les diviseurs (positifs) des nombres suivants :

a 72

b 2023

c 2048

d 189

Solution de l'exercice 1

a $1, 2, 3, 4, 6, 8, 8, 12, 24, 36, 72$

b $1, 7, 17, 219, 289, 2023$

c $1, 2, 4, 8, 16, 32, 64, 128, 256, 1024, 2048$

d $1, 3, 7, 9, 21, 27, 63, 189$

La relation de divisibilité $|$ a donc les propriétés suivantes.

Proposition 7 (Relation de divisibilité)**.**

Réflexivité : Pour tout $a \in \mathbb{Z}$, $a \mid a$.

Transitivité : Pour tout $a, b, c \in \mathbb{Z}$,

$$a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid c \quad \Rightarrow \quad a \mid c$$

Antisymmétrie (sur $\mathbb{N}$) : Pour tout $a, b \in \mathbb{Z}$,

$$a \mid b \quad \text{et} \quad b \mid a \quad \Leftrightarrow \quad \|a\| = \|b\|$$

En particulier, si a et b sont de même signe et se divisent l'un l'autre, alors ils sont égaux.

Les propriétés 7 caractérisent le fait que la relation de divisibilité est une *relation d'ordre* sur $\mathbb{N}$. Il n'est pas nécessaire de retenir le vocabulaire, mais les trois propriétés sont indispensables.

Exercice 2
Trouver le nombre de diviseurs (positifs) des nombres suivants :

a 2×2023

b $a \times b$ si a et b sont premiers entre eux et ont respectivement n_a et n_b diviseurs.

c $a_1 \times a_k$ si les a_i sont premiers entre eux deux à deux et ont $n_1, \ldots, n_k$ diviseurs.

La formule trouvée en (c) fonctionne-t-elle sans l'hypothèse d'avoir des nombres deux à deux premiers entre eux ? Pourquoi ?

Solution de l'exercice 2

a Les diviseurs de 2×2023 sont exactement ceux de 2023, auxquels on rajoute leurs doubles. Comme 2023 a 6 diviseurs, 2×2023 en a 12.

b Chaque diviseur de $a \times b$ s'obtient en multipliant un diviseur d_a de a par un diviseur d_b de b (les diviseurs de a s'obtiennent en multipliant ceux de a par $d_b = 1$ par exemple). Le fait que a et b soient premiers entre eux assure que l'on ne compte pas deux fois le même diviseur. Au total, $a \times b$ a donc $n_a n_b$ diviseurs.

c On applique le même raisonnement qu'en (b) et on trouve que le produit des a_i possède $n_1 \ldots n_k$ diviseurs.

Si l'on prend des nombres non premiers entre eux, la formule ne fonctionne pas car on compte plusieurs fois le même diviseur. Par exemple, 6 a 4 diviseurs et 2 en a 2, mais 12 a 5 diviseurs et pas 8. En effet, si l'on écrit tous les nombres de la forme $d_a \times d_b$ avec $d_a \mid 6$ et $d_a \mid 2$, on obtient les nombres $1 \times 1 = 1, 1 \times 2 = 2, 2 \times 1 = 2, 2 \times 2 = 4, 3 \times 1 = 3, 3 \times 2 = 6, 6 \times 1 = 6, 6 \times 2 = 12$.

Tout comme on peut simplifier les relations d'égalité par soustraction ou division, on peut simplifier les relations de divisibilité sous certaines conditions.

Proposition 8 (Simplifier une relation de divisibilité)**.**
Soit $a, b, n \in \mathbb{Z}$ tel que $n \neq 0$. On a alors

$$a \mid b \quad \Leftrightarrow \quad an \mid bn$$

L'ensemble des multiples d'un nombre d est noté $d\mathbb{Z}$:

$$d\mathbb{Z} = \{\dots, -2d, -d, 0, d, 2d, \dots\}$$

C'est un ensemble pratique puisque l'on remarque que la somme ou la différence de deux multiples de a est encore un multiple de a, ce qui permet de factoriser une somme par un diviseur commun à chacun des termes.

Exemple 9 (Factorisation)**.**

1. dk + dl = a(k+l)
2. dk + d + dl + 3dm = d(k+1+l+3m)
3. ak+al+bk+bl = a(k+l)+b(k+l) = (a+b)(k+l)

La factorisation est souvent un outil très utile lorsque l'on cherche les diviseurs d'une expression.

Exercice 3 (Identité remarquable)

a Soit $a \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}$. Montrer que

$$a^{n+1} - 1 = (a-1)(1 + a + a^2 + \cdots + a^{n-1} + a^n)$$

b En déduire tous les entiers n tels que le nombre $u_n = 100\dots001$ (écrit avec n zéros) soit un multiple de 11.

Solution de l'exercice 3

a En développant le produit à droite, on obtient

$$a(1 + a + \cdots + a^n) + a(1 + a + \cdots + a^n) = (a + a^2 + \cdots + a^{n+1}) - (1 + a + \cdots + a^n) = a^{n+1} - 1$$

b Si on applique l'identité avec $a = (-b)$ et que n est pair, on obtient (après multiplication des deux membre par -1)

$$b^{n+1} + 1 = (b+1)(1 - b + b^2 - \cdots - b^{n-1} + b^n)$$

Avec $b = 10$, le premier membre vaut u_n et le premier facteur du membre de droite est 11. Ainsi, on sait déjà que tous les n pairs conviennent. Si n est impair, il s'écrit $n = 2k + 1$ pour un certain entier k. On sait que u_{2k} est un multiple de 11. Or

$$u_n - u_{2k} = 10^{n+1} - 10^n = 10^n \times 9$$

qui n'est pas un multiple de 11.

PGCD et algorithme d'Euclide

On a vu que deux nombres $a, b \in \mathbb{Z}$ peuvent posséder des diviseurs communs. En fait, puisque 1 est toujours un diviseur de n'importe quel nombre relatif, deux nombres ont toujours au moins 1 comme diviseur commun. De plus, ces diviseurs communs sont tous nécessairement plus petits (en valeur absolue) que le plus petit des deux nombres, sauf lorsque $a = b = 0$. Cela nous dit qu'il existe un *plus grand diviseur commun* à a et b.

Définition 10 (Plus Grand Commun Diviseur)**.**

1. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On nomme **Plus Grand Commun Diviseur** (PGCD) de a et b et on note $a \wedge b$ le plus grand entier naturel d qui divise à la fois a et b. Dans le cas où $a = b = 0$, il n'est pas vraiment défini, et on pose souvent par convention $0 \wedge 0 = 0$.
2. Plus généralement, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, alors on note leur PGCD $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ le plus grand entier naturel qui les divise tous.

Le PGCD a les propriétés suivantes, généralisables à une famille d'entiers $a_1, \ldots, a_n$.

Proposition 11 (Proriétés du PGCD)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

i Dans le cas non dégénéré où a, b sont non nuls, on a l'encadrement

$$1 \leqslant a \wedge b \leqslant \min(\|a\|, \|b\|)$$

ii Si d est un diviseur commun à a et b, alors $d \mid a \wedge b$. Comme la réciproque est immédiate, on a en fait l'équivalence

$$d \mid a \quad \text{et} \quad d \mid b \qquad \Leftrightarrow \qquad d \mid a \wedge b$$

Exemple 12.

1. $a \wedge 1 = 1$
2. $a \wedge 0 = a$
3. $a \wedge a = a$
4. $a \wedge b = a \quad \Leftrightarrow \quad a \mid b$

Pour trouver le PGCD de deux entiers, il existe un algorithme simple, l'algorithme d'Euclide.

Rappel 13 (Division Euclidienne)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que $0 \leqslant r < b$ et

$$a = qb + r$$

On appelle q le quotient de la division Euclidienne de a par b et r son reste.

La division Euclidienne permet d'introduire le lemme suivant. Notons qu'il n'est pas nécessaire que q et r soient le quotient et le reste de a par b, mais qu'il s'applique en particulier dans ce cas.

Lemme 14 (Division euclidienne et divisibilité)**.**
Soit $a, b, q, r, d \in \mathbb{Z}$ tel que $a = bq + r$. Alors d divise a et b si et seulement si d divise b et r. En particulier,

$$a \wedge b = b \wedge r$$

Nous pouvons maintenant comprendre l'algorithme.

Théorème 15 (Algorithme d'Euclide)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On suppose sans perte de généralité (quitte à échanger a et b et leurs signes, ce qui ne change rien à leur PGCD) que $0 \leqslant a \leqslant b$.

a On pose $a_0 = b$, $b_0 = a$.

b À l'étape $n \in \mathbb{N}^*$, on suppose que l'on a construit deux nombres $a_{n-1} \leqslant a_n$ et on écrit la division Euclidienne de a_{n-1} par a_n :

$$a_{n-1} = qa_n + a_{n+1}$$

c Si $a_{n+1} \neq 0$, on réitère l'étape (b). Sinon, alors on termine l'algorithme et on a $a_n = d$.

La preuve du théorème utilise aussi un joli principe très utile en théorie des nombres.

Lemme 16 (Principe de la descente infinie)**.**
Une suite strictement décroissante d'entiers naturels ne peut pas être infinie.

Démonstration (Algorithme d'Euclide). Tout d'abord, on utilise le lemme 16 pour vérifier que l'algorithme termine. En effet, si la suite $(a_n)_n$ n'atteint jamais 0, alors à partir du rang 1 elle forme une suite infinie d'entiers naturels strictement décroissante. Comme il n'existe pas de telle suite, nécessairement l'algorithme termine sur 0 à un certain rang N. On a alors, par construction de la suite, à chaque étape

$$a_{n-1} \wedge a_n = a_n \wedge a_{n+1}$$

Donc on peut écrire la chaîne d'égalités suivante

$$d = a \wedge b = a_1 \wedge a_0 = a_2 \wedge a_1 = \cdots = a_N \wedge 0 = a_N$$

Ce qui démontre que $a_N = a \wedge b$. □

Exercice 4
Trouver le PCGD des nombres suivants :

a 1617 et 1225

b 2023 et 111

c 589 et 6479

Solution de l'exercice 4

a $1617 \wedge 1225 = 9$

b $2023 \wedge 111 = 1$

c $589 \wedge 6479 = 589$

Exercice 5
Que dire d'un nombre n qui a un nombre impair de diviseurs ?

Solution de l'exercice 5
On peut regrouper les diviseurs de n par paire $(d, n/d)$. Si n n'est pas un carré, on a toujours $d \neq n/d$ donc un nombre pair de diviseurs. Si n est un carré, toutes les paires sont bien des paires de diviseurs distincts, sauf la paire $(\sqrt{n}, \sqrt{n})$. Cela fait donc un nombre impair de diviseurs. n est donc bien un carré.

Théorème de Bézout

La notion de diviseur commun et de plus grand diviseur commun permet de définir celle d'entiers premiers entre eux.

Définition 17 (Nombres premiers entre eux)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. On dit que

1. a et b sont **premiers entre eux** lorsque $a \wedge b = 1$, autrement dit il n'y a aucun diviseur non trivial commun à a et b.
2. $a_1, \ldots, a_n$ sont **premiers entre eux dans leur ensemble** lorsque $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n = 1$.
3. $a_1, \ldots, a_n$ sont **deux à deux premiers entre eux** lorsque pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i \wedge a_j = 1$.

Remarque 18.
Le seul entier premier avec lui-même est 1.

Dans le cas où l'on a plus de deux nombres, il faut faire attention à ne pas confondre les deux notions de *premiers entre eux deux à deux* et *premiers entre eux dans leur ensemble*. En effet, on a dans le cas général :

Proposition 19 (Premiers deux à deux ⇒ Premiers dans leur ensemble)**.**
Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Si ils sont premiers entre eux *deux à deux*, alors ils sont premiers entre eux *dans leur ensemble*.

Démonstration. Supposons que a_1, …, a_n sont premiers entre eux deux à deux. Alors le PGCD d de $a_1 \wedge \cdots \wedge a_n$ est un nombre qui divise $a_1, \ldots, a_{n-1}$ et a_n. En particulier d divise a_1 et a_2, donc divise $a_1 \wedge a_2 = 1$. Comme le seul diviseur positif de 1 est 1, $d = 1$. □

Attention, la réciproque est généralement fausse.

Exemple 20 (Contre-exemple)**.**
Les nombres 6, 10 et 15 sont premiers entre eux dans leur ensemble, mais pas premiers deux à deux.

Remarque 21 (Construire des entiers premiers entre eux)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}^*$ et $d = a \wedge b$. On peut donc écrire $a = dk$ et $b = dl$ avec $k, l \in \mathbb{Z}$. Les entiers k et l sont alors premiers entre eux. En effet, si $d' > 0$ est un diviseur commun à k et l, alors dd' est un diviseur commun à a et b. Mais d est le PGCD de a et b donc $dd' \mid d$. Ceci signifie que $d' = 1$ et que k et l sont premiers entre eux.

Il peut être long de calculer le PGCD de deux grands nombres a et b. Heureusement, on peut tester s'ils sont premiers entre eux en regardant leurs diviseurs.

Proposition 22.
Soit $a, b, a_1, \ldots, a_n, b_1, \ldots, b_m$ premiers entre eux.

i $a \wedge b = 1 \quad \Leftrightarrow \quad$ Pour tout diviseur d de $b, a \wedge d = 1$

ii $a \wedge b_1 \ldots b_m = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall j, \quad , a \wedge b_j = 1$

iii $a_1 \ldots a_n \wedge b_1 \ldots b_m = 1 \quad \Leftrightarrow \quad \forall i, j, \quad a_i \wedge b_j = 1$

Remarque 23.

1. Quand on décompose a et b en produits de facteurs $a_1 \ldots a_n$ et $b_1 \ldots b_m$, il faut bien tester toutes les paires de facteurs $(a_i, b_j) : (a_1, b_1), (a_1, b_2), \ldots, (a_1, b_m), \ldots, (a_n, b_1), \ldots, (a_n, b_m)$.
2. La propriété 22 donne le résultat suivant : le produit de nombres premiers avec a est encore un nombre premier avec a.

La notion d'entiers premiers entre eux est fondamentale en théorie des nombres. Elle est à la base du théorème suivant, qui est une équivalence très utile.

Théorème 24 (Théorème de Bézout)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors $a \wedge b = 1$ si et seulement si il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$au + bv = 1$$

Un tel couple d'entiers (u, v) est parfois appelé *couple de Bézout* pour a et b, et l'égalité $au + bv = 1$ une *relation de Bézout*.

Corollaire 25 (Corollaire du théorème de Bézout)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. Alors il existe des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que

$$a \wedge b = au + bv$$

Démonstration (Corollaire). 25 On écrit $d = a \wedge b$ et $a = dk$, $b = dl$. On a vu que $k \wedge l = 1$. D'après le théorème de Bézout, il existe alors un couple de Bézout (u, v) tel que $ku + lv = 1$. On multiplie le tout par d pour obtenir

$$d = dku + dlv = au + bv$$

□

Remarque 26 (A propos du théorème de Bézout)**.**

1. Si (u, v) est une paire de Bézout pour a et b premiers entre eux, alors (a, b) est un couple de Bézout pour u et v ce qui assure que $u \wedge v = 1$ également.
2. Toute quantité de la forme $au + bv$ est un multiple du PGCD de a et b. Le théorème 24 (plutôt son corollaire 25) dit donc que $a \wedge b$ est exactement le plus petit entier strictement positif de cette forme.
3. Le corollaire 25 n'est pas une équivalence, contrairement au théorème 24.

Démonstration (Théorème de Bézout). 24 Le théorème est une équivalence entre les deux propositions

i $a \wedge b = 1$

ii Il existe $u, v \in \mathbb{Z}$ tel que $au + bv = 1$

Il y a donc deux implications à prouver :

$(ii) \Rightarrow (i)$ **:** On a vu que le PGCD de a et b divise toute quantité de la forme $au+bv$ avec $u, v \in \mathbb{Z}$. Donc si a et b admettent une relation de Bézout, leur PGCD divise 1, il s'ensuit que c'est 1.

$(i) \Rightarrow (ii)$ **:** Ce sens est plus difficile à établir. La preuve utilise une variante de l'algorithme d'Euclide, l'*algorithme d'Euclide étendu*.

a On suppose $0 \leqslant a \leqslant b$ et on pose comme dans l'algorithme d'Euclide 15 $a_0 = b$ et $a_1 = a$. a_0 et a_1 peuvent ainsi s'écrire sous la forme $au + bv$.

b À l'étape $n \in N^*$, on suppose que l'on a construit les nombres $a_{n-1} = au_{n-1} + bv_{n-1}$ et $a_n = au_n + bv_n$ avec des entiers $u_{n_1}, v_{n_1}, u_n, v_n$, et que $a_{n-1} \geqslant a_n$. On écrit la division euclidienne de a_{n-1} par a_n :

$$a_{n-1} = qa_n + a_n$$

avec $r < a_n$. On développe les a_i et on réorganise les termes pour obtenir

$$(u_{n-1} - qu_n)a + (v_{n-1} - qv_n)b = a_{n+1}$$

De sorte que a_{n+1} s'écrit encore sous la forme $a_{n+1} = au_{n+1} + bv_{n+1}$ avec $u_{n+1} = u_{n-1} - qu_n$ et $v_{n+1} = v_{n-1} - qv_n$. En particulier, à l'étape N à laquelle l'algorithme s'arrête, $a_N = a \wedge b = 1$ s'écrit bien sous la forme $1 = a_N = au_N + bv_N$ qui est une relation de Bézout.

□

Exercice 6
Soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$. Construire un nombre $a > 1$ tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, n\}$, $a_i \wedge a = 1$.

Solution de l'exercice 6
Commençons par le cas dans lequel $n = 1$. On cherche alors simplement un nombre a qui soit premier avec a_1. D'après le théorème de Bézout 24, il suffit d'écrire une relation de Bézout pour trouver un tel nombre. Cherchons donc une relation de Bézout avec les coefficients les plus simples possibles, par exemple $u = 1$ et $v = -1$, ce qui donne $a - a_1 = 1$, soit $a = a_1 + 1$.

Passons maintenant au cas général. Si le nombre a est premier avec a_i pour tout i, il est premier avec leur produit $b = a_1 \dots a_n$. C'est même une condition suffisante d'après la proposition 22. On se ramène donc au cas $n = 1$ et on sait que l'on peut prendre $a = b + 1 = a_1 \dots a_n + 1$ qui convient.

Remarque 27 (Algorithme d'Euclide étendu en pratique)**.**

1. L'algorithme d'Euclide étendu 2 consiste en fait à retenir à chaque étape quatre nombres de plus $(u_n, v_n, u_{n-1}, v_{n-1})$ dans l'algorithme d'Euclide. Il est assez facile à appliquer à la main à partir de deux nombres a et b donnés, et permet de trouver en même temps le PCGD et le couple (u, v).
2. Si on trouve par un autre moyen le PGCD d, on peut appliquer l'algorithme à $k = a/d$ et $l = b/d$ qui sont premiers entre eux et plus petits, donc plus faciles à manipuler. D'après la preuve 2 du théorème, un couple de Bézout (u, v) pour k et l vérifie aussi $d = au + bv$.

Exercice 7 (Application de l'algorithme)
Trouver le PCGD d des entiers 663 et 182 et des entiers $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $d = 663u + 182v$.

Solution de l'exercice 7
Appliquons l'algorithme 2 étape par étape. On pose d'abord $a = 182$ (plus petit des deux nombres) et $b = 663$ (plus grand).

Étape 0 : $a_0 = b = 663$, $a_1 = a = 182$, $u_0 = v_1 = 0$ et $v_0 = u_1 = 1$

Étape 1 : $a_0 = 663 = 3 \times 182 + 117$ donc on pose $a_2 = 117$. Avec $q = 3$, on applique la formule de l'algorithme pour trouver $u_2 = u_0 - qu_1 = -3$ et $v_2 = v_0 - qv_1 = 1$.

Étape 2 : $a_1 = 182 = 1 \times 117 + 65$. On pose donc $a_3 = 65$, $q = 1$, $u_3 = u_1 - qu_2 = 4$ et $v_3 = v_1 - qv_2 = -1$.

Étape 3 : $a_2 = 117 = 1 \times 65 + 52$. On pose donc $a_4 = 52$, $q = 1$, $u_4 = u_2 - qu_3 = -7$ et $v_4 = v_2 - qv_3 = 2$.

Étape 4 : $a_3 = 65 = 1 \times 52 + 13$. On pose donc $a_5 = 13$, $q = 1$, $u_5 = u_3 - qu_4 = 11$ et $v_5 = v_3 - qv_4 = -3$.

Étape 5 : $a_4 = 52 = 4 \times 13 + 0$. Puisque $a_6 = 0$, on a trouvé le PGCD $d = a_5 = 13$ et on sait qu'il s'écrit

$$13 = d = a_5 = au_5 + bv_5 = 11 \times 182 - 3 \times 663$$

On a donc $d = 13$ et le couple solution $(u, v) = (11, -3)$.

Exercice 8 (Ensemble des couples de Bézout)
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$ et $d = a \wedge b$. On suppose que (u, v) est un couple d'entier tel que $au + bv = d$.

1. Soit (x, y) un autre couple d'entiers. Trouver une condition nécessaire et suffisante sur (x, y) pour que $ax + by = d$.
2. En déduire l'ensemble E des couples (x, y) vérifiant $ax + by = d$. Combien y en a-t-il ?

Solution de l'exercice 8

1. On a vu que les couples convenables sont exactement les couples de Bézout pour les entiers premiers entre eux $k = a/d$ et $l = b/d$. Quitte à remplacer a par k et b par l, on peut donc supposer qu'ils sont premiers entre eux. On écrit alors

$$\begin{aligned} ax + by = 1 \quad &\Leftrightarrow \quad ax + by = au + bv \\ &\Leftrightarrow \quad a(x-u) = b(v-y) \\ &\Rightarrow \quad a \mid b(v-y) \quad \text{et} \quad b \mid a(x-u) \\ &\Leftrightarrow \quad a \mid (v-y) \quad \text{et} \quad b \mid (x-u) \qquad \text{d'après le lemme de Gauss} \\ &\Leftrightarrow \quad \exists x', y' \in \mathbb{Z}, \quad y = v - y'a \quad \text{et} \quad x = u + x'b \end{aligned}$$

   On voit que l'on cherche donc maintenant les couples (x', y') tels que $a(u + x'b) + b(v - y'a) = au + bv$. Or

$$a(u + x'b) + b(v - y'a) = au + bv \quad \Leftrightarrow \quad ax'b - by'a = 0 \quad \Leftrightarrow \quad x' = y'$$

   Ainsi, on obtient la condition nécessaire et suffisante suivante :

$$ax + by = d \quad \Leftrightarrow \quad \exists k \in \mathbb{Z}, \quad x = u + kb \quad \text{et} \quad y = v - ka$$

2. Il y a donc une infinité de couples qui conviennent, et on peut décrire l'ensemble de la façon suivante :

$$E = \{(u + kb, v - ka) \quad \text{pour tout} \quad k \in \mathbb{Z}\}$$

Une conséquence immédiate du théorème de Bézout 24 est le très utile lemme de Gauss.

Lemme 28 (Lemme de Gauss)**.**
Soit $a, b, d \in \mathbb{Z}$. Si $d \mid ab$ et $a \wedge d = 1$, alors $d \mid b$.

Démonstration. On suppose que $d \mid ab$ et que $a \wedge d = 1$. Il existe donc $k, u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + dv = 1$ et $ab = dk$. On multiplie cette relation de Bézout par b, ce qui donne

$$b = aub + dvb = dku + dvb = d(ku + vb)$$

d'où $d \mid b$. □

PPCM et complémentarité avec le PGCD

De la même façon qu'ils peuvent avoir des diviseurs communs, deux nombres a et b ont des multiples communs. Par exemple, le produit ab en est un. Mais il peut y en avoir de plus petits : si $a \mid b$, alors b est un multiple commun à a et b.

Définition 29 (Plus Petit Commun Multiple)**.**

1. Soit $a, b \in \mathbb{Z}$. On nomme **Plus Petit Commun Multiple** (PPCM) de a et b et on note $a \vee b$ le plus petit entier naturel *non nul* m qui soit un multiple à la fois de a et de b. Dans le cas où a ou b est nul, on pose également par convention $a \vee b = 0$.
2. Plus généralement, si $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{Z}$, leur PPCM est noté $a_1 \vee \cdots \vee a_n$ et défini comme le plus petit nombre positif non nul qui soit un multiple de chacun des a_i.

Le PPCM a les propriétés suivantes, généralisables à une famille d'entiers.

Proposition 30 (Proriétés du PPCM)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{Z}$.

i Dans le cas non dégénérés où a, b sont non nuls, on a l'encadrement

$$\max(\|a\|, \|b\|) \leqslant a \vee b \leqslant \|a\| \times \|b\|$$

ii Si m est un multiple commun à a et b, alors $a \vee b \mid m$.

On voit que le PGCD et le PPCM ont des propriétés qui se ressemblent, et qu'il existe une sorte de complémentarité entre eux. C'est ce qu'exprime la propriété suivante.

Proposition 31 (Complémentarité PGCD et PPCM)**.**
Soit $a, b \in \mathbb{N}$. Alors on a l'identité

$$(a \wedge b)(a \vee b) = ab$$

Démonstration. Considérons déjà le cas dans lequel a et b sont premiers entre eux. Dans ce cas, l'égalité signifie simplement que $a \vee b = ab$. En effet, comme $m = a \vee b$ est un multiple de a, il s'écrit $m = ka$ pour un certain $k \in \mathbb{Z}$. Mais on a aussi $b \mid m = ka$. D'après le lemme de Gauss 28, cela implique que $b \mid k$. Ainsi, on peut écrire $k = bl$ pour un certain $l \in \mathbb{Z}$ et $m = lab$. Comme ab est déjà un multiple commun à a et b, $m = lab \mid ab$, ce qui implique que $\|l\| = 1$ et que l'on a bien $m = ab$.

Considérons ensuite le cas général. On écrit $d = a \wedge b$ et $a = dk$, $b = dl$ pour $k, l \in \mathbb{Z}$ premiers entre eux. Comme d divise a et b, il doit aussi diviser tout multiple de a et b et en particulier leur PPCM. On peut donc écrire ce PPCM sous la forme $m = dm'$ avec $m' \in \mathbb{N}$. Mais pour tout nombre $n \in \mathbb{Z}$:

$$dk = a \mid nd \quad \text{et} \quad dl = b \mid nd \quad \Leftrightarrow \quad k \mid n \quad \text{et} \quad l \mid n \quad \Leftrightarrow \quad kl = k \vee l \mid n$$

Ainsi, on a $kl \mid m'$ et $dkl \mid m$. Mais comme dkl est bien un multiple commun à a et b, on a aussi $m \mid dkl$ et ainsi $m = dkl$. On conclut que l'on a bien

$$ab = dk \times dl = d \times dkl = (a \wedge b) \times (a \vee b)$$

□

L'égalité de complémentarité entre PGCD et PPCM 31 permet en pratique de calculer le PPCM de deux entiers, puisque l'on dispose déjà d'une méthode pour calculer le PGCD.

À retenir

En conclusion de ce premier cours de théorie des nombres, voici l'essentiel de ce dont il faut absolument se rappeler pour la suite :

La relation de divisibilité 7 est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}$.

Tous les entiers sont multiples de 1 et diviseurs de 0.

Le seul diviseur (resp multiple) positif de 1 (resp 0) est lui-même.

Tout diviseur commun est diviseur du PCGD.

Tout multiple commun est multiple du PPCM.

Equivalence dans le théorème de Bézout 24

Le seul nombre premier avec lui-même est 1.

Algorithme d'Euclide 15 : le PGCD est "conservé par division Euclidienne" **??**.

Lemme de Gauss 28 : on peut faire "disparaître" les facteurs premiers entre eux dans une relation de divisibilité.

On a aussi vu quelques techniques qui servent partout dans les preuves :

Démontrer une égalité d'entiers naturels a et b en montrant que $a \mid b$ et $b \mid a$

Démontrer que deux entiers a et b sont premiers entre eux en montrant que tout diviseur commun d de a et b est un diviseur de 1.

Démontrer qu'un algorithme termine par le principe de la descente infinie 16.

Et enfin quelques astuces qui peuvent simplifier la résolution des exercices :

Se ramener au cas d'entiers premiers entre eux avant de considérer le cas général, en divisant par le PGCD.

Traiter à part les cas particuliers comme 1, 0, les nombres premiers entre eux, les nombres égaux entre eux. Il faut bien lire l'énoncé pour vérifier si les nombres peuvent être négatifs, nuls, strictement positifs, etc.

L'algorithme d'Euclide et son extension sont fastidieux à appliquer en pratique. En revanche, bien en connaître et comprendre le fonctionnement permet de retenir du même coup presque tous les théorèmes du cours : le théorème de Bézout 24, la conservation du PGCD par division Euclidienne **??**, $0 \wedge a = a$, la descente infinie...

3 Inégalités 1 (Rémi)

Partie 1 : IAG à 2 termes

L'objectif de ce cours est de découvrir le vaste domaine des inégalités, en commençant par des classiques incontournables. La première est connue de tous depuis longtemps, mais largement sous-estimée :

Théorème 1.
Un carré est toujours positif ! Pour tout réel x, on a $x^2 \geqslant 0$.

Une application immédiate de ce fait sera la preuve de l'inégalité suivante :

Théorème 2 (Inégalité arithmético-géométrique : IAG)**.**
Soient a et b des réels **positifs**. On a

$$\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$$

De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si $a = b$.

Cette inégalité porte ce nom car $\frac{a+b}{2}$ s'appelle la moyenne *arithmétique* de a et b, et $\sqrt{ab}$ leur moyenne *géométrique*.

Démonstration. On va élever l'inégalité voulue au carré afin d'y voir plus clair : cela donne

$$\frac{(a+b)^2}{4} \geqslant ab.$$

En développant l'identité remarquable et en multipliant par 4 des deux côtés, on constate que l'inégalité voulue est équivalente à :

$$a^2 + 2ab + b^2 \geqslant 4ab$$

ou encore

$$a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0$$

On reconnaît alors une identité remarquable puisque le membre de droite se factorise en $(a-b)^2$. Ce terme est bien toujours positif puisqu'il s'agit d'un carré ! Par équivalences successives, on a donc bien montré le résultat voulu. Enfin, pour avoir égalité il faut que $(a-b)^2 = 0$, ce qui n'est le cas que si $a = b$. On vérifie réciproquement que si $a = b$, les deux membres sont égaux car $\frac{a+a}{2} = a = \sqrt{a^2}$. □

Exercices d'application

Exercice 1
Soit x un réel strictement positif. Montrer que $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$.

Exercice 2
Soient a, b, c des réels positifs. Montrer que $(a+b)(b+c)(c+a) \geqslant 8abc$.

Le troisième exercice est en fait un théorème qu'il peut être intéressant de retenir puisqu'il sert dans de nombreux autres exos :

Exercice 3 (lemme du tourniquet)
Soient a, b, c des réels positifs. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

Partie 2 : IAG à 3 termes

Dans la première partie, on a découvert l'IAG pour deux variables. En fait, cette approche n'était qu'une introduction puisque l'IAG est vraie aussi avec 3 variables. Cela dit, ce résultat est un peu plus dur à démontrer, donc il sera admis. A noter que la racine carrée devient une racine cubique (la racine cubique d'un réel x est le nombre qui mis au cube donne x).

Théorème 3 (Inégalité arithmético-géométrique : IAG)**.**
Soient a, b et c des réels **positifs**. On a :

$$\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$$

De plus, l'égalité est atteinte si et seulement si $a = b = c$.

Remarque 4.
Si la racine cubique ne vous est pas familière, vous pouvez aussi écrire cette inégalité sous la forme $(a+b+c)^3 \geqslant 27abc$.

Remarque 5.
En posant l'astucieux changement de variables $x = \sqrt[3]{a}$, $y = \sqrt[3]{b}$, $z = \sqrt[3]{c}$, on remarque après multiplication par 3 des deux côtés que l'on peut aussi écrire l'IAG sous la forme

$$x^3 + y^3 + z^3 \geqslant 3xyz.$$

Cette inégalité est également vraie pour tous $x, y, z \geqslant 0$.

Exercices d'application

Exercice 4
Soient a, b, c des réels positifs. Montrer que $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 9a^2b^2c^2$.

Exercice 5
Soient a, b, c des réels positifs tels que $abc = 8$. Trouver la valeur minimale que peut prendre l'expression $a + b + c$.

Exercice 6
Soient a, b, c des réels positifs tels que $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8$. Montrer que $a + b + c \geqslant 3$.

Partie 3 : Forme générale

Après avoir vu l'IAG avec 2 puis 3 variables, on se doute qu'il va exister une forme plus générale... Et c'est le cas ! On utilise cette fois la racine n-ème (c'est le même principe, il n'y a pas à s'inquiéter de cette nouvelle notation). A nouveau, la preuve générale n'est pas forcément utile à ce stade et ne sera pas présentée ici.

Théorème 6 (La vraie inégalité arithmético-géométrique)**.**
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Soient $a_1, a_2, \ldots, a_n$ des réels **positifs**. Alors on a :

$$\frac{a_1 + a_2 + \ldots + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1 a_2 \cdots a_n}$$

A nouveau, il y a égalité si et seulement si $a_1 = a_2 = \ldots = a_n$.

Ce qu'il faut retenir de cette inégalité, c'est qu'il ne faut pas avoir peur de voir des grosses sommes avec beaucoup de termes, on peut appliquer l'IAG à autant de termes qu'on veut. Au-delà de la formule exacte -qu'il faut évidemment apprendre- il s'agit de comprendre dans quelles situations l'IAG peut servir. Le point central à remarquer est que l'IAG permet de changer des sommes en produit et réciproquement. Il faut donc chercher à repérer des situations où l'on cherche à montrer qu'une certaine somme est plus grande qu'un produit ou inversement. Ces sommes peuvent être bien cachées, à vous de les retrouver !

Exercices d'application

Exercice 7
Soit x un réel. Montrer que $1 + x^2 + x^6 + x^8 \geqslant 4x^4$.

Exercice 8
Soient x, y, z des réels strictement positifs. Montrer que :

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{z} + \frac{z}{x} + \frac{y}{x} + \frac{z}{y} + \frac{x}{z} \geqslant 6$$

Exercice 9
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $abcd = 1$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + ab + ac + ad + bc + bd + cd \geqslant 10$.

Exercice 10 (beaucoup plus difficile)
Soient a, b, c, d des réels strictement positifs tels que $a + b + c + d = 1$. Montrer que

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{cda}{(1-b)^2} + \frac{dab}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}$$

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Comme x et $\frac{1}{x}$ sont positifs, on peut leur appliquer l'IAG. On obtient :

$$\frac{x + \frac{1}{x}}{2} \geqslant \sqrt{x \cdot \frac{1}{x}} = 1$$

d'où $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ comme attendu.

Solution de l'exercice 2
On applique l'IAG à chaque terme du produit : cela donne $a + b \geqslant 2\sqrt{ab}$, $b + c \geqslant 2\sqrt{bc}$ et $c + a \geqslant 2\sqrt{ca}$. Comme tout est positif, on peut faire le produit de ces trois inégalités, ce qui nous donne $(a + b)(b + c)(c + a) \geqslant 8\sqrt{ab}\sqrt{bc}\sqrt{ca} = 8\sqrt{a^2b^2c^2} = 8abc$ comme voulu.

Solution de l'exercice 3
Poue cet exercice, il faut ruser un peu. En effet, après quelques essais on constate qu'il n'y a aucun bon moyen d'appliquer l'IAG au membre de gauche. La bonne idée est alors de s'intéresser au membre de droite : celui-ci contient des produits que l'on peut minorer ! On peut par exemple écrire $ab = \sqrt{a^2b^2} \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$ pour faire apparaître les carrés, et de même $bc \leqslant \frac{b^2+c^2}{2}$ et $ca \leqslant \frac{c^2+a^2}{2}$. On peut alors sommer ces trois inégalités, ce qui nous donne $ab + bc + ca \leqslant \frac{a^2+b^2}{2} + \frac{b^2+c^2}{2} + \frac{c^2+a^2}{2}$, d'où finalement le lemme du tourniquet en réordonnant les termes : $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$.

Solution de l'exercice 4
A l'instar de l'exercice précédent, on applique brutalement l'IAG sur chaque parenthèse : cela donne $a^2b + b^2c + c^2a \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b \cdot b^2c \cdot c^2a} = 3\sqrt[3]{a^3b^3c^3} = 3abc$ et de même $ab^2 + bc^2 + ca^2 \geqslant 3abc$. Comme tout est positif, on peut faire le produit terme à terme de ces deux inégalités, ce qui donne bien $(a^2b + b^2c + c^2a)(ab^2 + bc^2 + ca^2) \geqslant 3abc \cdot 3abc = 9a^2b^2c^2$, le résultat demandé.

Solution de l'exercice 5
La forme de cet exercice est un peu différente des précédents, mais il ne faut pas pour autant

se laisser déstabiliser. Pour trouver la valeur minimale que peut prendre $a+b+c$ il va falloir minorer cette expression, autrement trouver une inégalité de la forme $a+b+c \geqslant x$ où x sera un réel, puis trouver un cas d'égalité de cette inégalité (puisqu'on cherche bien la valeur minimale, donc une inégalité ne suffit pas). Comme on a une hypothèse sur le produit, il est naturel d'appliquer l'IAG pour voir ce que ça donne. On obtient $a+b+c \geqslant 3\sqrt[3]{abc} = 3 \cdot 2 = 6$. Attention, cela ne suffit pas à conclure que 6 est la valeur minimale, notre inégalité pourrait être trop brutale, il faut donc encore montrer que l'on peut atteindre cette valeur ! Heureusement, on sait que l'IAG a un cas d'égalité quand $a = b = c$. Cette égalité peut être obtenue tout en satisfaisant l'hypothèse $abc = 8$ en choisissant $a = b = c = 2$, et on vérifie que l'on obtient bien $a+b+c = 2+2+2 = 6$, donc 6 est bien la valeur minimale recherchée.

Solution de l'exercice 6

Cet exercice est assez particulier puisque le seul objet avec lequel on peut espérer travailler est l'hypothèse : il n'y a a priori rien à manipuler dans l'inégalité $a+b+c \geqslant 3$. Il faut donc essayer de se demander si on ne peut pas jouer avec l'hypothèse. Ici, on peut à nouveau penser à l'IAG, puisqu'on a un produit que l'on peut majorer pour le changer en somme, ce qui ferait d'ailleurs apparaître la somme $a+b+c$. Ecrivons donc l'IAG : on a

$$2 = \sqrt[3]{8} = \sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \leqslant \frac{a+1+b+1+c+1}{3}$$

D'où, en multipliant par 3, $6 \leqslant a+b+c+3$, et finalement on tombe directement sur $a+b+c \geqslant 3$, l'inégalité attendue !

Solution de l'exercice 7

On a appris à ne pas avoir peur d'appliquer l'IAG à beaucoup de termes. C'est ce qu'on va faire ici : d'après l'IAG, $\frac{1+x^2+x^6+x^8}{4} \geqslant \sqrt[4]{1 \cdot x^2 \cdot x^6 \cdot x^8} = \sqrt[4]{x^{16}} = x^4$, ce qui donne directement l'inégalité demandée en multipliant par 4.

Solution de l'exercice 8

A nouveau, on peut simplement appliquer l'IAG directement aux 6 membres du membre de gauche : on obtient

$$\frac{x}{y}+\frac{y}{z}+\frac{z}{x}+\frac{y}{x}+\frac{z}{y}+\frac{x}{z} \geqslant 6\sqrt[6]{\frac{x}{y}\cdot\frac{y}{z}\cdot\frac{z}{x}\cdot\frac{y}{x}\cdot\frac{z}{y}\cdot\frac{x}{z}} = 6$$

En effet, tous les produits se simplifient !

On peut également présenter une deuxième méthode instructive, qui consiste à faire appel à l'exercice 1 : en effet, on peut regrouper les termes deux à deux par inverses, puisque $\frac{y}{x} = \frac{1}{\frac{x}{y}}$. On a donc, par l'exercice 1, $\frac{x}{y}+\frac{y}{x} \geqslant 2$, et en faisant de même pour les 4 autres termes, on aboutit également au résultat voulu.

Solution de l'exercice 9

On commence à avoir l'habitude, on essaye d'appliquer l'IAG brutalement aux 10 termes : cela donne :

$$\begin{aligned}\frac{a^2+b^2+c^2+d^2+ab+ac+ad+bc+bd+cd}{10} &\geqslant \sqrt[10]{a^2b^2c^2d^2 \cdot ab \cdot ac \cdot ad \cdot bc \cdot bd \cdot cd} \\ &= \sqrt[10]{a^5b^5c^5d^5} \\ &= \sqrt[10]{(abcd)^5} \\ &= 1\end{aligned}$$

On a appliqué l'hypothèse $abcd = 1$ à la dernière ligne, et on trouve immédiatement l'inégalité demandée après ces calculs et une dernière multiplication par 10.

Solution de l'exercice 10

La première idée consiste à essayer de réduire le nombre de variables présentes dans chaque membre en utilisant l'hypothèse $a + b + c + d = 1$. Cela nous permet notamment d'écrire $\dfrac{bcd}{(1-a)^2} = \dfrac{bcd}{(b+c+d)^2}$. Il s'agit ensuite de se demander ce qu'on cherche à montrer et comment on peut avoir une chance d'y arriver. On constate qu'on veut majorer une somme de fractions dont les numérateurs sont des produits et les dénominateurs sont des sommes, donc appliquer l'IAG à l'un ou à l'autre pourrait être une bonne idée. Je vous laisse essayer d'appliquer l'IAG aux dénominateurs et voir pourquoi cette idée ne peut malheureusement pas aboutir directement (c'est possible aussi mais il faut ruser).

On va donc appliquer l'IAG aux numérateurs. Pour le premier terme on obtient $\sqrt[3]{bcd} \leqslant \frac{b+c+d}{3}$, soit en mettant au cube

$$bcd \leqslant \frac{(b+c+d)^3}{27}$$

Ecrivons cette inégalité pour les 4 membres :

$$\begin{aligned}
\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{cda}{(1-b)^2} + \frac{dab}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} &= \frac{bcd}{(b+c+d)^2} + \frac{cda}{(c+d+a)^2} + \frac{dab}{(d+a+b)^2} + \frac{abc}{(a+b+c)^2} \\
&\leqslant \frac{\frac{(b+c+d)^3}{27}}{(b+c+d)^2} + \frac{\frac{(c+d+a)^3}{27}}{(c+d+a)^2} + \frac{\frac{(d+a+b)^3}{27}}{(d+a+b)^2} + \frac{\frac{(a+b+c)^3}{27}}{(a+b+c)^2} \\
&= \frac{b+c+d}{27} + \frac{c+d+a}{27} + \frac{d+a+b}{27} + \frac{a+b+c}{27} \\
&= \frac{3a+3b+3c+3d}{27} \\
&= \frac{a+b+c+d}{9} \\
&= \frac{1}{9}
\end{aligned}$$

Finalement, on obtient bien le résultat voulu en combinant tout ce qui précède et en utilisant à nouveau l'hypothèse $a + b + c + d = 1$.

4 Nombres premiers (Emilhan)

Ce cours est majoritairement un réarrangement du précellent cours de Vladimir de 2021 : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2022/02/Poly-2021-Valbonne.pdf

5 Inégalités 2 (Martin & Georges)

On présente les inégalités de Cauchy-Schwarz et des mauvais élèves. Pour un complément d'exercices et pour les preuves de ces inégalités, on renvoie au cours très complet sur les essentiels des inégalités de Théo Lenoir, disponible dans la section ressource du site de la POFM. On a également traité les exercices qui suivent.

Exercices

Théorème 1. (Inégalité de Cauchy-Schwarz)
Soient $a, b, c, x, y, z > 0$. Alors

$$(a^2 + b^2 + c^2)(x^2 + y^2 + z^2) \geqslant (ax + by + cz)^2$$

Théorème 2. (Inégalité des mauvais élèves)
Soient $a, b, c, x, y, z > 0$. Alors

$$\frac{a^2}{x} + \frac{b^2}{y} + \frac{c^2}{z} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{x+y+z}$$

Exercice 1
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Et donner les cas d'égalités. Cette inégalité s'appelle l'inégalité des moyennes arithmétiques et quadratiques.

Exercice 2
Montrer que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

et donner le cas d'égalité. Cette inégalité se réécrit comme

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

qui est connue comme l'inégalité des moyennes arithmétiques et harmoniques.

Exercice 3
Soient x, y, z positifs et non tous nuls. Montrer que

$$\frac{1}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{9}{z+x} \geqslant \frac{18}{x+y+z}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 4
Soient a, b et c strictement positifs tels que $a^2 + 4b^2 + 9c^2 = 1$. Donner la plus grand valeur que peut prendre $a + b + c$.

Exercice 5
(Inégalité de Nesbitt) Soient a, b et c strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{b+c} + \frac{b}{c+a} + \frac{c}{a+b} \geqslant \frac{3}{2}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 6
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{a}{(b+c)^2} + \frac{b}{(c+a)^2} + \frac{c}{(a+b)^2} \geqslant \frac{9}{4(a+b+c)}$$

et donner les cas d'égalité.

Exercice 7
Soient x, y et z des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)} + \frac{y^2}{(y+z)(y+x)} + \frac{z^2}{(z+x)(z+y)} \geqslant \frac{3}{4}.$$

et donner le cas d'égalité.

Exercice 8
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\left(1 + \frac{a^2}{b}\right)\left(1 + \frac{b^2}{c}\right)\left(1 + \frac{c^2}{a}\right) \geqslant (1+a)(1+b)(1+c)$$

et donner le cas d'égalité.

Exercice 9
(IMO 1995) Soient a, b et c des réels positifs tels que $abc = 1$. Prouver que

$$\frac{1}{a^3(b+c)} + \frac{1}{b^3(a+c)} + \frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Solutions

Exercice 10
Soient $a, b, c > 0$. Montrer que

$$\frac{a+b+c}{3} \leqslant \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$

Et donner les cas d'égalités. Cette inégalité s'appelle l'inégalité des moyennes arithmétiques et quadratiques.

Solution de l'exercice 1

Solution par Cauchy-Schwarz :
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$3(a^2+b^2+c^2) = (a^2+b^2+c^2)(1^2+1^2+1^2) \geqslant (a\cdot 1 + b\cdot 1 + c\cdot 1)^2 = (a+b+c)^2$$

ce qui se réécrit comme l'inégalité désirée en divisant par 9 des deux côtés et en passant à la racine.

Il y a égalité s'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc s'il existe k tel que $a = k \cdot 1, b = k \cdot 1, c = k \cdot 1$ donc si $a = b = c$. Réciproquement, on vérifie qu'on a bien égalité si $a = b = c$.

Solution par mauvais élèves :

$$\frac{a+b+c}{3} \leq \sqrt{\frac{a^2+b^2+c^2}{3}}$$
$$\iff \frac{(a+b+c)^2}{9} \leq \frac{a^2+b^2+c^2}{3}$$
$$\iff \frac{(a+b+c)^2}{3} \leq a^2+b^2+c^2$$

Or $a^2+b^2+c^2 = \frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1}$ D'où par mauvais élève, on a bien $\frac{a^2}{1} + \frac{b^2}{1} + \frac{c^2}{1} \geq \frac{(a+b+c)}{1+1+1}$

Exercice 11
Montrer que

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant 9$$

et donner le cas d'égalité. Cette inégalité se réécrit comme

$$\frac{3}{\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}} \leqslant \frac{a+b+c}{3}$$

qui est connue comme l'inégalité des moyennes arithmétiques et harmoniques.

Solution de l'exercice 2

Solution par Cauchy-Schwarz :
D'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz, on a :

$$(a+b+c)\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right) \geqslant \left(a \cdot \frac{1}{a} + b \cdot \frac{1}{b} + c \cdot \frac{1}{c}\right)^2 = 3^2 = 9$$

Il y a égalité lorsque qu'il y a égalité dans l'inégalité de Cauchy-Schwarz, donc s'il existe k tel que $a = \frac{k}{a}, b = \frac{k}{b}$ et $c = \frac{k}{c}$. k vérifie alors $k = a^2 = b^2 = c^2$ et puisque a, b et c sont positifs, cela implique que $a = b = c$. Réciproquement, si $a = b = c$, on a bien égalité dans l'inégalité donnée.

Solution par mauvais élèves : D'après l'inégalité des mauvais élèves, on a $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \geq \frac{9}{a+b+c}$. On obtient donc que $(a+b+c)(\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}) \geq 9$

Exercice 12
Soient x, y, z positifs et non tous nuls. Montrer que

$$\frac{1}{x+y} + \frac{4}{y+z} + \frac{9}{z+x} \geqslant \frac{18}{x+y+z}$$

et donner les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 3
D'après l'inégalité des mauvais élèves, on a

$$\frac{1}{x+y}+\frac{4}{y+z}+\frac{9}{z+x}=\frac{1^2}{x+y}+\frac{2^2}{y+z}+\frac{3^2}{z+x}\geq\frac{(1+2+3)^2}{2(x+y+z)}=\frac{18}{x+y+z}$$

Il y a égalité s'il y a égalité dans l'inégalité des mauvais élèves, donc s'il existe k tel que $x+y=k\cdot 1, y+z=k\cdot 2$ et $z+x=k\cdot 3$. On a alors

$$x=\frac{x+y+x+z-(y+z)}{2}=k$$

$$y=\frac{y+z+y+x-(x+z)}{2}=0$$

$$z=\frac{z+x+z+y-(x+y)}{2}=2k$$

Réciproquement, si $(x,y,z)=(k,0,2k)$, on vérifie qu'on a égalité dans l'inégalité ci-dessus.

Exercice 13
Soient a,b et c strictement positifs tels que $a^2+4b^2+9c^2=1$. Donner la plus grand valeur que peut prendre $a+b+c$.

Solution de l'exercice 4
On applique Cauchy-Schwarz en essayant de faire apparaître l'expression de l'hypothèse :

$$(a+b+c)^2=\left(\frac{1}{1}\cdot a+\frac{1}{2}\cdot 2b+\frac{1}{3}\cdot 3c\right)^2\leqslant\left(\frac{1^2}{1^2}+\frac{1^2}{2^2}+\frac{1^2}{3^2}\right)\underbrace{(a^2+4b^2+9c^2)}_{=1}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{49}{36}$$

Ceci donne $a+b+c\leqslant\frac{7}{6}$.

Pour que cette valeur soit effectivement le maximum recherché, il faut encore montrer qu'elle peut être atteinte. Pour cela, on regarde le cas d'égalité de l'inégalité de Cauchy-Schwarz. Il y a égalité dans notre inégalité s'il existe k tel que $a^2=k\cdot\frac{1^2}{1^2}, 4b^2=k\cdot\frac{1}{4}, 9c^2=k\cdot\frac{1}{9}$. Puisque $a^2+4b^2+9c^2=1$, k doit vérifie $k\left(1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}\right)=1$, soit $k=\frac{36}{49}$. On déduit que $a=\frac{6}{7}, b=\frac{3}{14}$ et $c=\frac{2}{21}$. Réciproquement, ce triplet (a,b,c) vérifie bien que $a+b+c=\frac{7}{6}$.

Exercice 14
(Inégalité de Nesbitt) Soient a,b et c strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$$

et donner les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 5

Solution avec mauvais-élèves :
On utilise la manipulation suivante :

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}=\frac{a^2}{ab+ac}+\frac{b^2}{ab+bc}+\frac{c^2}{ac+bc}$$

Donc d'après l'inégalité des mauvais élèves, $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{b+a}\geq\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ac}$ Il suffit donc de verifier que $\frac{(a+b+c)^2}{2ab+2bc+2ac}\geq\frac{3}{2}$, ce qui est équivalent à montrer que $2(a+b+c)^2\geq 6(ab+bc+ca)$, ou encore à montrer que $a^2+b^2+c^2\geq ab+bc+ac$ en developpant ce qui est vrai par le lemme du tourniquet.

Pour le cas d'égalité, il se produit seulement s'il y a égalité dans le lemme du tourniquet, à savoir lorsque $a=b=c$. Réciproquement, les triplets (a,b,c) avec $a=b=c$ vérifient l'égalité. On aurait aussi pu examiner le cas d'égalité de l'inégalité des mauvais élèves, qui aurait donné la même condition.

Solution avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

L'idée est de rajouter 1 à chaque terme pour obtenir des fractions qui ont le même numérateur. Ainsi

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}=\frac{a+b+c}{b+c}-1+\frac{b+c+a}{c+a}-1+\frac{c+a+b}{a+b}-1=(a+b+c)\left(\frac{1}{b+c}+\frac{1}{c+a}+\frac{1}{a+b}\right)-3$$

Or, d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a}+\tfrac{1}{a+b}\right) &= \tfrac{1}{2}((b+c)+(c+a)+(a+b))\left(\tfrac{1}{b+c}+\tfrac{1}{c+a}+\tfrac{1}{a+b}\right)\\ &\geqslant \tfrac{1}{2}\left(\sqrt{b+c}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{b+c}}+\sqrt{c+a}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{c+a}}+\sqrt{a+b}\cdot\sqrt{\tfrac{1}{a+b}}\right)^2\\ &= \tfrac{9}{2}\end{aligned}$$

Ainsi,

$$\frac{a}{b+c}+\frac{b}{c+a}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{9}{2}-3=\frac{3}{2}$$

Exercice 15
Soient $a,b,c>0$. Montrer que

$$\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(c+a)^2}+\frac{c}{(a+b)^2}\geqslant\frac{9}{4(a+b+c)}$$

et donner les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 6
Cette ineáglité est equivalente à montrer que

$$(a+b+c)(\frac{a}{(b+c)^2}+\frac{b}{(a+c)^2}+\frac{c}{(a+b)^2})\geq\frac{9}{4}$$

Or d'après l'inégalité de Cauchy-Schwarz on obtient que

$$\begin{aligned}(a+b+c)\left(\tfrac{a}{(b+c)^2}+\tfrac{b}{(a+c)^2}+\tfrac{c}{(a+b)^2}\right) &\geqslant \left(\sqrt{a}\cdot\tfrac{\sqrt{a}}{b+c}+\sqrt{b}\cdot\tfrac{\sqrt{b}}{a+c}+\sqrt{c}\cdot\tfrac{\sqrt{c}}{a+b}\right)^2\\ &= \left(\tfrac{a}{b+c}+\tfrac{b}{c+a}+\tfrac{c}{a+b}\right)\end{aligned}$$

Or $\frac{a}{b+c}+\frac{b}{a+c}+\frac{c}{a+b}\geqslant\frac{3}{2}$, d'après l'inégalité Nesbitt, on a donc l'inégalité voulu.

On a égalité seulement si on a égalité dans l'inégalité de Nesbitt, ce qui implique que $a=b=c$. Réciproquement, si $a=b=c$, on a égalité, c'est donc le seul cas d'égalité.

Exercice 16
Soient x, y et z des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+z)(y+x)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geqslant\frac{3}{4}.$$

et donner le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 7

D'après l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{x^2}{(x+y)(x+z)}+\frac{y^2}{(y+x)(z+y)}+\frac{z^2}{(z+x)(z+y)}\geq\frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)+(y+x)(z+y)+(z+x)(z+y)}.$$

Il suffit donc de montrer que

$$\begin{aligned}&\frac{(x+y+z)^2}{(x+y)(x+z)+(y+x)(z+y)+(z+x)(z+y)}\geq\frac{3}{4}\\ \iff\ &4(x+y+z)^2\geq 3((x+y)(x+z)+(y+x)(z+y)+(z+x)(z+y))\\ \iff\ &4(x^2+y^2+z^2)+8(xy+yz+zx)\geq 3x^2+3y^2+3z^2+9xy+9yz+9zx\\ \iff\ &(x^2+y^2+z^2\geqslant xy+yz+zx\end{aligned}$$

, ce qui est vrai par le lemme du tourniquet.

Le cas d'égalité se produit seulement s'il y a égalité dans le lemme du tourniquet, ce qui implique que $x=y=z$. Réciproquement, si $x=y=z$, on a égalité dans l'inégalité, on a donc tous les cas d'égalité.

Exercice 17
Soient $a,b,c>0$. Montrer que

$$\left(1+\frac{a^2}{b}\right)\left(1+\frac{b^2}{c}\right)\left(1+\frac{c^2}{a}\right)\geqslant(1+a)(1+b)(1+c)$$

et donner le cas d'égalité.

Solution de l'exercice 8
Solution avec l'inégalité de Cauchy-Schwarz :

On a $(b+1)(\frac{a^2}{b}+1) \geqslant (a+1)^2$ par l'inégalité Cauchy-Schwarz. De même on a $(c+1)(\frac{b^2}{c}+1) \geqslant (b+1)^2$ et $(c+1)(\frac{c^2}{a}+1) \geqslant (c+1)^2$. En faisant le produit de toutes les inégalités, on obtient :

$$(b+1)(\frac{a^2}{b}+1)(c+1)(\frac{b^2}{c}+1)(c+1)(\frac{c^2}{a}+1) \geqslant (1+a)^2(1+b)^2(1+c)^2$$

ce qui, en divisant par $(1+a)(1+b)(1+c)$ qui est strictement positif, donne

$$\left(1+\frac{a^2}{b}\right)\left(1+\frac{b^2}{c}\right)\left(1+\frac{c^2}{a}\right) \geqslant (1+a)(1+b)(1+c)$$

ce qu'il fallait prouver.

Il y a égalité lorsqu'il y a égalité dans les inégalités de Cauchy Schwarz. En particulier, il existe k tel que $b = k \cdot \frac{a^2}{b}$ et $1 = k \cdot 1$. On déduit que $k = 1$ puis $b = \frac{a^2}{b}$, soit $a = b$. De même on trouve $b = c$. On a donc $a = b = c$ et réciproquement on a bien égalité lorsque $a = b = c$, on a donc tous les cas d'égalité.

Solution avec l'inégalité des mauvais élèves :

D'après l'inégalité des mauvais élèves :

$$1+\frac{a^2}{b} = \frac{1^2}{1}+\frac{a^2}{b} \geqslant \frac{(1+a)^2}{1+b}$$

de même on a $1+\frac{b^2}{c} \geqslant \frac{(1+b)^2}{1+c}$ et $1+\frac{c^2}{a} \geqslant \frac{(1+c)^2}{1+a}$. En faisant le produit on a

$$\left(1+\frac{a^2}{b}\right)\left(1+\frac{b^2}{c}\right)\left(1+\frac{c^2}{a}\right) \geqslant \frac{(1+a)^2}{1+b}\cdot\frac{(1+b)^2}{1+c}\cdot\frac{(1+c)^2}{1+a} = (1+a)(1+b)(1+c)$$

Exercice 18

(IMO 1995) Soient a, b et c des réels positifs tels que $abc = 1$. Prouver que

$$\frac{1}{a^3(b+c)}+\frac{1}{b^3(a+c)}+\frac{1}{c^3(a+b)} \geqslant \frac{3}{2}.$$

Solution de l'exercice 9

On fait le changement de variable $x = \frac{1}{a}$ $y = \frac{1}{b}$et $z = \frac{1}{c}$. On a $xyz = 1$ et le membre de gauche devient

$$\frac{1}{\frac{1}{x^3}(\frac{1}{y}+\frac{1}{z})}+\frac{1}{\frac{1}{y^3}(\frac{1}{x}+\frac{1}{z})}+\frac{1}{\frac{1}{z^3}(\frac{1}{y}+\frac{1}{x})} = \frac{1}{\frac{1}{x^3}\frac{y+z}{yz}}+\frac{1}{\frac{1}{y^3}\frac{x+z}{xz}}+\frac{1}{\frac{1}{z^3}\frac{y+z}{yx}} = \frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{z+y}+\frac{z^2}{x+y}$$

car $xyz = 1$

Or d'après l'inégalité des mauvais élèves :

$$\frac{x^2}{x+y}+\frac{y^2}{z+y}+\frac{z^2}{x+y} \geq \frac{(x+y+z)^2}{2(x+y+z)} = \frac{x+y+z}{2} \geqslant 3\frac{\sqrt[3]{xyz}}{2} = \frac{3}{2}$$

où l'on a utilisé l'inégalité des moyennes $\frac{x+y+z}{3} \geqslant \sqrt[3]{xyz}$ dans la dernière inégalité.

6 Modulos (Elsa)

Introduction

Ce cours est fondé sur celui de concepts de base de Jean-Louis Tu disponible sur le site de la POFM (https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_base.pdf).

définitions et propriétés de base

Exercice 1
Exercice introductif : 2023 personnes vont entrer chacune en possession d'un chapeau portant un numéro entre 1 et 2023 (non nécessairement distincts). Ils ne pourront voir que les numéros des chapeaux des autres et devront deviner le leur sans communiquer. Comment peuvent-ils se mettre d'accord pour être certains qu'au moins une personne va deviner juste ?

Définition 1 (congruence modulo n)**.**

Proposition 2 (relation d'équivalence)**.**

Exercice 2 (3.1 du poly)
Quels sont les entiers p tels que p et $p + 1$ soient premiers ?

Exercice 3 (3.2 du poly)
Quels sont les entiers p tels que p, $p + 2$ et $p + 4$ soient premiers ?

exercices supplémentaires :
Sur les puissances :

Exercice 4 (Chiffre des unités)
1. Quel est le chiffre des unités de 3^{1789} ?
2. Quel est le chiffre des unités de $1777^{1777^{1777}}$?

Proposition 3 (passage à la puissance)**.**

Exercice 5 (Manipulation de puissances (source : cours de Paul Bourreau))
a) Quel est le reste de la division euclidienne de 6^{943} par 7 ? b) Quel est le reste de la division euclidienne de 247^{349} par 7 ?

Exercice 6
Démontrez que $2^{4n+1} + 3^{4n+1}$ est divisible par 5 pour tout entier naturel n.

Lorsque le modulo est donné :

Exercice 7
Déterminer les entiers n tels que $n^3 + 2n - 1$ soit divisible par 5.

Exercice 8 (La somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9)
Montrer que la somme de trois cubes consécutifs est divisible par 9.

Lorsqu'il faut choisir le modulo :

Exercice 9 (Mêmes chiffres des unités et des dizaines)
1. Déterminer les entiers naturels n tels que n et n^2 aient le même chiffre des unités.
2. Déterminer les entiers naturels n tels que n et n^2 aient le même chiffre des unités et des dizaines.

Exercice 10 (Équation dans $\mathbb{Z}^2$)
Montrer que l'équation suivante n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$:

$$x^2 + y^2 = 175$$

Exercice 11 (Équation dans $\mathbb{Z}^2$)
Montrer que l'équation suivante n'a pas de solution dans $\mathbb{Z}^2$:

$$x^2 - 7y^2 = 117$$

Exercice 12
Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que $8n - 1$ n'est pas somme de trois carrés non nuls.

Critères de divisibilité

Exercice 13 (Exercice 8 de la coupe Animath d'Automne 2019)
Existe-t-il un entier dont l'écriture décimale contienne exactement 300 chiffres « 1 », aucun autre chiffre différent de « 0 », et qui soit un carré parfait ? On dit qu'un entier n est un carré parfait s'il existe un entier k tel que $n = k^2$. Par exemple, $9 = 3 \times 3$ est un carré parfait tandis que 2 ne l'est pas.

Proposition 4 (notations pour la suite)**.**

Théorème 5 (critères de divisibilité par 3 et par 9)**.**

Exercice 14 (Exercice 3.3 du poly)
48767621 est-il divisible par 9 ?

Théorème 6 (Critère de divisibilité par 11)**.**

Exercice 15 (Exercice 3.4 du poly)
98473092 est-il divisible par 11 ?

Théorème 7 (Critère de divisibilité par 4)**.**

Exercice 16 (divisibilité par 8)
Le nombre 456294604884 est-il divisible par 8 ?

Exercice 17 (Exercice 3.6 du poly)
Le PGCD de 193116 et de 127413 est-il pair ? Est-il divisible par 3 ? Par 9 ? Par 11 ? Par 33 ? Par 99 ?

Exercice 18 (Exercice 3.7 du poly)
À quelle condition sur les chiffres x et y le nombre $\overline{27x85y}$ est-il divisible par 33 ?

inverses modulo n

Définition 8 (inverse modulo n)**.**

Proposition 9 (critère d'inversibilité modulo n)**.**

Proposition 10 (simplification modulo n)**.**

Exercice 19 (contre-exemple)
Trouver un contre-exemple dans le cas où a et n ne sont pas premiers entre eux.

Exercice 20 (Exercice 3.8 du poly)
Vérifier que les inversibles modulo 8 sont 1,3,5,7 et qu'ils sont égaux à leur inverse.

Exercice 21
Trouver l'inverse de 11 modulo 54

Exercice 22 (Exercice 3.9 du poly)
Trouver l'inverse de 37 modulo 53

Proposition 11 (Inverse d'un produit)**.**

Proposition 12 (Propre inverse)**.**

Exercice 23 (Théorème de Wilson)

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Chacune donne le nombre qu'il faudrait sur son chapeau pour atteindre un total différent modulo 2023

Solution de l'exercice 2
regarder modulo 2

Solution de l'exercice 3
regarder modulo 3

Solution de l'exercice 4
Astuce : chercher les "1"

Solution de l'exercice 5
a)6 b)2

Solution de l'exercice 6
Écrire $2^{4n} * 2 + 3^{4n} * 3$ et évaluer modulo 5.

Solution de l'exercice 7
On dresse le tableau des congruences et on trouve n congru à 2 ou 4 modulo 5.

Solution de l'exercice 8
Soit $n \in \mathbb{N}$. On a :

$$\begin{aligned} n^3 + (n+1)^3 + (n+2)^3 &= 3n^3 + 9n^2 + 15n + 9 \\ &\cong 3n^3 + 6n \pmod 9 \\ &\cong 3 * n * (n^2 + 2) \pmod 9 \end{aligned}$$

Si 3 divise n c'est bon, et sinon n^2 congru à 1 et donc 3 divise $n^2 + 2$

Solution de l'exercice 9
1. On regarde modulo 10. On trouve (modulo 10) : 0,1,5,6 2. Les candidats sont ceux qui se terminent par les résultats de 1. Il reste à vérifier modulo 100. En notant x le chiffre des

dizaines.

$(10x + a)^2 \equiv 20ax + a^2 \pmod{100}$
D'où : $10x + a \equiv 20ax + a^2 \pmod{100}$
$(2a - 1) * 10x \equiv a - a^2 \pmod{100}$
Pour a=0 : $x = 0$
Pour a=1 : $x = 0$
Pour a=5 : $9 * 10x = 80 \pmod{100}$
Donc $9x = 8 \pmod{10}$
$9 \equiv -1$ donc est son propre inverse donc
$x \equiv 72 \equiv 2 \pmod{10}$
Pour a=6 :
$10x \equiv 70 \pmod{100}$
donc x=7

Et finalement on obtient : 00,01,25,76

Solution de l'exercice 10
Regarder modulo 4

Solution de l'exercice 11
Regarder modulo 7

Solution de l'exercice 12
Regarder modulo 8 et dresser le tableau

Solution de l'exercice 13
Non car il serait divisible par 3 mais pas par 9.

Solution de l'exercice 14
Non. Remarquer qu'on peut simplifier au fur et à mesure.

Solution de l'exercice 15
Comme la divisibilité de x et -x est la même, on peut sommer dans l'ordre le plus naturel : 9-8+(4-7+3)+9-2=1+7=-1 donc non.

Solution de l'exercice 16
Trouver un critère similaire au cas de 4. (Et non)

Solution de l'exercice 17
Le premier n'est pas divisible par 9 donc les réponses sont : 3,11,33

Solution de l'exercice 18
x+y congru à 2 modulo 3 et y-x congru à 2 modulo 11

Solution de l'exercice 19
Par exemple, le contre-exemple du poly.

Solution de l'exercice 20
C'est juste une vérification.

Solution de l'exercice 21
5

Solution de l'exercice 22
Parfois, le tatonnement suffit, mais nous procédons ici de façon certaine. On commence par effectuer l'algorithme d'Euclide

$$\begin{aligned} 53 &= 37 + 16 \\ 37 &= 16 * 2 + 5 \\ 16 &= 5 * 3 + 1 \end{aligned}$$

On en déduit une relation de Bézout

$$\begin{aligned} 16 - 5 * 3 &= 1 \\ 16 - (37 - 16 * 2) * 3 &= 1 \\ 53 - 37 - (37 - (53 - 37) * 2) * 3 &= 1 \\ 7 * 53 - 10 * 37 &= 1 \end{aligned}$$

On regarde modulo 53 : 10 est l'inverse de 37 modulo 53.

Solution de l'exercice 23
Dans le poly

7 Récurrence (Elsa)

Le principe de récurrence

Définitions

Le principe du minimum comme le principe de récurrence peuvent être vus comme des axiomes puisqu'il sont liés à la "définition" de $\mathbb{N}$. On peut montrer l'un à partir de l'autre.

Axiome 1 (Principe du minimum)**.**
Si on choisit un ensemble d'entiers naturels $E = \{a_1, a_2...\}$ non vide, même s'il est infini, il possède un élément plus petit que tous les autres : le minimum. En effet, si l'ensemble E est fini, c'est évident (en vrai se cache une récurrence sur le cardinal de l'ensemble E), et sinon, on prend le plus petit entier de l'ensemble $\{0, 1...a_0\}$ qui appartient aussi à E (on s'est ramené au cas fini). Remarquons que E ne possède pas forcément de plus grand élément...

Théorème 2 (Principe de récurrence)**.**
Pour montrer que quelque soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, une propriété notée $\mathcal{P}(n)$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie (c'est ce qu'on appelle l'initialisation), puis que quel que soit $k \in \mathbb{N}$: si $\mathcal{P}(k)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie (c'est ce qu'on appelle l'hérédité). Une démonstration par récurrence suit une rédaction rigoureuse, dont nous verrons bientôt l'importance de chaque détail. On commence par définir précisément, quel que soit n, la propriété $\mathcal{P}(n)$, entre guillemets. On note ensuite "Initialisation :" et on démontre $\mathcal{P}(0)$. On note ensuite : "Hérédité : Soit un entier $k \in \mathbb{N}$. On suppose que la propriété $\mathcal{P}(k)$ est vraie. Montrons que $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie." Lorsqu'on se réfère à l'intérieur de cette section au fait que $\mathcal{P}(k)$ est vraie,

on cite "l'hypothèse de récurrence". Et on n'oublie pas de conclure à la fin en citant le principe de récurrence : "D'après le principe de récurrence, pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété notée $\mathcal{P}(n)$ est vraie"

Démonstration. Il n'y a pas vraiment de preuve de ce principe puisqu'il peut être pris comme définition des entiers. Cependant, il est équivalent au principe du minimum qui peut être plus intuitif. On va donc montrer le principe de récurrence à partir du principe du minimum. On note V l'ensemble des entiers pour-lequel la propriété est fausse. Supposons par l'absurde que V est non vide. D'après le principe du minimum, il possède un plus petit élément.

Premier cas : $v = 0$ Ce cas est exclu puisque $\mathcal{P}(0)$ est vraie.

Deuxième cas : v est différent de 0. $v - 1$ est vraie et $v - 1$ est plus petit que v donc n'est pas dans V par minimalité de v.

Cela signifie que $\mathcal{P}(v - 1)$ est vraie. Par hérédité, $\mathcal{P}(v)$ est vraie ce qui est absurde.

□

Définition 3 (puissance)**.**
Certaines notions que vous manipulez déjà, telles que la puissance, sont définies "par récurrence", dans le sens où c'est le principe de récurrence qui assure que la notion est bien définie quel que soit l'entier considéré. En effet, soit un entier k donné. Pour tout entier naturel n, on définit k^n de la façon suivante :

$$k^0 = 1$$
Pour tout entier strictement positif n : $k^{n+1} = k * (k^n)$

Le principe de récurrence permet ainsi de définir les objets de façon plus "rigoureuse".

Exercice 1
De la même façon, définir la multiplication par récurrence. Compléter : "la multiplication est à [...] ce que la puissance est à la multiplication"

Solution de l'exercice 1
"l'addition" En effet, on peut définir :

$$k * 0 = 0$$
Pour tout entier strictement positif n : $k * (n + 1) = k + k * n$

Le lien entre ces définitions et le principe de récurrence n'est pas anodin. En effet, on montrera souvent par récurrence des formules faisant intervenir des puissances ou des produits, comme nous le verrons par la suite.

Exercice 2 (Inégalité de Bernouilli)
Soit $n \in \mathbb{N}$ un entier naturel. Soit $x \in \mathbb{R}$ un réel vérifiant x. Montrer que $1 + nx \leqslant (1 + x)^n$ Le résultat reste-t-il vrai pour d'autres valeurs de x ? Pourquoi ?

Solution de l'exercice 2
Soit x un réel tel que $x \geqslant -1$. Montrons par récurrence que pour tout entier n, l'inégalité $I(n)$ suivante est vraie : "$1 + nx \leqslant (1 + x)^n$" Initialisation : $1 \leqslant 1$ Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. Supposons $I(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned}(1 + x)^{n+1} &= (1 + x)^n * (1 + x) \\ &\geqslant (1 + nx) * (1 + x) \text{ (par hypothèse de récurrence et multiplication d'inégalités positives)} \\ &\geqslant 1 + nx + nx^2 + x \qquad \geqslant 1 -\end{aligned}$$

$I(n + 1)$ est donc alors vraie.

On en conclut d'après le principe de récurrence que l'inégalité $I(n)$ est vraie quel que soit n. Le raisonnement n'est plus valable pour $(1 + x) < 0$ car on ne peut multiplier que des inégalités positives. On remarque que pour n pair ou $n = 1$ l'inégalité reste vraie mais $x = -2$ et $n = 3$ donne un contre-exemple.

Exercice 3 (Exercice 4 de l'envoi 4 — Combinatoire (2015-2016))
Soit $n \geqslant 1$. On a un nombre fini (k) de bouteilles, chacune contenant une quantité d'eau inférieure à 1 litre, telles que la quantité d'eau totale est de $\frac{n}{2}$ litres, On dispose également de n seaux vides.
Montrer qu'il est possible de vider chaque bouteille dans un seau (on peut vider plusieurs bouteilles dans le même seau, mais pas vider une bouteille en partie dans un seau et en partie dans un autre) de manière à avoir au plus 1 litre d'eau dans chaque seau.

Solution de l'exercice 3
On raisonne par récurrence sur n : Montrons que quel que soit le nombre n de bouteilles, la propriété $P(n)$ constituée de l'énoncé entier est vraie. Initialisation : pour $n = 1$, il suffit de tout vider dans l'unique seau.
Hérédité : Supposons le résultat vrai au rang n : si on arrive à vider dans un seau un certain nombre de bouteilles représentant au total au moins $\frac{1}{2}$ litre et au plus 1 litre, alors il restera $\frac{n-1}{2}$ litres à vider dans les $n - 1$ seaux restants, et on pourra appliquer l'hypothèse de récurrence pour conclure.
Si il existe une bouteille contenant au moins $\frac{1}{2}$ litre, on peut donc la vider dans le premier seau. Sinon, toutes les bouteilles contiennent moins de $\frac{1}{2}$ litre. On les vide donc une par une dans le premier seau, et on s'arrête dès que le contenu du seau dépasse $\frac{1}{2}$ litre : le seau contient alors plus de $\frac{1}{2}$ litre. De plus, juste avant de vider la dernière bouteille, il contenait moins de $\frac{1}{2}$ litre, et on a ajouté une bouteille, donc moins de $\frac{1}{2}$ litre. Le seau contient donc moins de 1 litre, et on peut conclure par hypothèse de récurrence.

Corollaire 4 (Initialisation plus grande)**.**
Soit $k \in \mathbb{N}$ un entier. Pour montrer que pour tout entier plus grand que k, une propriété P est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puis que quel que soit $n \in \mathbb{N}$ plus grand que k, si $\mathcal{P}(n)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(n + 1)$ est vraie.

Démonstration. Pour tout entier naturel n , on note $Q(n)$ la propriété : "$P(n + k)$ est vraie". On montre par récurrence simple (initialisée à 0) que $Q(n)$ est vraie pour tout entier naturel n. Comme tout entier m plus grand que k peut s'écrire $m = n + k$, on a donc que $P(m)$ est vraie quel que soit m plus grand que k. □

Exercice 4 (Entraînement de mi-parcours Valbonne 2019 groupe B)
Soit $n \geqslant 1$ un entier. On dispose de n cubes de côtés $1, 2, , n$. On veut les empiler dans un certain ordre, de sorte qu'un cube de côté k ne peut être posé que sur un cube de côté l avec $l \geqslant k - 2$. Combien de tels empilements différents existe-t-il ?

Solution de l'exercice 4
Montrons par récurrence que pour $n \geqslant 2$ la propriété $P(n)$ "il existe $3^{n-2} \times 2$ tels empilements" est vraie.

Initialisation : Pour $n = 2$ les 2 empilements possibles satisfont la contrainte demandée.

Hérédité : Supposons que la propriété $P(n)$ est vraie pour $n \geqslant 2$. Se donner un empilement avec $n+1$ cubes satisfaisant la conditions de l'énoncé revient à se donner un empilement avec les cubes de côtés $1, 2, , n$ ainsi qu'un emplacement où insérer le (n + 1)-ième.

En effet, si on se donne un empilement conforme à $n + 1$ cubes et qu'on enlève celui numéroté $n + 1$, le seul changement de voisins éventuel concerne le cube (s'il existe) qui est au-dessus de $n + 1$ et il se retrouve au-dessus d'un cube de valeur au moins $n - 1$ donc la configuration obtenue est conforme.

Le (n + 1)-ième peut être placé uniquement au-dessus d'un cube de côté n ou $n - 1$, ou encore tout en bas de la pile. Ainsi par hypothèse de récurrence il y a $3 * 3^{n-1} * 2 = 3^{(n+1)-1} * 2$ possibilités, ce qui montre la propriété $P(n + 1)$.

Par récurrence on conclut bien qu'il existe $3^{n-1} \times 2$ tels empilements pour n cubes pour tout $n \geqslant 3$.

Pour $n = 1$ il y a un empilement, et pour $n = 2$ il y en a deux, et tous les tels empilements satisfont la condition demandée.

On remarque dans cet exercice que l'hérédité et donc une formule n'est parfois valable qu'à partir d'un certain rang (ici 2), mais il ne faut pas oublier de traiter le cas des autres (ici 1) !

Exercice 5 (Propriété héréditaire)
1. Montrer que si 9 divise $10^n + 1$ ($n \in \mathbb{N}$), alors 9 divise $10^{n+1} + 1$.
2. Peut-on dire que 9 divise $10^n + 1$?

Solution de l'exercice 5
1. Soit n tel que : $10^n \equiv -1 \pmod 9$ On a : $10 \equiv 1 \pmod 9$ D'où, par produit : $10^{n+1} \equiv -1 \pmod 9$
2. Non car l'initialisation est grossièrement fausse : 9 ne divise pas 2.

Cet exercice montre l'importance de l'initialisation.

Exercice 6 (bizarre...)
Montrons que toute boîte de crayons de couleur ne contient que des crayons de la même couleur. On fait l'initialisation pour $n = 1$: une boîte contenant un seul crayon de couleur ne contient forcément que des crayons de la même couleur. Pour l'hérédité, supposons qu'il existe un entier n tel que toute boîte contenant n crayons ne contienne que des crayons de la même couleur. Prenons alors une boîte de $n+1$ crayons. Les n premiers crayons de cette boîte sont tous de la même couleur, et les n derniers crayons sont aussi tous de la même couleur. Donc tous les crayons de notre boîte sont de la même couleur. Par principe de récurrence, on peut bien conclure que, pour tout entier $n \geqslant 1$, n'importe quelle boîte contenant n crayons ne contient en fait que des crayons de la même couleur ; autrement dit, n'importe quelle boîte de crayons de cou- leur ne contient que des crayons de la même couleur. Maintenant, trouvez l'erreur !

Solution de l'exercice 6
L'hérédité ne fonctionne pas pour $n = 1$ car dans une boîte à deux crayons, le premier est de la même couleur que lui-même mais pas de la même couleur que le dernier...

Théorème 5 (Récurrence forte)**.**
Pour montrer que quelque soit l'entier $n \in \mathbb{N}$, une propriété notée $\mathcal{P}(n)$ est vraie, il suffit de montrer que $\mathcal{P}(0)$ est vraie, puis que quel que soit $k \in \mathbb{N}$: si pour tout entier m plus petit que k, $\mathcal{P}(m)$ est vraie, alors $\mathcal{P}(k+1)$ est vraie.

Démonstration. Bien entendu, cette propriété est aussi naturelle que le principe de récurrence simple mais nous allons montrer à nouveau l'équivalence entre les deux principes (récurrence "simple" et "forte") afin de manipuler ces notions.

Soit P une propriété dont on suppose qu'elle vérifie les deux hypothèses de la récurrence forte. Montrons que pour tout n, $P(n)$ est vraie.

On appelle $Q(n)$ la propriété : $\forall k \leqslant n, P(k)$ est vraie.

Montrons par récurrence (simple) que $\forall n \in \mathbb{N}$ $Q(n)$ est vraie

Initialisation : $Q(0) = P(0)$ donc est vraie par hypothèse.

Hérédité : Soit n tel que $Q(n)$ est vraie. Pour tout entier m plus petit que n, $\mathcal{P}(n)$ est vraie par définition de Q. Par hypothèse de récurrence forte, on en déduit que $P(n+1)$ est vraie. On en déduit que pour tout entier m plus petit que $n+1$, $P(m)$ est vraie et donc que $Q(n+1)$ est vraie.

Par principe de récurrence, on en déduit que pour tout n, $Q(n)$ est vraie et donc a fortiori $P(n)$.

On pourrait également commencer par partir du principe de récurrence forte pour montrer la récurrence simple. □

Exercice 7 (décomposition en nombres premiers)
Montrer que tout entier naturel plus grand que 2 peut s'écrire de façon "unique" (quitte à écrire les facteurs dans l'ordre croissant) comme un produit de nombres premiers.

Solution de l'exercice 7
Montrons par récurrence forte que pour tout entier naturel $n \geqslant 2$, la propriété $P(n)$ suivante est vraie : "n peut s'écrire de façon "unique" comme un produit de nombres premiers. " Initialisation : 2 est premier donc ne peut s'écrire que comme 2. Hérédité : Soit $n \geqslant 2$ On suppose que pour tout entier $m \leqslant 2$, la propriété $P(m)$ est vraie. Premier cas : $n+1$ est premier et par définition il ne peut donc s'écrire que comme lui-même car il n'a pas d'autres diviseurs premiers. Deuxième cas : $n+1$ n'est pas premier. Il possède au moins un diviseur $d < n+1$ donc $1 < d \leqslant n$. On peut donc écrire : $n+1 = dk$ avec k un autre entier vérifiant $1 < k \leqslant n$. Par hypothèse de récurrence, on peut écrire d et k en produit de facteurs premiers ce qui donne une décomposition de $dk = n+1$. Prouvons maintenant l'unicité de cette décomposition. Remarquons qu'à ce stade, l'unicité de la décomposition de d et de k ne suffit pas car il n'y a pas l'unicité du choix de d et de k. Supposons qu'on a deux écriture de $n+1$ différentes : $n+1 = p_1 * p_2 ... * p_a$ et $n+1 = q_1 * q_2 ... * q_b$ En particulier, p_1 divise $n+1$.

Premier cas : $p_1 = q_1$ et en divisant des deux côtés par p_1 on se ramène à l'hypothèse de récurrence sur $\frac{n+1}{p_1}$.

Deuxième cas : d'après le lemme de Gauss, comme q_1 est premier, p_1 divise $q_2 ... * q_b$ donc on peut écrire $q_2 ... * q_b = p_1 * k$ avec k un entier et par HR sur k (le cas où $k = 1$ se traite à part) on obtient que l'un des q_i pour $i \in \{2...b\}$ est p_1 ce qui nous ramène à peu près au premier cas.

Ainsi, la propriété $P(n+1)$ est montrée et d'après le principe de récurrence, tout nombre peut s'écrire de façon unique comme produit de nombres premiers.

Théorème 6 (descente infinie)**.**
Le principe de la descente infinie est un mélange de démonstration par l'absurde et de démonstration par récurrence. Soit $P(n)_{n\in\mathbb{N}}$ une propriété dont on veut démontrer qu'elle est fausse pour tout $n \in \mathbb{N}$: il suffit de montrer que si elle est supposée vraie à un certain rang n, il existe alors un rang m avec $0 < m < n$ tel qu'elle soit encore vraie.

Démonstration. Première preuve : avec le principe du minimum. Deuxième preuve : c'est la contraposée du principe de récurrence forte appliqué à la proposition $Q(n)$ suivante : "$P(n)$ est fausse". □

Exercice 8 (somme des entiers)
Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}, 0 + 1 + ... + n = \frac{n(n+1)}{2}$

Solution de l'exercice 8
Montrons par récurrence la propriété de l'énoncé. Initialisation : avec 0 Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie. On a alors :

$$\begin{aligned} 0 + 1 + ... + n + (n+1) &= \frac{n(n+1)}{2} + n + 1 \\ &= (\frac{n}{2} + 1)(n+1) \\ &= \frac{(n+1)(n+1+1)}{2} \end{aligned}$$

Par principe de récurrence, on a bien montré la formule.

Exercice 9 (somme des carrés)
Montrer que quel que soit $n \in \mathbb{N}, 0 + 1^2 + 2^2 + ... + n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Solution de l'exercice 9
Il s'agit à nouveau d'une simple récurrence.

Exercice 10 (utilisation en arithmétique : théorème de Bézout généralisé)
Soit $n \geqslant 2$ un entier naturel. On appelle PGCD de $\{a_1, a_1...a_n\}$ le plus grand diviseur commun à tous ces nombres. On retrouve bien la définition connue pour $n = 2$. En notant d ce PGCD, montrer qu'il existe des entiers naturels $b_1, ...b_n$ tels que $a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + ... + a_n * b_n = d$

Solution de l'exercice 10
Soit $P(n)$ la propriété : "Quels que soient $a_1, a_2...a_n$ il existe des entiers naturels $b_1, ...b_n$ tels que $a_1 * b_1 + a_2 * b_2 + ... + a_n * b_n = d$". Initialisation : C'est le théorème de Bézout. Hérédité : Soit $n \geqslant 2 \in \mathbb{N}$ On suppose la propriété vraie au rang n. On se donne $\{a_1, a_1...a_n, a_{n+1}\}$ des entiers naturels. Soit d_n le PGCD de $\{a_1, a_1...a_n, a_n\}$. Remarquons que le PGCD de $\{a_1, a_1...a_n, a_{n+1}\}$ est égal au PGCD de d_n et de a_{n+1} (preuve détaillée en cours). D'après le théoèreme de Bézout, en notant d_{n+1} le PGCD de $\{a_1, a_1...a_n, a_{n+1}\}$, on a aussi des entiers naturels u et v tels que $d_n * u + a_{n+1} * v = d_{n+1}$. Par hypothèse de récurrence, on dispose de $c_1, ...c_n$ tels que
$a_1 * c_1 + a_2 * c_2 + ... + a_n * c_n = d_n$

d'où

$$(a_1 * c_1 + a_2 * c_2 + ... + a_n * c_n) * u + a_{n+1} * v = d_{n+1}$$
$$a_1 * c_1 * u + a_2 * c_2 * u + ... + a_n * c_n * u + a_{n+1} * v = d_{n+1}$$

En posant, pour tout indice i différent de $n+1$: $b_i = c_i * u$ et $b_{n+1} = v$, on a montré que $P(n+1)$ est vérifiée. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie quel que soit n.

Remarquons que b_i n'est pas forcément égal à c_i d'où l'utilité d'utiliser des lettres différentes dans l'hypothèse de récurrence pour éviter toute confusion.

Exercice 11 (Un peu d'arithmétique...)
Montrer par récurrence que le nombre 3^{101} divise $2^{3^{100}} + 1$.

Solution de l'exercice 11
Montrons par récurrence que pour tout entier $n \in \mathbb{N}$, la propriété $P(n)$ suivante est vraie : "3^{n+1} divise $2^{3^n} + 1$" Initialisation : oui Hérédité : Soit $n \in \mathbb{N}$ On suppose que $P(n)$ est vraie.

$$\begin{aligned} 2^{3^{n+1}} + 1 &= 2^{3^n * 3} + 1 \\ &= (2^{3^n})^3 + 1 \\ &= (2^{3^n} + 1)((2^{3^n})^2 + 2^{3^n} + 1) \end{aligned}$$

Par identité remarquable. Or on vérifie modulo 3 qui le facteur de droite est bien divisible par 3. Avec l'hypothèse de récurrence, on en déduit $P(n+1)$. D'après le principe de récurrence, la propriété est vraie pour tout n et donc en particulier pour $n = 100$ ce qui conclut.

Exercice 12 (Exercie 3 de l'envoi 4 — Combinatoire (2020-2021))
42 élèves sont placés en ligne. Paul donne à chaque élève un certain nombre strictement positif de cailloux. On suppose que chaque élève a strictement plus de cailloux que son voisin de droite (sauf l'élève tout à droite de la file). Combien de cailloux Paul a-t-il distribué en tout, au minimum ?

Solution de l'exercice 12
L'exercice demande de trouver un minimum, il y a donc inévitablement deux étapes : l'analyse pendant laquelle on détermine une valeur minimum de cailloux et la construction pendant laquelle on montre que le minimum trouvé dans l'analyse est bien réalisable.
On note a_k le nombre de cailloux que reçoit le k-ème élève en partant de la droite.
L'élève le plus à gauche de la file doit recevoir au moins 1 caillou, donc l'élève à sa droite doit en avoir au moins 2 pour avoir strictement plus. On démontre ainsi par récurrence sur $k \leqslant 42$ que "$a_k \geqslant k$".
L'initialisation a déjà été faite. On suppose désormais que $a_k \geqslant k$ pour un certain entier $1 \leqslant k \leqslant n-1$. Puisque le $k+1$-élève doit avoir strictement plus de cailloux que son voisin de droite, on a $a_{k+1} > a_k \geqslant k$, donc $a_{k+1} \geqslant k+1$, ce qui achève la récurrence.
Paul doit donc distribuer au moins $a_1 + ... + a_{42} \geqslant 1 + ... + 42 = \frac{42 \times 43}{2} = 903$ cailloux.
Réciproquement, si Paul donne k bonbons exactement au k-ème élève en partant de la gauche, il respecte bien la condition donnée et donnera en tout 903 cailloux. Le minimum est donc 903.

Exercice 13 (Un peu de combinatoire)
Soit n un entier supérieur ou égal à 2. On place $2n$ points dans l'espace, et on trace $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer que l'on a tracé au moins un triangle.

Solution de l'exercice 13
L'initialisation se fait pour n = 2 : on a 4 points et 5 segments. Or, il existe exactement 6 segments distincts reliant 4 points. Donc on a oublié de tracer exactement un segment, notons-le [AB]. Si C et D sont nos deux autres points, les triangles ACD et BCD sont complets. Maintenant, on fixe $n \in \mathbf{N}, n \geq 2$ et on se place dans une configuration à $2n + 2$ points et (n + 1)2 + 1 segments. Soit [AB] l'un de ces segments, et C_i l'un des $2n$ points restants (avec $1 \leq i \leq 2n$). Si, pour un certain i, les segments $[AC_i]$ et $[BC_i]$ sont tous les deux tracés, alors on a tracé le triangle ABC_i et c'est gagné. Sinon, cela veut dire que, pour chaque valeur de i, au plus l'un des deux segments $[AC_i]$ ou $[BC_i]$ est tracé. Cela donne au plus $2n$ segments reliant A ou B à un des points restants. Si l'on efface alors les points A et B et tous les segments dans lesquels ces deux points interviennent, il nous reste alors au moins $(n + 1)^2 + 1 - (2n + 1) = n^2 + 1$ segments et $2n$ points. Dans cette configuration, on a tracé, par hypothèse de récurrence, au moins un triangle, et donc c'est aussi gagné.

***

Exercices complémentaires

Définition 7 (graphe)**.**
Un graphe est un objet mathématique constitué d'un ensemble de points appelés "sommets" dont certains sont reliés par des "arêtes".

Définition 8 (graphe planaire)**.**
Un graphe est « planaire » si on peut le dessiner sur une feuille de papier sans que les arêtes se croisent.

Définition 9 (graphe connexe)**.**
On parle de chemin pour parler d'une succession d'arêtes dont deux consécutives partagent un sommet.On dit aussi qu'un graphe est connexe si deux sommets quelconques peuvent toujours être joints par un chemin.

Définition 10 (face)**.**
Dans un graphe planaire , les zones délimitées par des arêtes qui les entourent sont appelées des « faces ».

Exercice 14 (formule d'Euler)
Montrer que dans tout graphe planaire connexe, en notant s le nombre de sommets, f le nombre de faces et a le nombre d'arêtes, on a : f = a – s + 2.

Solution de l'exercice 14
Un graphe connexe peut être obtenu en partant du graphe avec un seul sommet et aucune arête et en rajoutant des arêtes une par une, partant d'un sommet déjà existant et arrivant vers un sommet soit déjà existant, soit nouveau.

Montrons par récurrence sur a que la propriété $P(a)$ suivante est vraie : "dans tout graphe planaire à a arêtes, en notant s le nombre de sommets et f le nombre de faces, on a : f = a – s + 2."

Initialisation : Au départ, on a 1 sommet, 0 arête et 1 face, et la relation $1 - 0 + 1 = 2$ est bien vérifiée.

Hérédité : Soit $a \in \mathbb{N}$. On suppose que $P(a)$ est vraie. Il suffit donc de montrer qu'à chaque fois que l'on rajoute une arête (et éventuellement le sommet d'arrivée avec s'il n'existait pas encore), la valeur de s-a+f reste inchangée. Deux cas de figure se présentent lorsqu'on rajoute une arête : Si le sommet d'arrivée de l'arête n'existe pas encore, alors on le rajoute en même temps que l'arête. En rajoutant cette arête et ce sommet, le nombre de faces reste inchangé (puisque la nouvelle arête ne coupe aucune face en deux). On a donc s qui devient $(s + 1)$ et a qui devient $(a + 1)$, et la valeur de $s - a + f$ ne change pas. Si le sommet d'arrivée de l'arête existe déjà, alors on ne rajoute aucun sommet. Par contre, la nouvelle arête coupe toujours une face en deux. Dans ce cas, a devient donc (a+1) et f devient (f+1), ce qui laisse à nouveau la valeur de s-a+f inchangée. Donc $P(a + 1)$ est vraie. D'après le principe de récurrence, la formule d'Euler $P(a)$ est toujours vraie.

Exercice 15 (Encore un peu d'arithmétique)
Soit k un entier naturel impair. Montrer que 2^{n+2} divise $k^{2^n} - 1$ pour tout $n \geqslant 1$.

Solution de l'exercice 15
On fixe k entier naturel impair et montrons par récurrence sur $n \geqslant 1$ la propriété $\mathcal{P}(n)$:
"2^{n+2} divise $k^{2^n} - 1$"

Initialisation :
Pour $n = 1$, la propriété se réécrit : 8 divise $k^2 - 1$.
Or, on vérifie modulo 8 que tous les carrés valent 1.

Hérédité :
Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie au rang n.
Ainsi, il existe $q \in \mathbb{N}$ tel que : $k^{2^n} - 1 = 2^{n+2}q$. Alors :

$$\begin{aligned} k^{2^{n+1}} - 1 &= k^{2^{n+1}} - k^{2^n} + k^{2^n} - 1 && \text{(III.1)} \\ &= k^{2^n}(k^{2^n} - 1) + (k^{2^n} - 1) && \text{(III.2)} \\ &= k^{2^n} \times 2^{n+2}q + 2^{n+2}q && \text{(III.3)} \\ &= 2^{n+2}q(k^{2^n} + 1) && \text{(III.4)} \end{aligned}$$

Or, comme k est impair, k^{2^n} est aussi impair, donc $k^{2^n} + 1$ est pair. Ainsi, on voit bien que 2^{n+3} divise $k^{2^{n+1}} - 1$, c'est-à-dire que la propriété $\mathcal{P}(n + 1)$. Par principe de récurrence, on a la propriété voulue. Remarque : on peut aussi directement écrire l'identité remarquable.

8 Équations diophantiennes et factorisations (Théo & Gaspard D.)

L'objectif de cette séance était de développer les bons réflexes à adopter face à une équation diophantienne. Il est toujours bon de travailler modulo $3, 4$ et 8 ou une puissance d'un nombre premier. Il faut également se rappeler des factorisations usuelles et du lemme de Gauss sans oublier de vérifier si les solutions trouvées fonctionnent réellement.

Exercices

Exercice 1
Existe-t-il des entiers a et b tels que $a^2 + b^2 = 10^{100} + 3$?

Exercice 2
Trouver tous les triplets d'entiers positifs (x, y, n) tels que : $x^2 + y^2 + 41 = 2^n$.

Exercice 3
Trouver les entiers a et b tels que : $3a^2 = b^2 + 1$

Exercice 4
Trouver tous les quadruplets d'entiers positifs (x, y, z, n) tels que : $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 2^n$

Exercice 5
Déterminer toutes les x, y entiers positifs solution de $x^2 - 2 \times y! = 2021$.

Exercice 6
Déterminer tous les entiers naturels non nuls a, b et c pour lesquels il existe des entiers naturels non nuls x, y et z tels que $x! = ab + 1$, $y! = bc + 1$ et $z! = ca + 1$.

Exercice 7
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers positifs tels que $2^m + 1 = n^2$

Exercice 8
Déterminer tous les couples (m, n) d'entiers positifs tels que $2^m - 1 = 3^n$

Exercice 9
Déterminer tous les couples (a, n) d'entiers positifs tels que

$$3^n = a^2 - 16$$

Exercice 10
Pour quels entiers n existe-t-il des entiers a, b tels que $n + a^2 = b^2$?

Exercice 11
Déterminer tous les nombres premiers pour lesquels il existe des entiers strictement positifs x, y tels que

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Nous avons vu que pour tout entier a, a^2 est soit congru à 0 soit à 1 modulo 4. Donc $a^2 + b^2$ est congru à 0, 1 ou 2 modulo 4. Or $10^{100} + 3 \equiv 3[4]$, car 4 divise 10^{100}. On vient de trouver une contradiction, il n´y a donc pas de solution à cette équation diophantienne.

Solution de l'exercice 2
Les carrés sont congrus à 0 ou 1 modulo 4. Ainsi si $n \geqslant 2$, on n'a pas de solutions car le membre de gauche est congru à 1,2 ou 3 modulo 4, alors que le membre de droite est congru à 0 modulo 4. Ainsi il reste seulement le cas où $n = 0$ ou $n = 1$. Dans ce cas, on a que $2 \geqslant 2^n = x^2 + y^2 + 41 \geqslant 41$, donc il n'y a pas de solutions.

Solution de l'exercice 3
On regarde modulo 3 : le membre de gauche est congru à 0, tandis que le membre de droite est congru à 1 ou 2 modulo 3, car un carré modulo 3 est congru à 0 ou 1. Ainsi il n'y a pas de solution.

On peut aussi regarder modulo 4 pour montrer qu'il n'y a pas de solutions. En effet, le membre de gauche vaut 0 ou 3 modulo 4, et celui de droite vaut 1 ou 2 modulo 4.

Solution de l'exercice 4

Si $n \geqslant 3$, on regarde modulo 8. Un carré est congru à $0, 1, 4$ modulo 8, donc le membre de droite vaut $1, 2, 3, 4, 5, 6$ ou 7, mais jamais 0 modulo 8.

Pour $n = 2$ l'équation devient $x^2 + y^2 + z^2 + 1 = 4$, on a donc $x^2 + y^2 + z^2 = 3$. En particulier, x, y, z sont inférieurs ou égaux à 1, donc l'unique possibilité est $x = y = z = 1$. Réciproquement $(1, 1, 1, 2)$ est bien solution.

Pour $n = 1$, l'équation devient $x^2 + y^2 + z^2 = 2 - 1 = 1$, donc parmi x, y, z, un vaut 1 et les autres 0. Réciproquement $(0, 0, 1, 1), (0, 1, 0, 1), (1, 0, 0, 1), (1, 1, 1, 2)$ sont solutions.

Pour $n = 0$ l'équation devient $x^2 + y^2 + z^2 = 0$, donc $x = y = z = 0$. Réciproquement $(0, 0, 0, 0)$ est solution.

Ainsi il n'y a que les 5 solutions citées précédemment.

Solution de l'exercice 5
En regardant modulo 8, $2021 \equiv 5$, et $8 \mid 2 \times y!$ dès que $y \geq 4$. Ainsi, on aurait $x^2 \equiv 5[8]$, contradiction !
Donc $y < 4$.

Pour $0 \leqslant y \leqslant 3$, on obtient $x^2 = 2023, 2023, 2025, 2030$. Or $44^2 < 2023 < 2025 = 45^2 < 2030 < 46^2$, donc la seule possibilité est $y = 2$ et $x = 45$.

Réciproquement, on vérifie que le couple $(45, 2)$ est solution.

Solution de l'exercice 6
Soit (a, b, c) un triplet solution éventuel, et (x, y, z) donnés par l'énoncé. Sans perte de généralité, et puisque x, y et z jouent des rôles symétriques, on suppose que $x \leqslant y \leqslant z$.

Regardons modulo 3. Pour cela supposons que $x \geqslant 3$. Dans ce cas, $ab \equiv -1 \equiv bc \equiv ca \pmod 3$. En particulier, 3 ne divise ni a ni b ni c : a, b, c valent 1 ou -1 mod 3. Par principe des tiroirs, deux éléments sont alors égaux mod 3. Par symétrie, on peut supposer que a et b sont égaux modulo 3. On a donc $ab \equiv (\pm 1)^2 \equiv 1 \not\equiv -1 \pmod 3$ ce qui est absurde.

Ainsi, x vaut 1 ou 2, donc $ab+1$ vaut 1 ou 2, donc ab vaut 0 ou 1. D'après l'énoncé, on en déduit donc que $a=b=1$ et $x=1$, et $c=z!-1$. Ainsi à permutation près $(a,b,c)=(1,1,z!-1)$.

Réciproquement, si (a,b,c) vaut à permutation près un triplet de la forme $(1,1,t!-1)$, à permutation près $(ab+1,bc+1,ac+1)$ vaut $(2!,t!,t!)$.

Solution de l'exercice 7

On fait passer le 1 de l'autre côté afin de factoriser : $2^m = n^2-1 = (n+1)(n-1)$. Comme $n+1>0$, on a $n-1>0$. Ainsi $n+1$ et $n-1$ sont des puissances de 2 car 2 est premier. On a donc $n+1=2^a$ et $n-1=2^b$ avec $a>b$, donc $2^a-2^b=2=2^b(2^{a-b}-1)$. Ainsi on doit avoir $b\leqslant 1$ car $2^b \mid 2$, et par parité, $b=1$. On trouve alors que $n=1+2^b=3$, donc $2^m=3^2-1=8$, donc $m=3$. Réciproquement on a bien $2^3+1=9=3^2$, donc $(3,3)$ est l'unique couple solution.

Solution de l'exercice 8

Regardons les puissances de 3. Celles-ci valent alternativement $1,3,1,3,1,\ldots$ modulo 8, donc ne peuvent valoir que 1 ou 3. Or si $m\geqslant 3$, on a $8\mid 2^m$ et $3^n\equiv 7[8]$ ce qui est impossible.
On doit donc avoir $m<3$.
Si $m=2$ on a $3^n=3$ donc $n=1$.
Si $m=1$ on a $3^n=1$ donc $n=0$.
Si $m=0$ on a $3^n=0$ ce qui est impossible.
Réciproquement, les couples $(2,1)$ et $(1,0)$ sont bien solutions de cette équation car $2^2-1=3^1$ et $2^1-1=3^0$.

Solution de l'exercice 9

On reconnait une différence de carrés dans le membre de droite que l'on peut factoriser.
On a en effet $3^n=a^2-16=(a+4)(a-4)$ donc $a+4$ et $a-4$ sont des puissances de 3 car 3 est premier. On peut donc écrire $a+4=3^x$ et $a-4=3^y$ et avoir $3^x-3^y=8=3^y(3^{x-y}-1)$ donc $3^y\mid 8$ ce qui implique forcément $y=0$. On a donc $a-4=3^0=1$ et $a=5$.
On trouve donc que $3^n=a+4=9$ donc $n=2$.
Réciproquement, le couple $(2,5)$ est bien solution de l'équation car $5^2-16=9=3^2$.

Solution de l'exercice 10

Modulo 4 un carré vaut 0 ou 1. Si $n=b^2-a^2$, alors $n\equiv 0,1$ ou -1 modulo 4.
Réciproquement, supposons $n\not\equiv 2[4]$ et trouvons a et b. L'équation se réécrit $n=b^2-a^2$, ou encore $n=(a+b)(b-a)$.
On traite deux cas séparément :
— Si n est impair, on veut $a+b$ et $b-a$ impairs. On cherche une solution simple, donc on peut par exemple faire en sorte que $b-a=1$. Ainsi, $b=a+1$ et $n=a+b=2a+1$. On veut donc prendre $a=\dfrac{n-1}{2}$ et $b=\dfrac{n+1}{2}$, on a alors bel et bien $a+b=n$ et $b-a=1$, donc $n=b^2-a^2$.
— Si n est pair, il est divisible par 4, on veut $a+b$ et $b-a$ pairs car ceux-ci sont de même parité. De même qu'avant, on cherche une solution simple donc on peut essayer de prendre $b-a=2$. Ainsi, $b=a+2$ et $\dfrac{n}{2}=a+b=2a+2$.
On veut donc prendre $a=\dfrac{n}{4}-1$ et donc $b=\dfrac{n}{4}+1$, on a alors bel et bien $b-a=2$ et $b+a=\dfrac{n}{2}$.

Solution de l'exercice 11

On commence par factoriser le terme de gauche : on a

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = xy(x + y) - p(x + y) = (xy - p)(x + y) = 5p$$

Ainsi, comme $x + y \geqslant 2$ on a 3 cas à traiter :

— $x + y = 5$ et $xy - p = p$. Dans ce cas, $xy = 2p$. Or $(x, y) = (1, 4), (2, 3), (3, 2)$ ou $(4, 1)$. On obtient alors que $xy = 4$ ou $xy = 6$. Ainsi $p = 2$ ou 3. Si $p = 2$, on vérifie que $x = 1$, $y = 4$ est bien une solution car $(16 - 2) - 4 = 10 = 2p$. Si $p = 3$, on vérifie que $x = 2$, $y = 3$ est bien une solution car $2 \times (9 - 3) + 3 \times (4 - 3) = 15 = 5p$.

— $x + y = p$ et $xy - p = 5$. Dans ce cas, $xy - (x + y) = 5$, donc $xy - x - y + 1 = 6$. On a donc $(x - 1)(y - 1) = 6$, donc à permutation près $(x - 1, y - 1) = (1, 6)$ ou $(2, 3)$, donc à permutation près, $(x, y) = (2, 7)$ ou $(3, 4)$. Ainsi $p = 2 + 7 = 9$ ou $3 + 4 = 7$. Comme p est premier, $p = 7$. Réciproquement si $p = 7$, on vérifie que $x = 3, y = 4$ est bien une solution car $3(16 - 7) + 4(9 - 7) = 35 = 5p$.

— $x + y = 5p$ et $xy - p = 1$. Par symétrie on peut supposer $x \geqslant y$, on a donc $x \geqslant 2,5p$, donc $1 = xy - p \geqslant 2,5p - p = 1,5p$, ce qui est absurde.

Ainsi les solutions sont $p = 2, 3, 7$.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Soit a, b, c, d des réels strictement positifs. Montrer que l'inégalité suivante est vraie :

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} \geqslant 4.$$

Exercice 2
Déterminer tous les couples (n, k) d'entiers positifs ou nuls tels que

$$2023 + 2^n = k^2.$$

Exercice 3
Déterminer tous les triplets (p, n, k) d'entiers strictement positifs tels que p est premier et vérifiant l'égalité suivante :

$$144 + p^n = k^2.$$

Exercice 4
Soit x, y, z des réels strictement positifs. Montrer que l'inégalité suivante est vraie :

$$\frac{x}{x+2y+3z} + \frac{y}{y+2z+3x} + \frac{z}{z+2x+3y} \geqslant \frac{1}{2}.$$

Solution de l'exercice 1

On applique l'inégalité arithmético géométrique aux quatre éléments de la somme. On a :

$$\frac{a}{b}+\frac{b}{c}+\frac{c}{d}+\frac{d}{a} \geqslant 4\sqrt{\frac{a}{b}\times\frac{b}{c}\times\frac{c}{d}\times\frac{d}{a}} = 4\sqrt{\frac{abcd}{abcd}} = 4.$$

On a donc bien l'inégalité voulue.

Solution de l'exercice 2

Comme on a des carrés et une puissance de 2, il est naturel de regarder modulo 4. Ainsi si $n \geqslant 2$, l'équation $2023 + 2^n = k^2$ modulo 4, devient $2023 \equiv 3 \equiv k^2 \pmod 4$, ce qui est impossible car les seuls carrés modulo 4 sont 0 et 1.

Ainsi on a forcément $n = 0$ ou 1. Si $n = 1$, l'équation deivient $k^2 = 2023 + 2 = 2025 = 45^2$, donc $k = 45$ est l'unique solution : on a donc le couple $(1, 45)$ qui est solution. Si $n = 0$, l'équation devient $k^2 = 2024$. Or $44^2 < 2024 < 45^2$, donc 2024 n'est pas un carré : dans ce cas il n'y a pas de solution.

Ainsi l'unique couple solution est $(n, k) = (1, 45)$.

Solution de l'exercice 3

Le nombre 144 étant un carré, on s'empresse de factoriser l'équation. L'équation se réécrit $p^n = k^2 - 144 = k^2 - 12^2 = (k - 12)(k + 12)$. En particulier comme $(k - 12)(k + 12) = p^n$, et $k + 12 > 0$, on a $k - 12 > 0$, et $k + 12$ et $k - 12$ sont des puissances de p. Posons a, b des entiers positifs tels que $p^a = k - 12$ et $p^b = k + 12$. Comme $k + 12 > k - 12$, on a $b > a$, et en faisant le produit on a $a + b = n$.

Si $a = 0$, on a $k = 12 + p^a = 13$, et $p^b = 13 + 12 = 25 = 5^2$, donc $p = 5$ et $b = 2$. En particulier $n = a + b = 2$, donc $(p, n, k) = (5, 2, 13)$.

Sinon, on a $a > 0$. Notons que $p^a(p^{b-a} - 1) = p^b - p^a = k + 12 - (k - 12) = 24$. En particulier, p divise le terme de gauche, donc p divise 24, donc $p = 2$ ou 3.

Si $p = 2$, on a $2^a(2^{b-a} - 1) = 2^3 \times 3$. Or $2^{b-a} - 1$ est impair, donc on a forcément $2^a = 8$, donc $a = 3$. Ainsi $2^{b-a} - 1 = 3$, donc $2^{b-3} = 4$, donc $b - 3 = 2$, donc $b = 5$. Ainsi $n = a + b = 8$, et $k = 12 + p^a = 12 + 2^3 = 20$. On a donc $(p, n, k) = (2, 8, 20)$.

Si $p = 3$, on a $3^a(3^{b-a} - 1) = 2^3 \times 3$. On ne peut avoir $a \geqslant 2$, sinon 9 diviserait 24, donc $a = 1$. Ainsi $3^{b-a} - 1 = 8$, donc $3^{b-1} = 9$, donc $b - 1 = 2$, donc $b = 3$. Ainsi $n = a + b = 4$ et $k = 12 + p^a = 15$. On a donc $(p, n, k) = (3, 4, 15)$.

Les trois couples trouvés sont solutions car $144 + 5^2 = 169 = 13^2$, $144 + 2^8 = 144 + 256 = 400 = 20^2$ et $144 + 3^4 = 144 + 81 = 225 = 15^2$. Les couples solutions sont donc $(5, 2, 13)$, $(2, 8, 20)$ et $(3, 4, 15)$.

Solution de l'exercice 4

Etant face à une somme de fractions, on souhaiterait utiliser l'inégalité des mauvais élèves. Cependant, les dénominateurs ne sont pas des carrés. On peut néanmoins multiplier le numérateur et le dénominateur de la première fraction par x, de la seconde par y, et de la troisième par z pour utiliser l'inégalité des mauvais élèves. On obtient :

$$\begin{aligned}\frac{x}{x+2y+3z}+\frac{y}{y+2z+3x}+\frac{z}{z+2x+3y} &= \frac{x^2}{x^2+2xy+3xz}+\frac{y^2}{y^2+2yz+3xy}+\frac{z^2}{z^2+2xz+3yz}\\ &\geqslant \frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)}.\end{aligned}$$

Il suffit donc de montrer que $\frac{(x+y+z)^2}{x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)} \geqslant \frac{1}{2}$ pour conclure.

Or l'inégalité précédente est équivalente à $2(x+y+z)^2 \geqslant x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)$, donc équivalente à $2(x^2+y^2+z^2)+4(xy+yz+xz) \geqslant x^2+y^2+z^2+5(xy+yz+zx)$. Ainsi l'inégalité est équivalente à $x^2+y^2+z^2 \geqslant xy+yz+zx$, qui est simplement le lemme du tourniquet, ce qui conclut la preuve.

3 Deuxième partie : Géométrie & Combinatoire

1 Chasse aux angles (Pierre-Marie)

Dans ce cours ont été rappelés les principales droites remarquables d'un triangle et leurs propriétés, ainsi que les théorèmes de l'angle au centre, de l'angle tangent et des conditions pour que quatre points soient cocycliques.

On trouvera l'intégralité des éléments abordés et des exercices traités ici : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_base.pdf.

2 Principe des tiroirs (Maena)

Théorème 1.
Principe des tiroirs SSi $n + 1$ éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient au moins 2 éléments.

Démonstration. Par l'absurde, si tous les ensembles contiennent 0 ou 1 élément, alors le nombre d'éléments est inférieur ou égal à n. □

Théorème 2.
Principe des tiroirs généralisé SSi $nk + 1$ éléments doivent être rangé dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble avec $k + 1$ éléments.

Théorème 3.
Principe des tiroirs infini SSi une infinité d'éléments doivent être placés dans n ensembles, alors il existe au moins un ensemble qui contient une infinité d'éléments.

Remarque : On parle d'éléments et d'ensembles, mais en pratique les ensembles sont généralement une "propriété", et on cherche à montrer que deux éléments ont la même propriété.

Note : Cela s'appelle le principe des tiroirs, car on parle généralement de *chaussettes* pour les éléments et de *tiroirs* pour les ensembles. Ainsi, le principe se reformule de la manière suivant : si on a $n + 1$ chaussettes à ranger dans n tiroirs, un des tiroirs contiendra au moins deux chaussettes. Les *tiroirs* et les *chaussettes* seront parfois précisés pour clarifier les raisonnements.

– Exercices classiques –

Exercice 1
Baptiste veut attraper une paire de chaussettes dans le noir. Il a 6 chaussettes rouges, 13 bleues et 8 blanches. Combien doit-il en prendre pour être sûr d'en avoir 2 de même couleur ?

Exercice 2
Une personne a entre 0 et 300000 cheveux sur la tête. L'agglomération de Marseille contient 2000000 habitants. Combien de Marseillais au minimum ont le même nombre de cheveux ?

Exercice 3
Combien de personnes faut-il au minimum pour que deux personnes aient leur anniversaire le même jour ?

Exercice 4
Montrer que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est toujours pair pour a, b, c entiers.

Exercice 5
Il y a n élèves au stage de Cachan Junior et certains se sont serrés la main en arrivant. Montrer qu'il existe deux personnes ayant serré le même nombre de mains.

– TD –

Exercice 6
On colorie le plan en blanc et noir. Montrer qu'il existe deux points de même couleur distant d'exactement $1cm$.

Exercice 7
On prend 5 points dans un carré de côté 1. Montrer qu'il existe 2 points dont la distance est inférieure $\frac{3}{4}$.

Exercice 8
On prend cinq points distincts du plan à coordonnées entières. Montrer qu'il en existe d'eux tel que le milieu du segment les reliant soient à coordonnées entières.

Exercice 9

1. 4 points sont sur un cercle. Montrer qu'il existe un demi-cercle (bords compris) qui contient 3 de ces points.
2. 5 points sont sur une sphère. Montrer qu'il existe une demi-sphère (bords compris) qui contient 4 de ces points.

Exercice 10
On considère un tableau 3×3 tel que sur chaque case figure -1, 0 ou 1. On considère la somme de chacune des colonnes, lignes et grandes diagonales. Montrer que parmi ces sommes, il y en a toujours deux qui sont égales.

Exercice 11
Bérénice a écrit 2023 nombres entiers sur une feuille de papier. Démontrer que, parmi ces 2023 nombres, il en existe deux dont la différence est divisible par 2022.

Exercice 12
Au goûter, les quinze élèves du groupe A se sont partagés cent bonbons. Démontrer qu'il y a au moins deux élèves qui ont pris le même nombre de bonbons.

Exercice 13
On choisit 10 entiers quelconques inférieurs à 100. Montrer qu'on peut trouver 2 sous-ensembles de ces 10 entiers, A et B disjoints et non vides de même somme.

Solution de l'exercice 1
Ici, les *tiroirs* sont les couleurs, car on en veut au moins deux de la même couleur. Les *chaussettes* sont les chaussettes. Il y a trois couleurs donc on prend quatre chaussettes.

On constate bien que les *tiroirs* sont une "propriété" : la couleur. Chaque chaussette a forcément une des 3 couleurs donc on peut les ranger dans ces catégories.

Solution de l'exercice 2
Il faut appliquer ici le principe des tiroirs généralisés. Les *chaussettes* sont les Marseillais et le nombre de cheveux possible d'avoir les *tiroirs*. Il y a 300001 tiroirs pour 2000000 Marseillais. Par le principe des tiroirs généralisés, $300001 \times 6 + 199994 = 2000000$, donc il y a au moins 7 personnes qui ont le même nombre de cheveux.

Solution de l'exercice 3
On veut au moins deux anniversaires le même jour, les *tiroirs* sont donc les jours et les *chaussettes* sont les personnes. Il y a 366 jours, il nous faut donc 367 personnes.

Solution de l'exercice 4
On veut montrer que $(a-b)(b-c)(c-a)$ est toujours pair.

Une mauvaise idée serait de développer ce produit. En effet, avoir une quantité sous forme de produit permet d'avoir rapidement des informations sur sa divisibilité. Ici il suffit qu'un des trois facteurs soit divisible par 2.

Les *tiroirs* et *chaussettes* sont moins immédiats. On peut remarquer qu'on parle de parité, un tiroir classique est "être pair" ou "être impair" (vous remarquerez que encore une fois c'est une propriété).

On a trois nombres a, b et c, donc par le principe des tiroirs, deux ont la même parité. Donc leur différence sera paire, ce qui nous donne bien un facteur pair.

Solution de l'exercice 5
0n cherche à montrer qu'au moins deux personnes ont serré le même nombre de mains. Directement, les *chaussettes* sont donc les personnes et les *tiroirs* le nombre de mains serrées (le "au moins deux" indique qui seront les chaussetes, et la propriété qui suit indique les tiroirs).

Il y a n élèves, donc un élève peut serrer au plus $n-1$. Or si un élève serre $n-1$ mains, aucun élève n'aura serré 0 main. Donc de 1 à $n-1$ on a bien $n-1$ tiroirs. Dans l'autre sens, si un élève serre 0 main, aucun élève n'aura serré $n-1$ mains donc encore une fois, de 0 à $n-2$ on a $n-1$ tiroirs. On conclut avec le principe des tiroirs.

Solution de l'exercice 6
On cherche "au moins deux" points de même couleur distant d'exactement $1cm$. Directement les *chaussettes* sont les points. Les *tiroirs* sont les couleurs. Si on a trois points à distance 1 les uns des autres, on peut conclure directement. Pour cela, il faut remarquer que si on prend un triangle équilatéral de côté 1, ses sommets respectent cette condition.

Vous pouvez vous amuser à chercher des constructions avec plus de points telles que tous les points soient équidistants les uns des autres pour pouvoir faire cet exercice avec plus de points et plus de couleurs !

Solution de l'exercice 7
Les *chaussettes* sont les points. On divise notre carré en quatre petits carrés égaux (en rejoignant les milieux des côtés opposés), ce sont nos *tiroirs*. La plus grande distance dans un petit carré est sa diagonale $\frac{\sqrt{2}}{2} < \frac{3}{4}$. Comme on a 5 points, on aura forcément deux points dans un même petit carré qui respecteront la condition.

Solution de l'exercice 8
De nouveau, on peut deviner en lisant l'énoncé que les *chaussettes* vont être les points. Les *tiroirs* sont moins évidents. On considère les coordonnées des points, on les représente donc sous la forme (x, y). Si on a deux points (x_1, y_1) et (x_2, y_2), le milieu du segment est $(\frac{x_1+x_2}{2}, \frac{y_1+y_2}{2})$. La condition pour que le milieu soit à coordonnées entières est que x_1 et x_2 aient la même parité, de même pour y_1 et y_2. De nouveau la parité va être nos *tiroirs*. Plus précisément, les couples de parité, à savoir $(P, P), (P, I), (I, I), (I, P)$. On a bien 4 tiroirs pour 5 points, donc deux points vont avoir la même parité pour respectivement x_1, x_2 et y_1, y_2.

Solution de l'exercice 9

1. Naturellement, les *tiroirs* sont les demi-cercles et les *chaussettes* sont les points. Maintenant, tout ce qu'on peut dire avec cette information est qu'un demi-cercle contient au moins 2 points. Il faut donc raffiner les choix des demi-cercles. L'énoncé précise : bords compris. On peut donc tracer un diamètre qui passe par un des points, ce point appartient aux deux demi-cercles et ainsi il reste 3 points à répartir entre deux demi-cercles. Il y aura donc un demi-cercle avec au moins 2 points par principe des tiroirs + le point sur le diamètre, ce qui conclut.
2. L'idée est la même. Cette fois-ci c'est un plan qui va séparer notre sphère en demi-sphère. Une droite pour le diamètre est définie par un point et le centre. Un plan ici est défini par le centre et deux points. On peut donc placer deux points d'office dans les deux demi-sphères ! Il reste donc 3 points à séparer dans les deux demi-sphères et on conclut de la même manière.

Solution de l'exercice 10
On veut deux sommes égales, les *chaussettes* vont donc être les différentes sommes (ce qui correspond au nombre de lignes, colonnes et diagonales) et les *tiroirs* les valeurs que ces sommes peuvent prendre. On a 8 lignes + colonnes + diagonales, or les valeurs possibles des sommes vont de -3 à 3 donc 7 valeurs. On conclut par principe des tiroirs.

Solution de l'exercice 11
On cherche deux nombres dont la différence est divisble par 2022. On peut donc intuiter que les *chaussettes* sont les nombres. Pour les *tiroirs*, on a utilisé la parité dans un exercice précédent. On peut généraliser cette idée à la congruence module m. Donc pour la parité, on a bien toujours deux tiroirs, congru à 0 quand c'est pair et à 1 quand c'est impair. Ici, si on regarde la congruence, on aura 2021 tiroirs (2021 restes différents possibles). On sait donc qu'on a deux nombres qui ont la même congruence module 2022, et ainsi leur différence sera divisible par 2022.

Solution de l'exercice 12
Le principe des tiroirs est moins explicite dans cet exercice. Supposons que tous les enfants aient pris un nombre différent de bonbons. Il y aurait donc 15 valeurs de "bonbons pris" différentes (nos tiroirs). Supposons naïvement que les valeurs possibles sont $0, 1, 2, \ldots, 13, 14$. La somme des bonbons est 105, donc ce n'est pas possible. On se rend compte que considérer ces valeurs suffisents, car si des enfants ont pris encore plus de bonbons, la quantité totale serait juste plus grande. Donc on a au plus 14 valeurs (tiroirs) différentes pour 15 enfants, par principe des tiroirs, deux enfants ont pris le même nombre de bonbons.

Solution de l'exercice 13
Les *chaussettes* vont être les différents sous-ensembles des 10 entiers et les *tiroirs* les valeurs possible de la somme de leurs éléments. Pour le nombre de tiroirs, la valeur maximale d'un ensemble est $91 + 92 + \cdots + 100 < 10 * 100 = 1000$, donc le nombre de tiroirs va être inférieur à 1000 (ici prendre une borne grossière suffit, on pourrait éventuellement raffiner en prenant la valeur maximum exacte). Il y a $2^10 - 1 = 1023$ (-1 pour enlever l'ensemble vide) sous-ensembles possibles. Il y a donc deux sous-ensembles distincts qui ont la même somme. Cependant il reste une subtilité, on les veut distincts. Pour ça, il faut enlever les éléments en communs, puisqu'on enlèvera la même quantité, leur somme sera toujours égale, et ils ne seront jamais vide car distincts.

3 Invariants/coloriages (Gaëtan & Vincent)

Ce cours s'inspire fortement des cours qu'ont donnés Aline Cahuzac et Yohann d'Anello en 2020, Savinien Kreczman en 2021, et Arthur Léonard et Xavier Pigé en 2022.

Invariants

Définition 1.
Un *invariant* est une quantité (qui peut-être un nombre entier, un nombre réel, un nombre modulo n, un ensemble de nombres, une suite de nombres, ...) qui reste inchangée pendant les différentes étapes d'un processus. L'utilisation d'invariants permet de démontrer qu'une configuration n'est pas accessible à partir d'une autre.

Exercice 1
Aline a déchiré une feuille de papier en trois parties. Ensuite, elle déchire à nouveau l'une de ces parties en trois parties ; ça lui fait cinq parties en tout. Elle recommence alors, et déchire l'une de ses cinq parties en trois parties, et ainsi de suite. Peut-elle obtenir, à un moment donné, un total de 2020 parties ? de 2023 parties ?

Exercice 2
Bérénice a écrit les nombres 2, 3, 5, 7 et 11 sur un tableau. Elle s'autorise ensuite, autant de fois qu'elle le voudra, à remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique. Peut-elle se débrouiller pour obtenir cinq nombres égaux après un nombre fini de telles opérations ?

Exercice 3
Caroline a écrit les nombres de 1 à 2022 au tableau. À chaque étape, elle efface deux nombres

au tableau et les remplace par leur différence. Peut-elle se débrouiller pour finir avec un seul nombre égal à 1 sur son tableau ?

Exercice 4
Daphné a écrit au tableau les cinq nombres 1, 3, 6, 8 et 11. Elle s'autorise ensuite, autant de fois qu'elle le voudra, à effacer trois nombres écrits au tableau, disons a, b et c, et à écrire à la place leurs moyennes arithmétiques $(a+b)/2$, $(b+c)/2$ et $(c+a)/2$. Peut-elle se débrouiller pour obtenir les cinq nombres 2, 4, 5, 7 et 9 après un nombre fini de telles opérations ?

Et si, au lieu des moyennes arithmétiques, Félicie avait remplacé les nombres a, b et c par leurs moyennes géométriques $\sqrt{ab}$, $\sqrt{bc}$ et $\sqrt{ca}$?

Exercice 5
Elsa et Éva se baladent sur les points à coordonnées entières du plan. Elsa part du point $(0,0)$ et Éva du point $(0,1)$. Chaque seconde, chacune se déplace vers un points adjacent à celui sur lequel elle se trouve. Elsa et Éva pourront-elles se rejoindre ?

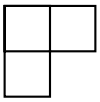
Coloriages et pavages

Un certain nombre de problèmes de combinatoire sont des problèmes de *pavage*. Dans un tel problème, l'objectif est de recouvrir une forme avec des tuiles de types donnés. Pour prouver l'impossibilité d'un tel recouvrement, il est souvent utile de considérer un coloriage de la forme à recouvrir, c'est-à-dire la donnée d'une couleur pour chaque case de la forme. On analyse ensuite pour chaque tuile quelles couleurs elle recouvre pour arriver à la conclusion. Lorsqu'on considère un tel problème, il est toujours utile de compter le nombre de cases de la forme, ainsi que de considérer le coloriage « en échiquier ».

Exercice 6
Félicie dispose d'un échiquier de dimensions 8×8 et de dominos de taille 2×1, qu'elle peut tourner si elle le souhaite, mais pas se faire chevaucher.

1. Félicie peut-elle recouvrir son échiquier à l'aide de dominos, sans dépasser de l'échiquier ?
2. Elle enlève maintenant un coin de l'échiquier. Peut-elle recouvrir le reste de l'échiquier, toujours sans dépasser ?
3. On suppose cette fois-ci que Félicie a enlevé deux coins opposés de l'échiquier. Peut-elle recouvrir le reste de l'échiquier, sans dépasser ?

Exercice 7
Gabrielle dispose d'une grille de dimensions 3×3 et de pièces en forme de L recouvrant trois cases, comme ci-dessous. Peut-elle recouvrir sa grille à l'aide de telles pièces ?



Exercice 8
Six nids sont placés en cercle ; dans chacun des nids se trouve un oiseau. Chaque nuit, chaque

oiseau s'envole vers un nid voisin. Est-il possible que tous les oiseaux se retrouvent dans un même nid après un nombre fini de nuits ?

Exercice 9
Nouvelle animathrice, Honorine a réuni six élèves du groupe A autour d'une table ronde. Parmi ces six élèves, l'une d'entre eux, disons Isabelle, donne un bonbon à chacun de ses deux voisins. Soucieuse d'éviter les jalousies, Honorine choisit alors, chaque minute, deux élèves assis l'un à côté de l'autre, et leur donne un bonbon chacun. Étant entendu que les élèves ne mangent pas de bonbons pendant les cours, Honorine pourra-t-elle faire en sorte que les six élèves finissent par avoir le même nombre de bonbons ?

Exercice 10
Joséphine dispose d'un damier de dimensions 10×10 et de pièces rectangulaires de dimensions 4×1. Peut-elle paver son damier à l'aide de ses pièces rectangulaires ?

Exercice 11
Kahina dispose d'un échiquier de dimensions 8×8 dont toutes les cases sont blanches. Elle s'autorise ensuite, autant de fois qu'elle le voudra, à choisir un rectangles 3×1 ou 1×3 dont elle inverse les couleurs des cases : le noir devient blanc, et *vice versa*. Peut-elle faire en sorte que l'échiquier devienne entièrement noir ?

Exercice 12
Lucie dispose d'une grille rectangulaire de dimensions $m \times n$. Elle a placé un jeton sur la case en bas à gauche de cette grille. Puis elle déplace son jeton de case en case, passant à chaque fois d'une case à une autre case avec laquelle elle a un côté en commun. Elle souhaite que son jeton passe une unique fois par chaque case (il ne reviendra donc jamais sur sa case de départ) jusqu'à arriver à la case située en haut à droite. Pour quelles valeurs de m et de n peut-elle y arriver ?

Exercice 13
Maena a écrit les quatre nombres $-\sqrt{2}$, $1/\sqrt{2}$, $\sqrt{2}$ et 2 au tableau. Elle s'autorise ensuite, autant de fois qu'elle le voudra, à effacer deux nombres écrits au tableau, disons a et b, et à écrire à la place les nombres $(a+b)/\sqrt{2}$ et $(a-b)/\sqrt{2}$. Peut-elle se débrouiller pour obtenir les quatre nombres $-\sqrt{2}$, 1, $\sqrt{2}$ et $2\sqrt{2}$ après un nombre fini de telles opérations ?

Exercice 14
Sur une île tropicale vivent 34 lutins farceurs. Au début, il y en a 7 bleus, 10 rouges et 17 jaunes. Quand deux lutins de couleurs différentes se rencontrent, ils décident de jouer un tour à leurs congénères, et adoptent simultanément la troisième couleur. Un jour, l'intrépide Maryam arrive sur l'île et observe que tous les lutins sont de la même couleur. Quelle est cette couleur ?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Chaque opération d'Aline augmente de deux le nombre de parties dont elle dispose. Elle

atteindra donc n'importe quel nombre impair de parties, mais aucun nombre pair. En particulier, elle n'aura jamais 2020 parties, mais elle finira nécessairement par en avoir 2023 à un moment donné.

Solution de l'exercice 2
Chaque opération laisse inchangée la somme des nombres de Bérénice. Cette somme vaudra donc toujours $2 + 3 + 5 + 7 + 11 = 28$. Or, si Bérénice parvenait à obtenir cinq fois un entier n, cette somme vaudrait $5n$. Comme 28 n'est pas un multiple de 5, Bérénice ne parviendra donc jamais à faire en sorte que le même nombre soit présent cinq fois.

Solution de l'exercice 3
Chaque opération consiste à remplacer deux nombres $a \geqslant b$ par leur différence $a - b$. Par conséquent, la somme des nombres de Caroline n'est plus un invariant, puisqu'elle baisse de $2b$ lors de l'opération considérée. Cependant, la *parité* de cette somme ne change jamais.

Or, cette somme contient initialement 1012 nombres impairs et 1011 nombres pairs. Elle est donc paire et le restera. Elle ne vaudra donc jamais 1, ce qui aurait été le cas si Caroline s'était débrouillée pour que seul le nombre 1 subsiste au tableau.

Solution de l'exercice 4
Dans le premier cas, la somme des nombres de Daphné ne change jamais. Or, initialement, elle vaut $1+3+6+8+11 = 29$. Elle ne vaudra donc jamais $2+4+5+7+9 = 27$, ce qui empêche Daphné d'obtenir les cinq nombres 2, 4, 5, 7 et 9.

Dans le second cas, c'est le produit des nombres de Daphné qui ne change jamais. Or, initialement, il est divisible par 11. Il ne vaudra donc jamais $2 \times 4 \times 5 \times 7 \times 9$, ce qui empêche encore une fois Daphné d'obtenir les cinq nombres 2, 4, 5, 7 et 9.

Solution de l'exercice 5
À chaque tour, la somme des coordonnées du point sur lequel se trouvent nos deux comparses varie de ± 1. Par conséquent, la somme des coordonnées des deux points sur lesquelles elles se trouvent varie de -2, 0 ou 2, et ne change pas de parité.

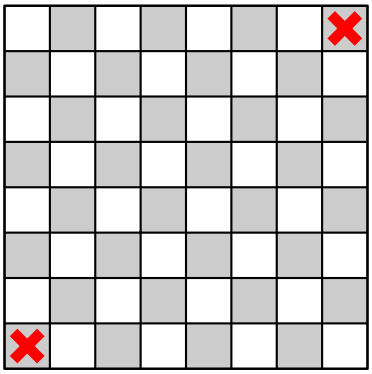
Or, initialement, cette somme est impaire. Elle le restera donc, ce qui interdit à Elsa et Éva de se retrouver en un même point de coordonnées (x, y), car alors la somme des coordonnées de leur points serait l'entier pair $2(x + y)$.

Solution de l'exercice 6

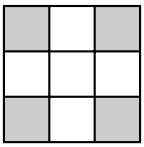
1. La réponse est *positive* : il suffit d'aligner 32 dominos horizontaux.

2. La réponse est ici *négative*. En effet, chaque domino recouvre deux cases, mais on n'a que 63 cases à recouvrir, ce qui nécessiterait $31,5$ dominos.

3. La réponse est encore une fois *négative*, mais l'argument précédent ne fonctionne plus. À la place, utilisons le coloriage habituel de l'échiquier en blanc et noir ; quitte à échanger les couleurs, on suppose que les deux cases que Félicie a supprimées sont noires. Il nous reste donc 32 cases blanches et 30 cases noires à recouvrir. Or, chaque domino est censé recouvrir une case blanche et une case noire. Recouvrir toutes nos cases sans dépasser de l'échiquier tronqué est donc impossible.



Solution de l'exercice 7
Si Gabrielle parvient à ses fins, elle aura utilisé trois pièces. Or, chaque pièce couvre au plus une des quatre cases coloriées en noir ci-dessous. Par conséquent, Gabrielle ne peut parvenir à ses fins.



Remarque : On peut en fait démontrer que les rectangles que peut recouvrir Gabrielle sont les rectangles de dimensions $a \times b$ tels que 3 divise ab, à l'exception des rectangles pour lesquels $\min\{a, b\} = 1$, ou bien $\min\{a, b\} = 3$ et ab est impair.

Solution de l'exercice 8
Colorions alternativement nos six nids en blanc et noir, et chaque oiseau de la couleur du nid qu'il occupe : deux nids adjacents sont de couleurs opposées. Chaque nuit, chaque oiseau change donc de couleur. Par conséquent, après chaque nuit, on disposera toujours de trois oiseaux noirs et trois oiseaux blancs. Nos six oiseaux ne seront donc jamais dans le même nid.

Solution alternative
Numérotons nos nids de 0 à 5, de sorte que chaque nid k se situe entre les nids $k - 1$ et $k + 1$; on identifie abusivement les nids 0 et 6. On donne ensuite à chaque oiseau le même numéro que son nid. Chaque nuit, le numéro d'un oiseau varie donc de ± 1 ou de ± 5 : il change de parité. Comme on a six oiseaux, la somme des numéros de nos oiseaux ne change donc pas de parité.

Or, initialement, cette somme vaut $1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 = 21$: elle est impaire. Si les six oiseaux se retrouvaient dans le nid x, elle vaudrait $6x$ et serait paire. Nos six oiseaux ne seront donc jamais dans le même nid.

Solution de l'exercice 9
Colorions alternativement en blanc et en noir les élèves du groupe A ; Isabelle est coloriée en blanc. Initialement, les élèves noirs ont donc, au total, deux bonbons de plus que les élèves blancs. Or, chaque minute, Honorine donne un bonbon à un élève blanc, et un autre à un élève noir. À tout instant, les élèves noirs auront donc plus de bonbons que les élèves blancs, ce qui empêchera l'ensemble des élèves d'avoir tous le même nombre de bonbons.

Solution de l'exercice 10

Numérotons les lignes et les colonnes du damier de 1 à 10, par exemple en partant du coin en bas à gauche. Joséphine colorie son damier avec quatre couleurs, qu'elle identifie aux entiers de 0 à 3, en procédant comme suit : elle colorie la case en ligne ℓ et colonne c avec la couleur $c + \ell \pmod 4$. Ce faisant, toute pièce rectangulaire recouvrira une case de chaque couleur.

Or, les huit premières lignes contiennent, sur chaque colonne, deux cases de chaque couleur ; puis, sur les deux dernières lignes, les huit premières colonnes contiennent, chacune deux cases de chaque couleur. Restent les quatre cases en haut à droite, qui forment un carré de dimensions 2×2 contenant une case de couleur 2, deux cases de couleur 3, une case de couleur 0 et aucune case de couleur 1. En tout, on a donc plus de cases de couleur 3 à recouvrir que de cases de couleur 1, ce qui empêche Joséphine de recouvrir intégralement son damier.

3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3
1	2	3	0	1	2	3	0	1	2
0	1	2	3	0	1	2	3	0	1
3	0	1	2	3	0	1	2	3	0
2	3	0	1	2	3	0	1	2	3

Solution de l'exercice 11

Kahina prend exemple sur son amie Joséphine. Elle numérote les lignes et les colonnes de l'échiquier de 1 à 8, puis écrit des entiers de 0 à 2 sur les cases de cet échiquier, en procédant comme suit : elle colorie la case en ligne ℓ et colonne c avec la couleur $c+\ell \pmod 3$. Ce faisant, chaque opération change la parité du nombre de cases noires de chacun des numéros 0, 1 et 2.

Or, initialement, ce nombre de cases est nul, donc pair. Si Kahina parvient à noircir l'échiquier, chacune des 21 cases de numéro 2, 22 cases de numéro 0 et 21 cases de numéro 1 sera noir. Le nombre de cases noires de numéro 1 aura changé de parité, mais pas celui du nombre de cases noires de numéro 0. Par conséquent, Kahina ne pourra donc pas colorier intégralement son échiquier en noir.

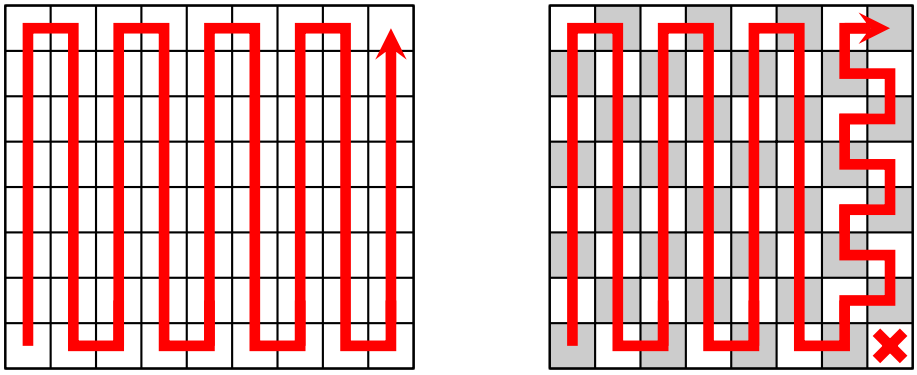
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0
1	2	0	1	2	0	1	2
0	1	2	0	1	2	0	1
2	0	1	2	0	1	2	0

Solution de l'exercice 12

Soit m le nombre de lignes de la grille, et n le nombre de ses colonnes. Si m est impair, Lucie commence par déplacer son jeton tout à droite ; puis elle le monte d'un cran et le déplace tout à gauche, avant de le remonter d'une ligne. En répétant ce processus, elle balaie les lignes depuis le bas vers le haut, et finira bien par arriver sur la case en haut à droite (auquel cas elle essaiera en vain de monter le jeton d'un cran, mais comme elle aura déjà gagné ce n'est pas bien grave). De même, si n est impair, Lucie peut décider de balayer les colonnes une par une, de la gauche vers la droite.

En revanche, si m et n sont pairs, étudions la coloration usuelle de sa grille, en supposant que les coins en bas à gauche et en haut à droite sont noirs. Le jeton de Lucie change de couleur à chaque étape, donc si elle termine son parcours sur une case noire, le jeton aura visité une case noire de plus que de cases blanches. Or, la grille contient $mn/2$ cases de chaque couleur. Il restera donc au moins une case blanche que le jeton de Lucie n'aura pas visité.

En conclusion, les solutions sont les couples (m, n) pour lesquels au moins un de deux entiers m et n est impair.



Solution de l'exercice 13

Comme on est au milieu d'un cours sur les invariants, on essaie d'en trouver un qui nous permettra de séparer la situation initiale de la situation à laquelle souhaite aboutir Maena, ce qui nous fournira une réponse négative :

- la quantité de nombres ne changera pas, mais elle vaut 4 dans la situation finale aussi bien que dans la situation que vise Maena ;
- la somme et le produit des nombres de Maena changent, car

$$\frac{x+y}{\sqrt{2}} + \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \sqrt{2}x \neq x+y \text{ et } \frac{x+y}{\sqrt{2}} \times \frac{x-y}{\sqrt{2}} = \frac{x^2-y^2}{2} \neq xy$$

  en général ;
- on cherche donc d'autres expressions simples en x et y qui se combineront bien par somme ou par produit, telles que des polynômes de degré 2 : on constate ainsi que

$$\left(\frac{x+y}{\sqrt{2}}\right)^2 + \left(\frac{x-y}{\sqrt{2}}\right)^2 = \frac{x^2+2x+y^2}{2} + \frac{x^2-2xy+y^2}{2} = x^2+y^2,$$

  ce qui signifie que la somme des carrés des nombres de Maena ne change pas.

Il suffit alors de vérifier que

$$(-\sqrt{2})^2 + (1/\sqrt{2})^2 + \sqrt{2}^2 + 2^2 = 17/2 \neq 13 = (-\sqrt{2})^2 + 1 + \sqrt{2} + (2\sqrt{2})^2$$

pour conclure que Maena ne pourra jamais arriver à ses fins.

Solution de l'exercice 14
Donnons un score de un point à chaque lutin bleu, deux points à chaque lutin rouge, et trois points à chaque lutin jaune. Étudions la manière dont varie la somme de ces scores quand deux lutins de couleurs différentes se rencontrent :

- s'ils sont bleu et rouge, ils avaient cumulé trois points, et en cumulent désormais six ;
- s'ils sont rouge et jaune, ils avaient cumulé cinq points, et en cumulent désormais deux ;
- s'ils sont jaune et bleu, ils avaient cumulé quatre points, et en cumulent toujours quatre.

Par conséquent, la somme des scores des lutins varie de -3, 0 ou $+3$ à chaque rencontre. En particulier, sa congruence modulo 3 ne change jamais.

Or, initialement, cette somme vaut $7 + 10 \times 2 + 17 \times 3 \equiv 27 \equiv 0 \pmod 3$. Par conséquent, si nos 34 lutins prennent une même couleur, ils auront chacun un score $s \equiv 34s \equiv 0 \pmod 3$. Cela signifie que $s = 3$, et donc que nos 34 lutins seront jaunes.

Solution alternative
Soit b, r et j le nombre de lutins bleus, rouges et jaunes à un moment donné. Lorsque deux lutins de couleurs différentes se rencontrent, deux de nos trois nombres baissent de 1, et le dernier augmente de 2. On souhaiterait ne pas devoir distinguer ces deux cas, ce qui revient à considérer nos nombres modulo 3 : dans ce cas, chacun des nombres b, r et j augmente de 2 à chaque étape.

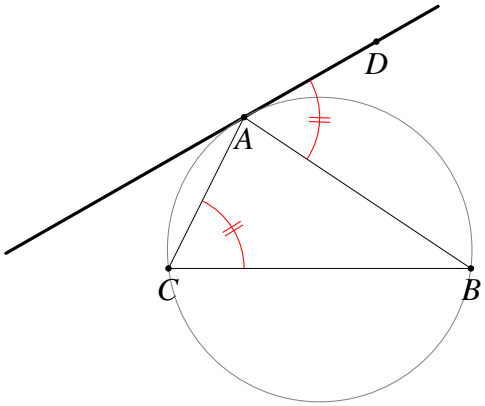
Or, quand Maryam arrive, deux de ces nombres, correspondant aux deux couleurs disparues, sont égaux, car ils valent 0. En outre, initialement, on sait que $b \equiv r \equiv 1 \pmod 3$, tandis que $j \equiv 2 \pmod 3$. Les deux couleurs disparues sont donc nécessairement le bleu et le rouge, ce qui fait que nos 34 lutins seront jaunes.

4 Angle tangent (Benoît)

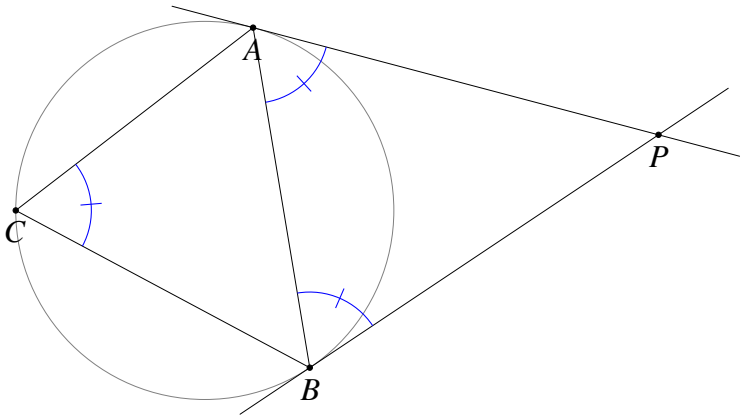
Nous avons repris les différentes propriétés du cours précédent et établi le théorème de l'angle tangentiel (avec sa réciproque).

Théorème 1 (Angle tangentiel)**.**
Soit ABC un triangle inscrit dans un cercle Γ et t une droite passant par A. Soit D un point sur t du côté de B.
La droite t est tangente à Γ si et seulement si

$$\widehat{DAB} = \widehat{ACB}$$



Exemple 2.



Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur du cercle.
Les tangentes de Γ passant par P coupent le cercle en A et B.
On a alors PAB isocèle en P.
En effet, en considérant un point C sur le cercle, on peut utiliser deux fois le théorème de l'angle tangentiel et obtenir :

$$\widehat{PAB} = \widehat{ACB} = \widehat{ABP}$$

Exercices

Exercice 1
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles sécants en A et B. Soit X un point situé à l'extérieur de ces deux cercles. La droite (XA) coupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en C et E ; la droite (XB) coupe les cercles Γ_1 et Γ_2 respectivement en D et F.
Prouver que (CD) et (EF) sont parallèles.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit et H l'orthocentre.
Prouver que $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$

Exercice 3
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles s'intersectant en A et B. On note C l'intersection de la tangente de ω_1 en A avec ω_2 et D l'intersection de la tangente de ω_2 en B avec ω_1.
Montrer que (AD) est parallèle à (BC).

Exercice 4
Soit ABC un triangle inscrit dans le cercle Γ.
Soit D le pied de la bissectrice issue de A. Soit P le point d'intersection de la tangente de Γ en A avec BC.
Montrer que PAD est isocèle en P.

Exercice 5
Soit ABC un triangle, P un point de $[BC]$, Q un point de $[CA]$, R un point de $[AB]$. Les cercles circonscrits à AQR et à BRP ont pour second point d'intersection X. Montrer que X est aussi sur le cercle circonscrit à CQP

Exercice 6
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en A et B distincts. On note O le centre d Γ_1. Soit C un point de Γ_1 distinct de A et B, D et E les intersections de Γ_2 respectivement avec (AC) et (BC) .
Montrer que (OC) et (DE) sont perpendiculaires.

Exercice 7
Soit Ω_1 un cercle tangent intérieurement en en second cercle Ω_2. On note A le point de tangence. Soit P un point de Ω_2. On consière les tangentes à Ω_1 passant par P : la première coupe Ω_1 en X et recoupe Ω_2 en Q, la seconde coupe Ω_1 en Y et recoupe Ω_2 en R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2 \cdot \widehat{XAY}$

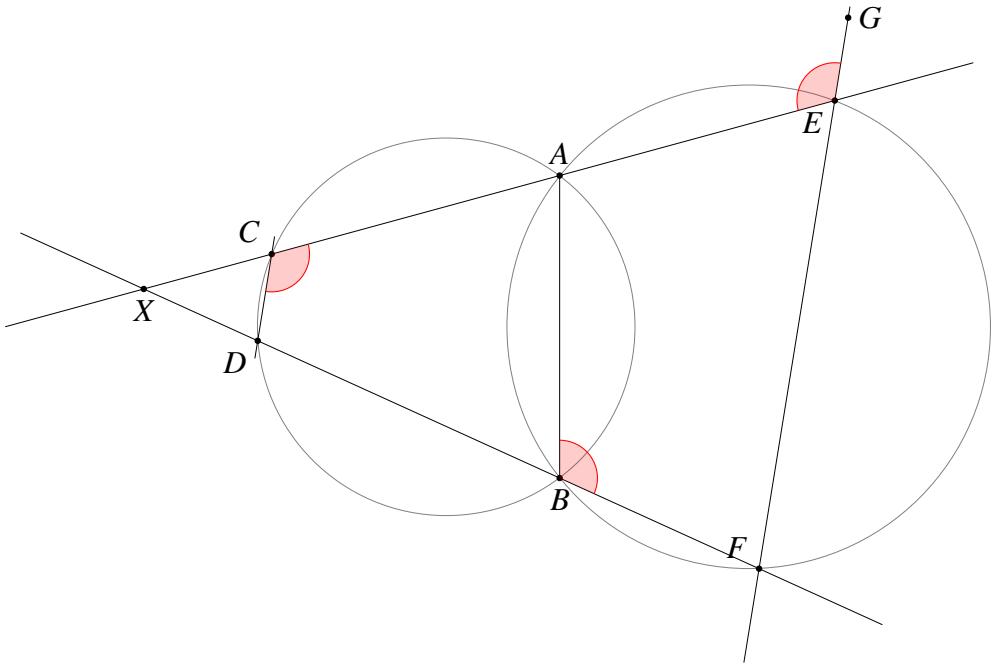
Exercice 8
Soit ABC un triangle. Les bissectrices des angles de sommets A et B rencontrent les côtés BC et AC respectivement en D et E. Soit F la projection orthogonale de C sur BE et G la projection orthogonale de C sur AD. Montrer que (FG) et (AB) sont parallèles.

Exercice 9
Soit un demi-cercle de diamètre $[AB]$ sur lequel on choisit deux points C et D. Soit S l'intersection de (AC) et (BD) et T le pied de la perpendiculaire à $[AB]$ issue de S. Montrer que (ST) est la bissectrice de $\widehat{CTD}$.

Exercice 10
Soit Γ un cercle et $[BC]$ une corde de ce cercle. On note A le milieu de l'arc BC. Soit D et E deux points du cercle qui ne sont pas sur l'arc de A. On considère F et G les points d'intersection respectifs des cordes $[AD]$ et $[AE]$ avec BC. Montrer que D, E, F, G sont cocycliques.

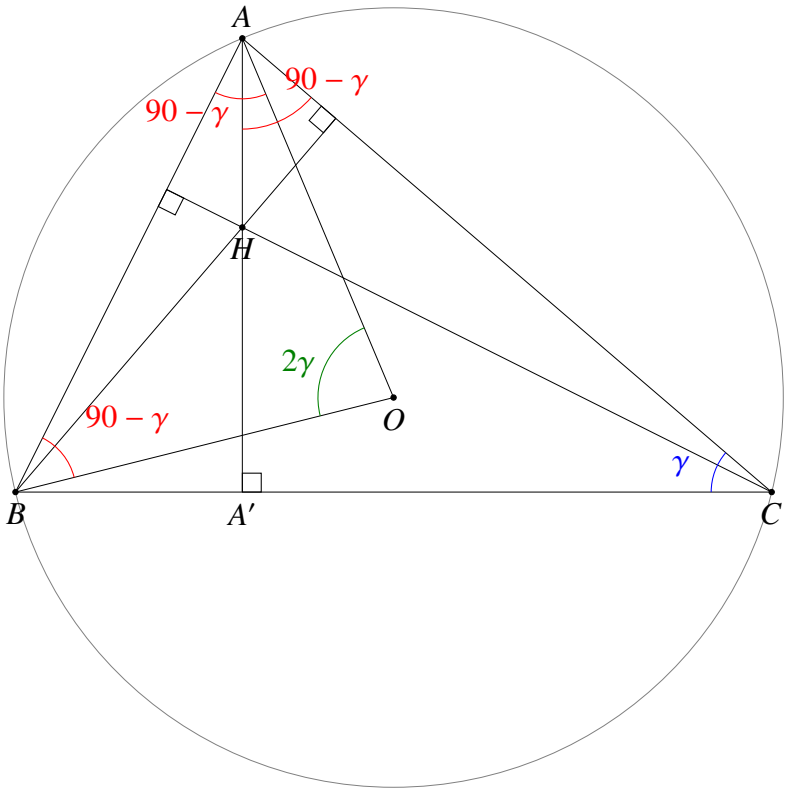
Solutions

Solution de l'exercice 1



On introduit le point G sur la figure.
A, B, C et D sont cocycliques donc $\widehat{DCA} = 180 - \widehat{DBA}$. D, B et F sont alignés donc $\widehat{FBA} = 180 - \widehat{DBA} = \widehat{DCA}$. De même par cyclicité de $ABFE$ et l'angle plat, on a $\widehat{AEG} = 180 - \widehat{AEF} = \widehat{ABF} = \widehat{DCA}$.
Ainsi, par angles alternes-internes, (CD) et (EF) sont parallèles.

Solution de l'exercice 2

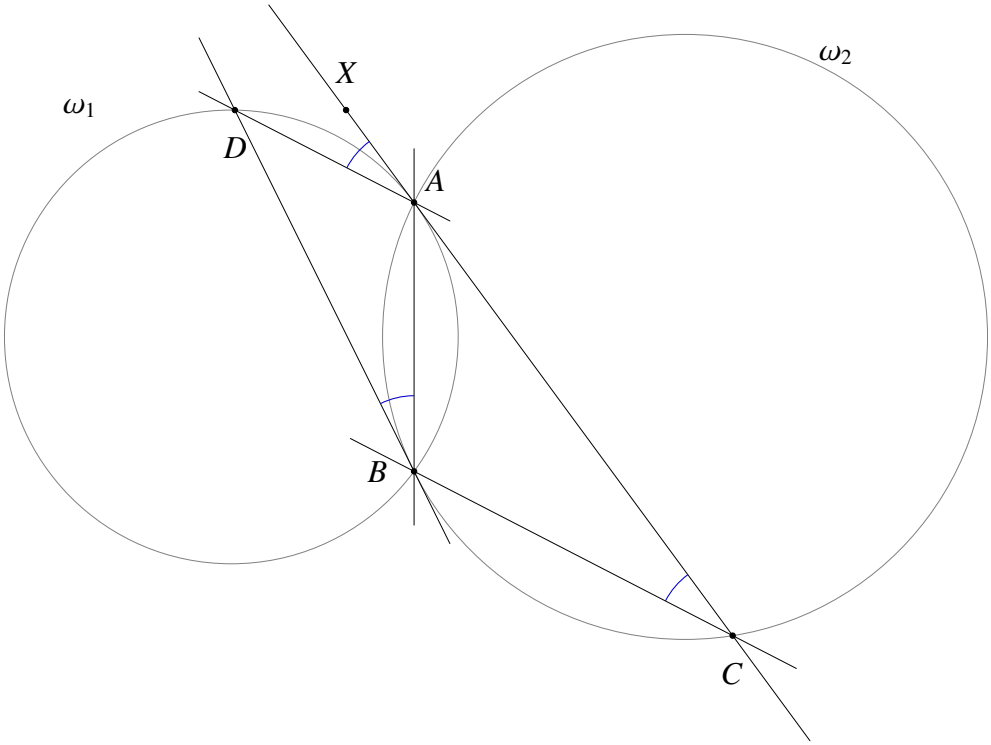


On appelle $\gamma = \widehat{ACB}$.
Par le théorème de l'angle au centre, on a $\widehat{AOB} = 2\widehat{ACB} = 2\gamma$. Comme AOB est isocèle en O, on a avec la somme des angles du triangle qui vaut $180°$: $2\widehat{BAO} + \widehat{AOB} = 180°$, d'où $\widehat{BAO} = 90 - \gamma$.
On note A' le pied de la hauteur de A. Comme $AA'C$ est rectangle en A'. On a

$$\widehat{A'AC} = 90 - \widehat{ACA'} = 90 - \gamma$$

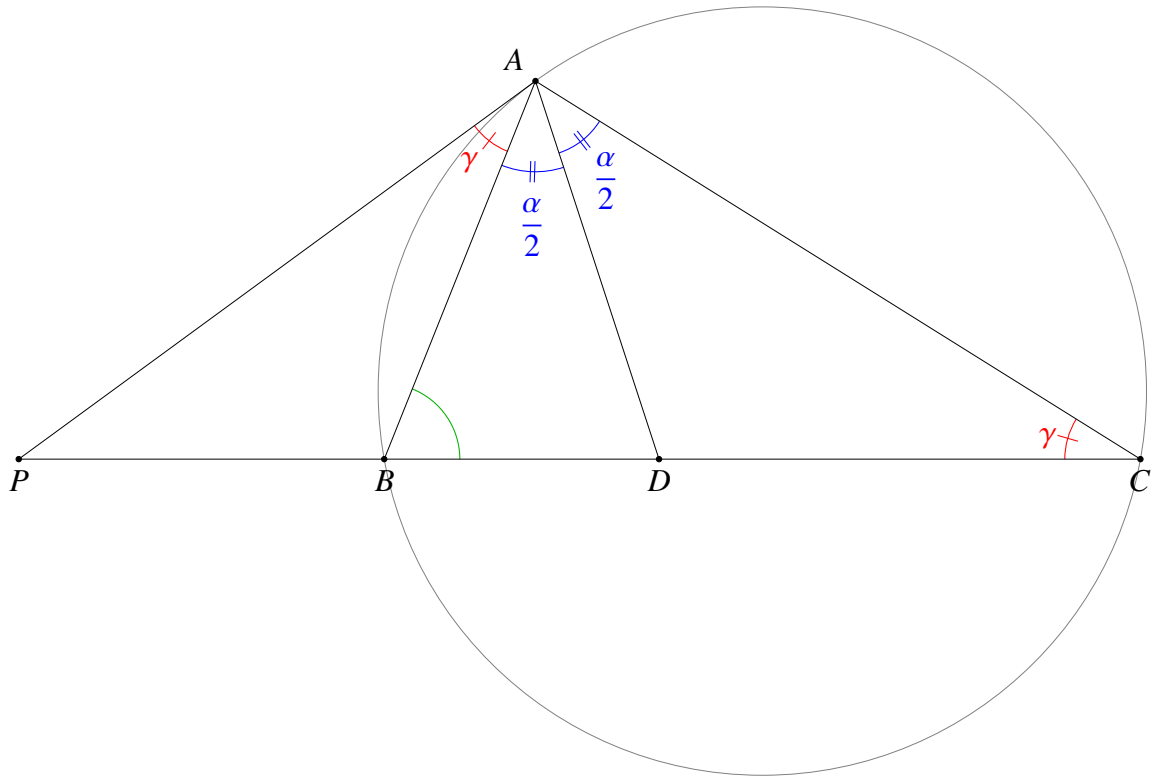
On a donc bien obtenu $\widehat{BAO} = \widehat{CAH}$

Solution de l'exercice 3



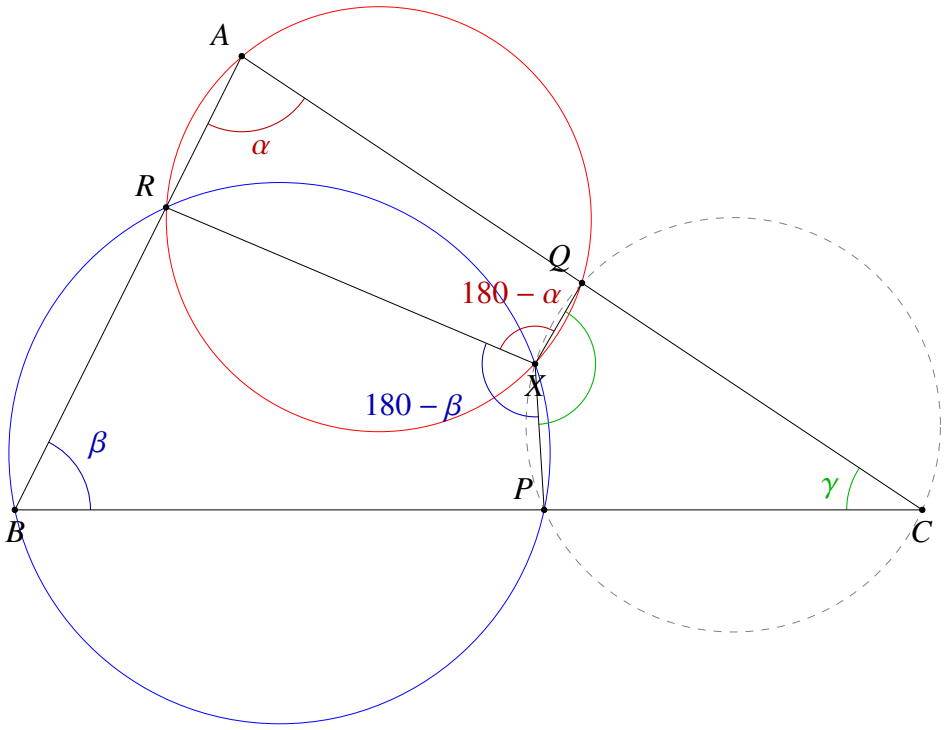
On va prouver la propriété de parallélisme avec les angles correspondants $\widehat{XAD}$ et $\widehat{ACB}$
PAr le théorème de l'angle tangentiel en A pour ω_1, on a $\widehat{XAD} = \widehat{ABD}$. De plus, avec le théorème de l'angle tangentiel, on a $\widehat{ABD} = \widehat{ACB}$.
On a alors bien $\widehat{XAD} = \widehat{ACB}$ et (DA) est parallèle à (BC).

Solution de l'exercice 4



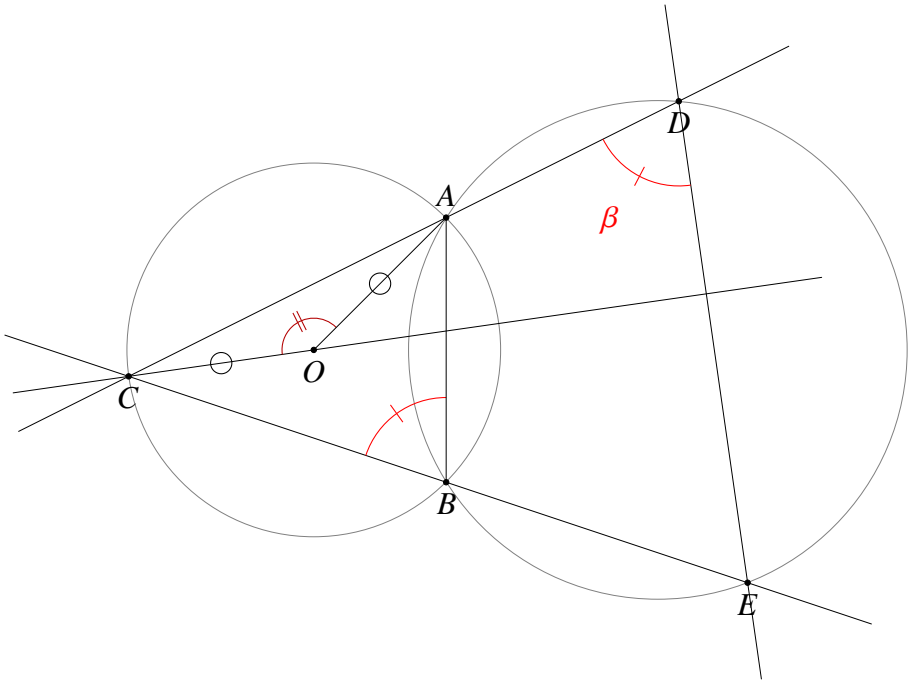
On note α, β et γ les angles $\widehat{BAC}, \widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$. Comme (PA) est une tangente à Γ, on a $\widehat{PAB} = \gamma$.
Par ailleurs comme la somme des angles d'un triangle vaut 180°, $\alpha + \beta + \gamma = 180°$ et $\widehat{DBA} + \widehat{BAD} + \widehat{BAD} = 180°$. Dès lors, $\widehat{ADP} = \widehat{ADB} = \gamma + \frac{\alpha}{2} = \widehat{PAD}$. Donc PAD est isocèle en P.

Solution de l'exercice 5



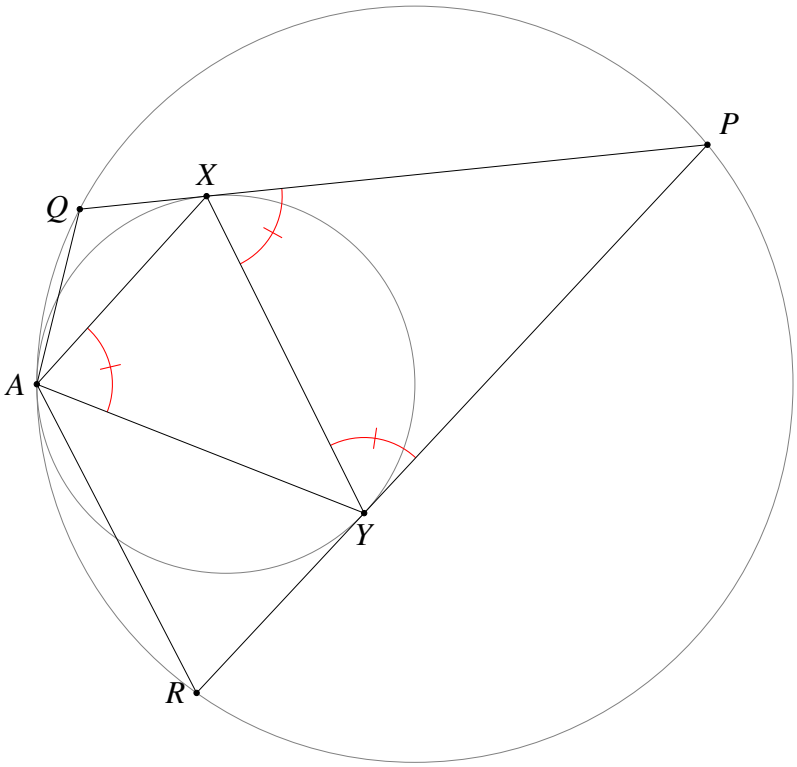
Il s'agit ici de montrer que $XQCP$ est cyclique.
On garde les notations précédentes de α, β et γ. Comme $ARXQ$ est cyclique, $\widehat{RXQ} = 180 - \alpha$. De même, $\widehat{RXP} = 180 - \beta$. Comme on a un tour complet, $\widehat{PXQ} = 360 - \widehat{RXQ} - \widehat{RXP} = \alpha + \beta = 180 - \gamma$.
On a donc bien l'appartenance de X au cercle circonscrit de CQP

Solution de l'exercice 6



Comme $ADEB$ est cyclique, $\widehat{ADE} = \widehat{ABC}$, on note cet angle β. Par le théorème de l'angle au centre, $\widehat{AOC} = 2\widehat{ABC} = 2\beta$. Or AOC est isocèle en O, donc $2\widehat{ACO} + \widehat{COA} = 180°$ soit $\widehat{ACO} = 90 - \widehat{ABC} = 90 - \beta$ et donc $\widehat{ACO} + \widehat{CDE} = 90°$ ce qui conclut (on a un triangle rectangle).

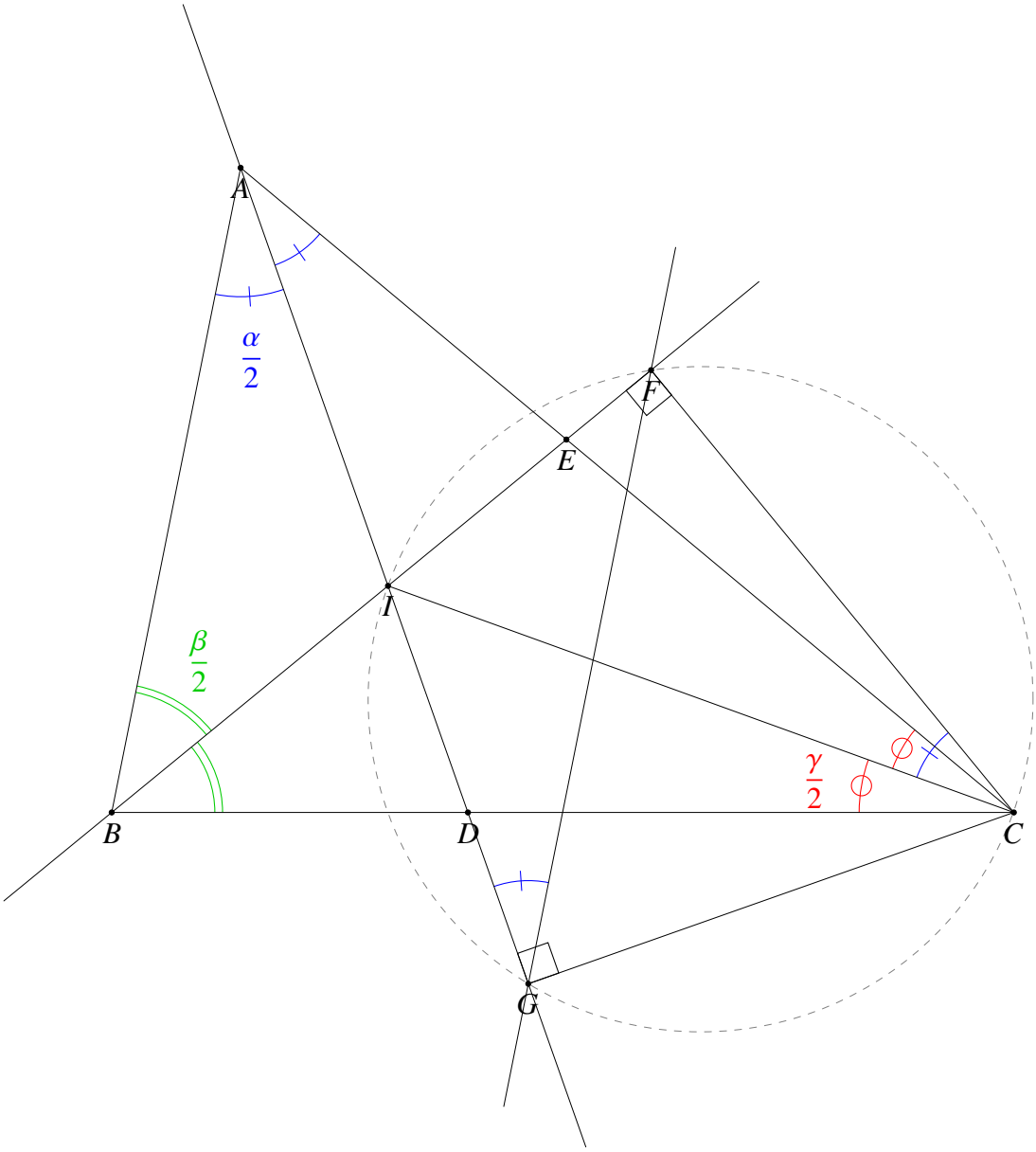
Solution de l'exercice 7



Comme $AQPR$ est cyclique, on a $\widehat{QAR} = 180 - \widehat{XPR}$.
Or (PX) et (PY) sont des tangentes donc, $\widehat{PXY} = \widehat{XAY} = \widehat{PYX}$. En appliquant cela au triangle

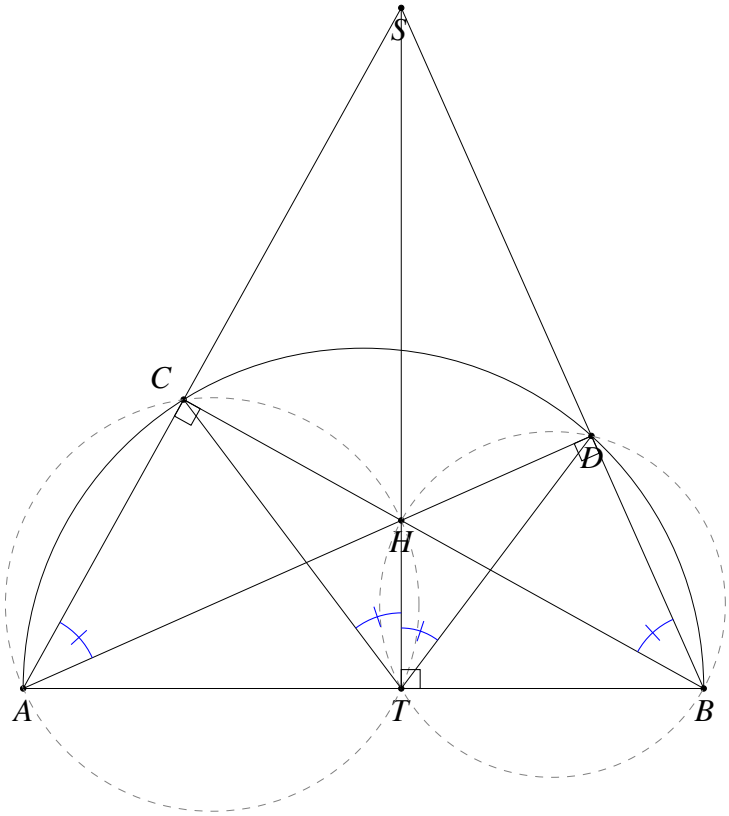
PXY, on a $2\widehat{XAY} + \widehat{XPY} = 180$. Avec la première égalité, on obtient, $2\widehat{XAY} = \widehat{QAR}$

Solution de l'exercice 8



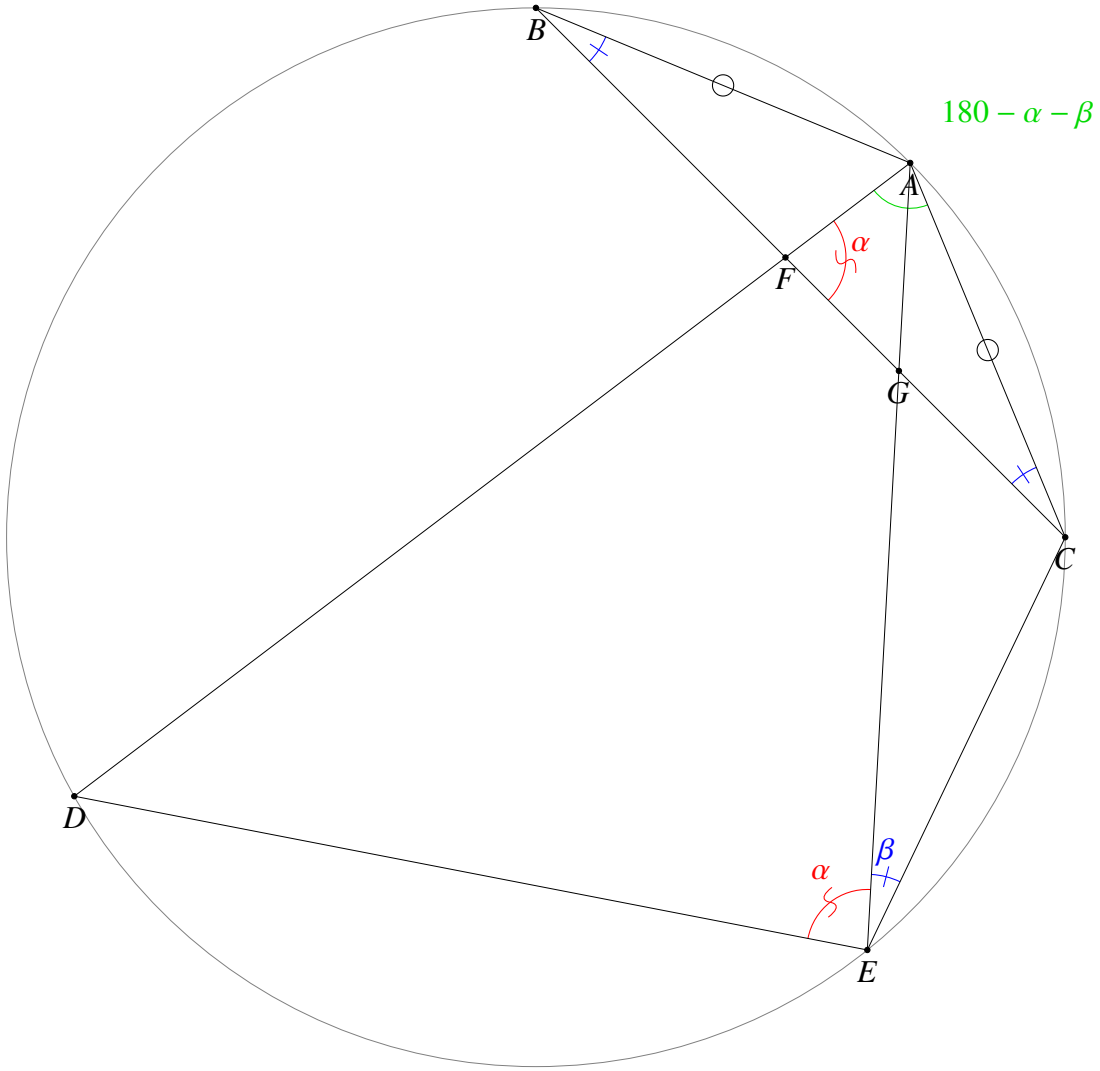
On note α, β, γ les angles du triangle ABC, selon les conventions d'usage. On note I le centre du cercle inscrit. C'est donc en particulier le point d'intersection de (AD) et (BE), et (CI) est la bissectrice de $\widehat{ACB}$
Alors, on cherche à montrer que $\widehat{AGF} = \widehat{BAG}$.
Comme $\widehat{IFC} = 180 - \widehat{IGC}$, $IFCG$ est cyclique. On a donc $\widehat{AGF} = \widehat{IGF} = \widehat{ICF}$.
En regardant le triangle rectangle BFC, avec le fait que (BI) et (CI) sont des bissectrices, on a $90 = \frac{\beta}{2} + \frac{\gamma}{2} + \widehat{ICF}$. Comme $\alpha + \beta + \gamma = 180$, avec ce qui précède, $\widehat{AGF} = \frac{\alpha}{2}$, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9



Cet exercice revient à montrer que l'orthocentre d'un triangle est aussi le centre du cercle inscrit du triangle formé par les pieds des hauteurs.
Ici, on introduit H, l'hortocentre de ABS qui est donc le point de concourrance de (CB), (DA) et (ST). Et on raisonne par chasse aux angles.
Comme la somme de deux angles droits est égale à 180°, on en déduit que les points $ATHC$ et $TBDH$ sont cocycliques. Ainsi, en utilisant le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{HTD} = \widehat{HBD} = \widehat{CAD} = \widehat{CTH}$.
D'où le résultat.

Solution de l'exercice 10



On va montrer que $DEGF$ est cyclique en montrant que $\widehat{DEG} + \widehat{DFG} = 180°$. On définit, $\widehat{AED} = \alpha$ et $\widehat{ACB} = \beta$.
On remarque tout d'abord que ABC est isocèle en A (c'est comme ça qu'on peut définir le milieu), donc $\widehat{ABC} = \widehat{ACB} = \beta$. Comme $ABEC$ est cyclique, $\widehat{AEC} = \beta$.
De plus, $ACED$ est cyclique donc $\widehat{DAG} = 180 - (\alpha + \beta)$. Avec la somme des angles du triangle AFC, on a $\widehat{AFC} = 180 - (180 - \alpha - \beta) - \beta = \alpha$. D'où $\widehat{DFG} = 180 - \alpha$ et le résultat.

5 Jeux (Théo & Augustin)

Cours

Qu'est-ce qu'un jeu combinatoire ?

On retrouve souvent en combinatoire des jeux entre 2 joueurs qui jouent chacun leur tour dans un espace défini, et à partir d'une configuration initiale.

— les règles sont strictes et donnent les coups que peut faire un joueur dans n'importe quelle situation, tout comme la condition de victoire de chacun des joueurs ou de nulle

— les 2 joueurs connaissent les règles du jeu et tous les états actuels du jeu

— il n'y a aucun hasard dans le jeu. L'issue de chaque coup est connue par les 2 joueurs est connue à l'avance

Etat d'un jeu - Position et stratégie gagnante

L'état d'un jeu est l'ensemble des informations relatives à la position actuelle : cela n'inclut pas seulement à quoi ressemble le jeu, mais aussi qui est le prochain joueur à jouer, voire d'autres informations en fonction des jeux (par exemple, aux échecs, il est important de savoir s'il est encore possible de roquer).

On appelle *état final* l'état suivant le dernier coup d'une partie (où l'un des deux joueurs a gagné / où les joueurs ont fait nulle).

Une position est dite *gagnante* pour A s'il peut forcer sa victoire. On peut alors dire que A possède une *stratégie gagnante* (sans pour autant forcément la décrire). Une position gagnante pour A est perdante pour B, et vice-versa. Dans le cas où il peut y avoir des égalités, on peut aussi avoir des stratégies qui permettent de ne pas perdre.

Lorsqu'il faut décrire une stratégie gagnante pour A, il faut qu'il puisse l'appliquer quels que soient les coups de B et montrer qu'elle marche dans tous les cas. Par exemple, prenons l'exercice suivant :
"Alice et Bob jouent à un jeu sur un échiquier 100×100. Tour par tour en commençant par Alice, chaque joueur choisit une case qui n'a pas encore été choisie et la colorie dans sa couleur (rouge pour Alice, bleu pour Bob). Montrez que Bob peut toujours faire en sorte qu'Alice ne puisse colorier aucun carré 3×3 entierement en rouge."
On pourrait intuitivement penser à une stratégie du style "Bob joue toujours à côté d'Alice" pour être certain qu'aucune des cases qu'elle colorie ne soit le centre d'un carré 3×3, mais cela ne marcherait pas (on trouve facilement un contre-exemple en prenant le cas où Alice colorie en dernier le centre du carré 3×3).

Il faut donc s'assurer que la stratégie soit applicable et fonctionne quels que soient les coups de l'adversaire.

Souvent plus une stratégie est compliquée et floue (et dépendant de beaucoup de coups précédents de l'adversaire), plus prouver qu'elle fonctionne sera difficile (voire infaisable). Il est important d'essayer de définir des stratégies qui sont facilement applicables.

Jeu fini

Un jeu est *fini* s'il n'est pas possible d'y jouer une infinité de coup.

Le jeu du morpion est par exemple un jeu fini car chaque coup remplit une des 9 cases de la grille et il faut au moins une case de libre pour pouvoir jouer, donc une partie ne peut pas durer plus que 9 coups.

Utilité : dans un jeu fini sans égalité, il y a forcément un des 2 joueurs qui a une stra-

tégie gagnante. Ainsi, si l'on montre qu'un jeu est fini et qu'il ne peut pas y avoir d'égalité, alors on peut montrer que A a une stratégie gagnante en montrant que B n'en a pas.

Montrer qu'un jeu est fini est toujours un bon réflexe : même si beaucoup de jeux sont clairement finis, parfois il n'est pas clair que c'est le cas. Pour cela, il faut trouver un paramètre positif entier qui diminue strictement au fil du temps (par exemple le nombre de cases vides au morpion), ou un paramètre entier qui augmente strictement à chaque fois, mais est borné (par exemple le nombre de cases remplies au morpion)

Jeu symétrique

Un jeu est *symétrique* si la seule différence entre les 2 joueurs est qui commence.

Tous les exercices simples de la feuille d'exercice ainsi que les exercices compliqués nos 1 et 4 sont des jeux symétriques. En revanche, les jeux des exercices compliqués nos 2, 3, et 5 ne sont pas symétriques.

Utilité : dans un jeu symétrique, le fait qu'une position soit gagnante pour un joueur ou l'autre ne dépend que du prochain à jouer. Ainsi, il peut être plus simple de dire qu'une position est gagnante pour celui dont c'est le tour, auquel cas on parle de position 1-*gagnante*, ou pour celui qui vient de jouer (autrement dit la position est 2-*gagnante*), plutôt que de considérer que la position est gagnante pour le joueur A ou B.

Astuces - réflexes à avoir

— il est souvent intéressant de partir de l'état final d'un jeu pour déterminer en remontant les coups quels sont les positions gagnantes/perdantes. On parle alors d'*analyse rétrograde*, notamment pour les jeux symétriques. Si une position ne mène qu'à des positions gagnantes, elle est perdante. Si une position mène à une position perdante, elle est gagnante.

— il arrive que les stratégies du style "jouer le symétrique de l'adversaire" marchent, notamment pour les jeux où le premier à ne plus pouvoir jouer perd la partie
Attention : S'assurer qu'une telle stratégie est possible quels que soient les coups de l'adversaire (s'il y a un nombre impair de case, la case du centre n'a pas de symétrique par rapport au centre ou par rapport à un axe séparant la grille en 2, et donc la stratégie ne marche pas en tant que tel)

— il est parfois utile de paver l'espace sur lequel se joue le jeu. Dans ce cas, privilégier les pavages recouvrant 2 cases par pavé, afin de pouvoir à chaque fois compléter le pavé dans lequel l'adversaire a joué

Exercices

Exercice 1

a) Il y a n allumettes posées sur une table. En commançant par Aymeric, Aymeric et Maxime prennent à tour de rôle 1, 2, ou 3 allumettes. Celui qui prend la dernière a perdu. Déterminer qui a une stratégie gagnante et la décrire.
b) Même question, mais celui qui prend la dernière allumette gagne la partie.

Exercice 2

Partant de 0 et en commançant par Antoine, Antoine et Marc ajoutent chacun leur tour à la quantité en cours un nombre de leur choix parmi $\{1, 2, ..., 10\}$. Celui qui atteint 100 gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 3

On place un jeton sur la case $C1$ d'un échiquier classique (8×8). Deux joueurs le déplacent à tour de rôle, en respectant la règle suivante : à chaque tour, on peut déplacer le jeton d'autant de cases que l'on veut, mais au moins une, soit vers la droite, soit vers le haut, soit en diagonale vers la droite et vers le haut. Celui des deux joueurs qui amène le jeton en H8 gagne. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 4

Sur la table se trouvent 2023 jetons. Tour à tour, Adrien et Iris doivent enlever au moins un jeton et au plus la moitié des jetons restants au moment où ils jouent. Le joueur qui laisse un unique jeton sur la table perd la partie. C'est Adrien qui commence. Déterminer lequel des deux joueurs possède une stratégie gagnante et décrire une telle stratégie.

Exercice 5

Jacob et Pavel jouent sur un échiquier de taille $m \times n$ au jeu suivant : il y a un pion en bas à gauche de l'échiquier, et en commançant par Jacob, ils le déplacent chacun leur tour en ligne droite d'autant de cases qu'ils le souhaitent vers le haut ou vers la droite. Le premier à atteindre le coin en haut à droite gagne. Pour quels (m, n) Jacob a-t-il une stratégie gagnante ?

Exercice 6

a) Sur un tableau 2023×2023, composé exclusivement de cases blanches, Louise et Matthieu jouent au jeu suivant : Louise commence par noircir la case en haut à gauche, puis chacun leur tour, ils noircissent une case adjacente (par un côté) à la case dernière case noircie. Le premier à ne plus pouvoir jouer perd la partie. Lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante ?
b) Même question sur un tableau $n \times n$.

Exercice 7

Soit n un entier pair > 3. Mona et Alexandre jouent à un jeu. Chacun à leur tour, ils écrivent un 0 ou un 1 sur un sommet d'un n-gone initialement vierge. Mona commence et gagne si, après l'un de ses coups, il y a trois sommets consécutifs du n-gone tels que la somme des nombres qui y sont inscrits est un multiple de 3. Alexandre gagne s'il empêche Mona de

gagner. Déterminer qui a une stratégie gagnante.

Exercice 8
Chloé et Dinh-Khanh jouent à un jeu sur un échiquier 8×8. Tour par tour en commençant par Chloé, chaque joueur choisit une case qui n'a pas encore été choisie et la colorie dans sa couleur (rouge pour Chloé, bleu pour Dhinh-Khanh). Montrez que Dinh-Khanh peut toujours faire que Chloé ne puisse colorier aucun carré 2×2 entierement en rouge.

Exercice 9
(Envoi de combinatoire 2019-2020, exercice 13)
Soit $n > 1$. Alice et Bob jouent au jeu suivant. $2n$ cartes numerotées de 1 à $2n$ sont melangées puis disposées dans une ligne, de manière à ce que les faces numérotées soient visibles. Chacun à leur tour, Alice et Bob choisissent une carte, soit celle tout à droite soit celle soit à gauche de la ligne, et la garde pour eux, jusqu'à ce que toutes les cartes aient été prises. Alice commence. A la fin du jeu, chaque joueur calcule la somme des numéros des cartes qu'il a prises. Le joueur ayant la plus grande somme gagne. Un joueur dispose-t-il d'une façon de ne pas perdre ?

Exercice 10
Gaspard et Gaëtan jouent avec une infinité d'assiettes ronde de 15 cm de rayon sur une table ronde d'un mètre de rayon au jeu suivant : chacun leur tour en commençant par Gaspard, ils placent une assiette sur la table de telle manière à ce que l'assiette soit entièrement sur la table et qu'elle ne recouvre aucune autre assiette. Le premier à ne plus pouvoir jouer a perdu. Qui a une stratégie gagnante ?

Exercice 11

Eva et Camille placent chacune leur tour des dominos 2×1 en les orientant comme elles le souhaitent sur une grille $2 \times n$, en commançant par Eva. La première qui ne peut plus poser de dominos perd la partie. Déterminer qui a une stratégie gagnante, et la décrire.

Exercice 12

a) Andrei et Bob jouent à un jeu dans lequel ils colorient chacun leur tour les sommets d'un 2023-gone régulier. Andrei commence et au début, aucun sommet n'est colorié. De plus, les deux joueurs commencent avec 0 points. A son tour, le joueur colorie un sommet n'ayant jamais été colorié et gagne k points, où k est le nombre de sommets adjacents coloriés (donc k peut valoir 0, 1 ou 2). Le jeu se termine lorsque tous les sommets ont été coloriés, et le joueur avec le plus de points gagne (en cas d'égalité de points, personne ne gagne). Déterminer qui a une stratégie gagnante.
b) Même question mais Andrei et Bob jouent cette fois-ci sur un 2022-gone régulier.

Exercice 13

Alice et Bob ont une tablette de chocolat de dimensions $m \times n$ ($m \geqslant 2$). Chacun leur tour en commançant par Alice, ils choisissent un carré, et mangent tous les carrés situés à la fois

en-dessous et à droite du carré choisi. Le joueur qui mange le carré en haut à gauche a perdu. Montrer que la position initiale est gagnante pour Alice.

Exercice 14
(Olympiades de Saint-Pétersbourg 2001, problème 13)

Aline écrit le chiffre 1000000 au tableau. Avec Hannah, elles remplacent à tour de rôle le nombre écrit au tableau par $n-1$ ou par $\lfloor \frac{n+1}{2} \rfloor$, en commançant par Hannah. Celle qui écrit le nombre 1 a gagné. Qui gagne ?

Exercice 15
Alicia et Florent jouent au jeu suivant : en commançant avec à un nombre $1 < n \leqslant 1000$, ils jouent chacun leur tour selon les règles suivantes : Alicia (qui commence), a le droit de rajouter 4 au nombre (quel qu'il soit) ou de le diviser par 2 s'il est pair. Florent peut soit retirer 2 au nombre (quel qu'il soit), ou le multiplier par 2 s'il est impair. Alicia gagne si 0 ou 1 est atteint, est Florent gagne si 1000 est dépassé ou si Alicia n'a pas gagné au bout de 100 tours de jeu (1 tour se déroule quand chacun a joué une fois). Qui a une stratégie gagnante ?

Solution de l'exercice 1

a) En commençant par la fin, on sait que 1 est perdant. Ainsi, 2, 3 et 4 sont gagnants car on peut depuis ces positions atteindre 1 qui est perdant. L'on a alors 5 qui est perdant car on ne peut atteindre depuis cette position que des positions gagnantes. On trouve ensuite que 9 aussi est perdant, et plus généralement tous les nombres $\equiv 1 \pmod 4$.
Il suffit pour Aymeric à son premier tour de rejoindre un nombre $\equiv 1 \pmod 4$ puis ensuite, à chaque fois que Bob prend b allumettes d'en prendre $4 - b$. Ainsi il maintient le nombre d'alumettes $\equiv 1 \pmod 4$. Comme celui-ci diminue de 4 à chaque étape, au bout d'un moment il vaut 1 donc Aymeric gagne bien. Maxime peut adopter la même stratégie sans la première étape si dès le début $n \equiv 1 \pmod 4$.
On peut prouver que cette stratégie marche car le joueur qui l'applique aura après un tour de jeu (constitué de ce qu'a retiré l'adversaire plus ce qu'il a retiré) retiré exactement 4 allumettes, donc il laissera l'autre joueur devant tous les nombres d'allumettes s'écrivant sous la forme $4k + 1$ inférieurs à n, donc à la fin devant 1.
Donc si $n \equiv 1 \pmod 4$ Aymeric perd sinon il gagne.

b) On trouve cette fois ci que $1, 2, 3$ sont gagnants, 4 est perdant, donc $5, 6, 7$ sont gagnants et 8 perdant, et plus généralement les nombres divisibles par 4 semblent être les uniques positions perdantes. Donc si n est divisible par 4 Aymeric perd sinon il gagne. La stratégie est sinon la même qu'à la question d'avant à la différence que le joueur qui applique la stratégie s'arrange au début pour arriver sur un nombre $\equiv 0 \pmod 4$ (et non $\equiv 1$).

Solution de l'exercice 2

En partant de la fin, on voit que 89 est perdant, tout comme 78, 67, 56, ... , 12, 1 (les nombres $\equiv 1 \pmod{11}$). 0 n'étant pas perdant, Antoine gagne. Une stratégie qu'il peut appliquer est de toujours rejoindre un nombre $\equiv 1 \pmod{11}$, ce qui est possible en prenant 1 allumette au premier tour puis à chaque tour, après que Marc ait pris x allumettes en prendre $11 - x$.

Solution de l'exercice 3

En commençant par la fin, on trouve les positions perdantes de l'échiquier. On les trouve en partant de $H8$, qui est perdant. Toutes les cases qui peuvent mener à $H8$ sont donc gagnantes. L'on sait ensuite que $G6$ et $F7$ sont perdantes car elles ne mènent qu'à des cases gagnantes. L'on sait donc que toutes les cases qui mènent à $G6$ et $F7$ sont gagnantes, et ainsi de suite.
Ainsi, on trouve toutes les cases perdantes de l'échiquier : $H8$, $G6$, $F7$, $E3$, $C5$, $D1$ et $A4$.
$C1$ étant une case gagnante, c'est le joueur qui commence qui gagne, sa stratégie étant à chacun de ses tours de rejoindre une case perdante, ce qui sera toujours possible car il partira à chaque fois de cases gagnantes car son adversaire partira lui de cases perdantes.

Solution de l'exercice 4

On commence par la fin pour trouver les premières positions perdantes : 2, 5, 11, 23. Il semble que les positions perdantes sont exactement les termes de la suite $(u_n)_{n\geqslant 1}$ vérifiant $u_1 = 2$ et $u_{n+1} = 2u_n + 1$ (i.e. les termes qu'on obtient en faisant successivement fois 2 plus 1).

Montrons par récurrence sur n que si le nombre de jetons de départ k vérifie $u_n \leqslant k < u_{n+1}$, alors la position est perdante si $k = u_n$ gagnante sinon.

Pour $n = 1, 2$ est perdant, et à partir de 3 ou 4 on peut aboutir à 2, donc 2 est gagnant, mais pas 3 et 4, ce qui donne la propriété pour $n = 1$.

Pour l'hérédité supposons l'hypothèse vraie au rang n. Si $k = u_{n+1} = 2u_n + 1$, le premier joueur peut enlever entre 1 et u_n jetons, donc le nombre de jeton sera entre $u_n + 1$ et $u_{n+1} - 1$, donc

la position sera gagnante par hypothèse de récurrence. Par contre, si $u_{n+1} < k < u_{n+2} = 2u_{n+1}+1$, on a le premier joueur va enlever $k - u_{n+1}$ jetons. On a bien $k - u_{n+1} > 0$, et $k - u_{n+1} \leqslant \frac{k}{2}$ équivaut à $\frac{k}{2} \leqslant u_{n+1}$, donc à $k \leqslant 2u_{n+1}$ qui est vrai car $k < 2u_{n+1} + 1$. Le second joueur est alors dans une position perdante, donc si $u_{n+1} < k < u_{n+2}$ la position est gagnante, ce qui conclut l'hérédité.

Ainsi les positions perdantes sont exactement les termes de la suite, qui est strictement croissante : ils valent successivement $2, 5, 11, 23, 47, 95, 191, 383, 767, 1535, 3071$, donc 2023 n'est pas un terme de la suite, Adrien a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 5

Jacob a une stratégie gagnante pour tous les (m, n) tels que $m \neq n$.
Elle consiste à colorier les carrés ayant pour coordonnées $(m, n), (m-1, n-1), (m-2, n-2), \ldots$ A chaque tour, Jacob pourra mettre le pion sur une de ces cases là (sauf s'il y est déjà au départ, d'où la condition $m \neq n$), et Pavel ne peut pas atteindre une case coloriée à partir d'une autre case coloriée.
Lorsque $m = n$, Pavel peut appliquer cette stratégie et donc c'est lui qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 6

Traitons le cas général, ce qui donnera le résultat pour 2023. En faisant un pavage en dominos 2×1 quand n est pair (par exemple en mettant $\frac{n}{2}$ dominos d'affilé sur chaque ligne), Matthieu peut à chacun de ses tours compléter le domino dans lequel Louise vient de colorier une case. A chaque fois que Louise jouera, tous les dominos seront pleins, donc Matthieu pourra toujours appliquer sa stratégie. Ainsi, il est sûr de toujours pouvoir jouer, et donc de ne pas perdre.
Quand n est impair, Louise joue dans un coin. Elle pave la ligne contenant le coin avec $\frac{n-1}{2}$ dominos, fait de même dans la colonne contenant le coin, et pave le carré $(n-1) \times (n-1)$ restant avec des dominos comme pour le cas pair. Elle applique alors la même stratégie que celle donnée à Matthieu dans le cas n pair, et donc elle gagne car elle peut toujours jouer.

Solution de l'exercice 7

Si la somme des nombres inscrits sur 3 sommets consécutifs est divisible par 3, c'est que la somme est 0 ou 3, donc que les 3 sommets sont des 1 ou des 0 (donc le même nombre).
Alexandre apparie 2 par 2 des sommets consécutifs (par exemple pour un décagone, il les apparie ainsi $1-1-2-2-3-3-4-4-5-5$), et après que Mona ait écrit x dans un sommet, il écrit $1-x$ dans le sommet de la même paire.
Puisque dans 3 sommets consécutifs, il y en a 2 dans un même pavé, Alexandre est avec cette stratégie certain qu'il n'y ait pas 3 consécutifs avec les mêmes chiffres, donc qu'il n'y a pas 3 sommets consécutifs dont la somme des sommets est divisible par 3.

Solution de l'exercice 8

On adopte le pavage suivant :
1-1-2-2-3-3-4-4
5-6-6-7-7-8-8-5
9-9-10-10-11-11-12-12
13-14-etc.
Dinh-Khanh colorie à chaque fois la case du même numéro que celui que Chloé vient de colorier (et chaque carré 2×2 a deux cases avec des numéros identiques, donc il est avec cette stratégie certain que Chloé n'aura pas colorié de carré 2×2).

Solution de l'exercice 9
Oui, Alice a une stratégie gagnante. Elle colorie une carte sur 2 en noir en allant de gauche à droite et le reste en blanc (de telle manière à ce que 2 cartes consécutives n'aient pas la même couleur). Elle regarde la couleur dont la somme des cartes est la plus élevée (ou égale) et choisit une carte de cette couleur en premier. Bob aura ensuite le choix entre 2 cartes de l'autre couleur, laissant à Alice le choix entre 2 cartes de couleur différente et ainsi de suite. Ainsi, elle pourra toujours choisir une carte de la même couleur que celle qu'elle a choisi au début, tandis que Bob sera toujours obligé d'avoir que des cartes de l'autre couleur.
Ainsi l'un aura la somme des cartes noires à la fin, et l'autre la somme des cartes blanches, et comme Alice avait pu choisir au début laquelle prendre, elle est certaine de ne pas perdre.

Solution de l'exercice 10
Notons que le jeu est fini : au k-ième tour les assiettes occupent une surface de $k\pi 0,01^2$ mètres carré. En particulier, comme l'aire vaut au plus celle de la grande table i.e. π, on obtient que $k \leqslant 10000$: le jeu ne peut durer indéfiniment. Ainsi il y a forcément un gagnant et un perdant.

Gaspard a une stratégie gagnante. Il peut commencer par mettre une assiette au milieu de la table (de sorte que le centre de la table et de l'assiette soient confondus), puis à chacun de ses tours de jouer le symétrique de Gaëtan par rapport au centre de la table. En effet une fois la première assiette posée au centre, une assiette et son symétrique ne se superposent pas. Et comme le jeu est symétrique à tout moment, lorsqu'elle rajoute une assiette, il ne peut se superposer avec une autre, sinon le coup précédent de Gaëtan aurait été interdit. De cette manière, il est certain de pouvoir jouer à chaque fois que Gaëtan le peut, et donc de ne pas perdre. Ainsi comme il y a forcément un gagnant et un perdant, Gaspard gagne à coup sûr.

Solution de l'exercice 11
Notons que le jeu est fini, car le nombres de cases de la grille libres diminue strictement à chaque étape.

Si n est pair, Camille gagne en jouant le symétrique d'Eva par rapport au centre. Elle est ainsi certaine de toujours pouvoir jouer : en effet, un domino et son symétrique ne se supposent pas, et comme le jeu est symétrique à tout moment, lorsqu'elle rajoute un domino, elle ne peut se superposer avec une autre, sinon le coup précédent d'Eva aurait été interdit. Comme le jeu est fini, elle est donc certaine de gagner.
Si n est impair, de la même façon Eva gagne en posant un domino sur la colonne du milieu, puis joue le symétrique de Camille par rapport au centre.

Solution de l'exercice 12
Remplaçons 2022 et 2023 par n, et trouvons pour quels n est-ce que Andrei ou Bob a une stratégie gagnante. Quand n est pair : Bob trace arbitrairement un axe coupant le n-gone en 2 parties avec autant de sommets et Bob joue toujours le symétrique d'Andrei par rapport à cet axe. Il récupèrera donc à chaque coup autant qu'Andrei, sauf quand celui-ci coloriera un point adjacent à l'axe, auquel cas Bob récupèrera un point de plus. Bob obtiendra donc au final 2 points de plus et donc gagnera.
Quand n est impair, Andrei colorie un premier point et imagine un axe passant par le point qu'il a colorié et par le segment à l'opposé de ce point et applique la même stratégie, pour les mêmes raisons il battra Bob de 1 point.

Solution alternative : On remarque que chaque côté du n-gone rapporte 1 point (un des sommets sera forcément colorié avant l'autre, et rapportera donc 1 point à celui qui coloriera

le second). Ainsi, la somme des points à la fin vaut exactement n.
Si n pair (on pose $n = 2k$), chacun joue k fois. Bob peut toujours jouer à côté d'un sommet déjà colorié, ce qui lui rapporte au moins un point par tour de jeu. De plus, lors du coloriage du dernier sommet, ce dernier rapporte forcément 2 points, donc Bob a au moins $k + 1$ points, ce qui lui assure la victoire (de deux points au moins, car Andrei aura au plus $k - 1$).
Si n impair ($= 2k + 1$), Andrei va jouer $k + 1$ fois. A partir de son deuxième tour, il peut faire en sorte de gagner au moins un point par tour, et le dernier lui rapportera deux points, donc son score sera supérieur à $k + 1$.

Solution de l'exercice 13
Supposons par l'absurde que la position initiale soit perdante. Alice prend alors la case tout en bas à droite. Bob a alors une stratégie gagnante et l'applique en choisissant un certain carré. La situation dans laquel il arrive aurait pu être atteinte en un seul tour par Alice (en choisissant ce même carré), et donc elle avait une stratégie gagnante, donc c'est absurde.

Solution de l'exercice 14

Montrons par récurrence que pour tout n, $2n$ est gagnant.
Initialisation à $n = 1$: 1 est perdant, donc 2 est gagnant.
Hérédité : Si n est perdant, on peut atteindre n depuis $2n$ donc $2n$ est gagnant. Si n est gagnant, on peut atteindre depuis $2n - 1$ uniquement $2n - 2$ et n. Par hypothèse de récurrence, $2n - 2$ est gagnant, donc $2n - 1$ est perdant, donc $2n$ est gagnant (car on peut atteindre $2n - 1$ depuis $2n$).

Puisque 1000000 est pair, c'est une position gagnante, donc Hannah, qui commence, a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 15
Si n est impair, Florent a une stratégie gagnante : Alicia est obligée au début de son tour de rajouter 4 car n est impair, puis Florent retire 2 pour que le nombre reste impair, et il fait cela jusqu'à ce que le jeu se termine. A chaque tour, n augmente de 2, donc ne pourra pas atteindre 0 ou 1.
Si n est pair, Alicia a une stratégie gagnante :
- si 4 divise n alors elle divise n par 2
- sinon elle ajoute 4 à n

Dans les 2 cas, le nombre obtenu est pair, donc Florent est obligé de retirer 2 au nombre. Ainsi si n, il était de la forme $4k + 2$, le nombre est maintenant $4k + 4$ donc divisible par 4. Ainsi, le nombre est au moins divisé par 2 tous les 2 tours : ainsi si Alicia commence avec n, au plus 2 tours plus tard elle a un nombre valant au plus $\frac{n+2}{2} - 2 \leqslant \frac{n}{2}$. Ainsi comme le nombre de départ est au plus 1000, et $2^{10} = 1024$, au bout d'au plus $4 \times 10 = 40$ tours, le nombre obtenu est au plus 1, donc 0, Ainsi Alicia gagne si elle a réussi à ne pas dépasser 998 dans ce processus. Comme à partir de la première division par 2, les nombres obtenus valent au plus $1000/2 + 4 = 504$, le problème ne peut se poser qu'à la première étape. A la première étape le nombre maximum obtenu est $n + 4$, donc le seul cas problématique est $n = 998$. En fait $n = 998$ donne une stratégie gagnante à Florent : si Alicia divise par 2 le nombre 998 alors Florent le multiplie par 2 car 499 est impair et on revient à la situation de départ, et si Alicia ajoute 4 elle perd, donc au bout de 100 tours elle a forcément perdu.
Ainsi Florent a une stratégie gagnante pour tout n impair ou égal à 998.

6 Triangles semblables (Rémi et Éva)

Cours

Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont dits semblables si ils sont proportionnels c'est-à-dire si il existe k un réel (positif) tel que $k = \frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$ Autrement dit si en augmentant la taille de l'un et eventuellement en le retournant on peut les superposer. Cela se traduit par des égalités d'angles et de rapports de longueurs :
1) Deux triangles sont semblables si et seulement si leurs angles sont égaux : $\widehat{ABC} = \widehat{A'B'C'}$, $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C'}$ et $\widehat{BCA} = \widehat{B'C'A'}$ On note alors $ABC \sim A'B'C'$
2) Deux triangles ABC et $A'B'C'$ sont semblables si et seulement si $\frac{AB}{A'B'} = \frac{BC}{B'C'} = \frac{AC}{A'C'}$

Exercices

Exercice 1 (Pythagore)
Montrer que $BC^2 = AB^2 + AC^2$ lorsque ABC est un triangle rectangle en A

Exercice 2
Soit ABC un triangle et D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. Montrer que les triangles CDE et CAB sont semblables.

Exercice 3 (droite des milieux)
Soit ABC un triangle et E, D les milieux respectifs de AB et AC Montrer que $(ED)//(BC)$

Exercice 4 (puissance d'un point)
Soit ω un cercle, A, B, C, D des points sur ce cercle (dans cet ordre). Les droites AB et CD (que l'on suppose non parallèles) se coupent en un point P. Montrez que $PA \cdot PB = PC \cdot PD$

Exercice 5 (puissance d'un point intérieur)
Soit ω un cercle et P un point hors du cercle. On prend deux droites (d) et (d') passant par P qui intersectent chacune le cercle 2 fois. On nomme ces intersections A, A' et B, B'. Soit X l'intersection des droites (AB') et $(A'B)$. Montrer que $XA \cdot XB' = XB \cdot XA'$

Exercice 6
Soit $ABCD$ un parallélogramme, M un point de $[AC]$. On nomme E le projeté orthogonal de M sur $[AB]$ et F celui sur $[CD]$. Montrer que $\frac{ME}{MF} = \frac{AD}{AB}$

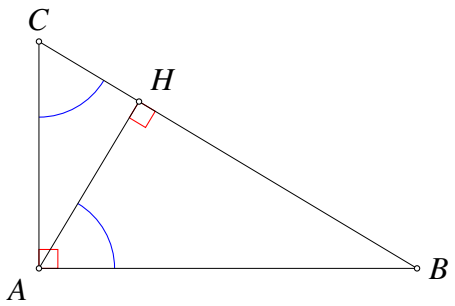
Exercice 7 (Ptolémée)
Soit A, B, C, D quatre points disposés dans cet ordre sur un cercle. Montrer que $AC \cdot BD = AB \cdot DC + AD \cdot BC$

Exercice 8
Soit $ABCD$ un losange, F sur le segment $[AD]$ et E sur le segment $[AB]$. L le point d'intersection de (FC) et (BD), K celui de (EC) et (BD), Q celui de (FK) et (BC) et P celui de (EL) et (DC). Montrer que $CP = CQ$

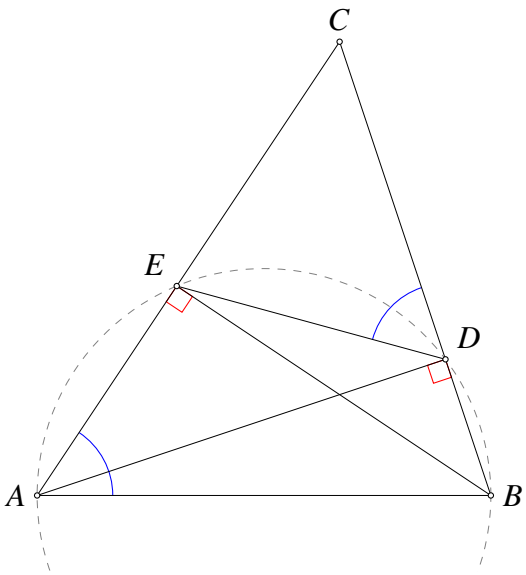
Exercice 9
Soit Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centres O_1 et O_2, s'intersectant en deux points X et Y. Soit A un point de Ω_1 distinct de X et Y. On note B l'intersection de (AY) en Ω_2. Montrer que les triangles XO_1O_2 et XAB sont semblables.

Solutions

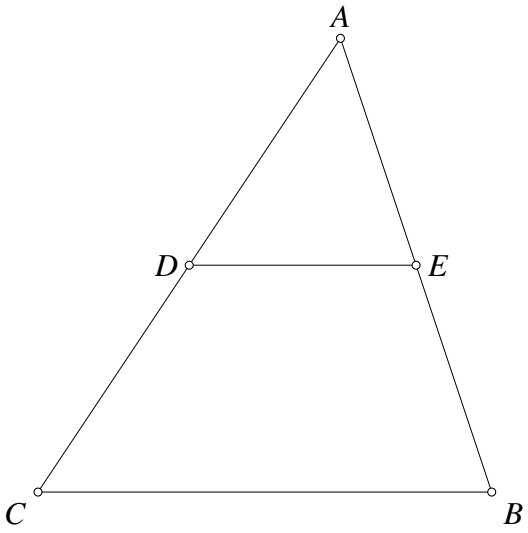
Solution de l'exercice 1
Soit H_A le pied de la hauteur issue de A : On a $ABC \sim H_ABA \sim H_AAC$ donc $\frac{AB}{AH_B} = \frac{BC}{AB} \Leftrightarrow AB^2 = BC \cdot BH_A$ De même $\frac{AC}{AH_C} = \frac{BC}{AC} \Leftrightarrow AC^2 = BC \cdot CH_A$ Donc on a bien $AB^2 + AC^2 = BC(H_AB + H_AC) = BC^2$



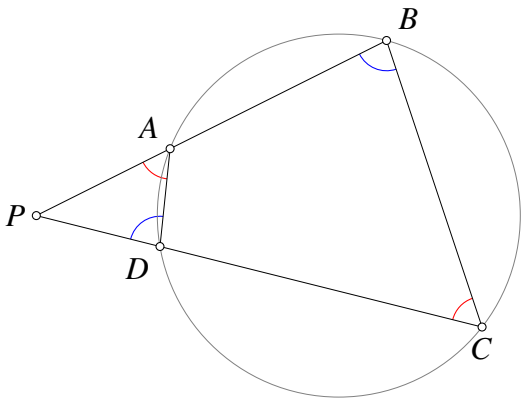
Solution de l'exercice 2
On a $ABDC$ cocycliques donc $\widehat{CDE} = 180 - \widehat{BDE} = \widehat{BAC}$ ce qui conclut



Solution de l'exercice 3
On a $\frac{AE}{AB} = \frac{AD}{AC}$ et $\widehat{EAD} = \widehat{BAC}$ On a donc bien $AED \sim ABC$ donc $\widehat{AED} = \widehat{ABC}$ donc $(ED)//(BC)$



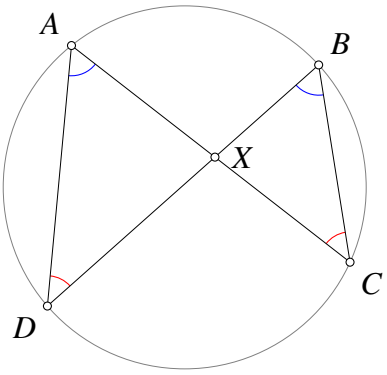
Solution de l'exercice 4



$PA \cdot PB = PC \cdot PD$

On a $PCA \sim PBD$ donc $\frac{PC}{PA} = \frac{PB}{PD} \Leftrightarrow PC \cdot PD = PA \cdot PB$

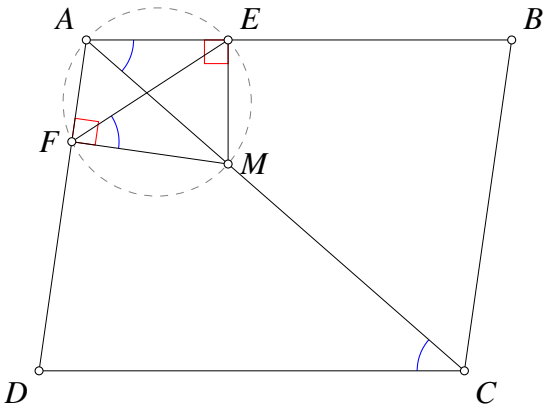
Solution de l'exercice 5



On a $AA'X \sim BB'X$ Il vient donc $\frac{AX}{BX} = \frac{A'X}{B'X} \Rightarrow AX \cdot XB' = XB \cdot XA'$

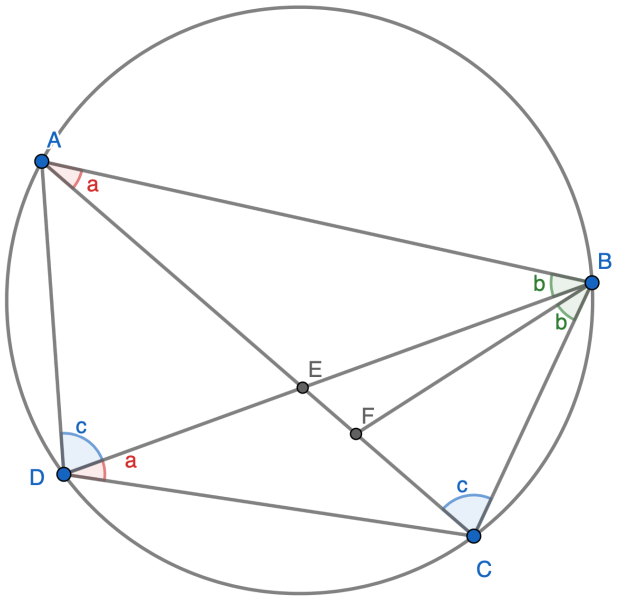
Solution de l'exercice 6

On a premièrement $\widehat{AFM} = 90 = 180 - 90 = 180 - \widehat{AEM}$ Donc $AEMF$ sont cocycliques. Donc $\widehat{EMF} = 180 - \widehat{FAE} = 180 - \widehat{BAD}$ Or on est dans un parallélograme donc $\widehat{ABC} = 180 - \widehat{BAD} = \widehat{EMF}$. On a de plus $\widehat{EFM} = \widehat{MAE} = \widehat{CAB}$ On a donc les triangles MFE et BAC semblables donc $\frac{ME}{MF} = \frac{BC}{AB} = \frac{AD}{AB}$



Solution de l'exercice 7

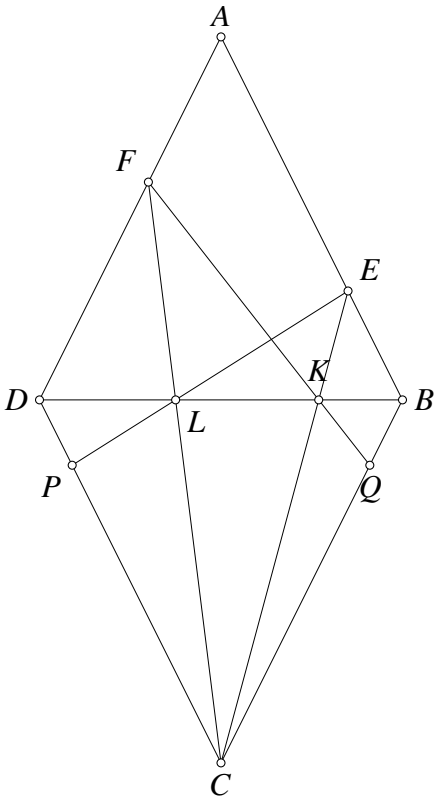
On nomme E le point d'intersections des diagonales et F le point de EC tq $\widehat{ABE} = \widehat{FBC}$ On a $BFA \sim BCD$ et $BFC \sim BAD$ donc $\frac{AF}{AB} = \frac{DC}{DB}$ et $\frac{CF}{CB} = \frac{DA}{DB}$ donc $(AF + FC) \cdot BD = AB \cdot CD + BC \cdot DA$



Solution de l'exercice 8

On remarque que $BQK \sim KFD$ ce qui nous donne $\frac{BQ}{FD} = \frac{QK}{DK}$

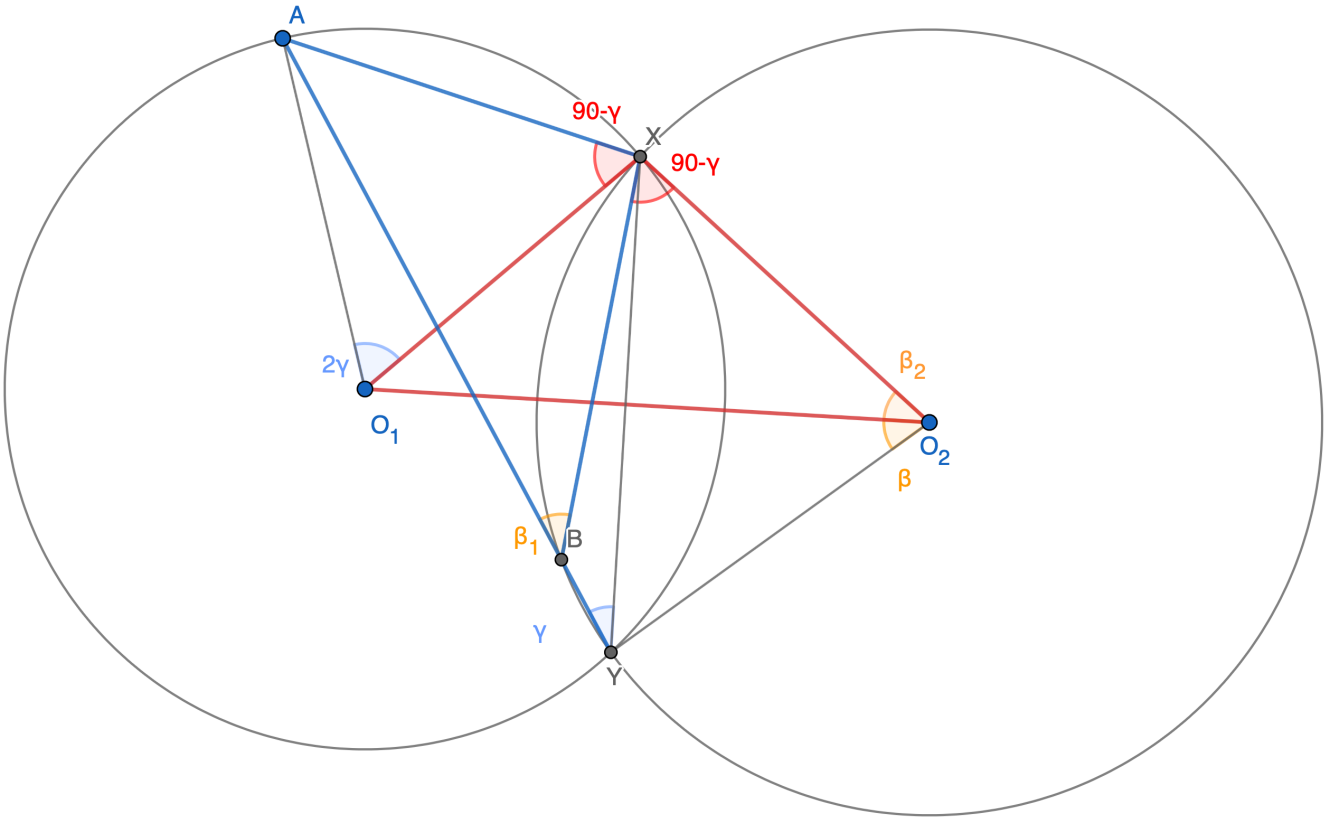
de même on a donc $KEB \sim KCD$ donc $\frac{KB}{KD} = \frac{EB}{CD}$
En combinant les deux on obtient $\frac{QK}{DF} = \frac{EB}{CD}$ cad $QB = \frac{EB \cdot DF}{CD}$
on réitère : $DPL \sim BEL$ donc $\frac{DP}{BE} = \frac{DL}{BL}$
de même $DFL \sim BCL$ donc $\frac{DF}{BC} = \frac{DL}{BL}$
en combinant on a donc $DP = \frac{DF \cdot BE}{BC} = \frac{EB \cdot DF}{CD} = BQ$
on a donc bien $CQ = CP$



Solution de l'exercice 9
Soit $\beta = \widehat{ABX}$. On a donc $\widehat{XO_2O_1} = \frac{1}{2}\widehat{XO_2Y} = 180 - \widehat{XBY} = \beta$ De plus, soit $\gamma = \widehat{XYA}$, on a $\widehat{A0_1X} = 2\gamma$ donc $\widehat{AXO_1} = 90 - \gamma$. Dans le même temps on a $\widehat{BXO_2} = \widehat{YX0_2} + \widehat{BXY} = 90_\beta + (180 - (180 - \beta) - \gamma) = 90 - \gamma$ Donc

$$\widehat{AXB} = \widehat{AXO_1} + \widehat{O_1XB} = \widehat{YXB} + \widehat{O_1XB} = \widehat{O_1XO_2}$$

Donc on a bien $XO_1O_2 \sim XAB$



7 TD pot pourri/Pôle Sud (Antoine & Gaspard C.)

Exercice 1
Soit A l'intersection de deux droites, et Γ un cercle tangent à ces deux droites en B, C. Montrer que ABC est isocèle en A.

Exercice 2
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercle tangents extérieurement en X. Soit (d) une droite tangente à ces deux cercles qui ne passe pas par X, et appelons les points de tangence Y et Z.
Montrer que le triangle XYZ est rectangle en X.

Exercice 3
Soit ABC un triangle avec $AB < AC$, Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) au point P. La bissectrice de l'angle $\widehat{APB}$ coupe la droite (AB) au point R et la droite (AC) au point S. Montrer que le triangle ARS est isocèle en A.

Exercice 4
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles tels que Γ_1 soit tangent intérieurement à Γ_2 en A. Soit P un point de Γ_2. Les tangentes à Γ_1 issues de P coupent Γ_1 en X et Y et Γ_2 en Q et R.
Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$

Exercice 5
Théorème du pôle sud
Soit ABC un triangle. Montrer que le point d'intersection S de la bissectrice interne de l'angle $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice de $[BC]$ se situe sur le cercle circonscrit à Γ.

Exercice 6
Soit $ABCD$ un carré, dont les diagonales (AC) et (BD) se coupent en O. Soit E un point en dehors du carré tel que $\widehat{AEB} = 90$. Montrer que $\widehat{AEO} = \widehat{BEO}$.

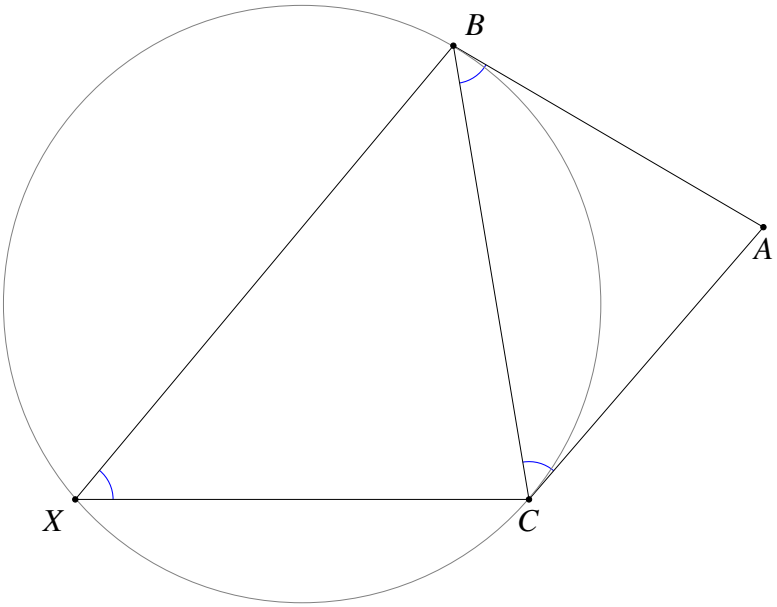
Exercice 7
Soit ABC un triangle et S son pôle Sud. Montrons que S est le centre de (BIC)

Exercice 8
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique, et notons $(b_1), (b_2), (b_3), (b_4)$ les bissectrices respectives de $\widehat{DAB}, \widehat{ABC}, \widehat{BCD}, \widehat{CDA}$.
Posons W, X, Y, Z les points d'intersections respectifs de (b_1), (b_2), (b_3) et (b_4) avec le cercle circonscrit à $ABCD$.
Montrer que WY et XZ se coupent en leur milieu.

Exercice 9
Soient A, B, C, D et E cinq points dans cet ordre sur un cercle, vérifiant AB = BC et CD = DE. On appelle respectivement P, Q et T l'intersection des droites (AD) et (BE), (AC) et (BD), (BD) et (CE). Montrer que le triangle PQT est isocèle.

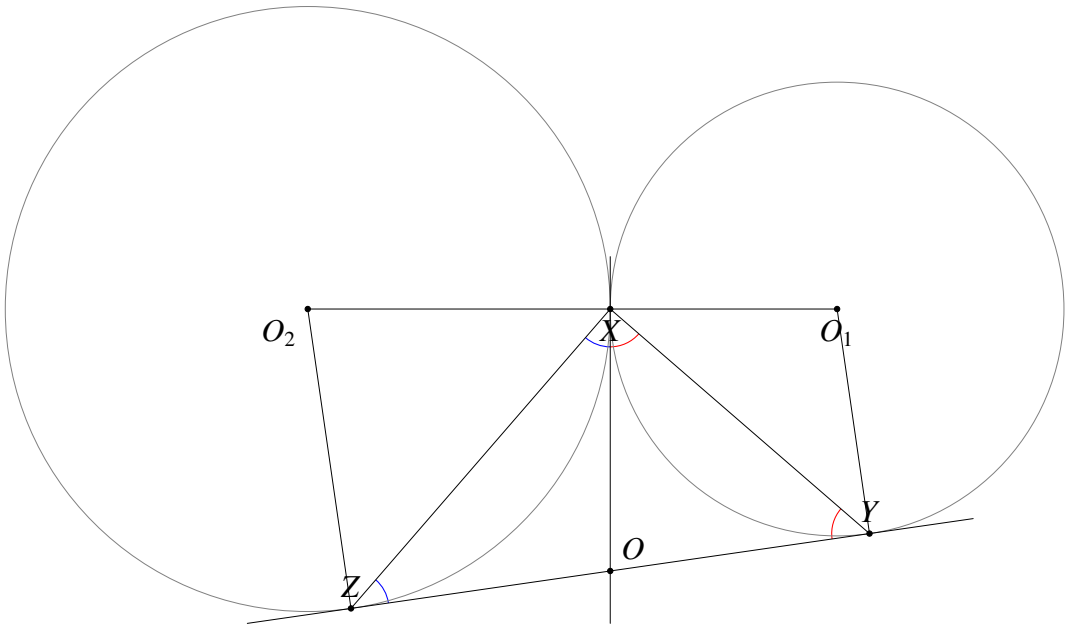
Solutions

Solution de l'exercice 1



D'après le théorème de l'angle tangent, $\widehat{ABC} = \widehat{CXB} = \widehat{ACB}$, donc le triangle ABC est isocèle en A.

Solution de l'exercice 2



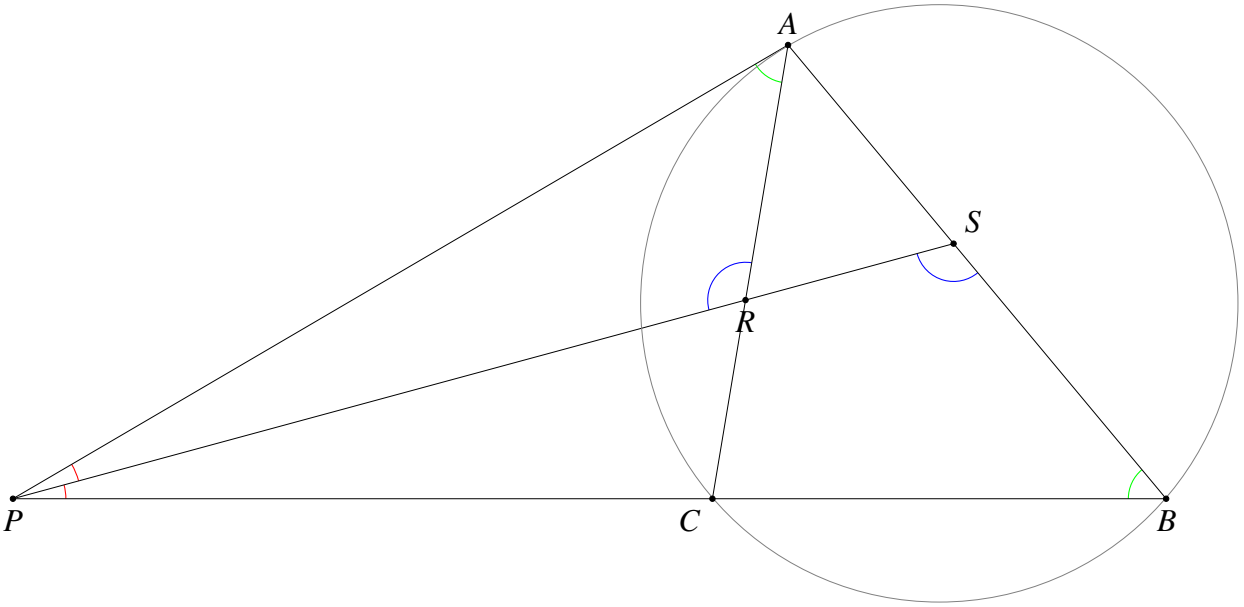
Il existe de nombreuses solutions, mais en voici une utilisant l'énoncé précédent. Introduisons la tangente commune aux deux cercles, qui coupe (YZ) en O.
Alors les triangles XYO et XZO sont isocèles en O. Ainsi

$$\widehat{YXZ} = \widehat{XZY} + \widehat{ZYX}$$

mais comme la somme des angles d'un triangle fait 180°, nous en déduisons que $\widehat{YXZ} = 90°$.

Encore plus élégant car sans calculs : des deux triangles isocèles, nous aurions plu en déduire que O, milieu de $[YZ]$, était aussi le centre du cercle circonscrit à XYZ, donc qu'il s'agissait d'un triangle rectangle en X.

Solution de l'exercice 3

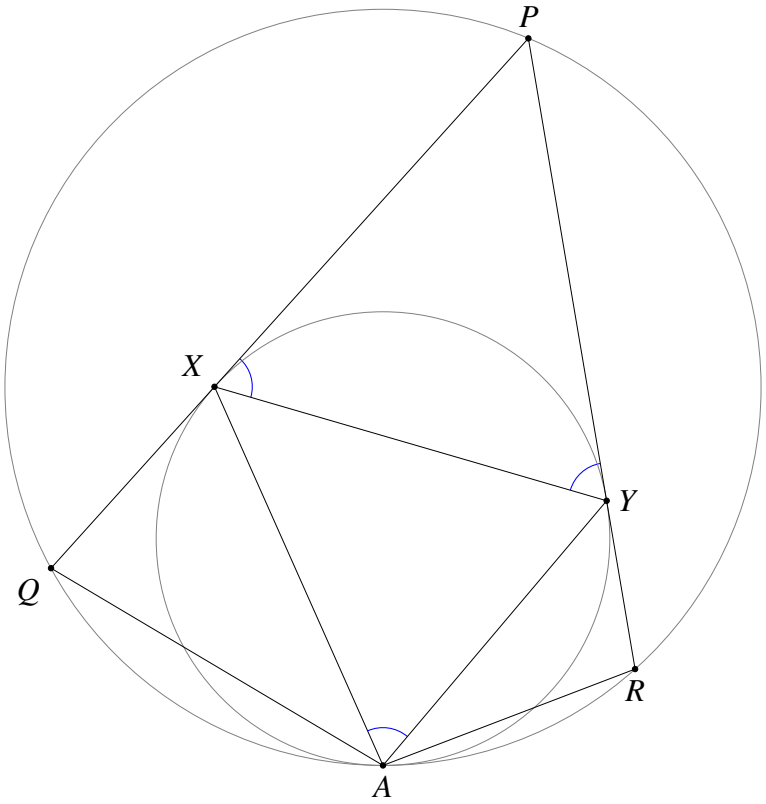


On montre que $\widehat{ARS} = \widehat{ASR}$, ce qui est équivalent à montrer que $180° - \widehat{ARS} = 180° - \widehat{ASR}$ donc que $\widehat{PRA} = \widehat{PSC}$. Or $\widehat{RPA} = \widehat{SPC}$ car la droite (RS) est bissectrice de l'angle $\widehat{APC}$. Aussi, par le théorème de l'angle tangentiel, $\widehat{PAR} = \widehat{BCA} = \widehat{PCS}$. On déduit

$$\widehat{PRA} = 180° - \widehat{PAR} - \widehat{RPA} = 180° - \widehat{SBP} - \widehat{BPS} = \widehat{PSC}$$

donc le triangle ARS est bien isocèle en A.

Solution de l'exercice 4

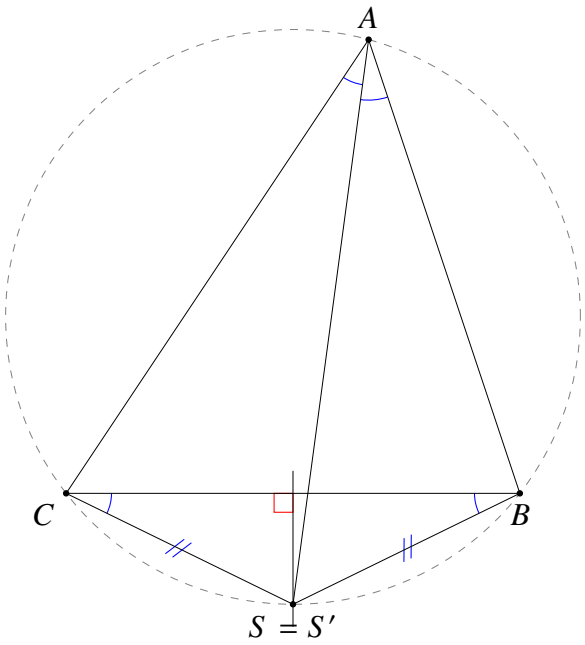


Puisque la droite (PX) est tangente au cercle ω_2 en X, $\widehat{XAY} = \widehat{YXP}$. De même on obtient $\widehat{XAY} = \widehat{XYP}$. La somme des angles du triangle XPY vaut 180, donc

$$\widehat{QPR} = \widehat{XPY} = 180 - \widehat{PXY} - \widehat{PYX} = 180 - 2\widehat{XAY}$$

D'autre part, les points P, R, A et Q sont cocycliques donc $\widehat{QPR} = 180 - \widehat{QAR}$. On déduit $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Solution de l'exercice 5



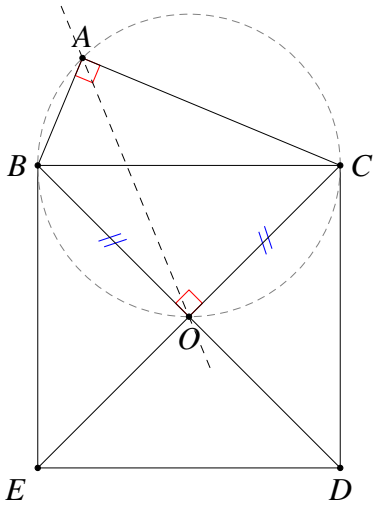
Le problème semble assez complexe sous cette forme : en effet, il est parfois nécessaire de reformuler le problème afin de le simplifier. Il faut savoir que définir un point comme l'intersection de deux droites apporte moins de libertés que de le définir comme l'intersection d'un cercle et d'une droite.
Ici, nous allons introduire le point S', intersection de Γ avec la bissectrice en A, et nous allons montrer que ce point est sur la médiatrice de $[BC]$. Ceci démontrera alors que $S = S'$, et nous aurons bien que le cercle Γ, la médiatrice de $[BC]$ et la bissectrice en A sont concourantes.

Nous avons par théorème de l'angle inscrit que

$$\widehat{S'BC} = \widehat{S'AC} \text{ et } \widehat{S'CB} = \widehat{S'AB}$$

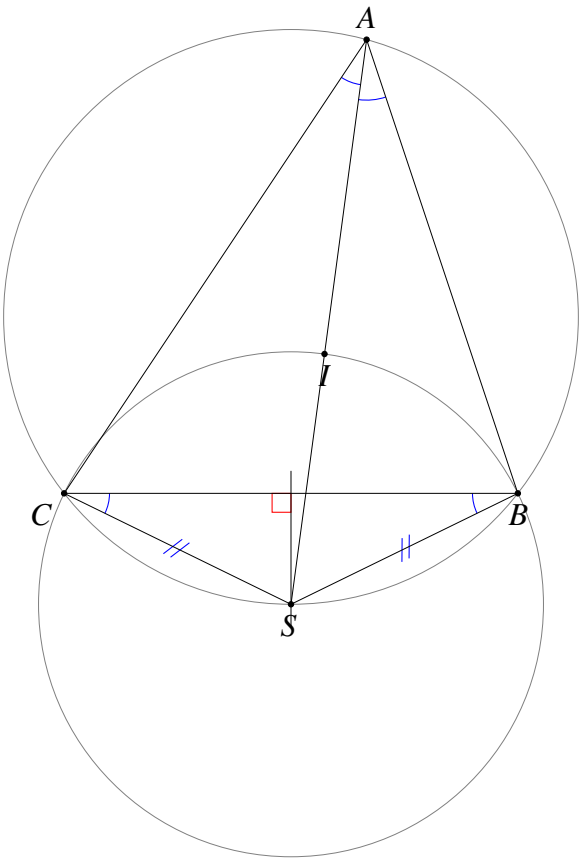
Nous en déduisons donc que le triangle SBC est isocèle en S, donc que S' est sur la médiatrice du segment $[BC]$, donc est un axe de symétrie pour la figure rouge. Donc $S = S'$.
On pourra remarquer que S est alors le milieu de l'arc $\widehat{BC}$ ne contenant pas A, et c'est pour cela qu'il est appelé pôle sud de A.

Solution de l'exercice 6



Puisque $\widehat{BAC} = 90° = \widehat{BOC}$, les points B, A, C et O sont cocycliques. Puisque le triangle BOC est isocèle en O, le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, il s'agit donc du pôle Sud du point A dans le triangle ABC. Le point O appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Il est important de remarquer que si en cherchant ce problème, vous n'avez fait qu'une chasse aux angles, il est plus que probable que vous ayez simplement remontré le théorème du pôle sud. Il est important de savoir reconnaître les configurations où il est possible de l'utiliser, pour raccourcir les calculs mais aussi pour avoir plus de recul sur la figure.

Solution de l'exercice 7



Il suffit de montrer que SIB est isocèle en S. Par symétrie des rôles de B et C on aura ainsi que $SI = SB = SC$ ce qui est équivalent au fait que S soit le centre de (BIC).
On a

$$\widehat{BIS} = 180 - \widehat{AIB} = \widehat{IAB} + \widehat{ABI}$$

.

Or d'après le théorème de l'angle inscrit couplé au théorème du pôle Sud,

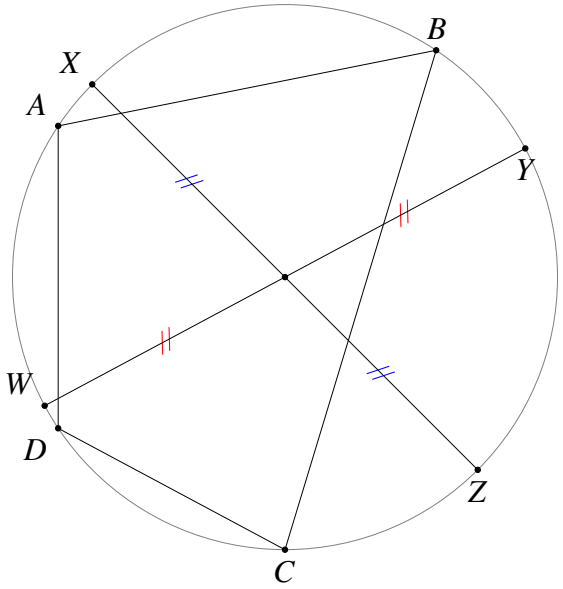
$$\widehat{BAS} = \widehat{BCS} = \widehat{CBS}$$

De plus, comme IB est une bissectrice, on a

$$\widehat{ABI} = \widehat{IBC}$$

Ainsi, on a bien que $\widehat{BIS} = \widehat{CBI} + \widehat{CBS} = \widehat{IBS}$. Le triangle IBS est isocèle en S et S est bien le centre de (BIC).

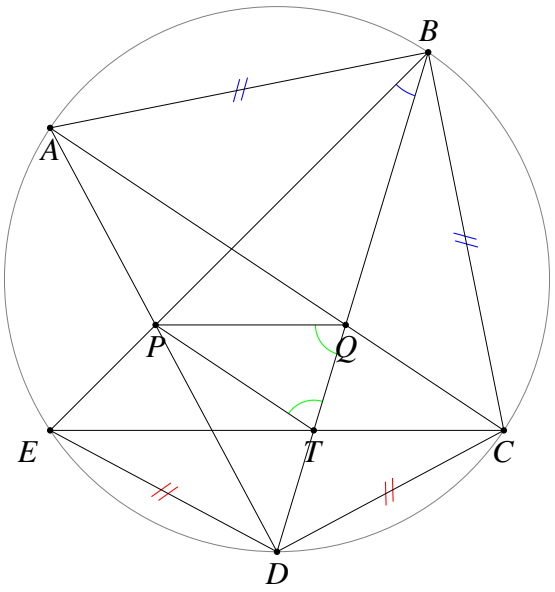
Solution de l'exercice 8



Montrons en fait que $[XZ]$ et $[WY]$ sont tout deux des diamètres du cercle circonscrit à $ABCD$. Cela permettra alors de conclure puisque les diamètres se coupent tous en leur milieu sur le centre du cercle.

Par le théorème du pôle Sud, X est sur la médiatrice de BD (c'est le pôle Sud de C dans le cercle $(ABCD)$), de la même manière Z est aussi sur la médiatrice de $[BD]$. Ainsi, la droite $[XZ]$ est la médiatrice de $[BD]$, et le centre O du cercle se trouve sur $[XZ]$ qui est donc bien un diamètre. De la même manière, on prouve que $[WY]$ est un diamètre du cercle ce qui nous permet de conclure.

Solution de l'exercice 9



Cet exercice, plus complexe, se décompose en deux parties. Montrons dans un premier temps que les quadrilatères $ABQP$ et $PTED$ sont cycliques. Les égalités de longueur nous donnent que D est sur la médiatrice de $[EC]$. Par le théorème du pôle Sud, on en déduit que D est sur la bissectrice de $\widehat{EAC}$ ainsi que sur celle de $\widehat{EBC}$. De plus, le théorème de l'angle inscrit nous donne que

$$\widehat{EAD} = \widehat{EBD}$$

En combinant tout cela on trouve que

$$\widehat{PAQ} = \widehat{DAC} = \widehat{EAD} = \widehat{EBD} = \widehat{PBQ}$$

ce qui signifie bien que le quadrilatère $ABQP$ est inscriptible. De la même manière, en remarquant que B est sur la médiatrice de $[AC]$ et donc sur la bissectrice de $\widehat{CDA}$, on prouve que $PTDE$ est inscriptible.

Nous allons maintenant effectuer une chasse aux angles qui nous permettra de conclure. Comme les quadrilatères $ABDE$,$ABQP$ et $PTDE$ sont cycliques, on a respectivement les trois égalités d'angles suivantes.

$$\widehat{DAB} = \widehat{DEB}$$

$$\widehat{PQT} = \widehat{PAB}$$

$$\widehat{PTQ} = \widehat{PED}$$

.

En combinant il vient enfin que

$$\widehat{PQT} = \widehat{PAB} = \widehat{DAB} = \widehat{DEB} = \widehat{DEP} = \widehat{PTQ}$$

ce qui signifie bien que PQT est isocèle en P comme voulu.

8 Principe de l'extremum (Aimeric)

Le principe de l'extremum est le suivant : tout ensemble non vide d'entiers naturels a un minimum, et tout ensemble fini non vide a un minimum et un maximum. Ce n'est pas vrai pour les réels, par exemple l'ensemble des $\frac{1}{n}, n \in \mathbb{N}$ n'a pas de minimum.
L'existence de cet extremum permet en général de montrer l'impossibilité d'une situation, ou au contraire de construire la situation désirée en se servant de la maximalité/minimalité d'un élément.

Exercice 1 (Entraînement 2021)
On dispose de $n \geqslant 3$ points. Montrer qu'il existe A, B, C tels qu'il n'y a aucun autre point sur $[AB], [AC], [BC]$.

Exercice 2 (Poly 2019)
Après un tournoi de Gobbit, chaque personne a joué au moins une partie avec chacun des autres participants. Chacun écrit sur une feuille le noms des adversaires qu'il a battus, ainsi que les personnes sur la feuille des adversaires vaincus (mais jamais son propre nom). Montrer que quelqu'un possède tous les autres noms sur sa feuille.

Exercice 3
Trouver toutes les solutions de $a^2 + b^2 = 3(c^2 + d^2)$

Exercice 4
Sur un cercle, on dispose n nombres de sorte que chacun d'entre eux soit la moyenne des deux qui l'entourent. Montrer que tous les nombres sont égaux.

Solution de l'exercice 1
On prend un triangle d'aire minimale. Si on avait un point sur un des segments, on aurait un autre triangle d'aire plus petite, impossible.

Solution de l'exercice 2
On prend une personne A ayant le plus de noms sur sa feuille. Si elle n'a pas tous les noms sur sa feuille, par exemple il lui manque la personne C, le gagnant de la partie opposant A et C ne peut pas être A. Cette personne a écrit sur sa feuille A et les noms de A sur sa feuille, soit strictement plus de noms que A.

Solution de l'exercice 3
On prend une solution avec $a > 0$ minimal. Si on regarde modulo 3, on voit que 3 doit diviser a et b : on a donc une plus petite solution avec $\frac{a}{3}, \frac{b}{3}$. C'est donc impossible.

Solution de l'exercice 4
On prend un maximum : puisqu'il est égal à la moyenne de ses voisins qui lui sont plus petits, ses voisins sont égaux. De cette manière, on propage l'égalité à tout le cercle.

Exercice 5 (Poly 2019)
Lors d'un bal, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon. Montrer qu'il existe deux couples de partenaires de danse f, g et f', g' de fille et garçon tels que f et g', f' et g n'ont pas dansé ensemble.

Exercice 6 (Poly 2018)
À Valbonne, on crée en fait les groupes afin de séparer les amis. Si chaque participant possède au plus trois amis avant de venir à Valbonne, montrer qu'il est possible de les séparer en deux groupes afin que chaque participant ait au plus un ami dans son groupe.

Exercice 7 (Poly 2019)
On dispose d'un ensemble S de points tels que chaque triangle formé de points de S est d'aire au maximum 1. Montrer qu'il existe un triangle d'aire au maximum 4 qui contient tous les points de S.

Solution de l'exercice 5
Non modifié.

Solution de l'exercice 6
On prend une configuration telle que le nombre de liaisons d'amitié dans le même groupe est minimal. Si une personne a deux amis dans son groupe, elle en a au maximum un dans l'autre. On aurait donc une liaison d'amitié de moins en l'envoyant dans l'autre groupe, cette situation n'est pas minimale.

Solution de l'exercice 7
Non modifié.

Exercice 8 (Solutions d'expert)
Montrer que tout polygone convexe d'aire 1 est inclus dans un rectangle d'aire 2.

Exercice 9
On a $2n+1$ personnes, chacune arrose son voisin le plus proche. Montrer qu'une personne ne sera pas arrosée.

Solution de l'exercice 8
On prend la plus la plus grande diagonale ou côté du polygone d. Par maximalité, tous les points sont entre les deux extrémités de d. On prend le rectangle minimal contenant le polygone dont deux côtés sont perpendiculaires à d. De chaque côté de cette d, sur chaque côté du rectangle (les côtés a et b), il y a un point (A et B). h_1 est la distance de A à d et h_2 de B à d, donc l'aire du polygone est donc d'au moins $\frac{h_1 \times d}{2} + \frac{h_2 \times d}{2} = d \times \frac{h_1+h2}{2} \leqslant 1$. L'aire du rectangle ainsi formé est de $d \times (h_1 + h_2) \leqslant 2$, et ce rectangle convient.

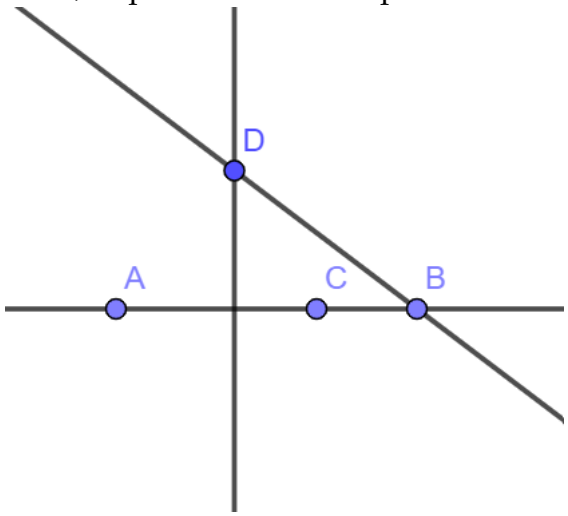
Solution de l'exercice 9
On prend le plus petit segment entre deux personnes. Celles-ci s'arrosent l'une l'autre. On prend ensuite le plus petit segment dont l'une des extrémités n'est pas parmi les personnes déjà associées. Si on forme un nouveau couple, on recommence jusqu'à ce qu'il ne reste plus qu'une personne, qui ne sera pas arrosée. Si cette personne arrose une personne déjà associée, il reste parmi les personnes non arrosées $2n-1$ personnes sèches et il y aura seulement $2n-2$ personnes arrosées : dans tous les cas il y aura donc une personne qui restera au sec.

Exercice 10 (Problème de Sylvester)

On possède un ensemble fini S de ponts du plan. Toute droite passant par deux éléments passe par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés. (Indice : considérer les projetés des points sur les droites).

Exercice 11 (Solutions d'expert)
$2n$ ambassadeurs sont invités à un banquet. Chaque ambassadeur a au plus $n-1$ ennemis. Montrer qu'on peut asseoir tous les ambassadeurs autour d'une table ronde de sorte que personne ne soit assis à côté de l'un de ses ennemis.

Solution de l'exercice 10
On s'intéresse au couple (point, droite) qui minimise la distance (non nulle) d'un point à la droite, qui existe seulement si tous les points ne sont pas alignés. On appelle D ce point et A, B, C trois points sur cette droite. Il y en a forcément deux du même côté (disons B et C). Mais alors si C est plus loin de la droite que B, alors le couple $(B, (CD))$ a une plus petite distance, impossible. Tous les points sont donc alignés.



Solution de l'exercice 11
On s'intéresse à une situation qui minimise le nombre d'ennemis assis côte à côte. Si il reste tout de même deux ennemis voisins, on propose de retourner une branche de la table pour éviter des ennemis voisins, par exemple $a, b, c, d, e \mapsto a, d, c, b, e$. Si a et b ne sont pas amis, on peut essayer de retourner une des $2n-3$ branches qui partent de b (et qui ne retournent pas toute la table, ce qui ne changerait rien). Elles peuvent ne pas améliorer les choses parce que a serait ennemi avec son nouveau voisin, ou parce que le nouveau voisin de b et b seraient ennemis. Cela fait au maximum $2n-4$ retournement qui n'améliorent pas la situation, donc l'un d'eux permet de diminuer le nombre d'ennemis assis côte à côte, impossible car on a choisi le minimum.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercice 1
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{ABC} > 90°$ et O le centre de son cercle circonscrit. Soit D le deuxième point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle circonscrit à OBC. Montrer que (DO) est la bissectrice de $\widehat{AOB}$.

Exercice 2
Maena et Gaspard jouent à un jeu. Il y a initialement un tas de n bonbons. Lors de son tour, si on note a le nombre de bonbons restants, le joueur qui doit jouer choisit un entier b tel que $1 \leqslant b \leqslant a$ et premier avec a, puis mange b bonbons. Celui qui mange le dernier bonbon a gagné.

Sachant que Maena commence, indiquer en fonction de n lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Exercice 3
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On suppose que le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le côté $[AB]$ en un point E et que le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le côté $[AC]$ en un point F. Démontrer que $BE = CF$.

Exercice 4
On considère 1000 points distincts dans le plan, tels que tout ensemble de 4 points en contient 2 qui sont à distance inférieure ou égale à 1. Montrer qu'il existe un disque de rayon 1 contenant 334 points.

Solution de l'exercice 1

On a $\widehat{BOD} = \widehat{BCD} = \widehat{BCA} = \dfrac{\widehat{BOA}}{2}$ par angle inscrit puis angle au centre

Solution de l'exercice 2
On appelle position *paire* (respectivement *impaire*) quand il reste un nombre pair (resp. impair) de bonbons dans le tas lors du tour. On montre par récurrence que les positions paires sont perdantes et les positions impaires gagnantes. Ainsi si n est pair, Maena perd, sinon elle gagne.

Cas $n = 1$: Maena mange immédiatement le bonbon et elle a gagné.

Cas $n = 2$: Maena ne peut manger qu'un seul bonbon. Ainsi il restera ensuite un unique bonbon sur le tas et Gaspard gagne.

Soit n tel que pour tout $a \leqslant n$, on gagne si on est en position a impaire et on perd sinon.

On suppose $n+1$ impaire. Le joueur peut toujours manger 1 bonbon et donc forcer l'autre joueur à aller en position paire n. Donc il gagne.

On suppose $n+1$ paire. Le joueur ne peut jamais manger un nombre b de bonbons paires, car b n'est pas premier avec $n+1$. Ainsi il est obligé de choisir b impair et donc le joueur suivant sera sur une position impaire et pourra donc gagner.

Solution de l'exercice 3
On veut montrer que BDE et DFC sont isométriques. Par le théorème du pôle Sud, comme AD est la bissectrice de $\widehat{EAC}$ et de $\widehat{BAF}$, on a $DE = DC$ et $DB = DF$. De plus par angle inscrit

$\widehat{BDE} = 180 - \widehat{EDC} = 180 - \widehat{EAC} = 180 - \widehat{BDF} = \widehat{FDC}$. Donc les triangles sont isométriques et la conclusion suit.

Solution de l'exercice 4

Soit d le nombre de points deux à deux à distance strictement supérieure à 1. On sait que $d \leqslant 3$ par la condition de l'exercice.

Pour chaque point A, on considère A avec l'ensemble des d points. Si $d = 3$, on sait par la condition de l'énoncé que A est à distance moins de 1 d'un des d points. Si $d < 3$, de même, autrement on aurait pu choisir ce point et avoir $d = 3$. Si on pose les d points comme étant les tiroirs et l'ensemble des 1000 points comme les chaussettes, en appliquant le principe des tiroirs, on a bien 334 points à distance moins de 1 d'un des d points. Donc si on trace le cercle de centre ce point et rayon 1, on résout l'exercice.

IV. Groupe B

Contenu de cette partie

1 Première partie : Géométrie & Algèbre 144
1 Chasse aux angles (Quentin) 144
2 Récurrence (Antoine) 156
3 Équations fonctionelles 1 (Henry) 156
4 Angle tangent (Vincent) 161
5 Triangles semblables (Baptiste) 170
6 Inégalités (Gaspard D.) 170
7 Équations fonctionnelles 2 (Rémi & Melvil) 175
8 TD de Géométrie (Martin & Maryam) 181
2 Entraînement de mi-parcours 193
3 Deuxième partie : Arithmétique & Combinatoire 196
1 Divisibilité, PGCD (Paul) 196
2 Principe des tiroirs (Aline) 203
3 Nombres premiers (Xavier) 210
4 Invariants/pavages/coloriages (Maena) 213
5 Modulos (Jean) 216
6 Principe de l'extremum (Paul) 227
7 Comptage/ Pot pourri (Raphael) 231
8 Équations diophantiennes, factorisation (Augustin & Éva) 238
4 Entraînement de fin de parcours 243

1 Première partie : Géométrie & Algèbre

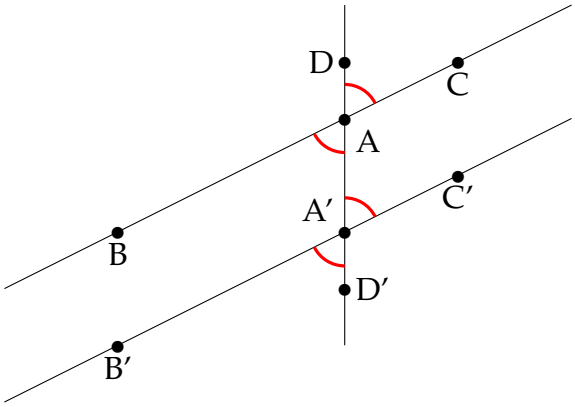
1 Chasse aux angles (Quentin)

Angles et droites parallèles

Proposition 1 (Angles alternes-internes et angles correspondants)**.**
Si les droites (BC) et $(B'C')$ sont parallèles, alors on a les égalités d'angles suivantes :

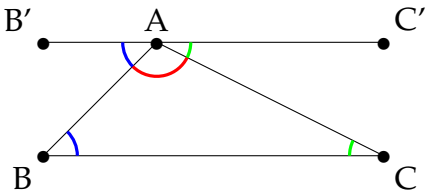
- $\widehat{BAA'} = \widehat{C'A'A}$, ces angles sont dits **alternes-internes**.
- $\widehat{CAD} = \widehat{C'A'D}$, ces angles sont dits **correspondants**.
- $\widehat{CAD} = \widehat{B'A'D'}$, ces angles sont dits *alternes-externes* (mais leur utilisation directe est plus rare).

On retiendra surtout les deux premiers points.



Proposition 2 (Somme des angles d'un triangle)**.**
Dans un triangle ABC, on a la somme des angles $\widehat{ACB} + \widehat{BAC} + \widehat{CBA} = 180°$.

Démonstration. En effet, si on introduit la parallèle $(B'C')$ à (BC) passant par A, on a par angles alternes-internes $\widehat{ACB} = \widehat{CAC'}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{B'AB}$.
Donc $\widehat{ACB} + \widehat{CBA} + \widehat{BAC} = \widehat{B'AB} + \widehat{BAC} + \widehat{CAC'} = \widehat{B'AC'} = 180°$, comme voulu.

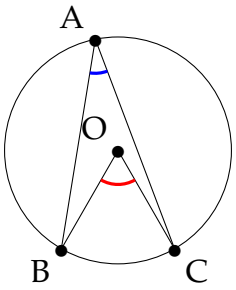


□

Angles dans un cercle

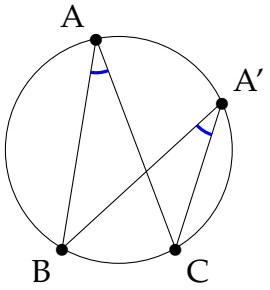
Définition 3.
Soient A, B, C, D quatre points qui sont sur un même cercle. On dit que ces points sont **cocycliques**
On dira aussi que le quadrilatère $ABCD$ est **cyclique**, ou encore **inscriptible**.

Proposition 4 (Angle au centre)**.**
Soit ABC un triangle et soit O le centre du cercle circonscrit.
Alors $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$



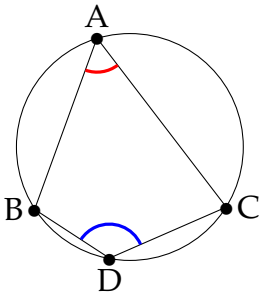
Proposition 5 (Angle inscrit)**.**
Soient A, A', C, B quatre points cocycliques avec A, A' du même côté de (BC).
Alors $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$.

Démonstration. Si O est le centre de ce cercle, par l'angle au centre $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \times \widehat{BOC} = \widehat{BA'C}$.
□

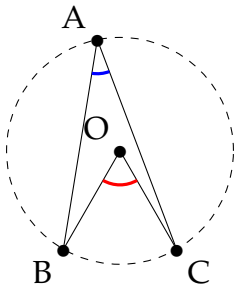


Proposition 6 (Angles opposés dans un cercle)**.**
Soient A, C, D, B quatre points cocycliques avec A et D qui ne sont pas du même côté de (BC).
Alors $\widehat{BAC} + \widehat{CDB} = 180°$.

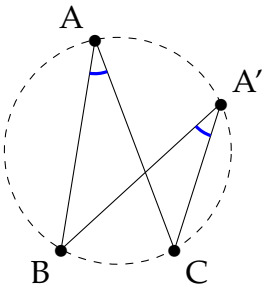
Démonstration. Soit O le centre du cercle.
Par angle au centre $\widehat{BAC} = \frac{1}{2} \times \widehat{BOC} = \frac{1}{2} \times \left(360° - \widehat{COB}\right) = 180° - \frac{1}{2}\widehat{COB} = 180° - \widehat{CDB}$. □



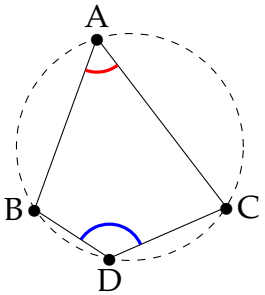
Proposition 7 (Réciproque de l'angle au centre)**.**
Soit ABC un triangle et soit O un point tel que $OB = OC$ et $\widehat{BOC} = 2 \times \widehat{BAC}$.
Alors O est le centre du cercle circonscrit au triangle ABC.



Proposition 8 (Réciproque de l'angle inscrit)**.**
Soient A, A', C, B quatre points vérifiant $\widehat{BAC} = \widehat{BA'C}$.
Alors ces points sont cocycliques.



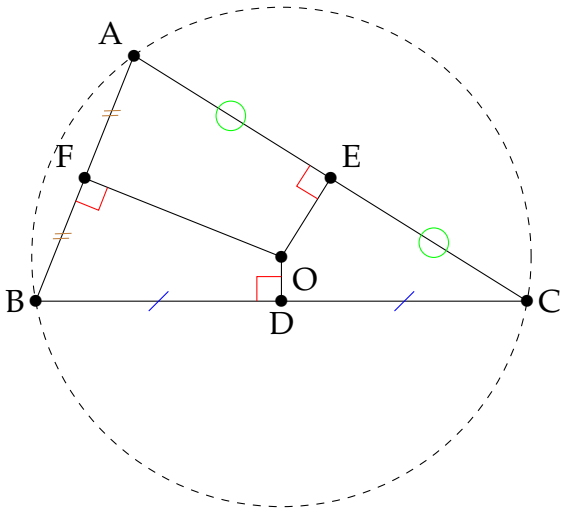
Proposition 9 (Réciproque des angles opposés)**.**
Soient A, C, D, B quatre points tels que $\widehat{BAC} + \widehat{CDB} = 180°$.
Alors ces points sont cocycliques.



Points remarquables dans un triangle

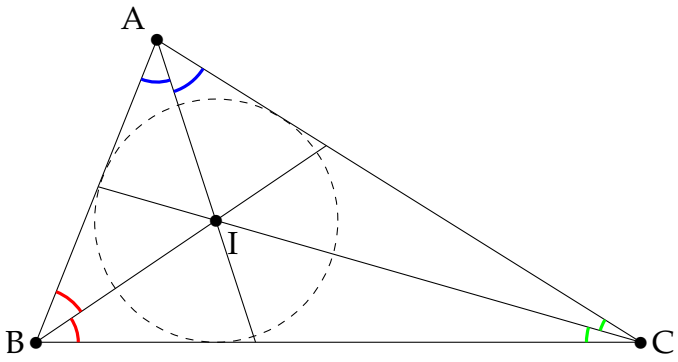
Proposition 10 (Concours des médiatrices)**.**
Les médiatrices d'un triangle ABC sont concourantes en O le centre du cercle circonscrit.

Démonstration. Soit O l'intersection de la médiatrice de $[AB]$ et de la médiatrice de $[AC]$: $OB = OA$ et $OA = OC$. Donc $OB = OC$: O est également sur la médiatrice de $[BC]$. □



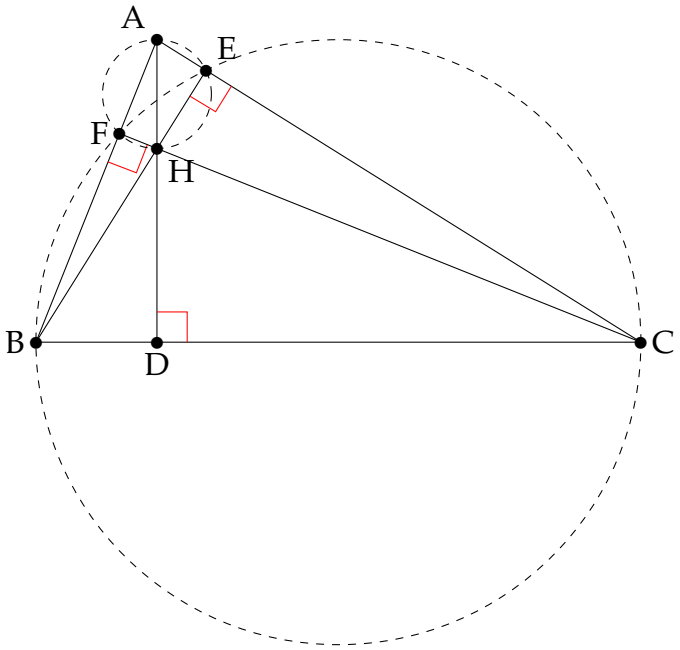
Proposition 11 (Concours des bissectrices)**.**
Les bissectrices d'un triangle ABC sont concourantes en I le centre du cercle inscrit.

Démonstration. Soit I l'intersection de la bissectrice de $\widehat{CBA}$ et de la bissectrice de $\widehat{ACB}$. Alors distance$(I,(BC))$ = distance$(I,(AC))$ et distance$(I,(BC))$ = distance$(I,(BA))$. Donc distance$(I,(AB))$ = distance$(I,(AC))$: I est également sur la bissectrice de $\widehat{BAC}$. □

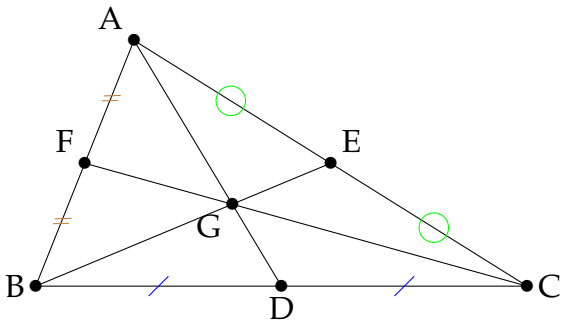


Proposition 12 (Concours des hauteurs)**.**
Les hauteurs d'un triangle ABC sont concourantes en H l'orthocentre

Démonstration. Soient E, F les pieds des hauteurs issues de B et C.
On définit H comme l'intersection de (BE) et (CF) et D comme le projeté orthogonal de H sur (BC). Montrons que A, H, D sont alignés.
On a $\widehat{HFA} + \widehat{AEH} = 90° + 90° = 180°$ donc par réciproque des angles opposés, A, F, H, E sont cocycliques. De plus $\widehat{BFC} = 90° = \widehat{BEC}$ donc par réciproque de l'angle inscrit, B, C, E, F sont cocycliques
Alors $\widehat{AHF} = 90° - \widehat{FAH} = 90° - \widehat{FEH} = 90° - \widehat{FEB} = 90° - \widehat{FCB} = 90° - \widehat{HCD} = \widehat{DHC}$.
$\widehat{AHF} = \widehat{DHC}$ et F, H, C sont alignés, donc nécessairement A, H, D sont alignés aussi, ce qui conclut. □



Proposition 13 (Concours des médianes)**.**
Les médianes d'un triangle ABC sont concourantes en G le centre de gravité



Exercices

Exercice 1 (traité pendant la séance)
Soit $ABCD$ un quadrilatère, P l'intersection de (AC) et (BD). On suppose que $\widehat{CAD} = 50°$, $\widehat{BAC} = 70°$, $\widehat{DCA} = 40°$ et $\widehat{ACB} = 20°$. Calculer l'angle $\widehat{CPD}$.

Exercice 2 (traité)
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en deux points P et Q. Une droite passant par P coupe Γ_1 en $A \neq P$ et Γ_2 en $A' \neq P$. Une droite passant par Q coupe Γ_1 en $B \neq Q$ et Γ_2 en $B' \neq Q$. Montrer que (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Exercice 3 (traité)
Soient ABC un triangle, O le centre du cercle circonscrit, C' le pied de la hauteur issue de C. Montrer que $\widehat{ACC'} = \widehat{OCB}$.

Exercice 4 (Théorème de Miquel, traité)
Soit ABC un triangle et D, E, F trois points respectivement sur $[AB], [BC], [CA]$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles BDE, CEF et AFD ont un point commun.

Exercice 5 (Droite de Simson, traité)
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ. Soit P un point de Γ et D, E, F les projetés orthogonaux de P sur $(AB), (BC), (CA)$ respectivement. Montrer que D, E, F sont alignés.

Exercice 6 (non-traité)
Soit $ABCDE$ un pentagone. On suppose que $\widehat{ABC} = \widehat{ADE}$ et que $\widehat{CEA} = \widehat{BDA}$.
Montrer que $\widehat{CAB} = \widehat{EAD}$.

Exercice 7 (non-traité)
Soit ABC avec $\widehat{BAC} > 90°$, Γ son cercle circonscrit et O le centre du cercle circonscrit. Le cercle circonscrit à AOB recoupe $[BC]$ en un point D. Montrer que (OD) est perpendiculaire à (AC).

Exercice 8 (2011 Tournament "Mathematical Multiathlon", Geometry Seniors P1, traité)
Soit $ABCD$ un rectangle, P le milieu de $[AB]$ et Q le point de $[PD]$ tel que les droites (CQ) et (PD) sont perpendiculaires. Montrer que le triangle BQC est isocèle en B.

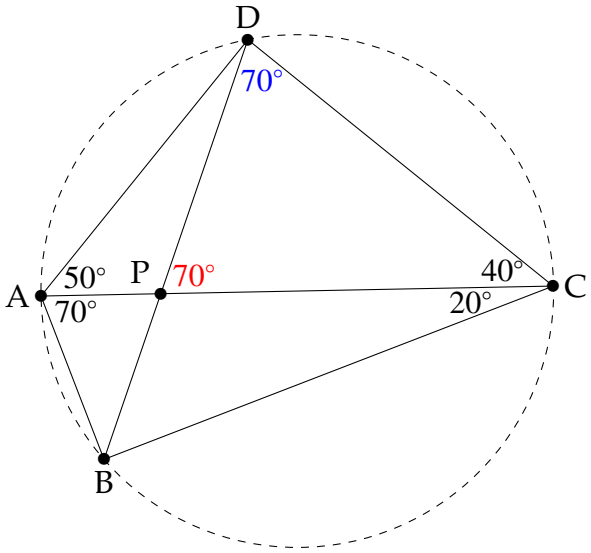
Exercice 9 (non traité)
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. Les droites (AB) et (CD) s'intersectent en P. Les droites (BC) et (AD) s'intersectent en Q. Les bissectrices de $\widehat{CPB}$ et $\widehat{DQC}$ s'intersectent en R.
Montrer que $\widehat{PRQ} = 90°$.

Exercice 10 (non traité)
Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus), et tel que $AC > BC$. Soient H l'orthocentre de ABC, P le pied de la hauteur issue de B, et M le milieu de $[AB]$.
Les cercles circonscrits aux triangles ABC et CPH se recoupent au point D.
Montrer que les points D, P, M, B sont cocycliques.

Exercice 11 (Point de Miquel, non traité)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe. On note P l'intersection de (AD) avec (BC) et Q l'intersection de (AB) avec (CD). Montrer que les cercles circonscrits aux triangles CBQ, APB, DCP et ADQ sont concourants.

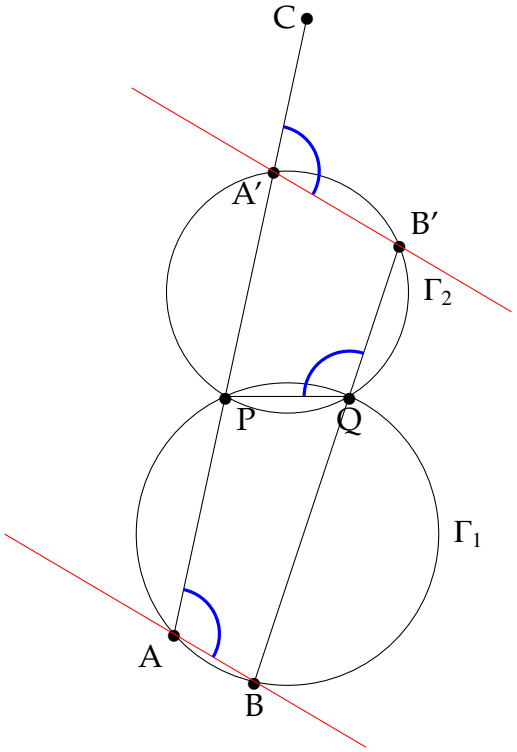
Solutions

Solution de l'exercice 1



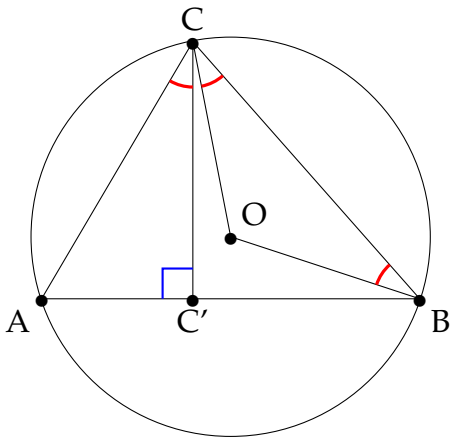
On remarque que $\widehat{BAD} + \widehat{DCB} = \widehat{BAC} + \widehat{CAD} + \widehat{DCA} + \widehat{ACB} = 70° + 50° + 40° + 20° = 180°$.
Donc A, B, C, D sont cocycliques. Ainsi $\widehat{PDC} = \widehat{BDC} = \widehat{BAC} = 70°$. Donc $\widehat{CPD} = 180° - \widehat{PDC} - \widehat{DCP} = 180° - 70° - 40° = 70°$.
Donc $\boxed{\widehat{CPD} = 70°}$.

Solution de l'exercice 2



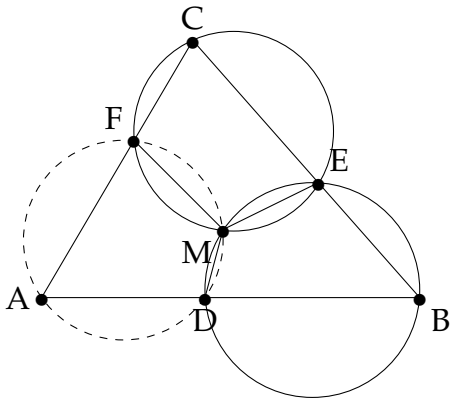
Soit C sur la droite (AA') de l'autre côté de A' par rapport à A.
Par angles opposés $\widehat{BQP} = 180° - \widehat{BAP}$. Donc $\widehat{B'QP} = \widehat{BAP}$. De même $\widehat{B'QP} = \widehat{B'A'C}$. Donc $\widehat{BAC} = \widehat{B'A'C}$. Par angles correspondants, (AB) et $(A'B')$ sont parallèles.

Solution de l'exercice 3



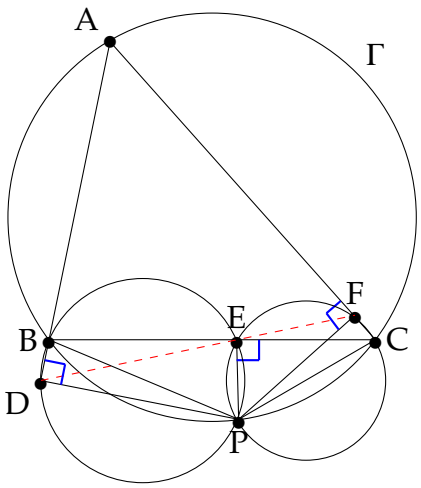
On a $\widehat{ACC'} = 90° - \widehat{CAB}$. Par angle au centre : $\widehat{COB} = 2\widehat{CAB}$. Donc $\widehat{ACC'} = \frac{180° - \widehat{COB}}{2} = \frac{\widehat{OCB} + \widehat{CBO}}{2}$. Or $\widehat{OCB} = \widehat{CBO}$. Donc $\widehat{ACC'} = \widehat{OCB}$, comme voulu. Cela signifie que (CC') et (CO) sont symétriques par rapport à la bissectrice de $\widehat{ACB}$.

Solution de l'exercice 4



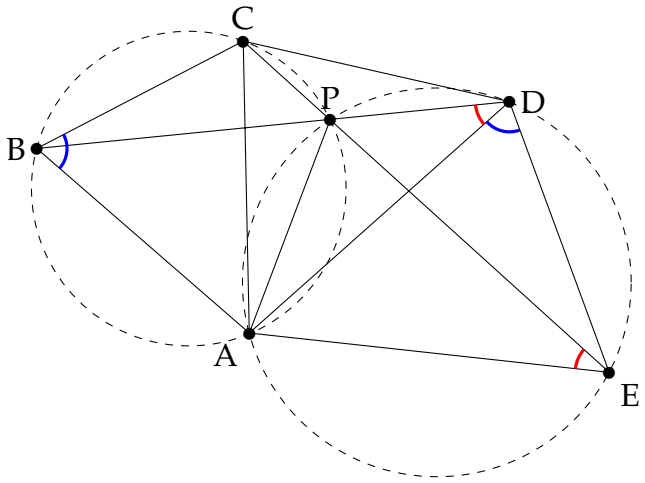
Soit M l'intersection des cercles circonscrits à BDE et CEF. On veut montrer que A, F, M, D sont cocycliques.
On a d'une part $\widehat{FME} = 180° - \widehat{ACB}$, et d'autre part $\widehat{DME} = 180° - \widehat{CBA}$. Or on sait que $\widehat{FMD} = 360° - \widehat{FME} - \widehat{DME}$. Donc $\widehat{FMD} = \widehat{ACB} + \widehat{CBA} = 180° - \widehat{BAC}$, d'où $\widehat{FMD} + \widehat{FAD} = 180°$, et donc les points A, F, M, D sont cocycliques, comme voulu.

Solution de l'exercice 5



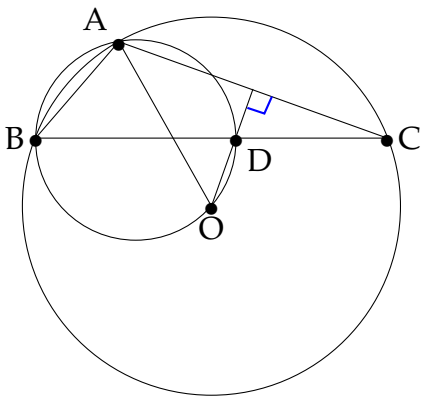
On a $\widehat{PEC} = 90° = \widehat{PFC}$ donc par réciproque de l'angle inscrit, P, E, F, C sont cocycliques.
De plus $\widehat{BDP} + \widehat{BEP} = 90° + 90° = 180°$ donc B, D, P, E sont également cocycliques. Dès lors $\widehat{DEP} = \widehat{DBP}$. Or $\widehat{DBP} = 180° - \widehat{PBA}$ et $\widehat{PCA} = 180° - \widehat{PBA} = \widehat{PEF}$. Donc $\widehat{DEP} + \widehat{PEF} = 180°$. Donc D, E, F sont bien alignés.

Solution de l'exercice 6



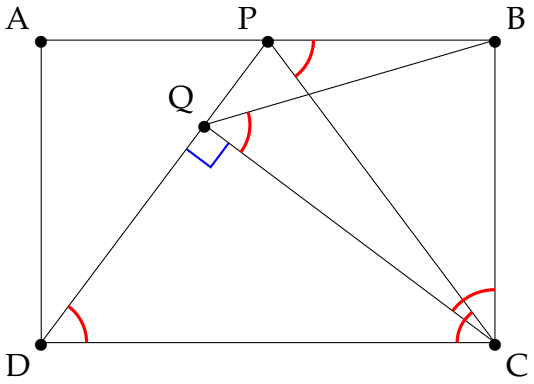
Soit P l'intersection de (EC) et (BD).
On a d'abord $\widehat{PEA} = \widehat{CEA} = \widehat{BDA} = \widehat{PDA}$ donc par la réciproque de l'angle inscrit, A, E, D, P sont cocycliques.
Dès lors par angle inscrit, $\widehat{ADE} = \widehat{APE} = 180° - \widehat{CPA}$. Donc $\widehat{ABC} = 180° - \widehat{CPA}$: par la réciproque des angles opposés, A, P, C, B sont cocycliques.
Alors par angle inscrit, $\widehat{CAB} = \widehat{CPB} = \widehat{EPD} = \widehat{EAD}$, comme voulu.

Solution de l'exercice 7



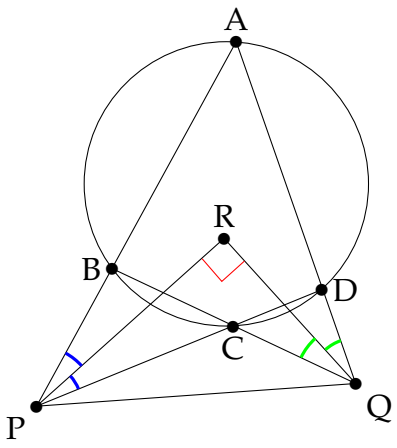
Comme AOC est isocèle en O : la hauteur issue de O est aussi la bissectrice de $\widehat{AOC}$. Il suffit de montrer que $\widehat{AOD} = \dfrac{\widehat{AOC}}{2}$. Or par angle inscrit, $\widehat{AOD} = \widehat{ABD} = \widehat{ABC}$ et par angle au centre $\widehat{ABC} = \dfrac{\widehat{AOC}}{2}$. On a donc le résultat voulu, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8



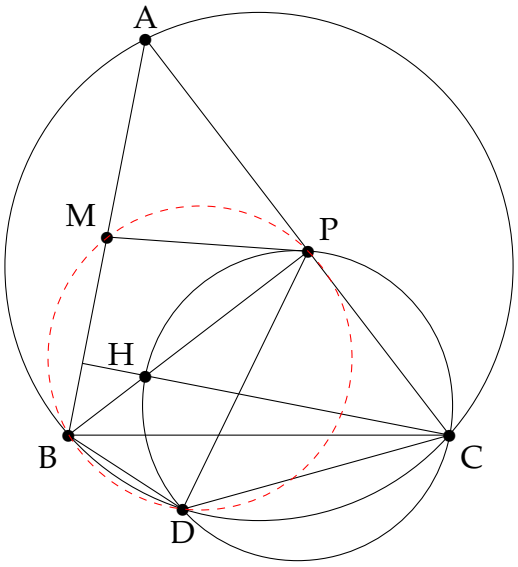
On a $\widehat{PQC} + \widehat{PBC} = 90° + 90° = 180°$ donc P, B, Q, C sont cocycliques. D'où $\widehat{BQC} = \widehat{BPC}$. Or par angles alternes-internes, comme (AB) et (DC) sont parallèles : $\widehat{BPC} = \widehat{PCD}$, et de plus $PB = PA$ donc $PC = PD$: PCD est isocèle en P. D'où $\widehat{PCD} = \widehat{PDC} = 90° - \widehat{QCD} = \widehat{BCQ}$. Finalement $\widehat{BCQ} = \widehat{BQC}$, donc BQC est bien isocèle en B.

Solution de l'exercice 9



On sait que $\widehat{PCR} = \widehat{RPB}$ et $\widehat{DQR} = \widehat{RQC}$.
On a $\widehat{PRQ} = 180° - \widehat{QPR} - \widehat{RQP} = 180° - (\widehat{QPC} + \widehat{CQP} + \widehat{CPR} + \widehat{RQC})$.
Or par angles opposés dans un cercle, $\widehat{CBA} + \widehat{ADC} = 180°$.
De plus, $\widehat{CBA} = 180° - \widehat{PBC} = 180° - \widehat{PBQ} = \widehat{QPB} + \widehat{CQP} = \widehat{QPC} + \widehat{CQP} + 2\widehat{CPR}$. De même $\widehat{ADC} = \widehat{QPC} + \widehat{CQP} + 2\widehat{RQC}$.
Il vient que $2(\widehat{QPC} + \widehat{CQP} + \widehat{CPR} + \widehat{RQC}) = 180°$, il en découle $\widehat{PRQ} = 90°$.

Solution de l'exercice 10



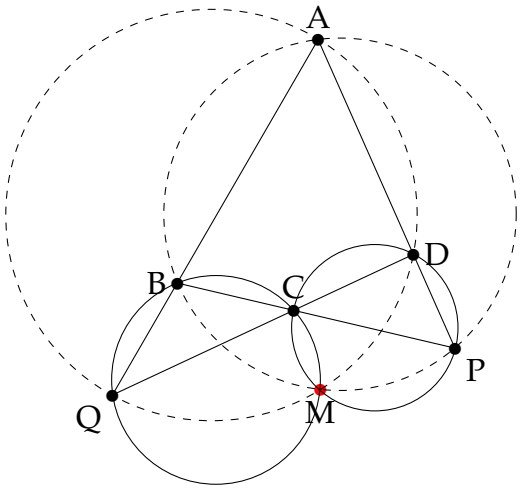
Pour montrer la cocyclicité, comme nous n'avons pas d'information sur les diagonales (sur (MD) en particulier) ni sur l'angle en P, la seule façon raisonnable de procéder et de montrer que $\widehat{PDB} + \widehat{BMP} = 180°$.
On a APB rectangle en P donc M est le centre du cercle circonscrit de ce triangle ($MA = MB$ et $\widehat{AMB} = 180° = 2 \times 90° = 2\widehat{APB}$ donc la réciproque de l'angle au centre nous donne ce qu'on veut).
Alors par angle au centre, $\widehat{BMP} = 2\widehat{BAP}$.

De plus :

$$\begin{aligned}
\widehat{PDB} &= \widehat{CDB} - \widehat{CDP} \\
&= 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{CDP} \quad \text{par cocyclicité de } A, B, D, C \\
&= 180^\circ - \widehat{BAC} - \widehat{CHP} \quad \text{par cocyclicité de } P, H, D, C \\
&= 180^\circ - \widehat{BAC} - (90^\circ - \widehat{PCH}) \\
&= 180^\circ - \widehat{BAC} - (90^\circ - (90^\circ - \widehat{BAC})) \\
&= 180^\circ - 2\widehat{BAC} \\
&= 180^\circ - 2\widehat{BAP}
\end{aligned}$$

On a donc bien $\widehat{BMP} + \widehat{PDB} = 180^\circ$, comme voulu.

Solution de l'exercice 11



On définit M comme l'intersection des cercles circonscrits à CBQ et DCP.
Montrons que A, D, M, Q sont cocycliques. On a :

$$\begin{aligned}
\widehat{DMQ} &= \widehat{DMC} + \widehat{CMQ} \\
&= \widehat{DPC} + \widehat{CMQ} \quad \text{car } D, P, M, C \text{ sont cocycliques} \\
&= \widehat{DPC} + (180^\circ - \widehat{QBC}) \quad \text{car } B, C, M, Q \text{ sont cocycliques} \\
&= \widehat{APB} + \widehat{PBA} \\
&= 180^\circ - \widehat{BAP} \\
&= 180^\circ - \widehat{QAD}
\end{aligned}$$

Donc A, D, M, Q sont cocycliques : M est sur le cercle circonscrit à ADQ.

De façon totalement analogue, on montre que A, P, M, B sont cocycliques :

$$\begin{aligned}
\widehat{PMB} &= \widehat{PMC} + \widehat{CMB} \\
&= (180^\circ - \widehat{CDP}) + \widehat{CMB} \quad \text{car } D, P, M, C \text{ sont cocycliques} \\
&= (180^\circ - \widehat{CDP}) + \widehat{CQB} \quad \text{car } B, C, M, Q \text{ sont cocycliques} \\
&= \widehat{ADQ} + \widehat{DQA} \\
&= 180^\circ - \widehat{QAD} \\
&= 180^\circ - \widehat{BAP}
\end{aligned}$$

Donc A, P, M, B sont cocycliques, M est aussi sur le cercle circonscrit à APB.
M s'appelle le point de Miquel du quadrilatère.

2 Récurrence (Antoine)

Ce cours ainsi que ses exercices est contenu dans les fantasmagoriques cours de récurrence des deux années précédentes.

3 Équations fonctionelles 1 (Henry)

Qu'est-ce qu'une équation fonctionnelle ?

Une équation fonctionnelle se présente sous la forme d'une équation dont les inconnues sont non plus des nombres (réels, entiers, etc) mais des fonctions.

Une fonction $f : \mathcal{A} \mapsto \mathcal{B}$ s'évalue en un élément de son ensemble de définition $\mathcal{A}$, et prend ses valeurs dans son ensemble d'arrivée $\mathcal{B}$. Ainsi pour $a \in \mathcal{A}$, $f(a)$ est bien défini et un élément de $\mathcal{B}$.

Si l'on évalue nos fonctions en des éléments bien précis de nos ensembles de définition, l'équation fonctionnelle se spécialise en une équation entre des nombres.

Dans un problème d'équation fonctionnelle, on raisonne presque toujours en deux étapes, par analyse-synthèse.

— Lors de l'analyse, on cherche à trouver des conditions nécessairement vérifiées par la fonction ou certain de ses points, afin d'aboutir à une affirmation du type « *Si f est solution, alors f est forcément de la forme ...* ».

— Lors de la synthèse, on part d'un certain nombre de fonctions potentiellement solutions (celles données par l'analyse), et on vérifie si ces candidates sont ou non vraiment solution de notre équation.

Généralement la synthèse est l'étape la plus facile, mais il ne faut jamais oublier de mentionner cette étape de vérification, même quand elle vous parait évidente.

Un certain nombre d'équations fonctionnelles peuvent être résolues sans utiliser de théorie. Dans ces cas, il suffit d'obtenir des informations à travers diverses *substitutions*, c'est-à-dire en remplaçant les variables de $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par des valeurs particulières.

Un parallèle amusant est souvent évoqué entre équation fonctionnelle et enquête policière : nous sommes détectives, et nous avons accès à un certain nombre d'indices (l'équation). À travers des substitutions nous observons de plus près certains indices, ce qui nous

permet en les combinant astucieusement de cerner quelques fonctions particulières : nos suspects. La phase de vérification est comme un jugement final où nous vérifions lesquels de nos suspects sont coupables.

Voici un premier exemple.

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que pour tous $a, b \in \mathbb{R}$,

$$f(a+b) = f(ab)$$

Solution de l'exercice 1
Regardons ce qui se passe si $b = 0$. Dans ce cas, pour tout $a \in \mathbb{R}$, $f(a) = f(0)$. Nos fonctions candidates sont donc toutes les fonctions constantes. On vérifie facilement que toutes les fonctions constantes conviennent.

C'est un bon réflexe de commencer par des substitutions simples, par exemple $x = 0$, $x = \pm 1$, $x = \pm y$, en gardant à l'idée que le but de cette manipulation est de rendre l'équation plus simple. L'exercice suivant demande une substitution plus astucieuse.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x - f(y)) = 1 - x - y$$

Solution de l'exercice 2
Il faut poser $x = f(y)$ (notez bien que le sens importe. en général on peut remplacer x par $f(y)$, mais on ne peut pas toujours remplacer $f(y)$ par x (Pourquoi ?). Ainsi on obtient que pour tout $y \in \mathbb{R}$,

$$f(0) = 1 - f(y) - y.$$

En notant $c = 1 - f(0)$ et en réorganisant, toute fonction solution est de la forme $f(y) = c - y$. On vérifie pour chaque $c \in \mathbb{R}$: si un c convenait, alors on aurait dans l'équation de départ pour tous x, y :

$$c - (x - (c - y) = 1 - x - y,$$

ce qui signifie que $c = \frac{1}{2}$, donc $f(y) = \frac{1}{2} - y$ est l'unique solution.

L'équation suivante dite *équation de Cauchy* est un grand classique et le résultat peut être librement utilisé dans les problèmes d'Olympiades.

Exercice 3 (Cauchy)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution de l'exercice 3
On remarque que $f(0) = 0$ en posant $x = y = 0$, puis on se sert de cette information pour obtenir $f(x) = -f(-x)$ en posant $y = -x$ dans l'équation de l'énoncé. Attention ici, si l'ensemble de définition de f était $\mathbb{N}$, on n'aurait pas le droit de réaliser cette dernière substitution. f est donc *impaire*, et il suffit de résoudre sur $\mathbb{N}$. Pour cela, nous allons démontrer par récurrence que pour tout $n \geq 0$,

$$f(n) = n \cdot f(1).$$

L'*initialisation* est claire puisque $f(0) = 0$. Supposons maintenant pour l'*hérédité* que pour un certain $n \geq 0$, $f(n) = nf(1)$. Alors d'après l'équation initiale en $x = n$ et $y = 1$, on obtient

$$f(n+1) = f(n) + f(1) = (n+1)f(1),$$

en utilisant l'hypothèse de récurrence. On conclut l'analyse par imparité, les seules fonctions potentiellement solutions sont les fonctions définies par $f(x) = ax$, où $a \in \mathbb{Z}$. Il est facile de vérifier que ces fonctions (les fonctions linéaires) sont solutions.

Exercice 4 (Cauchy)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Solution de l'exercice 4
Dans cette version plus générale, on peut réutiliser le même raisonnement que ci-dessus pour obtenir aussi l'impartité et $f(x) = ax$ pour $a = f(1)$ et tout $x \in \mathbb{Z}$. Afin d'étendre à $\mathbb{Q}$, on cherche $f\left(\frac{p}{q}\right)$ pour p, q des entiers et q non nul. Remarquons que si $f(x+x) = f(x) + f(x)$, alors en itérant cette relation,

$$f(x + x + \ldots + x) = f(x) + f(x) + \ldots + f(x),$$

où les pointillés représentent le même nombre de termes de chaque côté. Ainsi

$$f(1) = f\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right) = q\frac{1}{q},$$

d'où $f\left(\frac{1}{q}\right) = \frac{1}{q}a$. On termine de même avec

$$f\left(\frac{p}{q}\right) = f\left(\frac{1}{q} + \ldots + \frac{1}{q}\right) = p \cdot \frac{1}{q}a,$$

ce qui nous donne bien $f\left(\frac{p}{q}\right) = \frac{p}{q}a$. On vérifie de même que les fonctions linéaires rationnelles sont bien toutes solution.

Attention, l'équation de Cauchy n'admet que les fonctions linéaires comme solutions dans $\mathbb{Z}$ et $\mathbb{Q}$, mais ce n'est plus le cas dans $\mathbb{R}$.

Dans le cas d'un exercice où l'on a du mal à avancer, il peut être utile d'essayer de deviner les solutions de l'équation à l'avance pour guider notre réflexion. Souvent cela rapporte même quelques points si le problème est noté. Pour cela, on teste d'abord les fonctions les plus simples : les fonctions constantes, linéaires, affines, etc.

Exercice 5
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x+y) = xf(x) + yf(y)$$

Solution de l'exercice 5
On devine (et par le même temps on vérifie) que la fonction nulle est solution. Montrons que c'est la seule. En posant $y = f(0)$ on a $f(x) = xf(x)$. Autrement dit, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$(x-1)f(x) = 0.$$

Ainsi en substituant x par n'importe quelle valeur différente de 1 on obtient que la fonction est nulle sauf éventuellement en 1. On n'a pas terminé ! en effet il existe encore une infinité de telles fonctions. Montrons que $f(1) = 0$. Par exemple avec $x = y = \frac{1}{2}$ on a

$$f(1) = f\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) + \frac{1}{2}f\left(\frac{1}{2}\right) = 0,$$

car $f\left(\frac{1}{2}\right) = 0$. Donc 0 est la seule fonction solution.

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x)f(y) + f(x + y) = xy$$

Solution de l'exercice 6
En posant $y = 0$, on a $f(x)(f(0) - 1) = 0$. Ainsi soit $f(0) = -1$, soit f est identiquement nulle. Le second cas est impossible, par exemple car on aurait $0 = 1$ en remplaçant $x = y = 1$. Donc $f(0) = -1$. Pour utiliser cette information, on remplace $y = -x = -1$ dans l'équation initiale, qui devient $f(1)f(-1) = 0$. On va traiter les deux cas séparément :

— Cas 1 : $f(1) = 0$. On souhaite annuler le produit $f(x)f(y)$, on pose donc $y = 1$, et on voit qu'il faut remplacer x par $x - 1$ pour obtenir $f(x) = x - 1$.

— Cas 2 : $f(-1) = 0$. De même, en posant $y = -1$ et en remplaçant x par $x + 1$ on a $f(x) = -x - 1$.

On vérifie que ces deux fonctions affines sont solutions.

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x^{666} + y) = f(x^{2023} + 2y) + f(x^{42})$$

Solution de l'exercice 7
Cet exercice est conçu pour faire peur. En réalité il est moins difficile qu'il en a l'air. La philosophie générale étant de simplifier au maximum l'équation, on peut chercher des x, y tels que les valeurs de $x^{666} + y$ et $x^{2023} + 2y$ soient simples, mais cela ne s'annonce pas du tout facile. Mieux, on va essayer de les égaliser, en prenant par example $y = x^{666} - x^{2023}$. Après cette substitution, nous nous retrouvons avec $f(x^{42}) = 0$, ce qui nous dit que f est nulle sur les réels positifs.

Pour conclure, on peut par exemple poser $y = 0$:

$$f(x^{666}) + f(x^{2023}) = f(x^{42}),$$

ce qui par nullité sur les positifs donne $f(x^{2023}) = 0$ d'où f identiquement nulle. Cette fonction est solution, et c'est la seule.

Les exercices suivants n'ont pas été traités en cours. Nous ne donnons que l'idée principale de la solution.

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \mapsto \mathbb{Z}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(x+y) = f(x) + f(y) - 2023$$

Solution de l'exercice 8
Parfois, changer la fonction est aussi utile que de changer ses variables. En posant $g = f - 2023$, on se ramène à l'équation de Cauchy.

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(x) + f(y) = 2f\left(\frac{x+y}{2}\right)$$

Solution de l'exercice 9
Ici encore on aimerait se ramener à l'équation de Cauchy. Pour cela on voit que $f(2x) = 2f(x)$ en posant $x = y$. On peut alors remplacer (x, y) par $(2x, 2y)$.

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \mapsto \mathbb{Q}$ telles que $f(0) = 0$ et pour tous $x, y \in \mathbb{Q}$,

$$f(f(x) + f(y)) = x + y$$

Solution de l'exercice 10
Grâce à $f(0) = 0$ on a $f(f(x)) = x$. Ainsi en appliquant f à l'équation on a

$$f(f(f(x) + f(y))) = f(x) + f(y) = f(x + y),$$

ce qui nous permet d'utiliser l'équation de Cauchy pour conclure.

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \mapsto \mathbb{N}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{N}$,

$$f(f(x)) = x + 1$$

Solution de l'exercice 11
On utilise l'astuce suivante : on peut calculer $f(f(f(x)))$ de deux façons.

— Soit en remplaçant x par $f(x)$ dans l'équation de départ. Ainsi

$$f(f(f(x))) = f(x) + 1.$$

— Soit en appliquant f à l'équation de départ. Ainsi

$$f(f(f(x))) = f(x + 1).$$

On a donc simplfié le problème en

$$f(x + 1) = f(x) + 1,$$

ce qui donne en itérant $f(n) = n + f(0)$. On peut alors réinjecter cela dans l'équation de départ et se convaincre qu'elle n'a pas de solutions.

4 Angle tangent (Vincent)

Théorèmes

Ce cours est largement inspiré du cours qu'a donné Lucie Wang au stage olympique de l'été 2016, et disponible ici.

Il est centré sur la caractérisation des points cocycliques et de la tangente à un cercle en fonction d'égalités angulaires. Cette caractérisation s'exprime plus naturellement en utilisant la notion d'*angles de droites*, que l'on définit donc tout de suite.

Définition 1.
On définit l'*angle orienté* entre les droites d et δ, que l'on note (d, δ), de la façon suivante :

- si d et δ sont des droites parallèles ou confondues, on pose $(d, \delta) = 0°$;
- si d et δ sont sécantes en un point O, soit A un point situé sur d et B un point situé sur δ, autres que O ; on pose $(d, \delta) = \widehat{AOB}$.

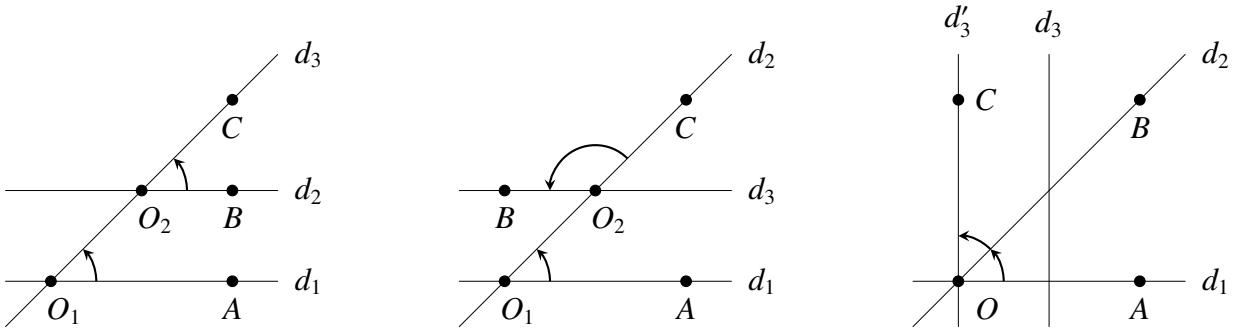
Cet angle est un angle orienté, et il est défini modulo 180°, ce qui lui permet de ne pas dépendre du choix de A et de B.

Dans ce cadre, une première propriété remarquable est la *relation de Chasles*, définie ci-dessous.

Théorème 2.
Soit d_1, d_2 et d_3 trois droites. On a :

$$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) = (d_1, d_3).$$

Démonstration. On distingue plusieurs cas :



- Si d_1, d_2 et d_3 sont parallèles, $(d_1, d_2) + (d_2, d_3) = 0° + 0° = 0° = (d_1, d_3)$.
- Si d_1 et d_2 (mais pas d_3) sont parallèles,

  $$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) = 0° + \widehat{BO_2C} = \widehat{AO_1C} = (d_1, d_3).$$

  Le cas où d_2 et d_3 sont parallèles (mais pas d_1) se traite de la même manière.
- Si d_1 et d_3 (mais pas d_2) sont parallèles,

  $$(d_1, d_2) + (d_2, d_3) = \widehat{AO_1C} + \widehat{CO_2B} = 180° = 0° = (d_1, d_3).$$

- Si d_1, d_2 et d_3 sont sécantes deux à deux, soit d_3' la droite parallèle à d_3 passant par O :

$$\begin{aligned}(d_1,d_2)+(d_2,d_3) &= (d_1,d_2)+(d_2,d_3)+(d_3,d_3') = (d_1,d_2)+(d_2,d_3')\\ &= \widehat{AOB}+\widehat{BOC}\\ &= (d_1,d_3') = (d_1,d_3')+(d_3',d_3) = (d_1,d_3).\end{aligned}$$

L'égalité désirée est donc valide dans chaque cas. □

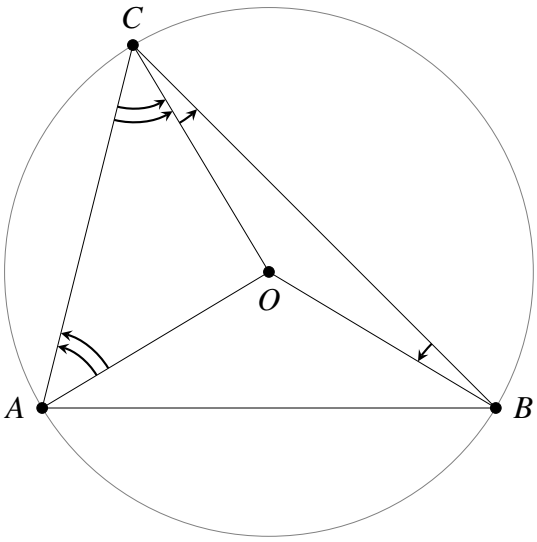
Au vu de la relation de Chasles, on pourra aussi, si on le souhaite, noter $(\delta)-(d)$ l'angle (d,δ) ; de même que l'on peut noter $B-A$ un vecteur $\overrightarrow{AB}$. En effet, avec cette nouvelle notation, la relation de Chasles se réécrit comme

$$(d_2)-(d_1)+(d_3)-(d_2) = (d_3)-(d_1),$$

ce qui est visuellement assez naturel.

Théorème 3.
Soit ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. On a :

$$(OA,OB) = 2(CA,CB).$$



Démonstration. Puisque les triangles BCO et CAO sont isocèles en O, on dispose des égalités d'angles de droites $(BO,BC) = (CB,CO)$ et $(CO,CA) = (AC,AO)$. On en déduit que

$$\begin{aligned}2(CA,CB) &= (CA,CO)+(CO,CB)+(CA,CB)\\ &= (OA,AC)+(BC,BO)+(CA,CB)\\ &= (OA,OB),\end{aligned}$$

ce qui constitue l'égalité désirée. □

Attention : La réciproque est bien sûr fausse, puisque l'ensemble des points X vérifiant l'égalité $(XA,XB) = 2(CA,CB)$ est un cercle. Plus précisément, il s'agit du cercle circonscrit au triangle ABO. Il contient donc bien d'autres points que le point O lui-même !

Théorème 4.
Quatre points A, B, C et D deux à deux distincts sont cocycliques ou alignés si et seulement si l'égalité d'angles de droites

$$(CA, CB) = (DA, DB)$$

est vérifiée.

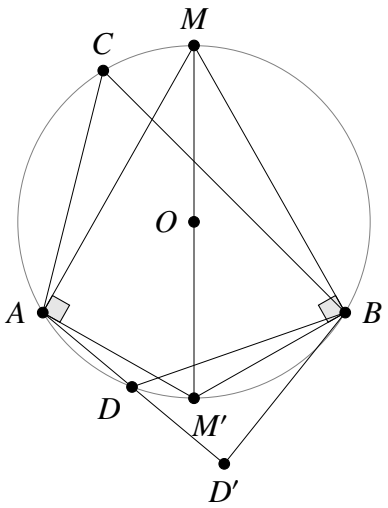
Démonstration. En général, l'égalité $(CA, CB) = (DA, DB)$ peut se réécrire comme

$$(CB) + (DA) = (DB) + (CA).$$

La validité de cette dernière égalité est alors manifestement invariante si l'on échange A avec B; ou bien si l'on échange C avec D; ou encore si l'on échange A avec C d'une part, et B avec D d'autre part.

On traite tout d'abord le cas où trois de nos points sont alignés. S'il s'agit des points A, B et C, les droites (CA) et (CB) sont confondues, donc $(CA, CB) = 0°$. L'égalité $(CA, CB) = (DA, DB)$ est donc réalisée si et seulement si les droites (DA) et (DB) sont confondues, c'est-à-dire si D est aligné avec A et B, donc avec D également.

Quitte à échanger C avec D, la situation reste inchangée si A, B et D sont alignés. De même, quitte à échanger A avec C et B avec D, la situation reste inchangée si A, C et D sont alignés, ou bien si B, C et D sont alignés. En conclusion, dès que trois de nos quatre points sont alignés, l'égalité $(CA, CB) = (DA, DB)$ est vérifiée si et seulement si les quatre points sont alignés.



On suppose donc désormais que trois de nos quatre points ne sont jamais alignés. Dans ces conditions, soit Γ le cercle circonscrit à ABC, et O son centre. En outre soit M et M' les milieux des deux arcs de cercle de Γ d'extrémités A et B. Ces points sont diamétralement opposés, donc

$$\begin{aligned}(MA, MB) &= (MA, AM') + (M'A, M'B) + (M'B, MB)\\ &= 90° + (M'A, M'B) + 90°\\ &= (M'A, M'B).\end{aligned}$$

Soit maintenant X un point situé sur l'un de ces deux arcs de cercle, disons celui qui passe par M. Le théorème de l'angle au centre indique que $2(MA, MB) = (OA, OB) = 2(XA, XB)$.

Ainsi, (XA, XB) est égal à (MA, MB) ou à $(MA, MB) + 90°$. Or, lorsque X se déplace sur cet arc de cercle, l'angle (XA, XB) varie continûment. Cela empêche donc d'observer un « saut » de 90°, et $(XA, XB) = (MA, MB)$. Si X appartient à l'autre arc de cercle, on observe de même que $(XA, XB) = (M'A, M'B) = (MA, MB)$.

En particulier, si A, B, C et D sont cocycliques,

$$(CA, CB) = (MA, MB) = (DA, DB).$$

Réciproquement, soit D' un point n'appartenant ni à Γ, ni à la droite (AB), et soit D le point d'intersection, autre que A, entre (AD') et Γ. Les droites (BD) et (BD') ne sont pas parallèles, donc

$$(D'A, D'B) = (DA, DB) + (DB, D'B) \neq (DA, DB) = (CA, CB),$$

ce qui conclut. □

Corollaire 5.
Soit A et A' deux points distincts. Le cercle de diamètre $[AA']$ est formé des points X pour lesquels $(XA, XA') = 90°$.

Démonstration. Soit Γ le cercle de diamètre $[AA']$, soit O le centre de Γ, et soit B un point de Γ situé sur la médiatrice de $[AA']$. Puisque $2(BA, BA') = (OA, OA') = 0°$ modulo 180°, on sait que (BA, BA') vaut 0° ou 90°.

Le premier cas est impossible, car les points A, A' et B ne sont pas alignés. On est donc dans le second cas. Mais alors Γ est formé des points X pour lesquels $(XA, XA') = (BA, BA') = 90°$. □

Théorème 6.
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, et soit t une droite passant par A. Cette droite est tangente à Γ si et seulement si

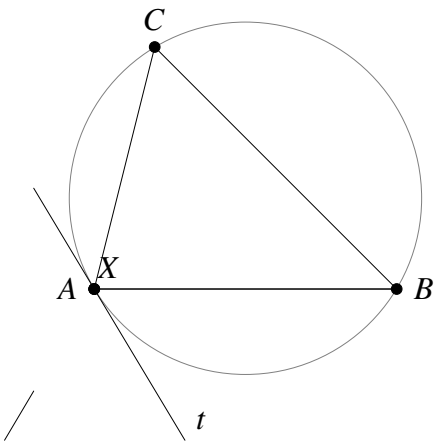
$$(CA, CB) = (t, AB).$$

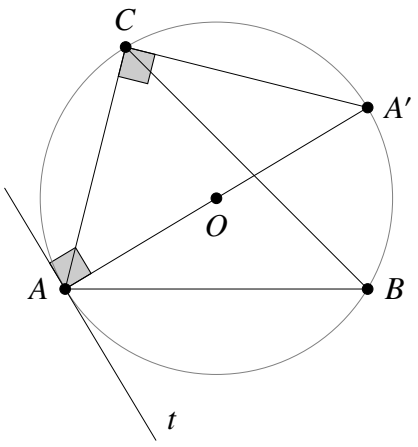
Démonstration. Supposons tout d'abord que t soit tangente à Γ, et soit X un point de Γ, que l'on fait varier librement. En faisant tendre X vers A, les angles (t, XA) et (XB, AB) tendent vers 0, de sorte que

$$(t, AB) = (t, XA) + (XA, XB) + (XB, AB) = (t, XA) + (CA, CB) + (XB, AB)$$

tend vers (CA, CB), et donc que $(t, AB) = (CA, CB)$.

Réciproquement, si t' est une droite passant par A et pour laquelle $(CA, CB) = (t', AB)$, on constate que $(t', t) = (t', AB) - (t, AB) = 0°$. Puisque les droites t et t' passent toutes deux par A, elles sont en fait confondues ! □





Démonstration alternative. Soit O le centre de Γ et soit A' le symétrique de A par rapport à O. Si t est tangente à Γ, elle est perpendiculaire à (AO), c'est-à-dire à (AA'). On en déduit que

$$(t, AB) = (t, AA') + (AA', AB) = 90^\circ + (CA', CB) = (CA, CA') + (CA', CB) = (CA, CB).$$

Réciproquement, on montre comme précédemment que la seule droite t' passant par A et telle que $(t, AB) = (CA, CB)$ est la tangente à Γ en A. □

Exercices divers

Exercice 1
Soit ABC un triangle, soit Γ son cercle circonscrit, et soit S le milieu de l'arc de cercle d'extrémités B et C ne contenant pas A. Démontrer que la droite (AS) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Remarque : Le point S est appelé *pôle Sud* de ABC issu de A. Le point N, défini comme le milieu de l'arc de cercle d'extrémités B et C *contenant* A, est appelé *pôle Nord* de ABC issu de A.

Exercice 2
Soit ABC un triangle, soit Γ son cercle circonscrit, et soit S le milieu de l'arc de cercle d'extrémités B et C ne contenant pas A. Démontrer que la tangente à Γ passant par S est parallèle à la droite (BC).

Exercice 3
Soit ABC un triangle, soit Γ son cercle circonscrit, et soit X le pied de la bissectrice de ABC issue de A. Enfin, soit Y le point d'intersection entre la droite (BC) et la tangente à Γ en A. Démontrer que le triangle AXY est isocèle en Y.

Exercice 4
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles tangents extérieurement l'un à l'autre, en un point T. Une tangente commune à ces deux cercles, ne passant pas par T, touche Γ_1 en un point P et Γ_2 en un point Q. Démontrer que le triangle PTQ est rectangle en T.

Exercice 5
Soit Γ_1, Γ_2, Γ_3 et Γ_4 quatre cercles d'intérieurs deux à deux disjoints. On suppose que Γ_1 et Γ_2 sont tangents en un point A ; que Γ_2 et Γ_3 sont tangents en un point B ; que Γ_3 et Γ_4 sont tangents en un point C ; et que Γ_4 et Γ_1 sont tangents en un point D. Démontrer que les points A, B, C et D sont cocycliques.

Exercice 6
Soit A, B, C et D quatre points situés sur un même cercle Γ, de sorte que les cordes (AB) et (CD) se coupent en un point E. Soit P un point situé sur la droite (BE). Enfin, on suppose que la tangente en E au cercle circonscrit à DEP coupe la droite (AC) en un point F. Démontrer que $(FE, FC) = (DB, DP)$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, Γ son cercle circonscrit, et H son orthocentre. Soit A' le symétrique de H par rapport au côté (BC) ; B' le symétrique de H par rapport à (CA) ; C' le symétrique de H par rapport à (AB). Démontrer que les trois points A', B' et C' appartiennent à Γ.

Exercice 8
Soit ABC un triangle, et H son orthocentre. On note H_A le pied de la hauteur de ABC issue de A, M_A le milieu du côté $[BC]$, et N_A le milieu du segment $[HA]$. On définit les points H_B, H_C, M_B, M_C, N_B et N_C de manière analogue. Démontrer que les neuf points ainsi définis appartiennent tous à un même cercle.

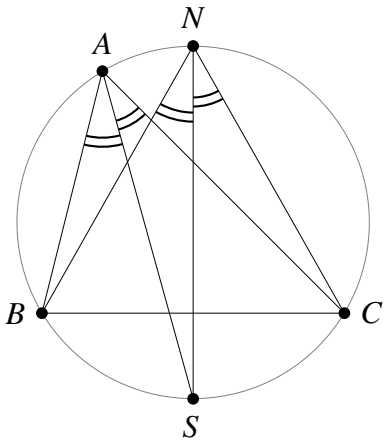
Remarque : Ce cercle est connu sous les noms de *cercle des neuf points* et de *cercle d'Euler*.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Soit N le milieu de l'arc de cercle d'extrémités B et C *contenant* A. Les deux points S et N sont équidistants de B et de C. La droite (SN) est donc la médiatrice de $[BC]$. On en déduit que

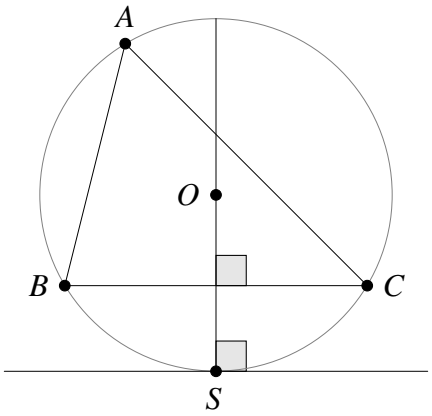
$$(AB, AS) = (NB, NS) = (NS, NC) = (AS, AC),$$

ce qui signifie que (AS) est l'une des bissectrices intérieure ou extérieure de $\widehat{BAC}$. Puisque la droite (AS) coupe le segment $[BC]$, il s'agit de la bissectrice intérieure, c'est-à-dire de *la* bissectrice de $\widehat{BAC}$.



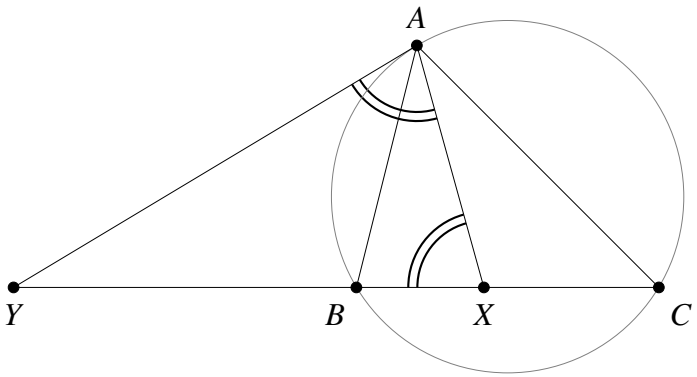
Remarque : La droite (AN) est en fait la bissectrice extérieure de $\widehat{BAC}$. Les points équidistants des droites (AB) et (AC) sont précisément les points appartenant à l'une des deux droites (AS) et/ou (AN).

Solution de l'exercice 2
Soit O le centre de Γ. Les deux points O et S sont équidistants de B et de C. La droite (OS) est donc la médiatrice de $[BC]$. Dans ces conditions, la droite (BC) et la tangente mentionnée dans l'énoncé sont toutes deux perpendiculaires à (OS) ; elles sont donc parallèles l'une à l'autre.



Solution de l'exercice 3
Il suffit de vérifier que

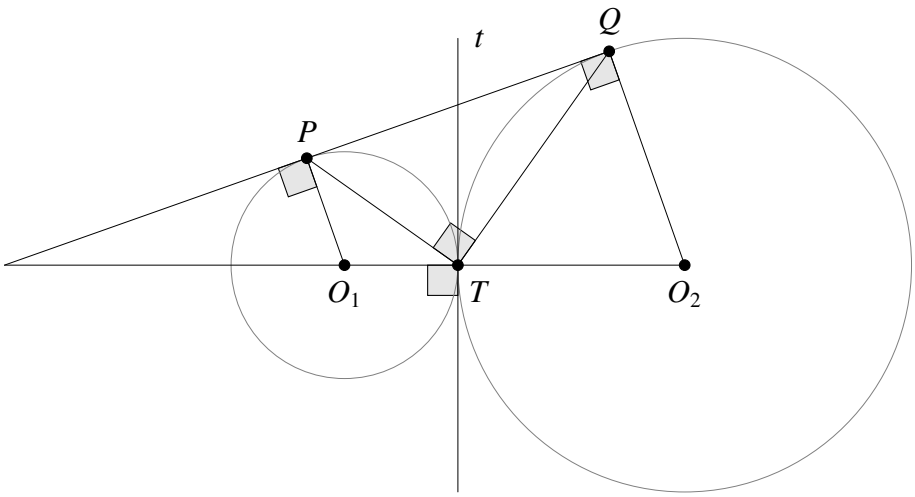
$$\begin{aligned}(AX, AY) - (XY, XA) &= (AX, AB) + (AB, AY) + (AX, AB) + (AB, XY)\\ &= (AC, AX) + (AB, AY) + (AX, AB) + (AB, BC)\\ &= (AC, AX) + (CB, CA) + (AX, AB) + (AB, BC)\\ &= 0°.\end{aligned}$$



Solution de l'exercice 4
Soit t la tangente commune aux cercles Γ_1 et Γ_2 en T. Puisque les deux droites (O_1P) et (O_2Q) sont perpendiculaires à leur tangente commune (PQ), elles sont parallèles. En outre, les droites (O_1T) et (O_2T) sont confondues. On en déduit que

$$2(TP, TQ) = 2(TP, t) + 2(t, TQ) = (O_1P, O_1T) + (O_2T, O_2Q) = (O_1P, O_2Q) = 0°.$$

Cela signifie que l'angle $\widehat{PTQ}$ est soit droit, soit nul. Comme la droite (PQ) ne passe pas par T, cet angle n'est pas nul ; il est donc droit.

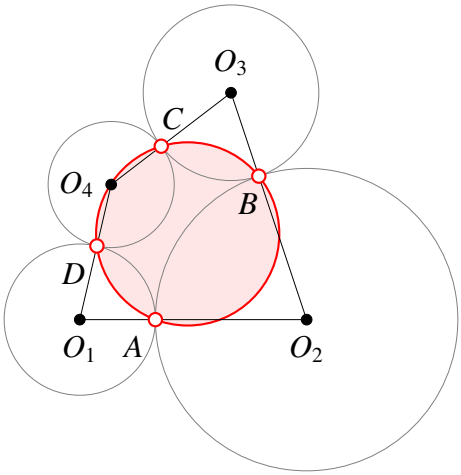


Solution de l'exercice 5

Une fois n'est pas coutume, on va utiliser des vrais angles orientés plutôt que des angles de droite, ce qui nous simplifiera la vie. Soit X un point situé sur la tangente à Γ_1 et Γ_2 en A, à l'intérieur du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$. On vérifie que

$$2\widehat{BAD} = 2\widehat{BAX} + 2\widehat{XAD} = \widehat{BO_2A} + \widehat{AO_1D} = \widehat{O_3O_2O_1} + \widehat{O_2O_1O_4}.$$

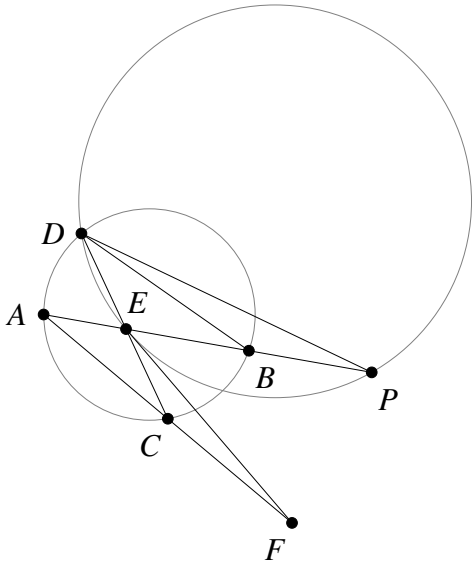
On vérifie de même que $2\widehat{DCB} = \widehat{O_1O_4O_3} + \widehat{O_4O_3O_2}$. Or, la somme des quatre angles du quadrilatère $O_1O_2O_3O_4$ vaut 360°. On en conclut que $\widehat{BAD} + \widehat{DCB} = 180°$, ce qui signifie que les points A, B, C, D sont cocycliques dans cet ordre.



Solution de l'exercice 6

Il suffit ici d'éliminer dès que possible le point F, ce qui revient en fait à observer que

$$\begin{aligned}(FE, FC) &= (EF, EP) + (EP, FC)\\ &= (DE, DP) + (AB, AC)\\ &= (DC, DP) + (DB, DC)\\ &= (DB, DP).\end{aligned}$$

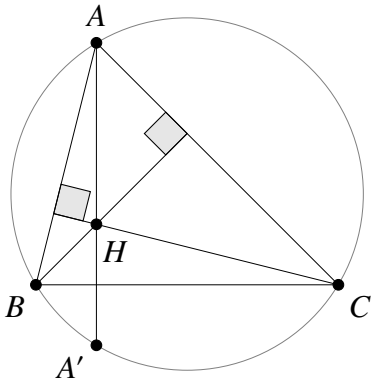


Solution de l'exercice 7

On commence par démontrer que A' appartient à Γ. Pour ce faire, il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned}(A'B, A'C) &= (HC, HB)\\ &= (HC, AB) + (AB, BC) + (BC, HB)\\ &= 90^\circ + (AB, BC) + 90^\circ\\ &= (AB, BC).\end{aligned}$$

On conclut alors en remarquant que, puisque les points A', B' et C' jouent des rôles symétriques, ils appartiennent tous trois à Γ.



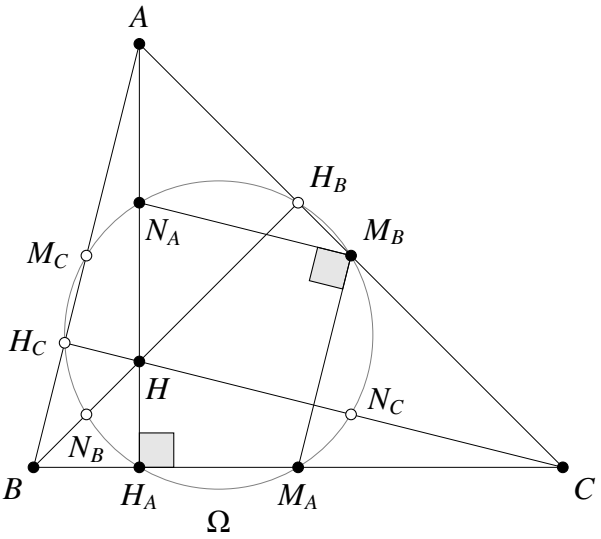
Solution de l'exercice 8

Puisque l'angle $\widehat{N_AH_AM_A}$ est droit, on souhaite démontrer que nos neuf points appartiennent au cercle Ω de diamètre $[N_AM_A]$. Pour ce faire, on observe tout d'abord que (N_AM_B) et (M_BM_A) sont des droites des milieux des triangles ACH et ABC, de sorte que

$$(M_BN_A, M_BM_A) = (CH, AB) = 90^\circ.$$

Ainsi, l'angle $\widehat{N_AM_BM_A}$ est droit, et M_B appartient à Ω. On démontre de même que M_C appartient à Ω, qui est donc le cercle circonscrit à $M_AM_BM_C$.

Mais alors Ω peut être redéfini symétriquement en les trois points A, B et C ; puisqu'il contient N_A et H_A, on en conclut comme souhaité qu'il contient également les points N_B, H_B, N_C et H_C.



Remarque : Il existe de multiples manières alternatives de démontrer ce résultat. La plus commune consiste à considérer l'homothétie de centre H et de rapport $1/2$, qui envoie A sur N_A, A' sur H_A, et le cercle Γ sur le cercle Ω.

5 Triangles semblables (Baptiste)

Cette séance reprend les exercices données par Anna et Martin au stage de Valbonne 2021 et de Alexander au stage Valbonne 2022. Les exercices donnés lors de la séance sont corrigés dans ces polycopiés là.

6 Inégalités (Gaspard D.)

L'objectif de la séance était de découvrir les manipulations d'inégalités ainsi que les principaux théorèmes qui y sont associés, à savoir l'inégalité arithmético-géométrique ainsi que l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Axiomes sur les manipulations d'inégalités

On présente ici les manipulations de base des inégalités qui nous permetterons par la suite d'aborder des problèmes plus difficiles. Parmi les propositions suivantes, les variables a, b, c, d sont réelles.

i/ Si $a \geqslant b$ et $b \geqslant c$ alors $a \geqslant b \geqslant c$ (transitivité)

ii/ Si $a \geqslant b$ alors $x + a \geqslant x + b$, $\forall x \in \mathbb{R}$

iii/ Si $a \geqslant b$ alors $xa \geqslant xb$, $\forall x \in \mathbb{R}^+$ et $xa \leqslant xb$, $\forall x \in \mathbb{R}^-$

iv/ Si $a \geqslant b$ et $c \geqslant d$ alors $a + c \geqslant b + d$ et $ac \geqslant bd$ (la dernière inégalité n'est valable que si a, b, c, d sont des réels de même signe)

v/ $x^2 \geqslant 0 \ \forall x \in \mathbb{R}$

On insiste particulièrement sur l'importance de la denière assertion.
Dans tous les exercices de ce cours, toutes les variables sont supposées réelles et positives, sauf mention contraire.

Exercice 1
Montrer que $a^2 + b^2 \geqslant 2ab$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 2
Soit $x > 0$. Montrer que $x + \dfrac{1}{x} \geqslant 2$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 3
Montrer que $5x^2 + y^2 + 1 \geqslant 4xy + 2x$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 4 (Lemme du tourniquet)
Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Trouver les cas d'égalité.

Inégalité arithmético-géométrique

On présente ici un théorème fondamental permettant de comparer sommes et produits.

Théorème 1 (Inégalité Arithémtico-Géométrique)**.**
Soient $a_1, ..., a_n$ des réels positifs. On a $\dfrac{a_1 + ... + a_n}{n} \geqslant \sqrt[n]{a_1...a_n}$ avec égalité si et seulement si $a_1 = ... = a_n$.

Exercice 5
Soient $a_1, ...a_n$ des réels positifs de produit 1. Montrer que $(1 + a_1)...(1 + a_n) \geqslant 2^n$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 6
Soient a, b, c tels que $(a + 1)(b + 1)(c + 1) = 8$, montrer que $a + b + c \geqslant 3$ et $abc \leqslant 1$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 7 (Inégalité géométrico-harmonique)
On définit la moyenne harmonique h de n réels strictement positifs $a_1, ..., a_n$ par $\dfrac{n}{\frac{1}{a_1} + ... + \frac{1}{a_n}}$.
Montrer que la moyenne harmonique de n réels positifs est toujours inférieure ou égale à leur moyenne géométrique. Trouver le cas d'égalité.

Exercice 8 (JBMO SL 2014)
Soient a, b, c tels que $abc = \dfrac{1}{8}$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2 \geqslant \dfrac{15}{16}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 9
Montrer que $\left(1 + \dfrac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \dfrac{b}{a}\right)^n \geqslant 2^{n+1}$ pour tout n naturel.

Inégalité de Cauchy-Schwarz

Ce résultat essentiel en inégalité permet de comparer le carré d'une somme à une somme de carrés.

Théorème 2 (Inégalité de Cauchy-Schwarz)**.**
Soit n un entier naturel, soient $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ des réels quelconques. Alors on a $(a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2 \leqslant (a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2)$. Le cas d'égalité survient lorsque les vecteurs $(a_1, .., a_n)$ et $(b_1, ..., b_n)$ sont proportionnels, c'est à dire lorsqu'il existe un réel $\lambda \in \mathbb{R}$ tel que $a_i = \lambda b_i$ $\forall i \in [\![1; n]\!]$.

Démonstration. Soient i et j des entiers entre 1 et n. On sait que $a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 > 2a_ib_ia_jb_j$ d'après l'inégalité arithmético-géométrique. Fixons j et sommons les inégalités pour toutes les valeurs de i possibles : on obtient que $(a_1^2 + ... + a_n^2)b_j^2 + a_j^2(b_1^2 + ... + b_n^2) > 2a_jb_j(a_1b_1 + ... + a_nb_n)$. Sommons ensuite sur toutes les valeurs de j entre 1 et n : on obtient que $(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1 + ... + b_n^2) + (a_1^2 + \ + a_n^2)(b_1^2 + \ + b_n^2) > 2(a_1b_1 + ... + a_nb_n)(a_1b_1 + \ + a_nb_n)$.En particulier, en simplifiant par 2, $(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) > (a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2$. Intéressons nous au cas d'égalité : supposons qu'on a égalité. Dans ce cas, on a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique utilisée c'est-à-dire dans $a_i^2b_j^2 + a_j^2b_i^2 > 2a_ib_ia_jb_j$. Ainsi on a nécessairement $a_ib_j = a_jb_i$ pour tout (i, j) entiers entre 1 et n. Supposons qu'il existe i tel que b_i soit non nul. Dans ce cas, pourtout j entre 1 et n, $a_j = a_ib_ib_j$. En particulier pour $\lambda = a_ib_i$ on a bien $a_j = \lambda b_j$ pour tout entier j entre 1 et n. Réciproquement, soit tous les b_i sont nuls, et dans ce cas $(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) = 0 = (a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2$,soit il existe λ réel tel que $a_j = \lambda b_j$ pour tout entier j entre 1 et n, et dans ce cas $(a_1^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + ... + b_n^2) = \lambda^2(b_1^2 + ... + b_n^2)^2 = (a_1b_1 + ... + a_nb_n)^2$. □

Exercice 10
Soient a, b, c, d tels que $a + 3b + 5c + 7d = 14$. Trouver la valeur minimale de $a^2 + b^2 + c^2 + d^2$ et préciser pour quel quadruplet (a, b, c, d) cette valeur est atteinte.

Exercice 11 (Inégalité des mauvais élèves)

Soient $a_1, ..., a_n$ et $b_1, ..., b_n$ des réels positifs non nuls. Montrer que l'on a $\frac{a_1^2}{b_1} + ... + \frac{a_n^2}{b_n} \geqslant \frac{(a_1 + ... + a_n)^2}{b_1 + ... + b_n}$.

Exercice 12 (Inégalité arithmético-quadratique)

On définit la moyenne quadratique de $a_1, ..., a_n$ par $\sqrt{\frac{a_1^2 + ... + a_n^2}{n}}$. Montrer que la moyenne quadratique est toujours supérieure à la moyenne arithmétique. Trouver les cas d'égalité.

Solution des exercices

Solution de l'exercice 1
On a $a^2 + b^2 \geqslant 2ab \iff a^2 - 2ab + b^2 \geqslant 0 \iff (a - b)^2 \geqslant 0$ ce qui est vrai car un carré est toujours positif. Le cas d'égalité est obtenu lorsque $(a - b)^2 = 0$ c'est à dire lorsque $a = b$. Réciproquemenent on a bien $a^2 + a^2 = 2a \cdot a$

Solution de l'exercice 2

On a $x+\frac{1}{x} \geqslant 2 \Longleftarrow x^2+1 \geqslant 2x$ ce qui est vrai d'après l'exercie précedent appliqué à x et à 1. Le cas d'égalité est donc obtenu lorsque $x=1$. Réciproquement on a bien $1+\frac{1}{1}=2$

Solution de l'exercice 3

Regardons le terme de droite. En voyant un facteur $2x$, on pense à utiliser que $2x \leqslant x^2+1$. Il suffit ensuite de prouver que $4xy \leqslant 4x^2+y^2$. Or, on remarque que $4x^2+y^2=(2x)^2+y^2 \geqslant 2\times(2x)\times y = 4xy$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans les deux inégalités précédentes. Comme on a égalité dans $2x \leqslant x^2+1$, $x=1$. Comme on a égalité dans $2\times(2x)y \leqslant (2x)^2+y^2$, on sait que $y=2x=2$. Réciproquement, si $(x,y)=(1,2)$, alors $5x^2+y^2+1=10=4xy+2x$.

Solution de l'exercice 4

L'idée est ici de majorer chacun des termes ab, bc et ac en faisant apparaître des carrés. On utilise donc le résultat de l'exercice 1 pour avoir $ab \leqslant \frac{a^2}{2}+\frac{b^2}{2}$. On a donc également $bc \leqslant \frac{b^2}{2}+\frac{c^2}{2}$ et $ac \leqslant \frac{a^2}{2}+\frac{c^2}{2}$. On peut sommer ces trois inégalités pour avoir finalement $a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+bc+ca$. On a égalité lorsque toutes les conditions d'égalité des inégalité utilisées sont satisfaites. C'est à dire lorsque $a=b=c$. Réciproquement si $a=b=c$ on a bien $ab+bc+ca=a^2+b^2+c^2$.

Solution de l'exercice 5

Par inégalité airthmético-géométrique, pour tout i entre 1 et n, $1+a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$. En particulier, $(1+a_1)\dots(1+a_n) \geqslant 2\sqrt{a_1}\times 2\sqrt{a_2}\dots 2\sqrt{a_n} = 2^n\sqrt{a_1\dots a_n} = 2^n$. Supposons qu'on a égalité, dans ce cas pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on a égalité dans l'inégalité $1+a_i \geqslant 2\sqrt{a_i}$, donc $a_i=1$. Réciproquement, si $a_1=\dots=a_n=1$, alors $a_1\dots a_n=1$ et $(1+a_1)\dots(1+a_n)=2\times\dots\times 2=2^n$

Solution de l'exercice 6

On utilise l'inégalité arithmético-géométrique sur $a+1$, $b+1$, $c+1$: on constate alors que $2=\sqrt[3]{(a+1)(b+1)(c+1)} \leqslant \frac{a+1+b+1+c+1}{3}=\frac{a+b+c}{3}+1$, donc $\frac{a+b+c}{3} \geqslant 1$, donc $a+b+c \geqslant 3$. On a donc $1=\frac{3}{3}=\frac{a+b+c}{3} \geqslant \sqrt[3]{abc}$ donc $\sqrt[3]{abc} \leqslant 1 \Longleftrightarrow abc \leqslant 1$. Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique. Ainsi, $a+1=b+1=c+1$, donc $a=b=c$. Comme $(a+1)(b+1)(c+1)=(a+1)^3=8$, on a $a+1=2$, donc $a=b=c=1$. Réciproquement, si $a=b=c=1$, alors on a bien $(a+1)(b+1)(c+1)=8$ ainsi que$a+b+c=3$ et $abc=1$.

Solution de l'exercice 7

On souhaite majorer la moyenne arithmétique. Une idée est de minorer le dénominateur de la fraction à l'aide de l'inégalité arithmético-géométrique. On a en effet $\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n} \geqslant n\sqrt[n]{\frac{1}{a_1\dots a_n}}=\frac{n}{\sqrt[n]{a_1\dots a_n}}$. Donc $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}} \leqslant \frac{n}{n\cdot\frac{1}{\sqrt[n]{a_1\dots a_n}}}=\sqrt[n]{a_1\dots a_n}$ qui est bien la moyenne géométrique de $a_1,\dots,a_n$. Le cas d'égalité survient lorsque $\frac{1}{a_1}=\dots=\frac{1}{a_n}$ donc lorsque $a_1=\dots=a_n$. Réciproquement si $a_1=\dots=a_n$ on a bien $\frac{n}{\frac{1}{a_1}+\dots+\frac{1}{a_n}}=\frac{n}{\frac{n}{a_1}}=a_1$ et $\sqrt[n]{a_1\dots a_n}=\sqrt[n]{a_1^n}=a_1$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8

On est tenté d'utiliser directement une inégalité arithmético-géométrique sur les 6 termes. Mais si on regarde attentivement, on peut voir qu'on a l'égalité pour $a = b = c = \frac{1}{2}$, et que dans ce cas $a^2 = \frac{1}{4}$ et $a^2b^2 = \frac{1}{16}$. On ne pourra pas avoir égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, et on ne peut donc utiliser directement l'inégalité arithmético-géométrique. Par contre, on a bien $a^2 = b^2 = c^2$ et $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$. On a va donc faire séparément une inégalité arithmético-géométrique sur les deux triplets de termes. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3(\sqrt[3]{abc})^2 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^2 = 3\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3(\sqrt[3]{abc})^4 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^4 = 3\frac{1}{2^4} = \frac{3}{16}$. Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 \geqslant \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Dans ce cas, comme on a égalité dans $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, on a $a^2 = b^2 = c^2$ donc $a = b = c$. Comme $a^3 = abc = \frac{1}{8}$, $a = b = c = \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $a = b = c = \frac{1}{2}$, alors $a^2+b^2+c^2+a^2b^2+a^2c^2+c^2b^2 = 3(a^2+a^4) = 3(\frac{1}{4}+\frac{1}{16}) = 3\frac{5}{16} = \frac{15}{16}$.

Solution de l'exercice 9

Il existe plusieurs solutions à cet exercice, nous en présenterons une classique. L'idée est de se débarraser des sommes à la puissance n car il est difficile de les manier algébriquement. Il serait plus pratique de les transformer en produit qui se comporte bien mieux avec la puissance. Quoi de mieux comme outil que l'inégalité arithmético-géométrique pour transformer une somme en produit ! On a donc $\left(1 + \frac{a}{b}\right)^n + \left(1 + \frac{b}{a}\right)^n \geqslant \left(2\sqrt{\frac{a}{b}}\right)^n + \left(2\sqrt{\frac{b}{a}}\right)^n = 2^n\left(\sqrt{\frac{a}{b}}^n + \sqrt{\frac{b}{a}}^n\right)$. On peut on reconnait l'inégalité classique $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ dans la parenthèse et on a $2^n\left(\sqrt{\frac{a}{b}}^n + \sqrt{\frac{b}{a}}^n\right) \geqslant 2^n \cdot 2 = 2^{n+1}$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10

L'idée est ici d'utiliser l'inégalité de Cauchy-Schwarz pour faire apparaître une somme de carrés puis de se débarasser des coefficients devant a, b, c, d à l'aide du calcul. Pour utiliser Cauchy-Schwarz il faut avant tout mettre notre égalité au carré. On a donc $(a+3b+5c+7d)^2 = 14^2 = 196$. Et $196 = (a + 3b + 5c + 7d)^2 \leqslant (a^2 + b^2 + c^2 + d^2)(1^2 + 3^2 + 5^2 + 7^2) = 84(a^2 + b^2 + c^2 + d^2)$ donc $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 \geqslant \frac{196}{84} = \frac{7}{3}$. Il ne reste plus qu'à vérifier que cette borne inférieure est atteinte. Le cas de l'inégalité de Cauchy-Schwarz est atteint lorsque $\frac{a}{1} = \frac{b}{3} = \frac{c}{5} = \frac{d}{7}$. Or on a $a + 3b + 5c + 7d = 14$ donc $14 = a + 9a + 25a + 49a = 84a$ donc $a = \frac{14}{84} = \frac{1}{6}$ et on trouve que $b = \frac{1}{2}$ ainsi que $c = \frac{5}{6}$ et $\frac{7}{6}$. Le quadruplet permettant d'atteindre ce minimum est donc $\left(\frac{1}{6}, \frac{1}{2}, \frac{5}{6}, \frac{7}{6}\right)$. Réciproquement on a bien $a + 3b + 5c + 7d = \frac{84}{6} = 14$ ainsi que $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = \frac{84}{36} = \frac{7}{2}$ ce qui

conclut.

Solution de l'exercice 11

Cette inégalité ressemble fortement à l'inégalité de Cauchy-Schwarz car on demande de comparer une somme de carrés au carré d'une somme. L'idée va donc être de bien choisir nos coefficients dans Cauchy-Schwarz afin d'obtenir l'inégalité voulue. On a :

$$\left(\frac{a_1^2}{b_1}+\ldots+\frac{a_n^2}{b_n}\right)\left(b_1+\ldots+b_n\right)=\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\right)\left(\sqrt{b_1}^2+\ldots+\sqrt{b_n}^2\right)$$

Et d'après Cauchy-Schwarz on a :

$$\begin{aligned}\left(\left(\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}\right)^2+\ldots+\left(\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\right)\left(\sqrt{b_1}^2+\ldots+\sqrt{b_n}^2\right) &\geqslant \left(\sqrt{b_1}\cdot\frac{a_1}{\sqrt{b_1}}+\ldots+\sqrt{b_n}\cdot\frac{a_n}{\sqrt{b_n}}\right)^2\\ &= (a_1+\ldots+a_n)^2.\end{aligned}$$

Ainsi on a donc bien $\dfrac{a_1^2}{b_1}+\ldots+\dfrac{a_n^2}{b_n}\geqslant\dfrac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{b_1+\ldots+b_n}$

Solution de l'exercice 12

On cherche à démontrer que $\sqrt{\dfrac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}\geqslant\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$. On utilise Cauchy-Schwarz sur la somme de carré pour obtenir : $a_1^2+\ldots+a_n^2=\dfrac{1}{n}(1+\ldots+1)(a_1^2+\ldots+a_n^2)\geqslant\dfrac{1}{n}(a_1+\ldots+a_n)^2$. On a donc $\sqrt{\dfrac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}\geqslant\sqrt{\dfrac{(a_1+\ldots+a_n)^2}{n^2}}=\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}$ ce qui conclut. On a égalité lorsque $\dfrac{a_1}{1}=\ldots=\dfrac{a_n}{1}$ donc lorsque $a_1=\ldots=a_n$. Réciproquement, si $a_1=\ldots=a_n$ on a bien $\sqrt{\dfrac{a_1^2+\ldots+a_n^2}{n}}=\sqrt{\dfrac{n}{n}a_1^2}=a_1$ et $\dfrac{a_1+\ldots+a_n}{n}=a_1$ également.

7 Équations fonctionnelles 2 (Rémi & Melvil)

Fonction injective

Définition 1. Une fonction est dite injective si les images par f de deux éléments distincts sont distinctes. Autrement si a et b appartiennent au domaine de définition de f et $a\neq b$, alors $f(a)\neq f(b)$. Tout élément de l'ensemble d'arrivée admet donc au plus un antécédent.

Remarque 2.
Pour montrer qu'une fonction est injective on utilise le plus souvent la contraposée : on montre que si deux éléments a et b vérifient $f(a)=f(b)$, alors $a=b$.

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f:\mathbb{Q}\to\mathbb{Q}$ telles que pour tous rationnels x et y,

$$f(x+f(y))=f(x)+y$$

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(f(x+1)+y-1) = f(x)+y$$

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
On veut se servir de la notion d'injectivité pour résoudre l'équation fonctionnelle. Il est naturel lorsqu'on est en présence d'une variable y à l'extérieur de toutes les parenthèses de poser les substitutions $y = a$ et $y = b$ en supposant $f(a) = f(b)$. En regardant lorsque $x = 0$, on obtient $f(f(a)) = f(0) + a$ et $f(f(b)) = f(0) + b$ donc $f(0) + a = f(0) + b$ et donc $a = b$. Ainsi, on a montré que si deux éléments a et b vérifient $f(a) = f(b)$, alors $a = b$, donc la fonction f est injective. Revenons à l'équation fonctionnelle et voyons comment utiliser le fait que f soit injective. En regardant lorsque $x = 0$, on se ramène à une égalité entre deux f("bidule"), $f(x + f(0)) = f(x)$, puisque que f est injective, $x + f(0) = x$ donc $f(0) = 0$. On regarde désormais l'équation pour $x = 0$, $f(f(y)) = y$ pour tout rationnel y. Dernière étape, on reprend l'équation originale et on pose le changement de variable $y = f(z)$. On obtient alors $f(x+z) = f(x+f(f(z))) = f(x)+f(z)$, ce qui est vrai pour tout x, z rationnels, donc la fonction est solution de l'équation de Cauchy sur les rationnels, il s'agit donc d'une fonction linéraire de la forme $f(x) = ax$. Puisque $f(f(y)) = y = a^2y$, $a = \pm 1$. Donc les seules fonctions pouvant être solutions de l'équation sont les fonctions $f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$, on vérifie facilement qu'elles sont effectivement solutions.

Remarque 3.
Notez bien que lorsqu'on pose $y = f(z)$, il n'y a aucune contrainte sur les valeurs que peut prendre z, en revanche, si la fonction n'est pas surjective, y ne peut pas prendre n'importe quelle valeur.

Solution de l'exercice 2
Montrons que f est injective : soient a, b deux réels tels que $f(a) = f(b)$. Lorsque $x = 0$ et $y = a+1-f(1)$, l'équation devient $f(a) = f(0)+a-1+f(1)$. De même, si $x = 0$ et $y = b+1-f(1)$, on a $f(b) = f(0) + b - 1 + f(1)$ donc $f(0) + a - 1 + f(1) = f(0) + b - 1 + f(1)$ donc $a = b$. On a montré que la fonction f est injective, pour utiliser cette propriété, on pose $y = 0$, alors $f(f(x+1)-1) = f(x)$, or la fonction est injective donc $f(x+1) = x+1 \implies f(z) = z$ pour tout z où l'on a posé le changement de variable $z = x - 1$. On vérifie que la fonction $f : x \mapsto x$ est bien une solution de l'équation.

Remarque 4.
En équation fonctionnelle, montrer qu'une fonction est injective va de paire avec trouver une égalité du style f("*bidule*") = f("*machin*") pour en déduire "*bidule*" = "*machin*".
Il est nécessaire que ce genre d'égalité soient non-triviales pour qu'elles constituent une avancée dans l'exercice, cela implique que "*bidule*" ou "*machin*" doivent contenir des f. Ainsi, les équations fonctionnelles contenant des f imbriquées sont les plus propices à utiliser la notion d'injectivité.
Une idée élémentaire qui marche bien pour obtenir des égalités du style f("*bidule*") =

f(”*machin*”) est de retirer toutes la variables sorties. Dans l'exercice précédent on l'a fait en posant $y = 0$.
Ce genre de raisonnement qui motive les changements de variables est précieux, grâce à eux on gagne du temps en évitant d'essayer 10 substitutions inutiles. Cependant il existera toujours des équations fonctionnelles qui attendront de vous d'essayer plein de substitutions bêtement jusqu'à obtenir les bonnes.

Fonction surjective et bijective

Définition 5. On dit qu'une fonction $f : E \to F$ est surjective si pour tout $t \in F$, s'il existe $a \in E$ tel que $f(a) = t$. Autrement dit, une fonction est surjective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet au moins un antécédent.

Définition 6. Une fonction est dite bijective si elle est à la fois injective et surjective.

Remarque 7.
Une fonction est donc bijective si tout élément de l'ensemble d'arrivée admet un unique antécédent.

Remarque 8.
Pour montrer qu'une fonction est surjective, on essaie généralement de se ramener à une équation du type $f(A) = B$, où A et B sont des expressions qui dépendent d'une variable x. Si B parcourt tout l'ensemble d'arrivée de f quand x parcourt ce même ensemble alors f est surjective.

Exercice 3
Parmi les équations fonctionnelles suivantes, déterminer lesquelles n'admettent que des solutions injectives, surjectives ou bijectives :

1. $f(x + f(y)) = 2f(x) + y$
2. $f(f(x)) = 0$
3. $f(f(x)) = \sin(x)$
4. $f(x + y) = f(x)f(y)$

Solution de l'exercice 3
1. En posant $x = 0$ on obtient $f(f(y)) = 2f(0) + y$. Si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$, donc $2f(0) + a = 2f(0) + b$, d'où $a = b$. Ainsi f est injective. De plus, l'expression $2f(0) + y$ parcourt $\mathbb{R}$ quand y parcourt $\mathbb{R}$, donc f est surjective. Finalement, f est bijective.
2. Supposons par l'absurde que f soit surjective. Alors, pour $y \in \mathbb{R}$, on dispose de x tel que $f(x) = y$. Ainsi $f(y) = f(f(x)) = 0$. Autrement dit, l'image de tout élément par f est 0, donc f n'est pas surjective, absurde. Supposons par l'absurde que f soit injective. Alors si $x \neq y$, alors $f(x) \neq f(y)$. Mais alors $f(f(x)) = f(f(y)) = 0$, donc $f(x)$ et $f(y)$ ont la même image par f, absurde. Finalement, f n'est ni injective, ni surjective.
3. Si $f(0) = f(\pi)$, alors f n'est pas injective. Sinon, $f(f(0)) = \sin(0) = \sin(\pi) = f(f(\pi))$, donc f n'est pas injective. De plus $f \circ f$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, donc n'est pas surjective, mais si f était surjective alors $f \circ f$ le serait aussi, donc f n'est pas surjective.
4. La fonction nulle est solution, donc f n'est ni injective, ni surjective.

Exercices d'application

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(x^2 + f(y)) = 2x - f(y)$$

Exercice 5
Trouver toutes les fontions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y

$$f(f(x) + y) = 2x + f(-f(f(x)) + f(y))$$

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(f(x)f(y)) = f(x)y$$

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(f(x) + f(f(y))) = 2x + f(f(y)) - f(f(x))$$

Exercice 8
Soient deux fonctions $f, g : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ telles que f est surjective, g est injective et telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$f(n) \geqslant g(n)$$

Montrer que $f(n) = g(n)$

Exercice 9
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Exercice 10
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y,

$$f(x^2 - y^2) = (x - y)(f(x) + f(y))$$

Solution des exercices

Solution de l'exercice 4

Assez souvent, si une équation fonctionnelle présente une variable en dehors de toutes les parenthèses, il est possible de montrer la surjectivité de la fonction. Pour ce faire, on fixe la variable embêtante, ici on peut le faire en posant par exemple $y = 0$, alors $f(x^2 + f(0)) = 2x - f(0)$. Le côté droit $2x - f(0)$ parcourt $\mathbb{R}$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$ donc f est nécessairement surjective. On effectue le changement de variable $z = f(y)$, alors pour $x = 0$, $f(z) = -z$ pour tout réel z car f est surjective.
On s'aperçoit finalement que $f : x \to -x$ n'est pas une solution, donc l'équation n'admet aucune solution.

Solution de l'exercice 5

On pose $y = 0$, on obtient $f(f(x)) = 2x + f(-f(f(x)) + f(0))$. Si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$ et $f(-f(f(a))+f(0)) = f(-f(f(b))+f(0))$ donc $2a = 2b \implies a = b$ donc f est injective. On revient désormais à l'équation originale et on pose $x = 0$, alors on obtient $f(f(0)+y) = f(-f(f(0))+f(y))$ or f est injective donc $f(0) + y = -f(f(0)) + f(y)$. En regardant cette égalité droit dans les yeux, on s'aperçoit qu'elle nous donne quasiment l'expression de $f(y)$ car $f(y) = y + f(0) + f(f(0))$, en particulier f est de la forme $f(y) = y + c$ avec $c = f(0) + f(f(0))$ une constante. L'equation originale donne $x + y + 2c = x + y$ donc $c = 0$.
Finalement on vérifie bien que la fonction $f : x \to x$ est solution de l'équation.

Solution de l'exercice 6

Solution 1 :

Avant d'essayer de résoudre l'équation fonctionnelle, on peut toujours essayer de repérer en avance des solutions faciles. Les fonctions $f : x \to 0$ et $f : x \to x$ sont solutions. On peut également voir que la fonction $f : x \to -x$ est solution. Ces fonctions sont à priori les seules solutions, essayons de le montrer.
Parmis ces solutions, 2 sont injectives, de plus l'équation présente une variable sortie, on a donc bien envie de montrer l'injectivité, seulement cela est impossible car la fonction nulle est solution du problème sans être injective. Pour avoir une chance de montrer l'injectivité de la fonction, on va donc mettre de côté la fonction nulle en ne travaillant que sur des fonctions admettant un réel l, tel que $f(l) \neq 0$. Si $f(a) = f(b)$, alors en posant $y = a$ puis $y = b$, on obtient $f(f(x)f(a)) = f(x)a$ et $f(f(x)f(b)) = f(x)b \implies f(x)a = f(x)b$. Ainsi, pour $x = l$, on peut diviser par $f(l) \neq 0$ et on obtient $a = b$ donc f est injective. Revenons à l'équation originale, et posons $y = 1$, alors on a $f(f(x)f(1)) = f(x) \implies f(x)f(1) = x$. Si $f(1) = 0$, alors en posant $x = 1$ on trouve $0 = 1$ ce qui est faux donc $f(1) \neq 0$. Ainsi $f(x) = \dfrac{x}{f(1)}$ donc on peut écrire $f(x) = cx$ pour tout x.
Avec l'équation de départ, cela donne $f(f(x)f(y)) = c^3xy = f(x)y = cxy$ donc $c = 0$ ou $c = \pm 1$. On retrouve les 3 solutions identifiées au début.

Solution 2 :

Dans cette équation, le terme de gauche est symétrique en x et y alors que le terme de droite ne l'est pas. Dans ce genre de situation il est intéressant de se servir de cette symétrie, ici cela donne : $f(f(x)f(y)) = f(x)y = xf(y)$. Donc pour tous réels x, y non nuls, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$

donc le terme $\frac{f(x)}{x}$ est constant et on peut écrire $f(x) = cx$ pour tout x non nul. De plus $f(0) \cdot 1 = 0 \cdot f(1) \implies f(0) = 0$, donc $f(x) = cx$ pour tout réel x. $f(f(x)f(y)) = c^3xy = f(x)y = cxy$ donc $c = 0$ ou $c = \pm 1$. On vérifie que les fonctions $f : x \mapsto 0$, $f : x \mapsto x$ et $f : x \mapsto -x$ sont bien solutions de l'équation.

Remarque 9.
L'astuce de se servir de la symétrie d'un des membres de l'équation amène forcément à une égalité symétrique en x et y. L'astuce dans ce genre de cas est de réunir les variables x d'un côtés et les variables y de l'autre pour exploîter cette symétrie et trouver une expression constante. Dans l'exercie précédent cela donnait $\frac{f(x)}{x}$ constant. Nous laissons au lecteur le soin d'établir la forme des fonctions f vérifiant $f(x)^2 - f(y)^2 + x^4 - y^4 = 2(x^2 f(x) - y^2 f(y))$.

Solution de l'exercice 7
Posons $y = x$, l'équation devient $f(f(x) + f(f(x))) = 2x$ donc f est surjective. Sachant que f est surjective, on peut poser le changement de variable $z = f(y)$, où z prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$. A nouveau on peut poser le changement de variable $t = f(z)$ où t prend toutes les valeurs de $\mathbb{R}$ (on utilise secrètement le fait que si f est surjective, $f \circ f$ est également une fonction surjective). L'équation devient alors pour $x = 0$, $f(f(0) + t) = t - f(f(0))$, donc f est de la forme $f : x \to x + c$ avec $c = -f(0) - f(f(0))$ une constante.
$f(f(x) + f(f(y))) = x + y + 4c = 2x + f(f(y)) - f(f(x)) = x + y$ donc $c = 0$. On vérifie que la fonction $f : x \mapsto x$ est solution de l'équation.

Solution de l'exercice 8
Montrons par une récurrence forte sur n que pour tout x, $f(x) = n$ ssi $g(x) = n$. Pour $n = 0$, il existe x tel que $f(x) = 0$ par surjectivité. Donc $0 \leq g(x) \leq f(x) = 0$, donc $g(x) = 0$. Supposons maintenant que l'hypothèse de récurrence est vérifié pour tout $k \leq n$. Par surjectivité, soit x tel que $f(x) = n + 1$, alors $g(x) \leq n + 1$. Supposons $g(x) = k \leq n$, alors il existe y tel que $f(y) = k$ et $y \neq x$ (car $f(x) \neq k$). Or par injectivité, $k = g(x) \neq g(y) = k$ absurde. En conclusion $g(x) = n + 1$ ce qui termine la preuve de l'hérédité.

Remarque 10.
Soit A un ensemble de cardinal fini, alors $f : A \to A$ f est surjective ssi elle est injective.
Cette remarque est évidement fausse si A est un ensemble avec un nombre d'élément infinis comme $\mathbb{N}$, $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$.
En revanche, dans le cadre d'une fonction $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bornée, ce résultat peut devenir important.

Solution de l'exercice 9
Posons $x = 0$, on obtient $f(f(0)^2 + f(y)) = y$ donc f est surjective. Si $f(a) = f(b)$ alors $f(f(0)^2 + f(a)) = f(f(0)^2 + f(b)) \implies a = b$ donc f est injective. Posons $x = r$ avec $f(r) = 0$, alors $f(f(y)) = y$ pour tout réel y. Posons maintenant $x = f(z)$, alors $f(f(f(z))^2 + f(y)) = f(z)f(f(z)) + y = zf(z) + y = f(f(z)^2 + f(y))$ or f est injective, donc $f(f(z))^2 + f(y) = f(z)^2 + f(y) \implies z^2 = f(z)^2$. Ainsi pour tout réel z, $f(z) = \pm z$.
Premier cas : si $f(1) = 1$ alors on pose $x = 1$ et on obtient $f(1 + f(y)) = 1 + y$. $f(y) = \pm y$, supposons que $f(y) = -y$, alors $f(1 + f(y)) = f(1 - y) = y - 1 \neq 1 + y$ donc $f(y) = y$ pour tout réel y. On vérifie aisément que la fonction $f : x \mapsto x$ est solution de l'équation.
Deuxième cas : si $f(1) = -1$ alors on pose $x = 1$ et on obtient $f(1 + f(y)) = -1 + y$. $f(y) = \pm y$,

supposons que $f(y) = y$, alors $f(1 + f(y)) = f(1 + y) = 1 + y \neq -1 + y$ donc $f(y) = -y$ pour tout réel y. On vérifie aisément que la fonction $f : x \mapsto -x$ est bien solution de l'équation.

Remarque 11.
Dans l'exercice précédent on a obtenu une expression incomplète de f, sous la forme $f(z) = \pm z$ que l'on appelle un multigraphe. L'erreur ici serait de conclure directement que $f(z) = z$ pour tout réel z ou $f(z) = -z$ pour tout réel z.
Cependant, on trouvera rarement des fonctions solutions prenant parfois la valeur $f(a) = a$ et parfois $f(b) = -b$. Pour le montrer rigoureusement, il faut supposer $f(a) = a$ et $f(b) = -b$ et montrer une contradiction à partir de là. Dans l'exercice précédent on a fait une disjonction de cas sur la valeur de $f(1)$ mais on aurait pu le faire à partir de n'importe quelle valeur non nulle.

Solution de l'exercice 10
Posons $x = y$, alors on obtient $f(0) = 0$. Posons $y = 0$, alors on obtient $f(x^2) = xf(x)$ donc $xf(x) = -xf(-x)$ donc $f(-x) = -f(x)$ pour tout réel x non nul et puisque $f(0) = 0$, on en déduit l'imparité de la fonction f. Revenons à l'équation origianle et susbtituons y par $-y$, l'équation devient alors $f(x^2 - y^2) = (x + y)(f(x) - f(y))$. Ainsi, pour tous réels x, y : $(x - y)(f(x) + f(y)) = (x + y)(f(x) - f(y)) \implies xf(y) - yf(x) = -xf(y) + yf(x) \implies 2xf(y) = 2yf(x) \implies xf(y) = yf(x)$. Si x, y sont deux réels non nuls, $\dfrac{f(x)}{x} = \dfrac{f(y)}{y}$ donc il existe une constante c telle que $f(x) = cx$ pour tout réel x non nul et comme $f(0) = 0$, $f(x) = cx$ pour tout réel x. $f(x^2 - y^2) = c(x^2 - y^2)$ et $(x - y)(f(x) + f(y)) = c(x^2 - y^2)$ donc les fonctions $f : x \mapsto cx$ sont solutions pour tout réel c.

8 TD de Géométrie (Martin & Maryam)

Dans ce TD, on a commencé par revoir les notions abordées dans les cours précédents au travers des cinq premiers exercices. On a ensuite présenté la configuration du pôle sud disponible dans le polycopié de géométrie pour niveau intermédiaire du site de la POFM, qui était utile pour les exercices 6 à 11.

Exercices

Exercice 1
Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centre respectif O_1 et O_2 et admettant deux points d'intersection A et B. Une droite passant par B recoupe le cercle Ω_1 en C et le cercle Ω_2 en D. Montrer que les triangles AO_1O_2 et ACD sont semblables.

Exercice 2
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles tels que le cercle ω_1 est tangent intérieurement au cercle ω_2 en le point A. Soit P un point du cercle ω_2. Les tangentes au cercle ω_1 issues du point P sont tangentes au cercle ω_1 en deux points X et Y et coupent le cercle ω_2 en deux points Q et R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Exercice 3
(Grèce MO 2019) Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit et D le milieu de l'arc AB ne contenant pas le point C. Soit E le points d'intersection

des droites (AD) et (BC). Le cercle circonscrit au triangle BDE recoupe la droite (AB) au point Z. Le cercle circonscrit au triangle ADZ recoupe la droite (AC) au point H. Montrer que $BE = AH$.

Exercice 4
(PAMO 2021 P2) Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B. Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T. Soit P' le symétrique du point P par rapport au point K. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Exercice 5
(British MO 2012/2013 Round 1) Soit ABC un triangle. Soit C_B le cercle passant par B et tangent au segment $[AC]$ en A et soit C_C le cercle passant par C et tangent au segment $[AB]$ en A. Les cercles C_B et C_C se recoupent au point D. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E. Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$.

Exercice 6
Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, I le point d'intersection de ses bissectrices, S le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec la droite (AI). Montrer que les points B, I et C sont sur un même cercle de centre S.

Exercice 8
(BXMO 2011) Soit ABC un triangle soit I le centre de son cercle inscrit. Les bissectrices $(AI), (BI)$ et (CI) coupent les côtés opposés en D, E et F respectivement. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites (BI) et (CI) en M et N respectivement. Montrer que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Exercice 9
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue du sommet A. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en E et le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en F. Montrer que $EB = CF$.

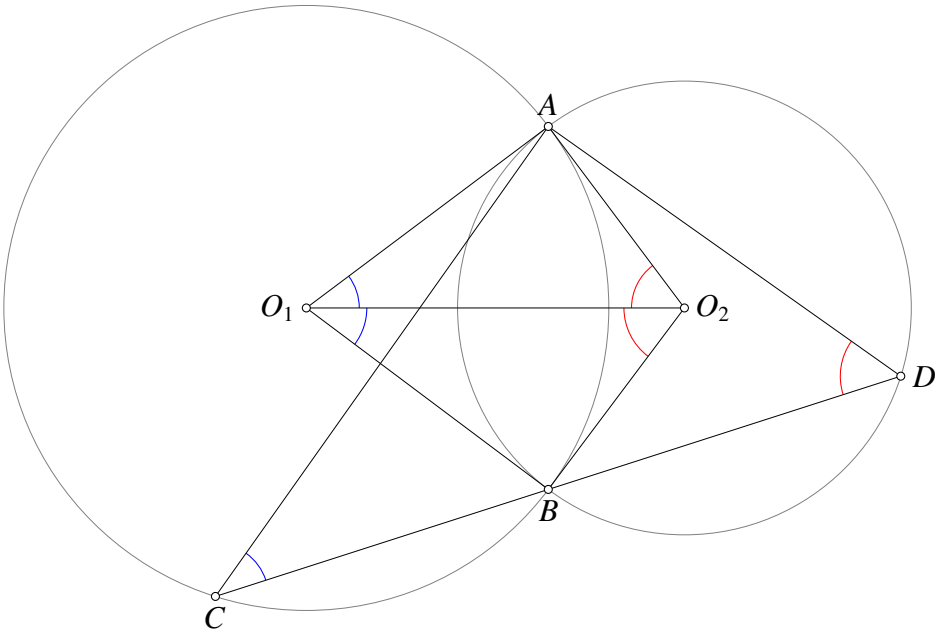
Exercice 10
(JBMO 2010) Soit ABC un triangle et soit L le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et soit K le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. La médiatrice du segment $[BK]$ coupe la droite (AL) en un point M. La parallèle à la droite (KM) passant par le point L coupe la droite (BK) au point N. Montrer que $LN = NA$.

Exercice 11
(IMO 2004 P1) Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. Soit O le milieu de $[BC]$. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits de BMR et CNR se coupent sur $[BC]$.

Solutions

Exercice 1
Soient Ω_1 et Ω_2 deux cercles de centre respectif O_1 et O_2 et admettant deux points d'intersection A et B. Une droite passant par B recoupe le cercle Ω_1 en C et le cercle Ω_2 en D. Montrer que les triangles AO_1O_2 et ACD sont semblables.

Solution de l'exercice 1



En appliquant le théorème de l'angle au centre dans le cercle Ω_1, on obtient :

$$2\widehat{ACB} = \widehat{AO_1B}$$

De même, dans le cercle Ω_2, on a

$$2\widehat{ADB} = \widehat{AO_2B}$$

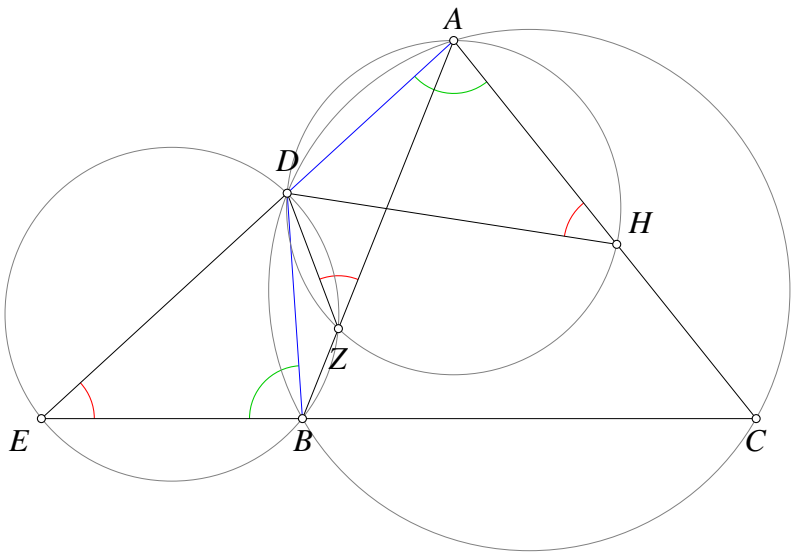
Il nous faut montrer que $\widehat{ACB} = \widehat{AO_1O_2}$ et $\widehat{ADB} = \widehat{AO_2O_1}$ pour en conclure que les triangles AO_1O_2 et ACD sont semblalbes. Autrement dit, il faut montrer que $\widehat{AO_1O_2} = \frac{\widehat{AO_1B}}{2}$ et $\widehat{AO_2O_1} = \frac{\widehat{AO_2B}}{2}$.

Alors (O_1O_2) se doit donc d'être la bissectrice des angles $\widehat{AO_1B}$ et $\widehat{AO_2B}$, or les triangles AO_1B et AO_2B étant respectivement isolcèles en O_1 et O_2, les bissectrices des deux angles en question sont confondues avec la médiatrice de $[AB]$. Enfin, O_1 et O_2 sont chacun sur la médiatrice de $[AB]$ de par le caractère isocèle des triangles en question, donc (O_1O_2) est bien la médiatrice de $[AB]$. Cela conclut.

Exercice 2
(Grèce MO 2019) Soit ABC un triangle avec $AB < AC < BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit et D le milieu de l'arc AB ne contenant pas le point C. Soit E le points d'intersection des droites (AD) et (BC). Le cercle circonscrit au triangle BDE recoupe la droite (AB) au point

Z. Le cercle circonscrit au triangle ADZ recoupe la droite (AC) au point H. Montrer que $BE = AH$.

Solution de l'exercice 2



En utilisant le théorème de l'angle inscrit dans les cercles circonscrits aux triangles DBE et ADH, on a

$$\widehat{BED} = 180° - \widehat{DZB} = \widehat{DZA} = \widehat{DHA}$$

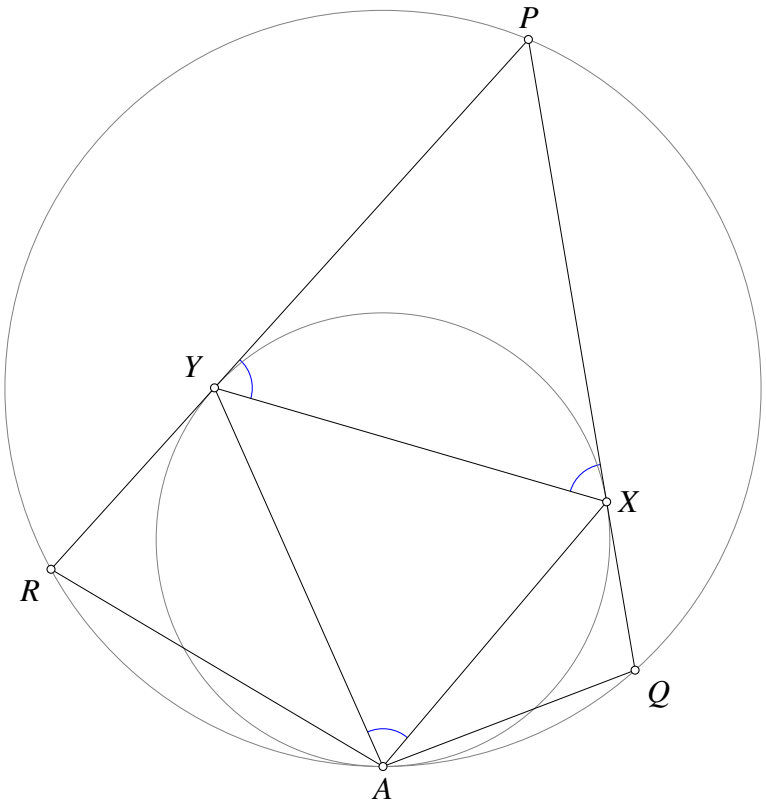
et

$$\widehat{DBE} = 180° - \widehat{DBC} = \widehat{DAH}$$

Ainsi les triangles DAH et DBE sont semblables. Puisque D est le milieu de l'arc AB, on a également $DB = DA$, donc les triangles sont isométriques. On a donc bien $BE = AH$.

Exercice 3
Soit ω_1 et ω_2 deux cercles tels que le cercle ω_1 est tangent intérieurement au cercle ω_2 en le point A. Soit P un point du cercle ω_2. Les tangentes au cercle ω_1 issues du point P sont tangentes au cercle ω_1 en deux points X et Y et coupent le cercle ω_2 en deux points Q et R. Montrer que $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Solution de l'exercice 3



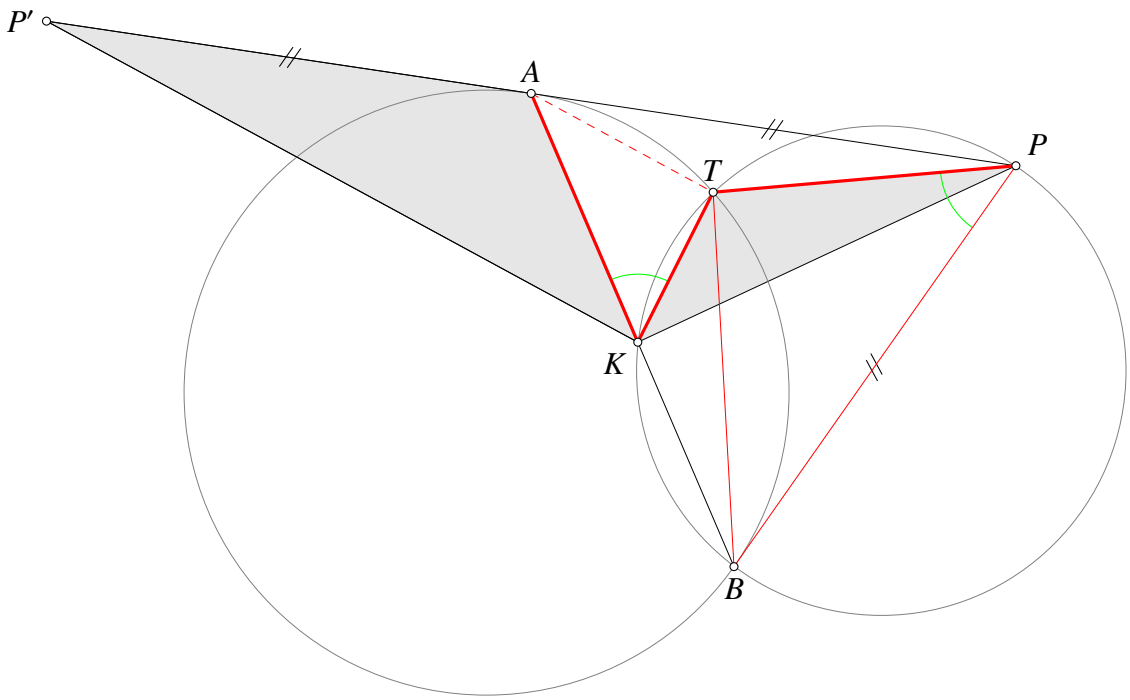
Puisque la droite (PX) est tangente au cercle ω_2 en X, $\widehat{XAY} = \widehat{YXP}$. de même on obtient $\widehat{XAY} = \widehat{XYP}$. La somme des angles du triangle XPY vaut 180, donc

$$\widehat{QPR} = \widehat{XPY} = 180 - \widehat{PXY} - \widehat{PYX} = 180 - 2\widehat{XAY}$$

D'autre part, les points P, R, A et Q sont cocycliques donc $\widehat{QPR} = 180 - \widehat{QAR}$. On déduit $\widehat{QAR} = 2\widehat{XAY}$.

Exercice 4
(PAMO 2021 P2) Soit Γ un cercle et P un point à l'extérieur de Γ. Les tangentes à Γ issues de P touchent Γ en A et B. Soit K un point distinct de A et B sur le segment $[AB]$. Le cercle circonscrit au triangle PBK recoupe le cercle Γ au point T. Soit P' le symétrique du point P par rapport au point K. Montrer que $\widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$.

Solution de l'exercice 4



Commençons par remarquer que si l'énoncé est vrai, alors $\widehat{BAT} = \widehat{PBT} = \widehat{P'KA}$. Ainsi, il est équivalent de montrer que les droites $(P'K)$ et (AT) sont parallèles. Mais si c'est le cas, alors $\widehat{KP'T} = \widehat{TAP} = \widehat{ABT} = \widehat{KPT}$. Comme on aurait $\widehat{PKT} = \widehat{PBT} = \widehat{KP'A}$, les triangles PKT et $P'KA$ seraient semblables. Réciproquement, il suffit de montrer que les triangles PKT et $P'KA$ sont semblables pour avoir le résultat voulu.

Pour montrer que $\Delta P'KA \simeq \Delta PKT$, on peut essayer de montrer que leurs angles sont deux à deux égaux. Mais on a vu que montrer $\widehat{PKT} = \widehat{P'KA}$ et $\widehat{TPK} = \widehat{KP'A}$ était équivalent à l'énoncé. Il est donc plus raisonnable d'essayer de montrer une égaltié d'angle et une égalité de rapports. Or on a par angle inscrit :

$$\widehat{KTP} = 180^\circ - \widehat{KBP} = 180^\circ - \widehat{ABP} = 180^\circ - \widehat{BAP} = \widehat{PAK'}$$

Donc il suffit de montrer que $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TP}{AP'}$. Comme $AP' = AP = BP$, il suffit de montrer que $\dfrac{KT}{KA} = \dfrac{TP}{BP}$. Il suffit donc de montrer que les triangles AKT et BPT sont semblables. On veut obtenir une égalité de rapport d'une similitude, donc on va montrer cette similitude par chasse aux angles.

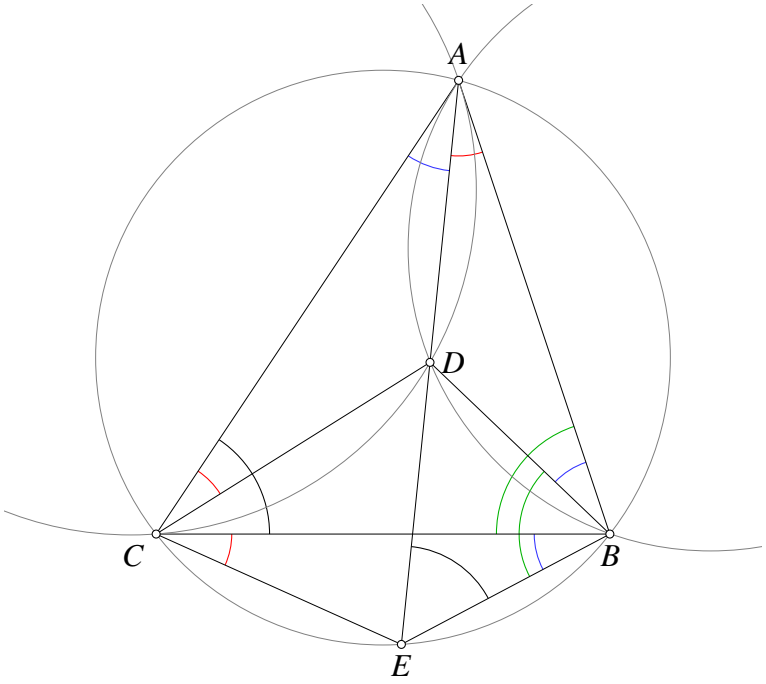
D'une part, par angle inscrit, $\widehat{AKT} = 180^\circ - \widehat{BKT} = \widehat{TPB}$ et d'autre part par angle tangentiel, $\widehat{TAK} = \widehat{TAB} = \widehat{TBP}$.

Donc les triangles AKT et BPT sont semblables comme voulu.

Exercice 5

(British MO 2012/2013 Round 1) Soit ABC un triangle. Soit C_B le cercle passant par B et tangent au segment $[AC]$ en A et soit C_C le cercle passant par C et tangent au segment $[AB]$ en A. Les cercles C_B et C_C se recoupent au point D. La droite (AD) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point E. Montrer que D est le milieu du segment $[AE]$.

Solution de l'exercice 5



On traduit les hypothèses sous formes d'égalités d'angles. Ainsi, on observe que, par angle tangentiel pour C_B puis par angle inscrit dans le cercle (ABC) :

$$\widehat{DBA} = \widehat{CAD} = \widehat{CAE} = \widehat{CBE}$$

De même on obtient que $\widehat{BCE} = \widehat{DCA}$. Ainsi on a

$$\Delta DBA \simeq \Delta DAC \simeq EBC$$

D'autre part, puisque $\widehat{DBA} = \widehat{CBE}$, on a

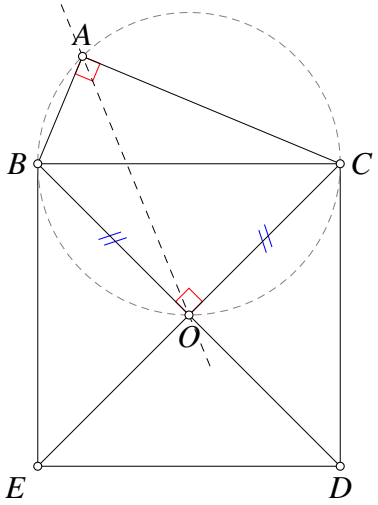
$$\widehat{DBE} = \widehat{DBC} + \widehat{CBE} = \widehat{DBC} + \widehat{DBA} = \widehat{CBA}$$

et par angle inscrit $\widehat{DEB} = \widehat{AEB} = \widehat{BCA}$. Ainsi on a $\Delta DBE \simeq \Delta ABC$. On a alors toutes les égalités de rapports qu'il faut pour conclure :

$$DA \underset{\Delta DBA \simeq \Delta DAC}{=} DB \cdot \frac{AB}{AC} \underset{\Delta DBE \simeq \Delta ABC}{=} DE \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AC} = DE$$

Exercice 6
Soit $BCDE$ un carré et soit O son centre. Soit A un point situé à l'extérieur du carré $BCDE$ tel que le triangle ABC est rectangle en A. Montrer que le point O appartient à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

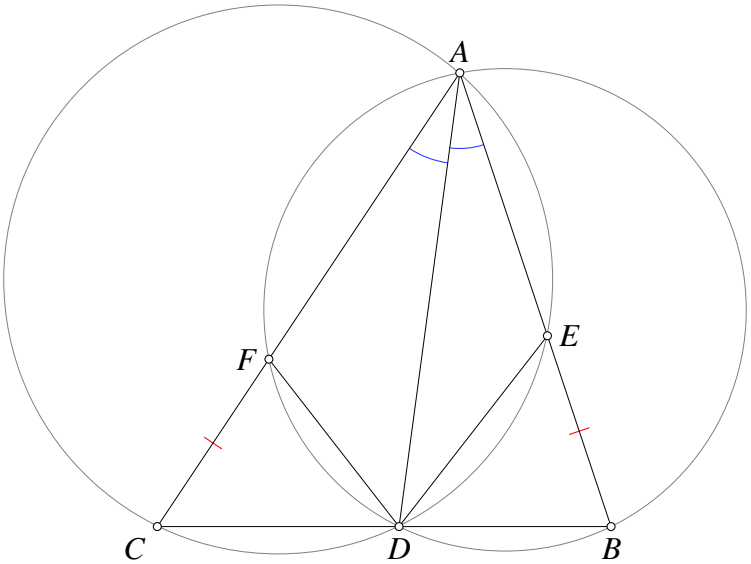
Solution de l'exercice 6



Puisque $\widehat{BAC} = 90° = \widehat{BOC}$, les points B, A, C et O sont cocycliques. Puisque le triangle BOC est isocèle en O, le point O est sur la médiatrice du segment $[BC]$, il s'agit donc du pôle Sud du point A dans le triangle ABC. Le point O appartient donc à la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Exercice 7
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue du sommet A. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en E et le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en F. Montrer que $EB = CF$.

Solution de l'exercice 7



On présente une solution utilisant le théorème de la bissectrice. D'après la puissance du point B par rapport au cercle passant par A, F, D et C :

$$BD \cdot BC = BF \cdot BA$$

De même, d'après la puissance du point C par rapport au cercle passant par A, E, D et B :

$$CD \cdot CB = CE \cdot CA$$

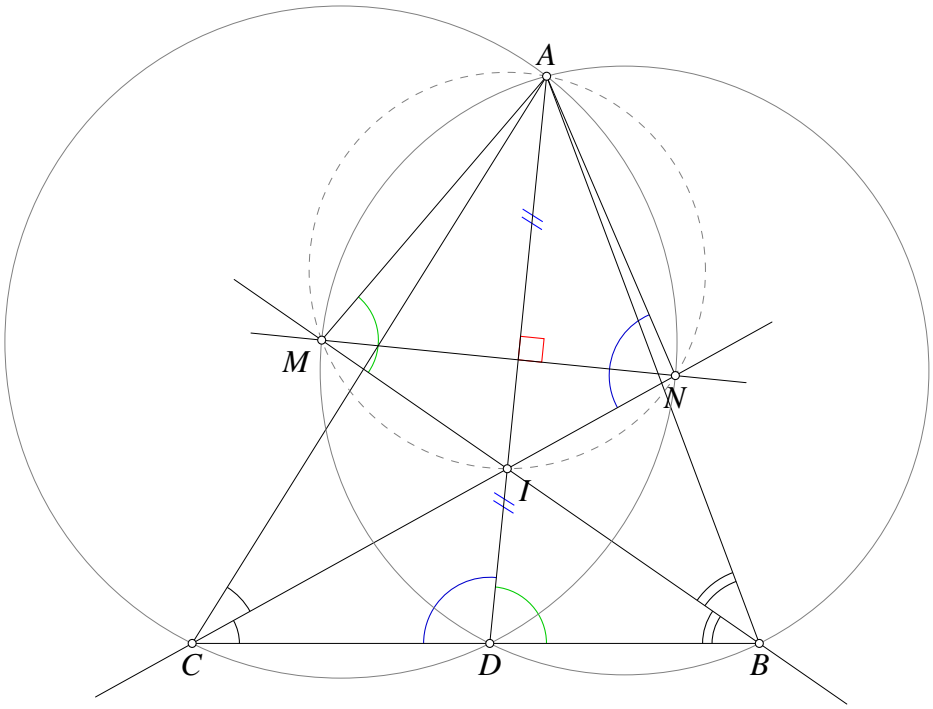
Ainsi :

$$\frac{CE}{BF} = \frac{CD}{CA} \cdot \frac{BA}{BD} = \frac{BA}{CA} \cdot \frac{CD}{BD} = 1$$

où la dernière égalité provient du théorème de la bissectrice.

Exercice 8
(BXMO 2011) Soit ABC un triangle soit I le centre de son cercle inscrit. Les bissectrices $(AI), (BI)$ et (CI) coupent les côtés opposés en D, E et F respectivement. La médiatrice du segment $[AD]$ coupe les droites (BI) et (CI) en M et N respectivement. Montrer que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8



Des bissectrices et des médiatrices s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. Le point M est en effet par définition le pôle sud du point B dans le triangle BAD donc le quadrilatère $BAMD$ est cyclique. De même, le quadrilatère $CAND$ est cyclique. Il vient que

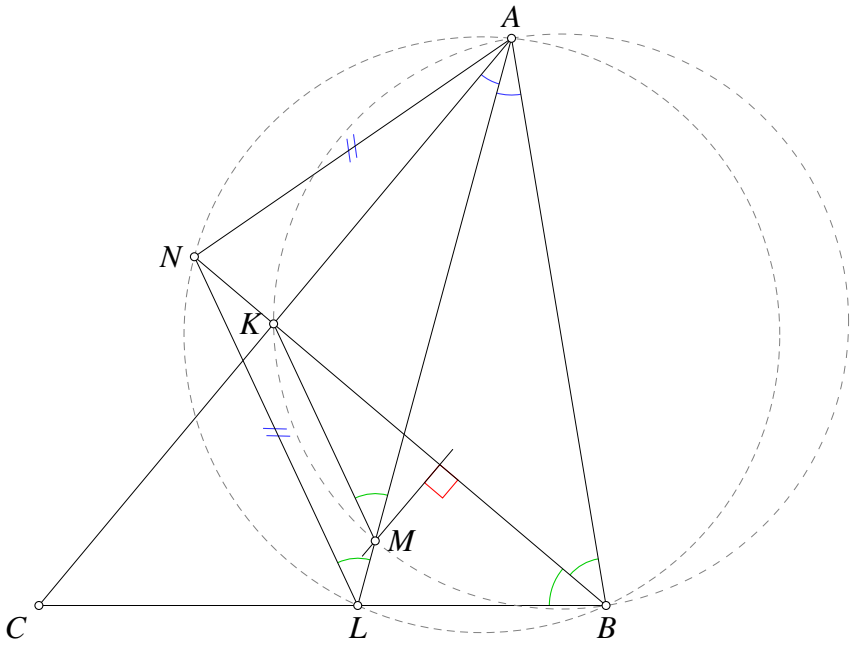
$$\widehat{IMA} + \widehat{INA} = \widehat{BMA} + \widehat{CNA} = \widehat{BDA} + \widehat{CDA} = 180°$$

ce qui montre bien que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Exercice 9
(JBMO 2010) Soit ABC un triangle et soit L le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et soit K le

pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{ABC}$. La médiatrice du segment $[BK]$ coupe la droite (AL) en un point M. La parallèle à la droite (KM) passant par le point N coupe la droite (BK) au point N. Montrer que $LN = NA$.

Solution de l'exercice 9



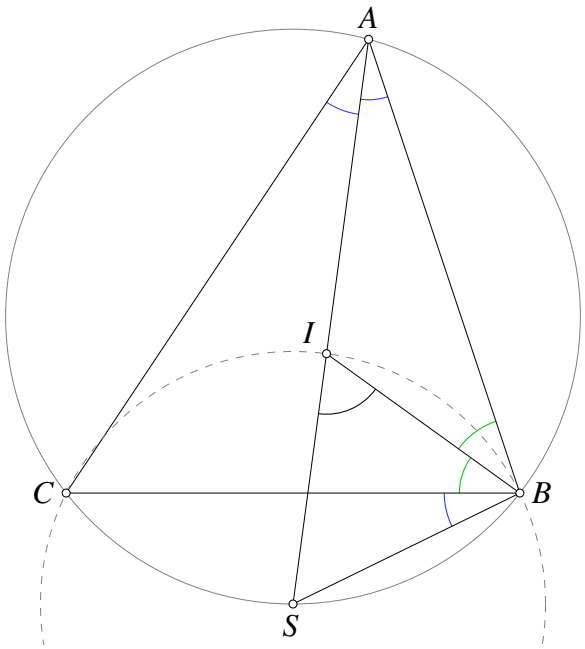
Des bissectrices et des médiatrices qui s'intersectent, c'est donc qu'il y a des pôles sud cachés. En effet, le point M est le pôle Sud du point A dans le triangle KBA par hypothèse donc le quadrilatère $MKAB$ est cyclique. On a alors

$$\widehat{NLA} = \widehat{KMA} = \widehat{KBA} = \widehat{NBA}$$

donc le quadrilatère $NLBA$ est cyclique. Puisque le point N est le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{LBA}$ et du cercle circonscrit au triangle LBA, le point N est le pôle Sud du sommet B dans le triangle LBA. Il appartient donc à la médiatrice du segment $[AL]$. Ainsi $NL = NA$.

Exercice 10
Soit ABC un triangle, I le point d'intersection de ses bissectrices, S le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ avec la droite (AI). Montrer que les points B, I et C sont sur un même cercle de centre S.

Solution de l'exercice 10



On montre que $SB = SI$. Puisque $SB = SC$, on a alors que S est équidistant des points C, I et B, comme voulu.

Pour montrer que $SI = SB$, on montre que $\widehat{SIB} = \widehat{IBS}$.
Pour cela, en utilisant la somme des angles du triangle AIB :

$$\widehat{SIB} = 180^\circ - \widehat{AIB} = \widehat{IAB} + \widehat{IBA}$$

Puisque I est sur les bissectrices des angles $\widehat{CAB}$ et $\widehat{ABC}$, on a

$$\widehat{IAB} + \widehat{IBA} = \widehat{IAC} + \widehat{IBC}$$

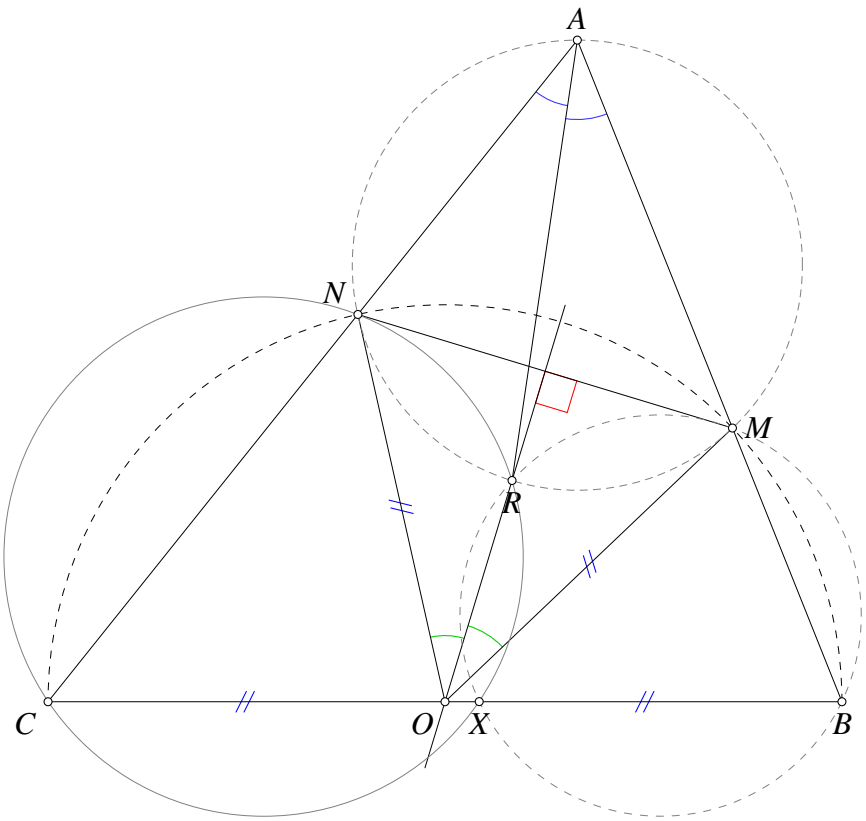
Or, d'après le théorème de l'angle inscrit, $\widehat{IAC} = \widehat{SAC} = \widehat{SBC}$, de sorte que

$$\widehat{IAC} + \widehat{IBC} = \widehat{SBC} + \widehat{IBC} = \widehat{IBS}$$

donc on a bien $\widehat{SIB} = \widehat{SBI}$, comme voulu.

Exercice 11
(IMO 2004 P1) Soit ABC un triangle acutangle non isocèle en A. Le cercle de diamètre $[BC]$ coupe $[AB]$ et $[AC]$ en M et N respectivement. Soit O le milieu de $[BC]$. Les bissectrices de $\widehat{BAC}$ et $\widehat{MON}$ se coupent en R. Montrer que les cercles circonscrits de BMR et CNR se coupent sur $[BC]$.

Solution de l'exercice 11



Le triangle MON est, par définition, isocèle en O. Ainsi, la bissectrice de l'angle $\widehat{MON}$ est aussi la médiatrice du segment $[MN]$. Le point R est donc le point d'intersection de la médiatrice du segment $[MN]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. il s'agit donc du pôle Sud du sommet A dans le triangle AMN. On en déduit que le quadrilatère $RMAN$ est cyclique.

Soit désormais X est le point d'intersection du cercle circonscrit au triangle CNR et du segment $[BC]$. Par chasse aux angles dans les divers quadrilatères cyclciques, on a

$$180 - \widehat{RXB} = \widehat{RXC} = 180^\circ - \widehat{RNC} = \widehat{RNA} = 180^\circ - \widehat{RMA} = \widehat{RMB}$$

Cela signifie que le point X est sur le cercle circonscrit au triangle BMR. On a donc montré que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles CNR et BMR appartient au segment $[BC]$. (La dernière étape du raisonnement est connue comme le premier théorème de Miquel.)

2 Entraînement de mi-parcours

Exercices

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que

$$f(x + y) = x + f(f(y))$$

pour tous les réels x et y.

Exercice 2
Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. On note M le milieu de $[AC]$, D le pied de la hauteur issue de A, et O le centre du cercle circonscrit à ABC. Démontrer que les triangles MOA et DBA sont semblables.

Exercice 3
Soit a, b et c trois réels strictement positifs tels que $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$. Démontrer que

$$\frac{a^2}{a^2 + bc} + \frac{b^2}{b^2 + ca} + \frac{c^2}{c^2 + ab} \geqslant \frac{a + b + c}{2}.$$

Exercice 4
Soit ABC un triangle dont les angles sont aigus. Soit D un point du segment $[AC]$ et E un point du segment $[AB]$ tels que B, C, D et E appartiennent à un cercle ω. Soit K le point de la demi-droite $[BD)$ tel que $AC = BK$ et L le point de la demi-droite $[CE)$ tel que $AB = CL$. Enfin, soit O le milieu de l'arc de cercle $\overset{\frown}{BC}$ de ω contenant D et E. Démontrer que O est le centre du cercle circonscrit à AKL.

Solutions

Solution de l'exercice 1
L'énoncé nous indique que

$$f(x) = f(x + 0) = x + f(f(0))$$

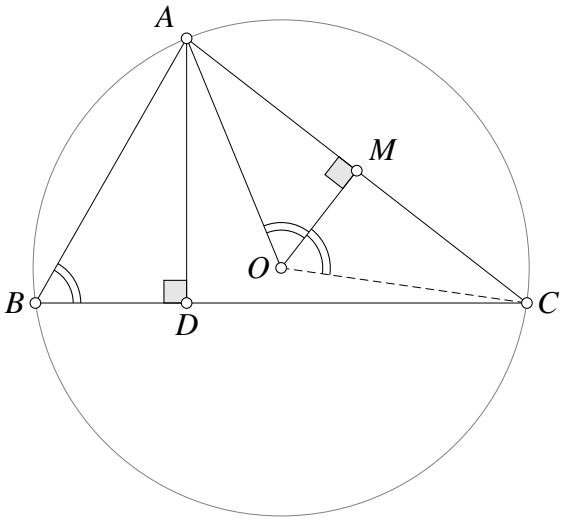
pour tout réel x. Si l'on pose $a = f(f(0))$, l'égalité de l'énoncé se réécrit donc comme

$$x + y + a = x + y + 2a,$$

et elle est valide si et seulement si $a = 0$.

En conclusion, la fonction $f : x \mapsto x$ est l'unique solution.

Solution de l'exercice 2



Puisque les triangles ABD et AOM sont rectangles en D et en O, on entreprend de démontrer que $\widehat{BAD} = \widehat{OAM}$ ou bien que $\widehat{DBA} = \widehat{MOA}$: sitôt que l'une de ces deux égalités est acquise, l'autre l'est aussi.

Le triangle ACO est isocèle en O, donc (OM) est à la fois la médiatrice du triangle AOC et la bissectrice de $\widehat{COA}$. L'angle $\widehat{COA}$ est donc égal à $2\widehat{MOA}$ mais aussi, en vertu du théorème de l'angle au centre, à $2\widehat{CBA} = 2\widehat{DBA}$.

On en conclut comme souhaité que $\widehat{MOA} = \widehat{DBA}$.

Solution de l'exercice 3

L'inégalité des mauvais élèves indique que

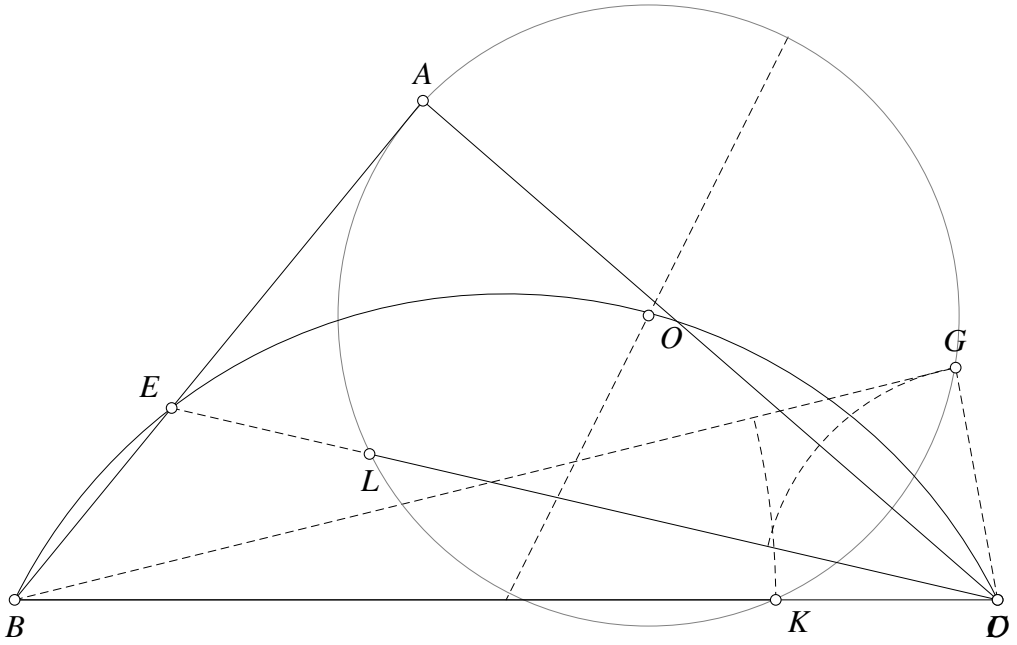
$$\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca}.$$

En outre, l'inégalité de Cauchy-Schwarz indique que $ab + bc + ca \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

Puisque $a + b + c = a^2 + b^2 + c^2$, on en conclut que que

$$\frac{a^2}{a^2+bc} + \frac{b^2}{b^2+ca} + \frac{c^2}{c^2+ab} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{a^2+b^2+c^2+ab+bc+ca} \geqslant \frac{(a+b+c)^2}{2(a^2+b^2+c^2)} = \frac{a+b+c}{2}.$$

Solution de l'exercice 4



Puisque $BO = CO$, $BK = CA$ et $\widehat{KBO} = \widehat{DBO} = \widehat{DCO} = \widehat{ACO}$, les triangles BOK et COA sont isométriques. On en déduit que $OA = OK$. On montre de même que $OA = OL$, ce qui fait de O le centre du cercle circonscrit à AKL.

Solution alternative

Soit G le symétrique de A par rapport à la médiatrice de $[BC]$. La symétrie d'axe cette médiatrice indique que

$$\widehat{OBG} = \widehat{ACO} = \widehat{DCO} = \widehat{DBO},$$

de sorte que O est situé sur la bissectrice du triangle KGB. Ce triangle étant isocèle en B, cette bissectrice est aussi la médiatrice de $[GK]$, de sorte que $OG = OK$.

On montre de même que $OG = OL$. Enfin, les médiatrices de $[BC]$ et $[AG]$ sont confondues et contiennent O, donc $OA = OG$. On en conclut que O est le centre du cercle circonscrit à $AGKL$.

3 Deuxième partie : Arithmétique & Combinatoire

1 Divisibilité, PGCD (Paul)

Factorisation

Théorème 1 (Identités remarquables)**.**
Soient a et b des nombres réels. On retiendra les identités remarquables suivantes :

- ⋆ $a^2 + b^2 + 2ab = (a + b)^2$
- ⋆ $a^2 + b^2 - 2ab = (a - b)^2$
- ⋆ $a^2 - b^2 = (a - b)(a + b)$

Démonstration. Il suffit de développer la forme factorisée. □

Théorème 2 (Factorisation de Bernoulli)**.**
Une généralisation de la dernière factorisation est la suivante : Soit n un entier naturel et a et b des nombres réels, alors on a :

$$a^n - b^n = (a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

Si de plus n est impair, on a alors

$$a^n + b^n = (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1})$$

Démonstration. Dans les deux cas, il suffit de développer le membre de gauche de l'égalite. En effet,

$$\begin{aligned}
&(a - b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= a(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) - b(a^{n-1} + a^{n-2}b + \ldots + ab^{n-2} + b^{n-1}) \\
&= a^n - b^n
\end{aligned}$$

On remarque qu'en fait tous les termes s'annulent sauf a^n et b^n.
Pour la deuxième égalite, on peut aussi remarquer que comme n est impair, alors

$$\begin{aligned}
a^n + b^n = a^n - (-b)^n &= (a - (-b))(a^{n-1} + a^{n-2}(-b) + \ldots + (-b)^{n-1}) \\
&= (a + b)(a^{n-1} - a^{n-2}b + a^{n-3}b^2 - \ldots + b^{n-1})
\end{aligned}$$

□

Corollaire 3.
On retiendra en particulier le cas $b = 1$: pour tout entier naturel n et pour tout nombre réel a, on a

$$a^n - 1 = (a - 1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \ldots + a + 1)$$

Exemple 4.
Pour $n = 3$, on a $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$ et $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$

Remarque 5.
La factorisation de $a^n + b^n$ n'est pas vraie pour n pair !

Rappel 6.
On rappelle la formule du binome de Newton : pour tout entier naturel n, et tous nombres réels a et b, on a

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

Démonstration. On peut effectuer un comptage direct en développant, sinon on procède par récurrence :
Initialisation : $(a+b)^0 = 1$
Hérédité : Supposons la propriété vraie pour un certain $n \in \mathbb{N}^*$. Alors

$$\begin{aligned}
(a+b)^{n+1} &= (a+b)^n \times (a+b) \\
&= (a+b) \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^{k+1} b^{n-k} + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k+1} \\
&= a^{n+1} + b^{n+1} + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k-1} + \binom{n}{k} \right) a^k b^{n+1-k} \\
&= \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} a^k b^{n+1-k}
\end{aligned}$$

Conclusion : La proposition est initialisée et héréditaire, donc d'apres le principe de récurrence, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$,

$$\boxed{(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}}$$

□

Exemple 7.
Pour $n = 3$, on a $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$
Pour $n = 4$, on a $(a+b)^4 = a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + b^4$
Pour $n = 5$, on a $(a+b)^5 = a^5 + 5a^4b + 10a^3b^2 + 10a^2b^3 + 5ab^4 + b^5$

Proposition 8 (Autres factorisations classiques)**.**
Soient a, b, c des réels.

- ⋆ $ab + a + b + 1 = (a+1)(b+1)$
- ⋆ $abc + ab + ac + bc + a + b + c + 1 = (1+a)(1+b)(1+c)$
- ⋆ $a^4 + 4b^4 = (a^2 + 2b^2 + 2ab)(a^2 + 2b^2 - 2ab)$ (factorisation de Sophie Germain)

Démonstration. Dans tous les cas, il suffit de développer la forme factorisée. □

Divisibilite

Définition 9.
Soient a et b des entier naturels. On dit que a divise b et on note $a \mid b$ si il existe un entier relatif k tels que $b = ak$

Proposition 10 (Propriétés de la divisibilité)**.**
Soient a, b, b', c, λ et μ des entiers.

(i) Si $a \mid b$ et $b \mid c$ alors $a \mid c$ (transitivité)

(ii) Si $a \mid b$, alors $a \mid \lambda b$

(iii) Si $a \mid b$ et $a \mid b'$, alors $a \mid \lambda b + \mu b'$

(iv) Si $\lambda \neq 0$, alors $a \mid b$ SSI $\lambda a \mid \lambda b$

(v) Si $a \mid b$ et $b \neq 0$, alors $|a| \leqslant |b|$

(vi) Si $a \mid b$ et $b \mid a$, alors $b = a$ ou $b = -a$

Démonstration.

(i) Comme $a \mid b$ et $b \mid c$, il existe deux entiers k et m tels que $b = ak$ et $c = bm$ donc $c = (ak)m = a(km)$, donc $a \mid c$.

(ii) Par définition, il existe un entier k tel que $b = ak$, donc $\lambda b = \lambda ak = a(\lambda k)$, donc $a \mid \lambda b$

(iii) A nouveau, il existe k et l des entiers tels que $b = ak$ et $b' = al$, donc $\lambda b + \mu b' = \lambda ak + \mu al = a(\lambda k + \mu l)$, donc $a \mid \lambda b + \mu b'$.

(iv) Si $a \mid b$, alors il existe un entier k tel que $b = ak$, donc $\lambda b = \lambda ak$, donc $\lambda a \mid \lambda b$. Réciproquement, si $\lambda a \mid \lambda b$, alors il existe un entier l tel que $\lambda b = \lambda al$, et comme $\lambda \neq 0$, on peut diviser par λ pour trouver $a \mid b$.

(v) Comme $a \mid b$, il existe un entier k tel que $b = ak$, donc $|b| = |ak| = |a| \times |k|$, et comme b est non-nul, alors k est un entier non-nul, donc $|k| \geqslant 1$, donc $|ak| \geqslant |a|$, donc $|b| \geqslant |a|$

(vi) Comme $a \mid b$, il existe un entier k tel que $b = ak$. Comme $b \mid a$, il existe un entier l tel que $a = bl$, donc $a = (ak)l$, donc $kl = 1$, donc $k \in \{-1, 1\}$, donc $b = a$ ou $b = -a$. □

Remarque 11.
Il faut bien remarquer que le cas de 0 est particulier : il ne divise aucun entier mais est divisible par tous les entiers.

Théorème 12 (Division euclidienne)**.**
Soient a et b des entiers avec $b \neq 0$. Alors il existe un unique couple d'entiers (q, r) tel que :

$$\begin{cases} a = bq + r \\ 0 \leqslant r < |b| \end{cases}$$

On dit que q et r sont respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de a par b

Démonstration. On ne demontre que le cas ou $a, b \geqslant 0$, les autres cas étant similaires, et pouvant se déduire de celui-ci.

Unicite : Supposons qu'il existe deux couples (b, r) et (b', r') vérifiant les conditions du théorème. Alors on a $a = bq + r = bq' + r'$, donc $b(q - q') = r' - r$, donc $b \mid r - r'$. D'après la proposition précédente, si $r - r' \neq 0$, alors $b \leqslant |r - r'|$, mais comme $0 \leqslant r, r' < b$, on a $-b < r - r' < b$, donc $|r - r'| < b$, donc finalement $r = r'$. Alors $bq = bq'$ et comme $b \neq 0$, on a $q = q'$. Ainsi, $(q, r) = (q', r')$.

Existence : Posons $q = \left\lfloor \frac{a}{b} \right\rfloor$ et $r = a - bq$. Alors $a = bq + r$ et comme $q \leqslant \frac{a}{b} < q + 1$, alors $bq \leqslant a < bq + b$ ie $0 \leqslant r < b$. □

Exercice 1
Déterminer la division euclidienne de 53 par 7.

Solution de l'exercice 1
On a $53 = 7 \times 7 + 6$

Exercice 2
Soient a, b, c, d des entiers relatifs. Montrer que si $a \mid b$ et $c \mid d$, alors $ac \mid bd$.

Solution de l'exercice 2
$a \mid b$ et $c \mid d$ donc il existe $k, k' \in \mathbb{Z}$ tels que $b = ka$, $d = k'c$, donc $bd = (kk')(ac)$ i.e. $\boxed{ac \mid bd}$

Exercice 3
Soit n un entier naturel. Montrer que $n(n+1)$ est pair. Montrer ensuite que $n(n+1)(2n+1)$ est divisible par 6.

Solution de l'exercice 3
Pour le permier cas, il suffit de remarquer que parmi deux nombres consecutifs, au moins l'un des deux est pair (on peut sinon s'en convaincre en regardant la division euclidienne de n par 2). Comme le produit d'un nombre pair par n'importe quel autre entier est pair, alors $n(n+1)$ est bien pair.
Pour le deuxième cas, on remarque que $n(n+1)$ est pair, donc $2 \mid n(n+1)(2n+1)$. Quant a la divisibilité par 3, si $3 \mid n$, on a fini, sinon le reste de la division euclidienne de n par 3 est 1 ou 2. Dans le premier cas, on vérifiera que $2n+1$ est divisible par 3 et dans le deuxième, que $n+1$ est divisible par 3. Dans tous les cas, $n(n+1)(2n+1)$ est divisble par 3, et donc par 6.

Remarque 13.
On pourrait en fait aussi remarquer que $n(n+1) = 2\sum_{k=1}^{n} k$ et $n(n+1)(2n+1) = 6\sum_{k=1}^{n} k^2$.

Exercice 4
Trouver tous les entiers naturels n vérifiant $n^2 + 1 \mid n$

Solution de l'exercice 4
Pour tout $n \in \mathbb{N}$, $|n^2 + 1| > |n|$, donc la seule possibilite est que $n = 0$.
Réciproquement, on a bien $1 \mid 0$

Exercice 5
Trouver tous les entiers naturels n verifiant $n + 1 \mid n^2 + 1$

Solution de l'exercice 5
Si $n + 1 \mid n^2 + 1$, alors $n + 1 \mid (n+1)^2 - (n^2 + 1)$, donc $n + 1 \mid 2n$, donc $n + 1 \mid 2n - 2(n+1)$, donc $n + 1 \mid -2$, donc $n = 0$ ou $n = 1$.
Réciproquement, 0 et 1 conviennent bien.

Exercice 6
Montrer que pour tout entier naturel n, on a $6 \mid n^3 - 7n$.

Solution de l'exercice 6
On commence par remarquer que $6 \mid n^3 - 7n \iff 6 \mid n^3 - 7n + 6n$, donc $6 \mid n^3 - n$. Or, $n^3 - n = n(n^2 - 1) = n(n-1)(n+1)$, et parmi trois nombres consécutifs, il y en a au moins un de pair et exactement un divisible par 3, donc le produit de trois nombres consecutifs est divisible par 6, donc $n^3 - 7n$ est toujours divisible par 6.

PGCD

Définition 14.
Soient a et b deux entiers relatifs. On appelle Plus Grand Diviseur Commun et on note $\text{pgcd}(a,b)$ ou $a \wedge b$ l'unique entier d tel que pour tout nombre entier d', si $d' \mid a$ et $d' \mid b$, alors $d' \mid d$.

Exemple 15.
Le plus grand commun diviseur de 221 et 68 est 17.

Remarque 16.
Le PGCD est aussi le plus grand entier naturel qui divise à la fois a et b

Proposition 17 (Homogénéité du PGCD)**.**
Soient a, b, λ des entiers relatifs. On a $\text{pgcd}(\lambda a, \lambda b) = |\lambda| \times \text{pgcd}(a,b)$

Démonstration. Supposons λ positif (le cas négatif est analogue). Soit d le PGCD de a et b.
Comme $\lambda \mid \lambda a$ et $\lambda \mid \lambda b$, alors $\lambda \mid \text{pgcd}(a,b)$, donc $\text{pgcd}(\lambda a, \lambda b) = \lambda c$.
Maintenant, comme $\lambda c \mid \lambda a$ et $\lambda c \mid \lambda b$, alors d'après le point (iv) de la proposition 10, on a $c \mid a$ et $c \mid b$, donc $c \mid d$, donc $\lambda c \mid \lambda d$ ie $\text{pgcd}(\lambda a, \lambda b) \mid \lambda d$
Enfin, comme $d \mid a$ et $d \mid b$, on a $\lambda d \mid \lambda a$ et $\lambda d \mid \lambda b$ donc $\lambda d \mid \text{pgcd}(\lambda a, \lambda b)$.
Donc $\lambda d = \text{pgcd}(\lambda a, \lambda b)$ □

Lemme 18.
Soient a, b, q, r, d des entiers tels que $a = bq + r$. Alors $d \mid a$ et $d \mid b$ si et seulement si $d \mid b$ et $d \mid r$.

Démonstration.

($\Longrightarrow$) Si $d \mid a$ et $d \mid b$, alors $d \mid a - bq$ donc $d \mid b$ et $d \mid r$

($\Longleftarrow$) Si $d \mid b$ et $d \mid r$, alors $d \mid bq + r$, donc $d \mid a$ et $d \mid b$ □

Théorème 19 (Algorithme d'Euclide)**.**
Soient a et b deux entiers relatifs. Pour déterminer le PGCD de a et b, on peut utiliser *l'algorithme d'Euclide* :

1) Effectuer la division euclidenne de a par b. On note q_1 le quotient et r_1 le reste.

2) Effectuer la division euclidienne de b par r_1. On note q_2 le quotient et r_2 le reste.

3) Si on a déjà $r_1, \ldots, r_k$, alors on construit r_{k+1} en effectuant la division euclidenne de r_{k-1} par r_k et en notant q_{k+1} le quotient et r_{k+1} le reste.

4) S'arrêter si r_n est nul.

Alors r_{n-1} est le PGCD de a et de b.

Démonstration. Supposons a et b non nuls (si l'un des deux est nul, le résultat est évident). Soit d' un entier relatif. D'apres le lemme, on a

$$\begin{aligned} d' \mid a \text{ et } d' \mid b &\iff d' \mid b \text{ et } d' \mid r_1 \\ &\iff d' \mid d' \mid r_1 \text{ et } d' \mid r_2 \\ &\vdots \\ &\iff d' \mid r_{n-1} \text{ et } d' \mid r_n \\ &\iff d' \mid r_{n-1} \end{aligned}$$

Donc $d' = \text{pgcd}(a, b)$ □

Exemple 20.
Calculons le PGCD de 221 et 68 :

$$\begin{aligned} 221 &= 68 \times 3 + \boxed{17} \\ 68 &= 17 \times 4 + 0 \end{aligned}$$

Le PGCD est donc bien 17, comme vu precedement.

Proposition 21.
Soient a, b, q, r des entiers tels que $a = bq + r$. Alors $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}(b, r)$

Démonstration. Immediat d'apres le lemme 18. □

Définition 22.
Soient a et b deux entiers relatifs. On dit que a et b sont premiers entre eux si $\text{pgcd}(a, b) = 1$.

Proposition 23.

Soient a et b deux entiers relatifs et soit d leur PGCD. Alors les entiers $\frac{a}{d}$ et $\frac{b}{d}$ sont premiers entre eux.

Démonstration. D'apres l'homogénéité du PGCD, on a $\text{pgcd}(a, b) = \text{pgcd}\left(d \times \frac{a}{d}, d \times \frac{b}{d}\right) = d \times \text{pgcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right)$, donc $\text{pgcd}\left(\frac{a}{d}, \frac{b}{d}\right) = 1$ □

Théorème 24 (Théorème de Bézout)**.**
Soient a et b deux entiers. a et b sont premiers entre eux si et seulement si il existe deux entiers u et v tels que $au + bv = 1$

Démonstration.

($\Longleftarrow$) Soient u et v tels que $au + bv = 1$. Alors soit d un entier naturel divisant a la fois a et b. D'apres le point (iii) de la proposition 10, on a $d \mid au + bv$ ie $d \mid 1$ ie $d = 1$: le seul diviseur commun à a et b est 1 : ils sont premiers entre eux.

($\Longrightarrow$) L'idee ici va etre d'utiliser les suites introduites lors de la démontration de l'algorithme d'Euclide (nous ne donnons pas une demonstration formelle mais l'idée utilisée). En effet, si a et b sont premiers entre eux, alors on a $r_{n-3} = r_{n-2} \times q_{n-2} + 1$ (le dernier reste non-nul étant le PGCD, et donc 1), donc $1 = r_{n-3} - r_{n-2} \times q_{n-2}$. Ensuite, on peut exprimer r_{n-2} en fonction de r_{n-4} et r_{n-3} puisque $r_{n-4} = r_{n-3} \times q_{n-3} + r_{n-2}$, et ainsi de suite, jusqu'à se retouver à $1 = au + bv$. C'est l'algorithme d'Euclide étendu. □

Corollaire 25.
Soient a et b deux entiers, alors il existe u et v deux entiers tels que $au + bv = \text{pgcd}(a, b)$

Démonstration. Il suffit ici d'appliquer le théorème de Bézout à $\frac{a}{\text{pgcd}(a,b)}$ et $\frac{b}{\text{pgcd}(a,b)}$ puis de tout multiplier par le PGCD de a et b. □

Exemple 26.
Calculons le PGCD de 183 et 117 :

$$\begin{aligned} 183 &= 117 \times 1 + 66 \\ 117 &= 66 \times 1 + 51 \\ 66 &= 51 \times 1 + 15 \\ 51 &= 15 \times 3 + 6 \\ 15 &= 6 \times 2 + \boxed{3} \\ 6 &= 3 \times 2 + 0 \end{aligned}$$

Trouvons maintenant un couple de Bézout :

$$\begin{aligned} 3 &= 15 - 2 \times 6 \\ &= 15 - 2 \times (51 - 3 \times 15) = -2 \times 51 + 7 \times 15 \\ &= -2 \times 51 + 7 \times (66 - 51) = 7 \times 66 - 9 \times 51 \\ &= 7 \times 66 - 9 \times (117 - 66) = -9 \times 117 + 16 \times 66 \\ &= -9 \times 117 + 16 \times (183 - 117) \\ 3 &= \boxed{16 \times 183 - 25 \times 117} \end{aligned}$$

Exercice 7 (IMO 1959, Problème 1)
Montrer que pour tout entier n, $\frac{21n + 4}{14n + 3}$ est irréductible.

Solution de l'exercice 7
Une fraction est irréductible SSI son numérateur et son dénominateur sont premiers entre eux. Or, $3 \times (14n + 3) - 2 \times (21n + 4) = 1$, donc le numerateur et le denominateur sont bien premiers entre eux pour tout n et lq fraction est bien irréductible.

Exercice 8
Soient a et b deux entiers premiers entre eux. Montrer que ab et $a+b$ sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 8
Soit p un diviseur premier commun de ab et de $a + b$. Alors $p \mid a$ ou $p \mid b$. Supposons sans perte de généralite que $p \mid a$. Alors comme $p \mid a + b$, alors $p \mid (a + b) - a = b$. Donc $p = 1$ car a et b sont premiers entre eux, donc ab et $a + b$ sont premiers entre eux.

Exercice 9
a) Montrer que si il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que $an^2 + bn + c = 0$, alors $n \mid c$
b) Déterminer les entiers $n \in \mathbb{N}$ tels que $n^5 - 2n^4 - 7n^2 - 7n + 3 = 0$.

Solution de l'exercice 9
a) On a $an^2 + bn + c = 0 \iff c = -n(an + b)$, donc il faut $\boxed{n \mid c}$

b) On applique le résulat precedent : on a $n \mid 3$ donc $n \in \{-3, -1, 1, 3\}$. Réciproquement, seuls -1 et 3 conviennent.

Exercice 10
Trouver tous les $n \in \mathbb{N}^*$ tels que $n^3 + n - 2$ est une puissance de 2

Solution de l'exercice 10
Soit n une éventuelle solution. Alors $n^3 + n - 2 = (n-1)(n^2+n+2)$ donc $n-1$ et n^2+n+2 sont des puissances de 2. Comme $n - 1 < n^2 + n + 2$, nécessairement $n - 1 \mid n^2 + n + 2$. On en déduit que $n - 1 \mid n^2 + n + 2 - (n-1)(n+2) = 4$. Les diviseurs positifs de 4 sont $1, 2, 4$ donc les seules valeurs possibles pour n sont $2, 3, 5$. En testant chaque possibilité, seuls 2 et 5 conduisent à des solutions.

Exercice 11
Pour des entiers strictement positifs m et n, montrer que $PGCD(2^m - 1, 2^n - 1) = 2^{PGCD(m,n)} - 1$.

Solution de l'exercice 11
Par symétrie des rôles, on peut supposer sans perte de généralité que $m \geq n$. On a alors :

$$PGCD(2^m - 1, 2^n - 1) = PGCD(2^m - 1 - 2^{m-n}(2^n - 1), 2^n - 1) = PGCD(2^{m-n} - 1, 2^n - 1)$$

Une récurrence immédiate fournit $PGCD(2^m - 1, 2^n - 1) = PGCD(2^{m-nq} - 1, 2^n - 1)$ pour tout $q \in \mathbb{N}$ tel que $m \geq nq$. En particulier, si r est le reste de la division euclidienne de m par n, alors

$$PGCD(2^m - 1, 2^n - 1) = PGCD(2^r - 1, 2^n - 1)$$

On reconnaît alors la suite des restes successifs de l'algorithme d'Euclide : en notant $x_0 = m$ et $y_0 = n$, puis (x_a, y_a) la liste des couples successifs, pour tout $a \geq 1$ on a :

$$PGCD(2^{x_{a-1}} - 1, 2^{y_{a-1}} - 1) = PGCD(2^{x_a} - 1, 2^{y_a} - 1)$$

On a finalement $PGCD(2^m - 1, 2^n - 1) = PGCD(2^{PGCD(m,n)} - 1, 2^0 - 1) = 2^{PGCD(m,n)} - 1$.

2 Principe des tiroirs (Aline)

Introduction et énoncé

La combinatoire repose en bonne partie sur des principe logiques intuitifs, mais dont la difficulté est de les utiliser à bon escient. Le principe des tiroirs en est un bon exemple. En anglais, il est connu sous le nom de *pigeonhole principle*.

Il existe des énoncés très formels avec des ensembles et des fonctions, mais on se contentera d'un énoncé imagé plus efficace à mémoriser. On commence tout de même par une notation utile.

Définition 1 (Parties entières)**.**
Soit $x \in \mathbb{R}$ un nombre réel. On appelle

partie entière inférieure de x le plus grand entier $\lfloor x \rfloor$ tel que $\lfloor x \rfloor \leqslant x$.

partie entière supérieure de x le plus grand entier $\lceil x \rceil$ tel que $x \leqslant \lceil x \rceil$.

En particulier, on a

Si x est entier , $\lfloor x \rfloor = x = \lceil x \rceil$

Sinon , $\lfloor x \rfloor < x < \lceil x \rceil = \lfloor x \rfloor + 1$

On peut maintenant introduire le principe des tiroirs.

Théorème 2 (Principe des tiroirs)**.**
Soit $n, k \in \mathbb{N}$ deux entiers naturels, avec $k > 0$. On considère un ensemble de k tiroirs dans lesquels on range n objets (chaussettes).

i Si $n > k$, il existe un tiroir qui contient deux chaussettes (au moins).

ii Dans le cas général, il existe un tiroir qui contient $\lceil n/k \rceil$ chaussettes (au moins).

iii Si maintenant n est infini (mais pas k), alors il existe un tiroir qui contient une infinité de chaussettes.

Démonstration. Démontrons le point (*ii*) par contraposée : supposons que tous les tiroirs contiennent au plus $\lceil n/k \rceil - 1$ chaussettes. Comme $\lceil n/k \rceil - 1 < n/k$, on a au total au plus

$$k \times \left(\left\lceil \frac{n}{k} \right\rceil - 1 \right) < k \times \frac{n}{k} = n$$

chaussettes de rangées. En particulier, on ne peut pas en ranger n ainsi.

Pour le point (*i*), il suffit de constater que si $n > k$, alors $\lceil n/k \rceil \geqslant 2$.

Pour le point (*iii*), le raisonnement par contraposée est le même que pour le point (*ii*) : il suffit de remarquer que si chaque tiroir contient un nombre fini de chaussettes, il ne peut y en avoir qu'un nombre total fini. □

Il n'y a pas grand chose à dire de plus concernant la théorie sous-jacente à ce principe bien naturel. Cependant, avant de passer aux exercices d'application, on peut faire quelques remarques.

Remarque 3.
Il ne faut pas faire dire au principe des tiroirs ce qu'il ne dit pas. En particulier :

1. Il faut qu'il y ait au moins 1 tiroir, mais pas une infinité.
2. Le principe dit qu'il existe un tiroir qui contient au moins un certain nombre de chaussettes, mais il ne dit ni quel tiroir précisément, ni combien il en contient exactement.
3. Certains tiroirs peuvent tout à fait être vides.
4. Le principe ne dit pas non plus quelles chaussettes sont dans quels tiroirs.

Pourquoi et comment utiliser le principe des tiroirs ?

Lorsque l'on veut utiliser le principe des tiroirs, il faut commencer par bien poser ce qui va jouer le rôle des tiroirs et le rôle des chaussettes. Par exemple :

Exemple 4.

1. groupes (tiroirs) de personnes (chaussettes)
2. façons de remplir (tiroir) les colonnes d'un tableau (chaussettes)
3. couleurs utilisées (tiroirs) pour colorier des cases (chaussettes)
4. restes modulo p (tiroirs) pour un ensemble de nombres (chaussettes)

5. ...

On peut aussi utiliser le même principe sous sa forme contraposée : dans ce cas, il s'agit de donner une borne supérieure à un nombre d'objets que l'on veut ranger ou colorier d'une certaine manière, à la taille d'un tableau, etc.

Remarque 5 (Et pas seulement la combinatoire)**.**
Le principe des tiroirs a été introduit historiquement pour faire de belles démonstrations d'analyse au $XIX^{\text{è}}$ siècle (voir exercices 7 et 15). Pour rester dans les mathématiques olympiques, il est très courant de l'utiliser en arithmétique, parfois en algèbre.

Exercices

Exercice 1 (Lemme des poignées de mains)
À la soirée d'ouverture du stage Animath, certains stagiaires se connaissent et d'autres pas encore. On suppose que si a connaît b, b connaît a. Montrer que deux élèves connaissent exactement le même nombre de stagiaires.

Solution de l'exercice 1
Ici, les tiroirs sont le nombre d'élèves connus, et les élèves sont les chaussettes. Soit n le nombre d'élèves. *A priori*, chacun peut connaître entre 0 et $n-1$ personnes, ce qui fait n tiroirs. Cependant, on remarque que les tiroirs 0 et $n-1$ ne peuvent pas être simultanément remplis : s'il y a un élève qui ne connaît personne (tiroir 0), alors aucun ne peut connaître tout le monde (tiroir $n-1$), et réciproquement. Ainsi, les n élèves sont répartis dans $n-1$ tiroirs. On peut donc appliquer le principe des tiroirs et conclure qu'il y en a nécessairement au moins 2 dans le même tiroir, autrement dit qui connaissent le même nombre de personnes.

Remarque 6.
Ce résultat est connu sous le nom de *lemme des poignées de mains*. On peut remplacer les élèves qui se connaissent par des personnes qui se serrent la main, des villes reliées entre elles par des routes, ... Il est notamment utile en théorie des graphes.

Exercice 2
Soit une grille de taille $n \times n$. Peut-on remplir la grille avec un 0, 1 ou -1 dans chaque case, de sorte que la somme des nombres soit différente sur chaque ligne, chaque colonne et chaque diagonale ?

Solution de l'exercice 2
Dans une grille de taille $n \times n$, il y a n lignes, n colonnes et 2 diagonales donc on a besoin de $2n+2$ sommes différentes. Or la somme de n nombres choisis dans $\{-1, 0, 1\}$ est comprise entre $-n$ et n, ce qui fait $2n+1$ valeurs. D'après le principe des tiroirs, il y a nécessairement deux sommes égales.

Exercice 3
On choisit 13 entiers distincts entre 1 et 37. Montrer qu'on peut en trouver quatre parmi eux, deux à deux distincts, tels que la somme de deux d'entre eux soit égale à la somme des deux autres.

Solution de l'exercice 3
On peut former $13(13-1)/2 = 78$ paires d'entiers distincts parmi ceux tirés. Or leur somme est

comprise entre $1 + 2 = 3$ et $36 + 37 = 73$, ce qui fait 71 valeurs différentes. D'après le principe des tiroirs, il y a donc bien deux paires distinctes qui ont la même somme. Il reste à vérifier que les 4 nombres ainsi choisis son bien deux à deux distincts. Mais si les deux paires ont un nombre en commun, le deuxième est commun également puisque la somme est la même. Ceci est exclu par l'hypothèse que les deux paires sont différentes. Ainsi, les quatre nombres sont bien deux à deux distincts et vérifient la propriété voulue.

Exercice 4
On tire 51 nombres entre 1 et 100. Montrer que l'on peut en trouver deux tels que l'un des deux divise l'autre.

Solution de l'exercice 4
Tout entier naturel peut s'écrire sous la forme $n = 2^k m$ avec k entier et m impair (la *partie impaire* de n). Si n est entre 1 et 100, il y a 50 possibilités pour m (nombre d'entiers impairs entre 1 et 100). D'après le principe des tiroirs, si on choisit 51 nombres entre 1 et 100, il y en a donc deux qui ont la même partie impaire m. Ils s'écrivent donc sous la forme $a = 2^k m$ et $b = 2^l m$ pour deux entiers distincts $k < l$. On a alors $a \mid b$, ce qui conclut.

Exercice 5 (IMO 1972)
Montrer que dans tout ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres, on peut extraire deux sous-ensembles disjoints (donc non vides) de même somme.

Solution de l'exercice 5
Soit E un ensemble de 10 entiers naturels à deux chiffres. On peut en former $2^{10} - 1 = 1023$ sous-ensembles non vides et la somme des éléments d'un sous-ensemble est un nombre entre 10 et $99 + 98 + \cdots + 90 = 946$, ce qui fait au plus 935 sommes possibles. D'après le principe des tiroirs, il existe donc deux sous-ensembles différents qui ont la même somme. On peut ensuite enlever les éléments qu'ils ont en commun (ce qui ne peut vider complètement aucun des deux sous-ensembles), et on obtient bien deux sous-ensembles disjoints de même somme.

Exercice 6
On colorie le plan en noir et blanc, sans règle particulière. Montrer que quelle que soit la distance d que l'on se donne, on peut trouver deux points de la même couleur distants de d exactement.

Solution de l'exercice 6
Prenons un nombre d et un triangle équilatéral ABC dans le plan. D'après le principe des tiroirs, deux des sommets sont de la même couleur, et sont bien distants de d.

Exercice 7
Soit n un entier naturel strictement positif. Montrer qu'il existe deux entiers naturels a, b tels que $1 \leqslant b \leqslant n$ et que

$$|a - b\sqrt{2}| \leqslant \frac{1}{n}$$

NB : pour un résultat plus général, voir l'exercice 15.

Solution de l'exercice 7
Posons $x_k = \lfloor k\sqrt{2} \rfloor$ et $y_k = k\sqrt{2} - x_k$ pour $k = \{0, 1, \ldots, n\}$. Si de plus $k > 0$, on définit l'intervalle $I_k = [(k-1)/n, k/n]$. Ceci fait n intervalles qui recouvrent tout $[0, 1]$ et $n + 1$ nombres b_k qui

sont dans $[0, 1]$ par définition. D'après le principe des tiroirs, il existe deux indices différents $0 \leqslant i < j \leqslant n$ et un intervalle I_k tel que b_i et b_j soient tous deux dans I_k. On a alors

$$\frac{1}{n} \geqslant |b_i - b_j| = |(a_i - i\sqrt{2}) - (a_j - j\sqrt{2})| = |(a_i - a_j) - (i - j)\sqrt{2}| = |a - b\sqrt{2}|$$

Avec $a = a_i - a_j$ et $b = i - j$.

Exercice 8
On place 33 pions sur un échiquier de 8 lignes et 8 colonnes. Montrer qu'il existe 3 pions qui forment un 'L' (ou "coin").

Solution de l'exercice 8
On divise l'échiquier en 16 petits carrés 2×2. D'après le principe des tiroirs, il existe 3 pions dans le même carré. Ils forment nécessairement un 'L' comme voulu.

Exercice 9
On place 500 confettis sur une table de $2\text{m} \times 1\text{m}$. Montrer que l'on peut trouver 3 confettis qui délimitent un triangle d'aire inférieure à 50cm^2.

Solution de l'exercice 9
On commence par diviser la table en 200 carrés de $10\text{cm} \times 10\text{cm}$. Par le principe des tiroirs, on peut en trouver un qui contient trois confetti. Il faut ensuite un peu de géométrie pour montrer que l'aire du triangle délimité est inférieure à la moitié de celle du carré. On peut s'en rendre compte par exemple en découpant le triangle en deux par une droite parallèle à un côté du carré et passant par un sommet du triangle. Cela donne deux triangles avec un côté en commun (base), de longueur b au plus 10cm. La somme des hauteurs h_1 et h_2 des deux triangles est aussi au plus 10cm. Donc l'aire du grand triangle est

$$\frac{bh_1}{2} + \frac{bh_2}{2} = \frac{1}{2}b(h_1 + h_2) \leqslant \frac{1}{2}100\text{cm}^2 = 50\text{cm}^2$$

Exercice 10
On considère 6 points du plan, tels que 3 quelconques d'entre eux ne sont jamais alignés. On colorie tous les segments entre eux en rose bonbon ou jaune canari. Montrer qu'il existe un triangle monochrome.

Solution de l'exercice 10
Notons A un des six sommets. Il y a donc 5 segments qui partent de A. D'après le principe des tiroirs, il y en a 3 de la même couleur, par exemple jaune canari. On appelle B, C, D les sommets rejoints par ces segments. Si le triangle BCD est entièrement rose bonbon, on a bien trouvé un triangle monochrome. Sinon, un de ses côtés est jaune canari aussi, par exemple $[BC]$. Le triangle ABC est alors complètement jaune canari.

Exercice 11
On considère n entiers naturels $a_1 \leqslant \ldots \leqslant a_n \leqslant 2n$ tels que pour tout $i, j \in \{1, \ldots, n\}$ avec $i \neq j$, le PPCM $a_i \vee a_j$ soit strictement plus grand que $2n$. Montrer que $a_2 > \lfloor 2n/3 \rfloor$.

Solution de l'exercice 11
Raisonnons par contraposée en supposant que $a_1 \leqslant \lfloor 2n/3 \rfloor$. Dans ce cas, $3a_1 \leqslant 2n$. Les $n + 1$

entiers positifs de l'ensemble $S = \{2a_1, 3a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ sont alors compris entre 1 et $2n$. Comme dans la solution de l'exercice 4, on remarque que les parties impaires des éléments de S sont comprises entre 1 et $2n-1$. D'après le principe des tiroirs, il existe deux éléments de S qui ont la même partie impaire. Notons au passage que ce ne peut pas être $2a_1$ et $3a_1$. Comme dans 4, on en conclut que l'un divise l'autre, qui est donc leur PPCM, et qui est inférieur ou égal à $2n$. Si ces deux éléments sont a_i, a_j avec $i, j \geqslant 2$, on voit que cela contredit l'énoncé. Si ces deux éléments sont a_i ($i \geqslant 2$) et ka_1 pour $k \in \{2, 3\}$, on obtient que

$$2n \geqslant ka_1 \vee a_i \geqslant a_1 \vee a_i$$

ce qui contredit encore l'énoncé.

Exercice 12 (Théorème d'Erdös-Szekeres)
Soit $(a_0, \ldots, a_{mn})$ une suite de $mn+1$ nombres réels. Montrer que l'on peut extraire :

soit une sous-suite croissante de longueur $m+1$

soit sous-suite décroissante de longueur $n+1$.

NB : pour obtenir une suite extraite, on peut retirer des termes de la suite de départ mais pas les réordonner. Par exemple, (a_2, a_5, a_6, a_8) est extraite de $(a_1, a_2, \ldots, a_{10})$ mais (a_2, a_3, a_7, a_5) ne l'est pas.

Solution de l'exercice 12
Pour $k \in \{0, \ldots, mn\}$, Notons

c_k la longueur de la plus longue sous-suite croissante commençant par a_k

d_k la longueur de la plus longue sous-suite décroissante commençant par a_k

Supposons par l'absurde que pour tout k, on a $1 \leqslant c_k \leqslant m$ et $1 \leqslant d_k \leqslant n$. D'après le principe des tiroirs il existe deux indices $k < l$ tels que $c_k = c_l$ et $d_k = d_l$. Or si $a_k \leqslant a_l$, on peut rajouter a_k au début d'une suite croissante de longueur c_l commençant à a_l et obtenir une suite croissante de longueur $c_l + 1 > c_k$ commençant à a_k, ce qui contredit la maximalité de c_k. De même, si $a_k > a_l$ on peut contredire la maximalité de d_k. L'hypothèse est donc absurde et il existe un indice k tel que $c_k > m$ ou $d_k > n$.

Exercice 13 (Application du théorème d'Erdös-Szekeres)
Soit n points dans le plan. Montrer que l'on peut en choisir au moins $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$ tel que 3 quelconques d'entre eux ne forment pas de triangle équilatéral.

Solution de l'exercice 13
Notons (x_i, y_i) les coordonnées des points dans un repère quelconque. On peut choisir le repère tel que les x_i et les y_i soient deux à deux distincts (il suffit d'éliminer un nombre fini de repères dont les axes sont parallèles à une droite formée par deux des n points). Quitte à les renommer, on peut supposer que $x_1 < \cdots < x_n$. D'après le théorème de Erdös-Szekeres 12, on peut extraire une sous-suite monotone de y_i de longueur $\lfloor \sqrt{n} \rfloor$. Les points correspondants ne peuvent pas former de triangle équilatéral.

Exercice 14
Montrer que le produit de cinq entiers consécutifs (strictement positifs) ne peut pas être un carré.

Solution de l'exercice 14
Soit $a \in \mathbb{N}^*$ un entier (strictement positif). On note $a_i = a + i$ pour $i \in \{0, \dots, 4\}$. Supposons que le produit $a_1 \dots a_4$ soit un carré. Si l'un des a_i contient un facteur premier $p \geqslant 5$, les autres ne peuvent pas le contenir car leur différence est strictement inférieure à 5. Donc, comme le produit est un carré, p a une puissance paire dans la décomposition en facteurs premiers de a_i. Selon la parité des puissances de 2 et 3, chacun des a_i est donc dans un des cas suivants :

i un carré

ii 2 fois un carré

iii 3 fois un carré

iv 6 fois un carré

D'après le principe des tiroirs, il existe $i \neq j$ tel que a_i et a_j sont dans le même cas. Mais s'il s'agit des cas (ii), (iii) ou (iv), $|a_i - a_j| \geqslant 6$, ce qui est impossible. Si les deux nombres sont dans la catégorie (i), ce ne peut être que $a_0 = 1$ et $a_4 = 5$ (seuls carrés à distance inférieure à 5). Mais

$$1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 = 5! = 120$$

n'est pas un carré.

Il est donc impossible de trouver cinq nombres consécutifs dont le produit soit un carré.

Anecdote historique : le résultat suivant est la première utilisation connue du principe des tiroirs pour démontrer un résultat mathématique, au milieu du $XIX^{\text{è}}$ siècle.

Exercice 15 (Approximation quadratique des irrationnels par des rationnels)
Soit x un nombre irrationnel positif. Montrer qu'il existe une infinité de fractions $\frac{p}{q}$ telles que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q^2}$$

Solution de l'exercice 15
Fixons $n \in \mathbb{N}^*$ et notons a_i la partie décimale de ix pour $i \in \{0, \dots, n\}$, autrement dit $a_i = ix - \lfloor ix \rfloor$. On a $0 < a_i < 1$. Divisons l'intervalle $[0, 1]$ en sous-intervalles $I_k = [(k-1)/n, k/n[$ pour $k \in \{1, \dots, n\}$. D'après le principe des tiroirs, il existe i, j tel que a_i et a_j sont dans le même I_k. Comme dans la solution de l'exercice 7, on pose $q = |i - j|$ et $p = \lfloor qx \rfloor$, et on obtient

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| = \frac{1}{q}|qx - p| < \frac{1}{q}\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{q^2}$$

On remarque aussi que

$$\left| x - \frac{p}{q} \right| < \frac{1}{q}\frac{1}{n} \leqslant \frac{1}{n}$$

Ce qui permet d'assurer qu'il existe une infinité de telles fractions puisque l'on peut prendre n aussi grand que l'on veut et donc rendre l'approximation aussi précise que possible.

3 Nombres premiers (Xavier)

Définition 1.
Un nombre premier est un entier $p \geqslant 2$ dont les seuls diviseurs positifs sont 1 et lui-même.

Exemple 2.
Les plus petits nombres premiers sont $2, 3, 5, 7, 11, 13, 17, \ldots$

En revanche, 4 n'est pas premier car il est divisible par 2. -2 n'est pas premier car il est négatif. 0 n'est pas premier, car il est divisible par tous les entiers. 1 n'est par convention pas premier.

Exercice 1
Quels sont les p tels que $p, p+2, p+4$ sont tous premiers ?

Solution de l'exercice 1
Nécessairement p, $p+2$ ou $p+4$ est multiple de 3, donc égal à 3. or $p \geqslant 2$, donc $p = 3$. Réciproquement, $p = 3$ est solution.

Lemme 3.
Soit $n \geqslant 2$, et soit p le plus petit diviseur supérieur ou égal à 2 de n. Alors p est premier.

Démonstration. Soit d un diviseur positif de p. Si $d \neq 1$, on a $d \geqslant 2$ (d n'est pas nul car d divise n, et n non nul). Puisque d divise p et p non nul, on a $d \leqslant p$. Mais d'autre part d divise p, donc d divise n. Le choix de p assure alors que $d \geqslant p$, donc $d = p$. Donc p est premier. □

On en déduit en particulier que tout entier supérieur ou égal à 2 possède un diviseur premier !

Théorème 4.
Il existe une infinité de nombres premiers.

Démonstration. Supposons par l'absurde qu'il n'y a qu'un nombre fini de nombres premiers, disons $p_1, \ldots, p_n$, et posons $N = p_1 \ldots p_n + 1$. Soit p un diviseur premier de N. Il est clair que p ne peut pas être l'un des $p_1, \ldots, p_n$, ce qui fournit la contradiction désirée. □

Il n'existe (en tout cas à ce jour) pas de formule pour trouver les nombres premiers. En général, pour montrer qu'un nombre est premier, on se contente de vérifier qu'il n'a pas d'autre diviseur premier que lui-même...

Exemple 5.
127 est-il premier ? Il n'est pas divisible par 2, 3, 5 ou 11. On vérifier facilement qu'il n'est pas non plus divisible par 7. En fait, il n'y a pas besoin d'effectuer davantage de vérifications ! En effet, si 127 n'était pas premier, il posséderait un diviseur a strictement compris entre 1 et 127. On pourrait écrire $127 = a \cdot b$, avec $1 < a, b < 127$. Mais alors $a \leqslant \sqrt{127}$ ou $b \leqslant \sqrt{127}$. Par symétrie, on peut supposer $a \leqslant \sqrt{127}$. Alors a possède un diviseur premier p, qui est à son tour inférieur ou égal à $\sqrt{127}$. Il suffit donc de vérifier qu'aucun nombre premier inférieur ou égal à $\sqrt{127}$ ne divise 127, et comme $\sqrt{127} < 12$, il suffit de tester tous les nombres premier inférieurs ou égaux à 11.

Exercice 2

1. Montrer que tout nombre premier supérieur ou égal à 3 s'écrit de façon unique $4k-1$ ou $4k+1$ (avec $k \geqslant 1$).
2. Montrer qu'il y a une infinité de nombres premiers de la forme $4k-1$.

Solution de l'exercice 2

— Par division euclidienne, l'unicité est claire. Pour l'existence, il suffit de vérifier qu'un nombre premier supérieur ou égal à 3 n'a jamais pour reste 0 ou 2 dans la division euclidienne par 4. Mais si c'était le cas, il serait multiple de 2, ce qui est absurde.

— Supposons qu'il n'y en a qu'un nombre fini, et notons-les $4k_1-1, \dots, 4k_n-1$. Posons $N = 4(4k_1-1)\dots(4k_n-1)-1$. Soit d le plus petit diviseur positif de la forme $4k-1$ de N. Soit p un diviseur premier de d, et écrivons $d = p \cdot \delta$. On a $p \geqslant 3$ car N impair. De plus, p n'est clairement pas de la forme $4m-1$ (sinon, ce serait l'un des $4k_i-1$, mais aucun d'entre eux ne divise n). Donc p s'écrit $4l+1$. Écrivons à présent $\delta = 4l' + \alpha$, avec $\alpha = \pm 1$ (il est clair que δ est impair). Alors $d = p\delta = (4l+1)(4l'+\alpha) = 4(4ll' + l + l') + \alpha$, donc $\alpha = -1$. Mais alors δ est un diviseur de N de la forme $4k-1$, et $\delta < d$, absurde.

Exercice 3
Montrer que, si $2^n - 1$ est premier, alors n est premier. La réciproque est-elle vraie ?

Solution de l'exercice 3
Si n n'est pas premier, alors $n = 0$, $n = 1$ ou $n = ab$ avec $a, b > 1$. Clairement $2^0 - 1, 2^1 - 1$ ne sont pas premiers. Puis $2^{ab} - 1 = (2^a - 1)(2^{a(b-1)} + 2^{a(b-2)} + \dots + 2^a + 1)$, et comme $a, b > 1$, les deux facteurs sont strictement plus grands que 1, donc $2^n - 1$ n'est pas premier.

La réciproque est fausse : si on prend par exemple $n = 11$, alors $2^{11} - 1 = 2047 = 23 \times 89$ n'est pas premier.

Exercice 4
Montrer que, si $2^n + 1$ est premier, alors n est une puissance de 2.

Exercice 5
Si n n'est pas une puissance de 2, alors n possède un diviseur a impair. Écrivons $n = ab$. Alors $2^n + 1 = (2^b)^a + 1 = (2^b + 1)((2^b)^{a-1} - (2^b)^{a-2} + \dots - 2^b + 1)$. Comme $b \geqslant 1, a > 1$, les deux facteurs sont strictement plus grands que 1.

Les nombres de la forme $2^{2^n} + 1$ sont appelés nombres de Fermat. Celui-ci avait conjecturé qu'ils étaient tous premiers, et c'est bien le cas pour $n = 0, 1, 2, 3, 4$. En revanche, ce n'est pas le cas pour $n = 5$ (mais le nombre qu'on obtient est 4 294 967 297, dont le plus petit diviseur premier est 641...)

Voyons maintenant comment se comportent les nombres premiers vis-à-vis du pgcd et de la divisibilité.

Proposition 6.
Soient p, q des nombres premiers, a, b des entiers.

1. Si p ne divise pas a, alors a et p sont premiers entre eux.
2. Si p divise q, alors $p = q$.
3. Si $p \neq q$, alors p et q sont premiers entre eux.

Démonstration.

1. Soit d le pgcd de a et p. On a d positif et d divise p, donc d vaut 1 ou p. Mais d divise a, et p ne divise pas a, donc $d \neq p$. Donc $d = 1$.
2. Si p divise q, alors p vaut 1 ou q. Mais p est premier, donc il ne vaut pas 1. Donc $p = q$.
3. Si $p \neq q$, la contraposée du point précédent assure que p ne divise pas q. Le premier point donne alors que p et q sont premiers entre eux.

□

Proposition 7 (Lemme de Gauss)**.**
Soient $a, b, c \in \mathbb{Z}$ tels que a divise bc. On suppose de plus que a et b sont premiers entre eux. Alors a divise c.

Démonstration. Soient $u, v \in \mathbb{Z}$ tels que $au + bv = 1$, et soit $k \in \mathbb{Z}$ tel que $bc = ka$. Alors $c = (au + bv)c = auv + (bc)v = a(uc + kv)$, ce qui conclut. □

Proposition 8 (Lemme d'Euclide)**.**
Soient p un nombre premier, $a, b \in \mathbb{Z}$. Si p divise ab, alors p divise a ou p divise b.

Démonstration. Supposons que p ne divise pas a. Alors p est premier avec a. D'après le lemme de Gauss, p divise b. □

Montrons à présent le théorème fondamental de l'arithmétique. Ce théorème dit que les nombres premiers, qui sont par définition des "briques élémentaires" pour la multiplication, permettent de construire tous les entiers naturels.

Théorème 9 (Théorème fondamental de l'arithmétique)**.**
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Il existe des nombres premiers $p_1 < \cdots < p_r$ ($r > 0$) et des entiers $\alpha_1, \ldots, \alpha_r > 0$ tels que $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$. De plus, les $p_1, \ldots, p_r$ et les $\alpha_1, \ldots, \alpha_r$ sont uniques.

Démonstration. Commençons par montrer l'existence. On procède par récurrence sur n. Pour $n = 2$, on prend $r = 1, p_1 = 2, \alpha_1 = 1$.

Soit ensuite $n \geqslant 3$, et supposons l'existence vérifiée pour tout $k < n$. Soit p un diviseur premier de n, et écrivons $n = kp$. On applique l'hypothèse de récurrence à k, ce qui conclut.

Montrons maintenant l'unicité. Supposons que $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r} = q_1^{\alpha_1} \ldots q_s^{\alpha_s}$, avec $p_1 < \ldots p_r, q_1 < \ldots q_s$ premiers. On a p_i divise n pour tout i, et si p_i était différent de tous les q_j le lemme d'Euclide fournirait une contradiction. Donc p_i est l'un des q_j. Réciproquement, chaque q_j est l'un des p_i, donc les p_i et les q_j sont les mêmes, donc $r = s$ et $p_1 = q_1, \ldots, p_r = q_r$. On peut alors diviser par $p_1 \ldots p_r$ et raisonner par récurrence. □

L'existence et l'unicité sont toutes les deux extrêmement importantes : ce n'est pas pour rien que ce théorème s'appelle théorème **fondamental** de l'arithmétique !

Exercice 6
Soit $n \geqslant 2$, qu'on écrit $n = p_1^{\alpha_1} \ldots p_r^{\alpha_r}$.

1. Déterminer les diviseurs de n.
2. Combien y en a-t-il ?

On peut à présent introduire la valuation p-adique :

Définition 10.
Soient p un nombre premier et $n \in \mathbb{N}^*$ un entier. La *valuation p-adique* de n, notée $v_p(n)$, est l'exposant de p dans la décomposition de n en produit de facteurs premiers (si p n'y apparaît pas, on pose $v_p(n) = 0$).

Il s'agit du "nombre de fois que n contient p", ie du nombre de fois qu'il faut diviser n par p pour obtenir un nombre qui ne soit pas multiple de p.

Proposition 11.
Soient p un nombre premier, $a, b \in \mathbb{N}^*$ des entiers, et $k \in \mathbb{N}$. Alors :

1. $v_p(a) = 0$ si et seulement si p ne divise pas a, si et seulement si p et a sont premiers entre eux.
2. $v_p(ab) = v_p(a) + v_p(b)$
3. $v_p(a^k) = kv_p(a)$
4. Soit d le pgcd de a et b. Alors $v_p(d) = \min(v_p(a), v_p(b))$.
5. a divise b si et seulement si, pour tout q premier, on a $v_q(a) \leqslant v_q(b)$.

Exercice 7
Trouver les $x, y \in \mathbb{N}^*$ et les p premiers tels que $\frac{1}{x} - \frac{1}{y} = \frac{1}{p}$.

Solution de l'exercice 4
On a $x, y, p > 0$, donc $\frac{1}{x} > \frac{1}{p}$, donc $x < p$. Réécrivons à présent l'équation $xy = p(y - x)$. On a donc $p \mid xy$, et p ne divise pas x, donc p divise y. On peut donc écrire $y = kp$, et l'équation devient $p(kp - x) = kpx$, puis $kp - x = kx$ et donc $kp = x(k + 1)$. Donc, de même, p divise $k + 1$. D'autre part, k divise $(k + 1)x$, donc d'après le lemme de Gauss k divise x. En particulier $k \leqslant x < p$. Donc $k = p - 1$, d'où $x = p - 1$. Ainsi $x = p - 1$ et $y = p(p - 1)$.
Réciproquement, il est clair que $x = p - 1$ et $y = p(p - 1)$ est solution.

4 Invariants/pavages/coloriages (Maena)

Invariants
Un invariant est une quantité (qui peut-être un nombre entier, un nombre réel, un nombre modulo n, un ensemble de nombres, une suite de nombres, ...), qui reste inchangée pendant les différentes étapes d'un processus. Cela permet de démontrer qu'une configuration n'est pas accessible à partir d'une autre.

Exercice 1
On écrit les nombres 2,3,5,7,11 sur un tableau. En une opération, on peut remplacer deux nombres de même parité par deux copies de leur moyenne arithmétique. Peut-on obtenir 5 nombre égaux après un certain nombre d'opérations ?

Solution de l'exercice 1
Pour trouver une quantité invariante, on considère l'opération qui est appliquée et ce qu'elle conserve. On remplace a et b par deux fois $\frac{a+b}{2}$. On peut remarquer que $a + b = 2 \times \frac{a+b}{2}$. Donc la somme des nombres écrits au tableau est invariante par opération. Si on peut arriver à 5 nombres égaux, par exemple m, alors la somme totale sera $5m$, donc divisble par 5. Or la

somme est 28 qui n'est pas divisible par 5, donc on ne pourra jamais arriver à cinq nombres égaux.

Monovariants Une légère variation de la notion d'invariant et la notion de monovariant. Cela concerne cette fois-ci une quantité qui varie de manière régulière, généralement qui diminue toujours (ou alors augmente toujours) à chaque opération d'un processus. Identifier un monovariant permet souvent de démontrer qu'un processus termine en un nombre fini d'opérations, ou qu'il n'est pas possible d'atteindre une certaine configuration depuis une configuration initiale donnée.

Exercice 2
Soit $2n$ points du plan. Montrer qu'on peut toujours les relier par paire sans qu'aucun segment ne s'intersecte.

Solution de l'exercice 2
Plusieurs solutions sont possibles, une qui vient naturellement consiste à faire un balayage. Ici, on va présenter une solution utilisant un monovariant.

On considère une configuration où il y a des intersections, et on voudrait les "décroiser". C'est notre opération, et on cherche une quantité qui décroît. Une première idée pourrait être "le nombre d'intersection". Cependant décroiser deux segments pourraient créer une autre intersection, donc ce n'est pas satisfaisant.

En revanche, on peut constater que la somme des longueurs de chaque segment va décroître strictement, lorsqu'on va décroiser deux segments (par inégalité triangulaire).

Le nombre de configurations est fini (car on a un nombre de points fini), donc il y a forcément une configuration de longueur minimale. Cette configuration comporte nécessairement aucun croisement, autrement on pourrait le décroiser et la longueur diminuerait, absurde par choix de la configuration.

Pavages et coloriages

Un certain nombre de problèmes de combinatoire sont des problèmes de "pavage". Dans un tel problème, l'objectif est de recouvrir une forme avec des tuiles de types donnés. Pour prouver l'impossibilité d'un tel recouvrement, il est souvent utile de considérer un coloriage, c'est-à-dire colorier chaque case d'une certaine couleur. On analyse ensuite pour chaque tuile quelles couleurs elle recouvre pour arriver à la conclusion. Lorsqu'on considère un tel problème, il est toujours utile de compter le nombre de cases de la forme, ainsi que de considérer le coloriage "en échiquier".

Pour montrer qu'un coloriage est possible, il faudra alors exhiber une construction, soit directement, soit par récurrence.

Exercice 3
On considère un échiquier, dont on découpe la case en haut à gauche et la case en bas à droite. Peut-on paver les 62 cases restantes avec des dominos ?

Solution de l'exercice 3
Une première remarque à se faire quand on considère des pavages, est de regarder sur le nombre de cases total est un multiple du nombre de cases des pièces. Sinon directement l'échéquier ne sera pas pavable. Ici c'est bien la cas.

Il faut essayer sur des petits cas pour avoir l'intuition de ce qu'il se passe. Ici, on va montrer que ce n'est pas possible.

On considère une coloriage en damier. Ce coloriage comporte 30 cases blanches et 32 cases noires. Or un domino recouvre un case de chaque couleur exactement. Donc à la fin, il restera forcément 2 cases noires non couvertes, donc l'échéquier n'est pas pavable.

– Partie TD –

Exercice 4
Soit n un entier positif impair. On écrit sur une tableau tous les nombres de 1 à $2n$. A chaque tour on peut choisir deux nombres a et b écrits sur le tableau et les remplacer par $|a-b|$. Quelle est la parité du dernier nombre restant ?

Exercice 5
On considère le tableau de signes suivant :

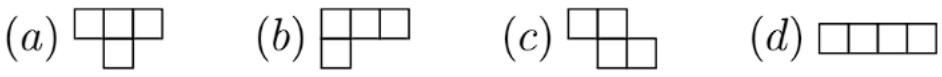
```
+ + + -
- + + -
+ + + -
+ - - -
```

Une opération consiste à choisir une ligne ou une colonne et inverser les signes présents dedans. Est-il possible d'arriver en un nombre fini de coups à un tableau rempli de signes + ?

Exercice 6
Pour quels $n \geqslant 1$ peut-on paver une grille carrée de taille $n \times n$ avec des pièces en forme de T (chacune recouvre donc 4 cases de la grille) ? Sans qu'elles ne se recouvrent ni débordent. Les rotations sont autorisées.

Exercice 7
Un dragon a 100 têtes. Un chevalier peut couper exactement, soit 15, soit 17, soit 20, soit 5 têtes avec un coup d'épée. Il repousse alors respectivement 24, 2, 14 et 17 nouvelles têtes. Si toutes les têtes sont coupées, le dragon meurt. Peut-il mourir ?

Exercice 8
On considère une grille 10×10. Pour chaque type de pièce de la figure ci-dessus, dire si l'on peut recouvrir la grille avec uniquement ce type de pièces (rotations autorisées).



Exercice 9
On place aléatoirement cinq 1 et quatre 0 sur un cercle. A chaque tour on peut mettre un 0 entre deux chiffres identiques ou un 1 entre deux chiffres différents. Puis on efface ces deux chiffres. Peut-on arriver à une configuration avec uniquement des 0 ?

Exercice 10
En arrivant à Valbonne, chaque élève a au plus 3 amis. Pour qu'ils apprennent à se connaître,

les animatheux veulent les séparer en deux groupes de manière à ce que chaque élève ait au plus un ami dans son groupe. Cela est-il possible ?

Exercice 11
On prend une grille $2^n \times 2^n$ et on supprime une case quelconque dessus. Peut-on recouvrir la nouvelle grille avec des L-triominos ?

Exercice 12
On considère des "mots " écrits avec les lettres x, y, z et t. On autorise les trois transformations suivantes : $xy \mapsto yyx$, $xt \mapsto ttx$ et $yt \mapsto ty$. Les mots suivants sont-ils équivalents ?

(i) $xxyy$ et $xyyyyx$,

(ii) $xytx$ et $txyt$,

(iii) xy et xt.

Exercice 13
On peut appliquer les opérations suivantes au polynôme $ax^2 + bx + c$: échanger a et b ou remplacer x par $x + t$ avec t un réel. Peut-on transformer $x^2 - x - 2$ en $x^2 - x - 1$ uniquement en itérant ces opérations ?

Exercice 14
Sur une grille 2022×2022, on peut bouger un jeton d'une case vers une autre si ces deux cases ont un côté commun. Est-il possible, en partant avec le jeton dans le coin inférieur gauche, d'amener le jeton dans le coin supérieur droit en passant une et une seule fois par toutes les cases ?

Solution de l'exercice 4
Plusieurs invariants sont possibles.

On considère nous la parité de la somme de tous les nombres écrits au tableau. En effet, si on remplace a et b par $|a - b|$, dans la somme totale, on a remplacé $a + b$ par $|a - b|$ et la parité de ces deux quantités est la même. Ainsi on ne change pas la parité de la somme totale.

La somme initiale est $\frac{2n(2n+1)}{2}$, or n est impair, donc la somme est impair (n et $2n+1$ impairs). Donc le dernier nombre sera impair.

5 Modulos (Jean)

Plan du cours

1. Modulos
2. Calculs et modulos
3. Le cas des carrés
4. Inverses modulo n
5. Petit théorème de Fermat

On renvoie vers les cours de la POFM pour le contenu du cours.

Exercices

Exercice 1
Soit n un entier naturel.
Montrer que $n-1$ divise $n^n - 7n + 5n^{2024} + 3n^2 - 2$.

Solution de l'exercice 1
On travaille modulo $n-1$.
On a $n \equiv 1[n-1]$ et par conséquent

— $n^n \equiv 1^n \equiv 1[n-1]$
— $7n \equiv 7[n-1]$
— $5n^{2024} \equiv 5 \times 1^{2024} \equiv 1[n-1]$
— $3n^2 \equiv 3 \times 1^2 \equiv 3[n-1]$

et donc

$$n^n - 7n + 5n^{2024} + 3n^2 - 2 \equiv 1 - 7 + 5 + 3 - 2 \equiv 0[n-1]$$

c'est à dire $n-1$ divise $n^n - 7n + 5n^{2024} + 3n^2 - 2$.

Exercice 2 (Critères de divisibilité)

1. Soit n un entier naturel, q et r respectivement le quotient et le reste de la division euclidienne de n par 10.
   Montrer que 7 divise n si et seulement si 7 divise $q - 2r$.
2. En déduire que 2023 est divisible par 7.
3. Proposer un critère similaire pour la divisibilité pour la divisibilité par 13.

Solution de l'exercice 2

1. Avec q et r on a

   $$n = 10q + r.$$

   Or $10 \times (-2) \equiv 1[7]$ et par conséquent

   $$10q + r \equiv 0[7] \Leftrightarrow q - 2r \equiv 0[7]$$

   c'est à dire que $10q + r$ est divisible par 7 ssi $q - 2r$ divisible par 7.
2. On a $2023 = 10 \times 202 + 3$ et $202 - 2 \times 3 = 196$.
   On recommence $196 = 10 \times 19 + 6$ et $19 - 2 \times 6 = 7$ qui est divisible par 7.
   Donc 196 est divisible par 7, d'où 2023 est divisible par 7.
   Alternativement on aurait bien évidemment pu effectuer une division euclidienne, $2023 = 7 \times 289 + 0$.

3. On voit que dans l'argument précédent le point clef est que -2 est l'inverse de 10 modulo 7.
   On cherche de même un inverse de 10 modulo 13.
   On peut par exemple déterminer par algorithme d'Euclide étendue la relation de Bézout $13 \times (-3) + 10 \times 4 = 1$ d'où $10 \times 4 \equiv 1[13]$.
   Alternativement on aurait pu dresser la table de multiplication de 10 (ou de -3) modulo 13 pour obtenir le même résultat.
   Par conséquent on a

$$10q + r \equiv 0[13] \Leftrightarrow q + 4r \equiv 0[13]$$

   et donc n est divisible par 13 ssi $q + 4r$ est divisible par 13.
   À titre d'exemple $2023 = 10 \times 202 + 3$, et $202 + 4 \times 3 = 214$. Ensuite $214 = 10 \times 21 + 4$ et $21 + 4 \times 4 = 37$. Comme 37 n'est pas divisible par 13, 2023 n'est pas divisible par 13.

Exercice 3
Montrer que la somme des cubes de trois nombres consécutifs est toujours divisible par 9.

Solution de l'exercice 3
Première méthode
On peut tout simplement développer.
Soit n un entier. Par la formule du binôme

$$\begin{aligned}(n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3 &= n^3 - 3n^2 + 3n - 1 + n^3 + n^3 + 3n^2 + 3n + 1\\ &= 3n^3 + 6n\\ &= 3n(n^2+2)\end{aligned}$$

et

— Si $n \equiv 0[3]$ alors $3|n$
— sinon $n \equiv \pm 1[3]$ d'où $n^2 + 2 \equiv 0[3]$.

Dans tous les cas $3 \mid n(n^2+2)$ et donc $9 \mid (n-1)^3 + n^3 + (n+1)^3$.
Deuxième méthode On regarde la table des cubes modulo 3

x mod 9	0	1	2	3	4	5	6	7	8
x^3 mod 9	0	1	8	0	1	8	0	1	8

d'où la somme de trois nombres consécutifs est toujours congrue à 0 modulo 9.

Exercice 4
Calculer le reste de la division euclidienne de $2022^{2023^{2024}}$ par 19.

Solution de l'exercice 4
On a $2022 \equiv 8[19]$.
De plus on constate que $8^6 \equiv 1[19]$.
Avec q et r tels que $2023^{2024} = 6q + r$ on a donc

$$\begin{aligned}2022^{2023^{2024}} &\equiv 8^{2023^{2024}} \quad [19]\\ &\equiv 8^{q6}8^r \quad [19]\\ &\equiv 8^r \quad [19]\end{aligned}$$

il suffit donc de déterminer le reste de la division euclidienne de 2023^{2024} par 6.

On procède de même. Comme $2023 \equiv 1[6]$ on a $2023^{2024} \equiv 1[6]$ et donc on conclut que

$$2022^{2023^{2024}} \equiv 8^1[19]$$

c'est à dire que le reste de la division euclidienne est 8 (comme $0 \leqslant 8 \leqslant 18$).

Exercice 5

En s'inspirant de la preuve d'Euclide de l'existence d'une infinité de nombre premiers

1. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4.
2. Montrer qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 5 modulo 6.

Solution de l'exercice 5

1. La remarque clef est qu'un produit de nombres congrus à 1 modulo 4 est aussi congrus à 1 modulo 4. Par conséquent (contraposée) si un produit de termes n'est pas congru à 1 modulo 4 alors l'un des facteurs n'est pas congru à 1 modulo 4.

   Soient $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers distincts de 3 et congrus à 3 modulo 4.

   Posons

   $$N = 4p_1 \times p_2 \times \cdots p_r + 3.$$

   Alors N admet (théorème fondamental de l'Arithmétique) une décomposition en facteurs premiers. Par la remarque préliminaire, ces facteurs premiers (congrus à 1 ou 3 modulo 4 car N impair) ne peuvent pas tous être congrus à 1 modulo 4 (car $N \not\equiv 1[4]$) et il existe donc q premier tel que $q \equiv 3[4]$ et $q|N$.

   De plus pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, on a $N \equiv 3[p_i]$ et par conséquent (comme p_i ne divise pas 3), p_i ne divise pas N. Enfin $N \equiv 4p_1 \times \cdots p_r[3]$ et (par théorème de Gauss) 3 ne divise pas $4 \times p_1 \times \cdots p_r$.

   On en déduit que $q \notin \{3, p_1, p_2, \dots, p_r\}$.

   On a donc montré qu'étant donné un ensemble fini de nombre premiers congrus à 3 modulo 4 on peut construire un nombre premier congru à 3 modulo 4 qui n'est pas dans cet ensemble (et différent de 3).

   Par conséquent (par l'absurde ou par argument combinatoire) il existe une infinité de nombres premiers congrus à 3 modulo 4 (et plus grands que 3).

2. On procède de même. Soient $p_1, \dots, p_r$ des nombres premiers congrus à 5 modulo 6 et distincts de 5.

   Posons

   $$N = 6p_1 \dots p_r + 5.$$

   Alors N admet une décomposition en produit facteurs premiers.

   — Comme $N \equiv 1[2]$, 2 n'est pas parmi ces facteurs.
   — Comme $N \equiv 2[3]$, 3 n'est pas parmi ces facteurs.
   — Comme 5 ne divise pas $6 \times p_1 \times \cdots p_r$ (Gauss), 5 n'est pas parmi ces facteurs.
   — Pour tout i, $N \equiv 5[p_i]$ et donc p_i n'est pas parmi ces facteurs.

Or tout nombre premier plus grand que 7 est congru à 1 ou 5 modulo 6 (car sinon divisible par 2 ou 3).

Comme un produit de facteurs tous congrus à 1 modulo 6 est aussi congru à 1 modulo 6 au moins un des facteurs premiers est congru à 5 modulo 6.

On a donc exhiber un nombre premier congru à 5 modulo 6 et n'étant pas dans $\{2, 3, 5, p_1, \dots, p_r\}$.

Comme précédemment cela permet de conclure sur l'existence d'une infinité de tels nombres premiers.

Remarque : cette méthode ne se généralise pas forcément, par exemple il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4 (cf plus loin) mais une telle preuve ne peut s'adapte pas à ce cas.

Exercice 6
Déterminer tous les entiers positifs x, y et z solutions de

$$x^2 + y^2 = 7z^2.$$

Solution de l'exercice 6
On observe que $x = y = z = 0$ est solution.

Montrons que c'est la seule.

Soit $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$ une solution. Sans perte de généralité on peut supposer $x \neq 0$.

On peut écrire modulo 7

$$x^2 = -y^2 \equiv 0 \mod 7$$

Supposons que $7 \nmid x$. Comme $7 \nmid x$, comme 7 est premier, x est inversible modulo 7.

En notant ξ un inverse de x modulo 7, i.e un entier tel que

$$x\xi \equiv 1 \mod 7$$

et en multipliant par ξ on en déduit

$$(\xi y)^2 \equiv -1 \mod 7.$$

Or la table des carrés modulo 7 est :

$x \mod 7$	0	1	2	3	4	5	6
$x^2 \mod 7$	0	1	4	2	2	4	1

et on aboutit donc à une contradiction.

Donc pour toute solution non nulle $7|x$.

Si $7|x$ alors $7|y$ et donc en posant $x = 7\tilde{x}$ et $y = 7\tilde{y}$ on obtient

$$7\tilde{x} + 7\tilde{y} = z$$

donc on peut écrire $z = 7\tilde{z}$. Et obtient alors

$$\tilde{x}^2 + \tilde{y}^2 = 7\tilde{z}^2.$$

On obtient donc une solution $(\tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{z})$ avec $0 < \tilde{x} < x$.

Par principe de descente infinie il n'existe pas de solution non nulle.

Remarque : ici le point clé est que -1 n'est pas carré modulo le nombre premier 7. Un résultat très classique est que -1 est un carré modulo le nombre premier impair p ssi $p \equiv 1 \mod 4$.

Exercice 7

Soit $p \geqslant 5$ un nombre premier.

Monter que $12|p^2 - 1$.

Solution de l'exercice 7

L'hypothèse de p premier est en fait trop forte.

On utilise seulement le fait que $2 \nmid p$ et $3 \nmid p$.

Comme p n'est pas divisible par 2, $p \not\equiv 0[4]$ et donc (cf la table des carrés modulo 4), $p^2 \equiv 1[4]$.

De même comme $p \not\equiv 0[3]$ on a (cf la table des carrés modulo 3), $p^2 \equiv 1[3]$.

Par conséquent $4|p^2 - 1$ et $3|p^2 - 1$ d'où (comme 3 et 4 premiers entre eux), $12|p^2 - 1$.

Exercice 8

1. Montrer que l'équation diophantienne
$$a^2 + b^2 = 2023$$
n'admet pas de solution.
2. Montrer que l'équation diophantienne
$$a^5 - 2b^2 = 2022$$
n'admet pas de solutions.

Solution de l'exercice 8

1. On regarde modulo 4.
Comme un carré est congru à 0 ou 1 modulo 4 on a
$$a^2 + b^2 \equiv 0,\ 1 \text{ ou } 2 \mod 4.$$
Mais
$$2023 \equiv 3 \mod 4.$$
Donc il n'y a pas de solution.
2. On regarde modulo 11.
On a $2021 \equiv 8 \mod 11$.
La table des carrés et des puissances 5èmes modulo 11 est

$x \mod 11$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
$x^2 \mod 11$	0	1	4	9	5	3	3	5	9	4	1
$x^5 \mod 11$	0	1	10	1	1	1	10	10	10	1	10

Et il est donc impossible d'avoir

$$a^5 - 2b^2 \equiv 8 \mod 11.$$

L'équation n'admet donc pas de solution.

Remarque : Pourquoi modulo 11 ? On cherche un entier n pour lequel les puissances 2 et 5 sont simples modulo n. Comme le ppcm de 2 et 5 est 10 on cherche par exemple n tel que $\varphi(n) = 22$ ce qui permet de simplifier toutes les puissances 10ème. Ici 11 convient car 11 est premier et $11 - 1 = 10$.

Exercice 9

On cherche à montre dans cet exercice le théorème de Wilson (peu utile en pratique) :
«Pour tout entier $p \geqslant 2$, p est premier si et seulement si $(p-1)! \equiv -1[p]$».

1. Soit $n \geqslant 2$ un entier non premier et qui n'est pas le carré d'un nombre premier. Montrer qu'il existe a, b entre 1 et $n-1$ et distincts tels que $n = ab$.
   En déduire que $(n-1)! \equiv 0[n]$.
2. Soit $n > 4$ un entier non premier. On suppose qu'il existe un nombre premier p tel que $n = p^2$.
   En remarquant que $n|p \times (2p)$ montrer que $(n-1)! \equiv 0[n]$.
3. Soit p un nombre premier. En regroupant les termes 2 à 2 montrer que $(p-1)! \equiv -1[p]$.
4. Conclure.

Solution de l'exercice 9

1. Soit par exemple $a \geqslant 2$ le plus petit diviseur non trivial de n (qui est donc premier) et b tel que $n = ab$.
   Comme n est composé $a, b < n$, et comme n n'est pas le carré d'un nombre premier $b \neq a$.
   De plus dans le produit

   $$(n-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times \cdots a \times \cdots \times b \times \cdots (n-1)$$

   apparait le facteur ab et donc $n|(n-1)!$.
   Par exemple modulo 8 on a

   $$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 &\equiv (2 \times 4) \times \cdots \quad [p] \\ &\equiv 0 \qquad\qquad\quad [p]. \end{aligned}$$

2. On a $p \times (2p) = 2p^2 = 2n$ qui est divisible par n.
   De plus comme $n > 4$, $p > 2$ et donc $2p < p^2 - 1$ (car $(p-1)^2 - 2 > 0$).
   Donc dans le produit

   $$(n-1)! = 1 \times 2 \times \cdots \times \cdots p \times \cdots \times 2p \times \cdots (n-1)$$

   apparait le facteur $p \times 2p$ et donc $n|(n-1)!$.
   Par exemple modulo 9,

   $$\begin{aligned} 1 \times 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 &\equiv (3 \times 6) \times \cdots \quad [p] \\ &\equiv 0 \qquad\qquad\quad [p]. \end{aligned}$$

3. Comme p est premier on a $x^2 \equiv 1[p]$ ssi $x \equiv \pm 1[p]$, c'est à dire que les seuls éléments modulo p qui sont leur propres inverses sont 1 et -1.
   Ainsi tout élément entre 2 et $p-2$ est distinct de son inverse et dans le produit
   $$2 \times 3 \times \cdots (p-2)$$
   on peut regrouper chaque élement avec son inverse pour obtenir
   $$2 \times 3 \times \cdots (p-2) \equiv 1[p].$$
   Par exemple modulo 11 on effectue le regroupement
   $$\begin{aligned} 2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6 \times 7 \times 8 \times 9 &\equiv (2 \times 6) \times (3 \times 4) \times (5 \times 9) \times (7 \times 8) \quad [p] \\ &\equiv 1 \times 1 \times 1 \times 1 \quad [p] \end{aligned}$$
   Et par conséquent en multipliant par $1 \times (p-1) \equiv -1[p]$ on en déduit
   $$(p-1)! \equiv -1[p].$$
   Une autre méthode pour démontrer ce résultat est d'utiliser des polynômes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$: comme les polynômes $X^{p-1} - 1$ et $(X-1)(X-2)\cdots(X-(p-1))$ coïncident en $p-1$ points (par le petit théorème de Fermat) et sont de degré $p-1$ on en déduit qu'ils sont égaux. Les relations de Viète entre coefficients et racines permettent alors de conclure.
4. Il reste le cas $n = 4$ à traiter !
   On obtient
   - Si p est premier, $(p-1)! \equiv -1[p]$.
   - Si $n \geqslant 6$ n'est pas premier $(n-1)! \equiv 0[n]$ (et $0 \not\equiv -1[n]$).
   - $(4-1)! \equiv 2[4]$ (et $2 \not\equiv -1[4]$).

   D'où en particulier le résultat annoncé.

Exercice 10
Montrer que pour entier $n \geqslant 1$ et tout entier a impair on a
$$a^{2^n} \equiv 1 \left[2^{n+2}\right].$$

Solution de l'exercice 10
On procède par exemple par récurrence sur $n \in \mathbb{N}^*$.

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$ on pour tout entier impair a, $a^2 \equiv 1[8]$ pour tout entier a impair.
- **Hérédité**
  Soit $n \in \mathbb{N}$ et supposons que pour tout entier a impair, $a^{2^n} \equiv 1 \left[2^{n+2}\right]$ c'est à dire que
  $$2^{n+2} \mid a^{2^n} - 1.$$
  Soit $a \in \mathbb{N}$ impair. Par identité remarquable on a la factorisation
  $$a^{2^{n+1}} - 1 = \left(a^{2^n} - 1\right)\left(a^{2^n} + 1\right)$$
  par hypothèse de récurrence, 2^{n+2} divise a^{2^n}, et par imparité de a, 2 divise $a^{2^n} + 1$.
  Par conséquent 2^{n+2+1} divise $a^{2^{n+1}} - 1$.

— **Conclusion**
Par récurrence on a bien pour entier $n \geqslant 1$ et tout entier a

$$a^{2^n} \equiv 1 \left[2^{n+2}\right].$$

On remarque que la récurrence proposée correspond en fait à la factorisation directe.

$$a^{2^n} - 1 = (a-1)(a+1)(a^2+1)(a^4+1)\cdots(a^{2^{n-1}}+1).$$

Exercice 11
Soit p un nombre premier impair.

Montrer que pour tout entier n non divisible par p, n est un carré modulo p (c'est à dire il existe a tel que $n \equiv a^2[p]$) **ssi** $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]$.

Solution de l'exercice 11
Notons

$$A = \left\{n \in [\![1, p-1]\!] \mid n \text{ est un carré modulo } p\right\}$$
$$B = \left\{n \in [\![1, p-1]\!] \mid n^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[p]\right\}.$$

Pour montrer que $A = B$ on va montrer que $A \subset B$ et qu'ils ont autant d'éléments.

— Si n est un carré modulo p, alors fixons $a \in \mathbb{Z}$ tel que $n \equiv a^2[p]$. En particulier $a \not\equiv 0[p]$.
Par conséquent $n^{\frac{p-1}{2}} \equiv a^{p-1} \equiv 1[p]$ par le petit théorème de Fermat.
Donc

$$A \subset B.$$

— Soit $n \in A$, alors il existe $a \in [\![1, p-1]\!]$ tel que $a^2 \equiv n[p]$. Mais alors on a aussi $(p-a)^2 \equiv n[p]$ et $p - a \neq a$.
Par conséquent à chaque élément de A on peut associé au moins 2 (en fait exactement 2) éléments de $[\![1, p-1]\!]$ et donc

$$A \text{ admet au plus } \tfrac{p-1}{2} \text{ éléments.}$$

— Vous verrez plus tard que la rédaction est plus aisée en utilisant le vocabulaire des polynômes et des corps finis. On propose ici une rédaction un peu floue donnant les idées générales.
On peut, de même que dans $\mathbb{R}$, factoriser tout polynôme modulo p à l'aide de ses racines (à méditer), c'est à dire que pour un polynôme P, si $P(\alpha) \equiv 0[p]$, on peut écrire $P(X) = (X-\alpha)Q(X)$ (modulo p) où Q est un autre polynôme.
Par conséquent comme tous les éléments de B sont racines de $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ modulo p, il existe un polynôme Q tel, modulo p, $X^{\frac{p-1}{2}} - 1 = \prod_{n\in B}(X-n)Q(X)$, mais alors par degré on a en particulier

$$B \text{ admet au plus } \tfrac{p-1}{2}.$$

— Les trois points précédents permettent donc de conclure que $A = B$, ce qui est bien le résultat recherché.

Exercice 12
Peut-on écrire 2023 comme la somme de trois carrés ?

Solution de l'exercice 12
On commence par constater que modulo 8 un carré est congru à 0, 1 ou 4.
La somme de 3 carrés est donc congru à 0,1,2,3,4,5 ou 6 mais ne peut pas être congrue à 7.

$x \mod 8$	0	1	2	3	4	5	6	7
$x^2 \mod 8$	0	1	4	1	0	1	4	1

Or $2023 \equiv 7[8]$ et donc 2023 ne peut pas s'écrire comme la somme de 3 carrés.

Exercice 13

Discuter selon les valeurs de $(b, c) \in \mathbb{Z}^2$ l'ensemble des solutions entières de

$$x^2 + bx + c \equiv 0\ [5]$$

d'inconnue $x \in \mathbb{Z}$.

Solution de l'exercice 13
On a $3 \times 2 \equiv 1\ [5]$ et $3^2 \equiv -1\ [5]$.
Par conséquent l'équation peut se réécrire

$$(x + 3b)^2 + c + b \equiv 0\ [5]$$

ou encore

$$(x + 3b)^2 \equiv -(c + b)\ [5]$$

Il reste alors à discuter selon la valeur de $-(c+b)$ (il s'agit exactement de la même méthode que dans le cas réel).

$x \mod 5$	-2	-1	0	1	2
$x^2 \mod 5$	-1	1	0	1	-1

— Si $-(c + b)$ n'est pas un carré modulo 5 c'est à dire si $-(c + b) \equiv 2$ ou $3[5]$ alors l'équation n'a pas de solution.

— Si $-(c+b) \equiv 0[5]$ alors l'équation admet une solution (racine double) qui est $x+3b \equiv 0[5]$ c'est à dire que l'ensemble des solutions est l'ensemble des $x \in \mathbb{Z}$ s'écrivant

$$x = 5k - 3b,\ k \in \mathbb{Z}.$$

— Si $-(c+b) \equiv 1[5]$ alors l'équation admet deux solutions modulo 5 qui sont $x+3b \equiv \pm 1[5]$ c'est à dire

$$x = 5k - 3b \pm 1,\ k \in \mathbb{Z}.$$

— Si $-(c+b) \equiv -1[5]$ alors l'équation admet deux solutions modulo 5 qui sont $x+3b \equiv \pm 2[5]$ c'est à dire

$$x = 5k - 3b \pm 2,\ k \in \mathbb{Z}.$$

Exercice 14 (Derrière le RSA)
Soient p et q deux nombres premiers distincts.

Soient e et d deux entiers tels que

$$ed \equiv 1 \left[(p-1)(q-1)\right].$$

Montrer que pour tout entier n on a

$$(M^e)^d \equiv M[pq].$$

Solution de l'exercice 14
Posons $a = ed$.

Comme $a \equiv 1[p-1]$, on a par le petit théorème de Fermat $M^{a-1} \equiv 1[p]$ donc $M^a \equiv M[p]$.

De même $a \equiv 1[q-1]$, on a $M^{a-1} \equiv 1[q]$ donc $M^a \equiv M[q]$.

Comme $p|M^a - M$ et $q|M^a - M$ et que p et q premiers entre eux on conclut que $pq|M^a - M$ c'est à dire $M^a \equiv M[pq]$.

Remarque : ce résultat est à la base de l'algorithme RSA très utilisé en cryptographie.

Exercice 15
Soit p un nombre premier impair. Montrer que -1 est un carré modulo p ssi $p \equiv 1[4]$.

En déduire qu'il existe une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Solution de l'exercice 15
Par un exercice précédent on a -1 est un carré modulo p (premier impair) ssi $(-1)^{\frac{p-1}{2}} \equiv 1[4]$ donc ssi $\frac{p-1}{2}$ est pair i.e ssi $p \equiv 1[4]$.

Soient $p_1, \ldots, p_r$ des nombres premiers.

Posons

$$N = (p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r)^2 + 1.$$

Alors N admet une décomposition en produit de facteurs premiers.

Pour tout $i \in [\![1, r]\!]$, $N \equiv 1[p_i]$ et donc p_i ne divise pas N.

De plus si q est un nombre premier qui divise N alors $(p_1 \times p_2 \times \cdots \times p_r)^2 \equiv -1[q]$ et donc q est congru à 1 modulo 4.

Par conséquent il existe un nombre premier distinct de $p_1, \ldots, p_r$ et congru à 1 modulo 4.

Et donc il y a une infinité de nombres premiers congrus à 1 modulo 4.

Exercice 16
Soient p et q deux nombres premiers distincts plus grands que 5.

1. Montrer que si $p|5^q - 2^q$ alors $q|p-1$.
2. En déduire que pq ne divise pas $(5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

Solution de l'exercice 16

1. On a $(5\times 2^{-1})^q \equiv 1[p]$ et $(5\times 2^{-1})^{p-1} \equiv 1[p]$, avec $d = (p-1)\wedge q$, par Bézout $(5\times 2^{-1})^d \equiv 1[p]$. Si $d = 1$, $3 \equiv 0[p]$. Donc $d = q$.
2. Par le même raisonnement comme $p > 3$, $p \not| 5^p - 3^p$ donc $p \mid 5^q - 3^q$ et $q \mid 5^p - 3^p$. D'où une contradiction à l'aide du premier item.

6 Principe de l'extremum (Paul)

Principe de l'extremum

Le principe de l'extremum consiste a considerer le minimum ou le maximum d'une quantite du probleme, generalement pour aboutir a une absurdite dans un raisonnement par l'absurde.

Définition 1.
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble. On dit que m est le minimum de $\mathbb{E}$ si :

- $m \in \mathbb{E}$
- Pour tout element n de $\mathbb{E}$, $m \leqslant n$

Définition 2.
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble. On dit que M est le maximum de $\mathbb{E}$ si :

- $M \in \mathbb{E}$
- Pour tout element n de $\mathbb{E}$, $M \geqslant n$

Définition 3.
Soit $\mathbb{E}$ un ensemble. On dit que m est un minorant (resp. majorant) de $\mathbb{E}$ si pour tout element n de $\mathbb{E}$, $m \leqslant n$ (resp. $m \geqslant n$)

Théorème 4.
Tout ensemble fini de nombres reels possede un maximum et un minimum.

Démonstration. On procede par recurrence sur la taille de l'ensemble. □

Remarque 5.
Le resultat est faux pour un ensemble infini, meme s'il est borne. Par exemple, l'intervalle $]0, 1[$ ne possede ni maximum ni minimum. En effet, par l'absurde, s'il possedait un minimum m, alors comme $\frac{m}{2} < m$ et $\frac{m}{2} \in]0, 1[$, on aboutit a une absurdite. 0 et 1 sont cependant un minorant et un majorant de l'ensemble respectivement.

Théorème 6.
Tout sous ensemble de $\mathbb{N}$ possede un minimum.

Exercice 1
Soit Ω un ensemble non vide de points du plan tels que chacun de ces points soit le milieu de deux autres. Montrer que Ω possede une infinité d'éléments.

Solution de l'exercice 1
Supposons par l'absurde que Ω possède un nombre fini d'éléments. Introduisons un axe des abscisses de telle sorte que deux points distincts n'aient pas la meme abscisse (ce qui est bien sur possible, il y a une infinité de directions mais un nombre fini de points). Regardons le point d'abscisse la plus grande. Il doit etre le milieu de deux autres, mais tous les points ont une abscisse strictement inferieure, ce qui constitue une absurdité.

Exercice 2
On donne $2n$ points dans le plan, trois quelconque jamais alignés. Démontrer que l'on peut construire n segments qui ne s'intersectent pas (même aux sommets) et dont les sommets sont

les points du plan.
Et avec $4n$ points en formant des quadrilatères ?

Solution de l'exercice 2
Pour cet exercice, il suffit d'introduire un axe des abscisses tel que deux points n'aient jamais la meme abscisse (c'est toujours possible puisqu'il y a une infinité de directions possibles pour l'axe et un nombre fini de points). Ensuite, on peut regrouper les points par groupes de 2 pour les segments et par groupes de 4 pour les quadrilatères, selon l'abscisse croissante.

Exercice 3
A chaque point à coordonnées entières du plan, on attribue un nombre entier strictement positif, tel que chaque nombre est égal à la moyenne arithmétique de ses quatre voisins (en haut, en bas, à gauche et à droite). Montrer que toutes les valeurs sont égales.

Solution de l'exercice 3
Considérons l'ensemble des valeurs sur ces points. C'est un ensemble d'entiers naturels, donc il possède un minimum. Considérons un point dont la valeur est ce minimum, alors ses quatre voisins doivent également prendre cette meme valeur puisqu'ils sont tous les quatre plus grands que le minimum mais somment a quatre fois le minimum. De proche en proche, tous les points prennent la meme valeur.

Exercice 4
Sept amis ont ramassé en tout cent champignons, chacun en a ramassé un nombre différent. Montrer qu'il en existe trois parmi eux qui ont ramassé à eux trois au moins 50 champignons.

Solution de l'exercice 4
On ordonne les amis par nombre de champignon différent, disons $a_1 > a_2 > ... > a_7$. Si $a_4 \geqslant 15$, on a $a_3 + a_2 + a_1 \geqslant 16 + 17 + 18 = 51$, et c'est gagné.
Donc $a_4 \leqslant 14$ et $a_4 + a_5 + a_6 + a_7 \leqslant 14 + 13 + 12 + 11 = 50$, donc $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 50$, et on a gagné.

Exercice 5
On considère un ensemble fini A de personnes. Deux personnes dans A ayant le même nombre d'amis n'ont aucun ami commun. Montrer qu'il existe une personne dans A qui possède exactement un ami dans A.

Solution de l'exercice 5
Soit B la personne de A qui possède le nombre maximal d'amis. Notons n le nombre d'amis qu'elle possède. Tous les amis de B l'ont comme ami commun, et ont donc tous un nombre d'amis différent. Ils sont au nombre de n, et ont chacun au moins un ami, B, et au plus n amis. Nécessairement, ils ont donc $1, 2, ..., n$ pour nombres d'amis. En particulier, il existe une personne ayant exactement 1 ami.

Exercice 6
On considère un ensemble fini de points S tel que toute droite passant par deux points de S passe aussi par un troisième. Montrer que tous les points de S sont alignés.

Solution de l'exercice 6
Par l'absurde, supposons que que les points ne sont pas tous alignes. On considere alors une droite (d) passant par au moins 2 points de S et un point P appartenant a S mais qui n'est pas sur (d) tels que pour toute droite (d') formee par des points de S et pour tout point P' qui

n'est pas sur (d'), la distance de P a (d) soit inferieure ou egale a la distance de P' a (d').
On remarque maintenant que comme d possede au moins trois points de S, il y en a deux d'un meme cote du projete orthogonal de P sur (d). On les note A et B, avec A plus proche de P que B. Alors on remarque que A est plus proche de (PB) que P de (d), absurde.
Donc tous les points sont alignes.

Exercice 7
Lors d'une soirée dansante, aucun garçon n'a dansé avec toutes les filles, mais chaque fille a dansé avec au moins un garçon.
Montrer que il existe deux garçons g, g' et deux filles f, f' tel que g a dansé avec f mais pas avec f' , et g' a dansé avec f' mais pas avec f.

Solution de l'exercice 7
Considérons g le garcon ayant dansé avec le plus de filles et f' une fille avec qui il n'a pas dansé. Il existe un garcon g' avec lequel f' a dansé. Or, comme g a dansé avec le plus de filles et il n'a pas dansé avec f', alors il existe une fille f qui n'a pas dansé avec g' mais qui a dansé avec g.

Le plus petit...

En combinatoire, on se retrouve souvent confronte a des problemes du type "trouver le plus petit entier verifiant [telle ou telle propriete]". Pour resoudre ce genre de probleme il y a toujours 2 etapes essentielles :

- Montrer que l'entier trouve convient bien, ie qu'il verifie bien toutes les proprietes demandees. (generalement, on donne une construction qui convient)

- Montrer qu'il n'existe pas d'entier plus petit verifiant toutes les proprietes demandees.

Il faut *absolument* ces deux etapes pour pretendre aux points de la resolution complete.

Exemple 7.
Combien faut-il prendre de stagiaires pour etre sur que quatre d'entre eux ont la meme date d'anniversaire (un stagiaire pouvant etre ne le 29 fevrier) ?

Solution : L'exercice peut se reecrire : "Trouver le plus petit entier n tel que si on prend n stagiaires, il en a forcement 4 qui ont leur annversaire le meme jour." On va donc resoudre ce probleme en 2 etapes :

- L'entier 1099 convient bien : en effet d'apres le principe des tiroirs, il existe au moins $\left\lceil \frac{1099}{366} \right\rceil = 4$ eleves qui partagent leur date d'anniversaire.

- Tout entier inferieur a 1099 ne convient pas : si on prend 1098 stagiaires ou moins, alors on attribue le premier janvier aux 3 premiers, puis le 2 janvier aux trois suivants, etc... et comme on a moins de $3 \times 366 = 1098$ stagiaires, ils vont bien tous rentrer : on en aura pas forcement 4 qui partagent leur anniversaire.

Exercice 8
Un groupe de n amis prend r photos distinctes (deux photos n'ont pas exactement les mêmes personnes) qui contiennent chacune au moins une personne. Trouver le plus grand r tel que chaque personne apparaisse au plus une fois.

Solution de l'exercice 8
s

- On montre que $r \leqslant n$. Par l'absurde, si $r > n$. On peut utiliser le principe des tiroirs, les photos sont les chausettes et les personnes sont les tiroirs. Une chausette-photo va dans le tiroir d'une personne qui apparait dans sa photo. Ainsi, une personne apparaitra sur au moins deux photos. Absurde !

- Pour $r = n$ on prend une photo par personne.
$r = n$ est donc le maximum recherché.

Exercice 9 (AHSME 1990, P9)
On considere un cube dont toutes les aretes sont coloriees soit en rouge, soit en noir et telle que toute face du cube possede au moins une arete noire. Quel est le nombre minimal d'aretes noires ?

Solution de l'exercice 9
Bien evidemment, on va resoudre ce probleme en deux etapes :

- Il nous faut *au moins* 3 aretes noires. En effet, chaque arete est partagee entre 2 faces, et comme il y a 6 faces, il nous faut au moins $\frac{6}{2} = 3$ aretes noires.

- 3 convient effectivement : il suffit qu'aucune paire d'aretes ne partage de sommet.

Exercice 10
Alice désire colorier les entiers entre 2 et 31 (inclus) en utilisant k couleurs. Elle souhaite que, si m et n sont des entiers entre 2 et 31 tels que m est un multiple de n et $m \neq n$, alors m et n sont de couleurs différentes. Déterminer le plus petit entier k pour lequel Alice peut colorier les entiers $2, 3, ..., 31$ en utilisant k couleurs.

Solution de l'exercice 10
Ici encore, deux etapes sont necessaires :

- Il nous faut au moins 4 couleurs. En effet, considerons les nombres $2, 4, 8$ et 16. Alors comme 2 divise les trois autres, il doit etre d'une couleur differente des trois autres, comme 4 divise 8 et 16, il soit lui aussi d'etre d'une couleur differente, et de meme pour 8 et 16 car 8 divise 16.

- 4 couleurs conviennent :

$2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31$

Exercice 11
Un groupe de n amis prend r photos distinctes (deux photos n'ont pas exactement les mêmes personnes) qui contiennent chacune au moins une personne. Trouver le plus grand r tel que pour chaque paire de photo on trouve au moins une personne qui apparait sur les deux.

Solution de l'exercice 11
On effectue a nouveau nos deux etapes :

- $r \leqslant 2^{n-1}$. En effet, pour une photo donnee, on ne peut pas prendre la photo complementaire (c'est-a-dire la photo qui contient exactement toutes les peronnes qui n'etaient pas

presentes sur la premiere), puisqu'il n'y aurait personne en commun entre les deux photos. Or, il y a en tout 2^n photos possibles, donc on ne peut prendre qu'au plus $\frac{2^n}{2} = 2^{n-1}$ photos.

Pour obtenir une configuraiton a 2^{n-1} photos, il suffit de choisir une personne (photogenique) qui sera sur toutes les photos, ensuite, il reste $n-1$ personnes, ce qui nous permet de prendre 2^{n-1} photos distinctes

Exercice 12 (IMO 2013, plus difficile)
Une configuration de 4027 points du plan est appelée colombienne si elle est constituée de 2013 points de couleur rouge et de 2014 points de couleur bleue, et si trois quelconques de ces points ne sont pas alignés. En traçant des droites, le plan est divisé en régions. Un tracé de droites est appelé bon pour une configuration colombienne si les deux conditions suivantes sont vérifiées :
• aucune droite tracée ne passe par un point de la configuration ;
• aucune région ne contient des points de couleurs différentes.
Trouver la plus petite valeur de k telle que, pour chaque configuration colombienne de 4027 points, il existe un bon tracé de k droites.

Solution de l'exercice 12
La réponse est $\boxed{2013}$. Pour le montrer, et comme dans tout problème de ce type, il faut montrer 2 choses :

1) $k \geqslant 2013$. En effet, si on considère un 2016-gone régulier dont les sommets alternent entre rouge et bleu, avec un 2014-ième point bleu quelque part d'autre dans le plan, alors il nous faut au moins 2013 droites pour séparer correctement les points : il faut que chaque arc du cercle délimité par deux de nos points soit coupé, et une droite coupe au plus deux arcs.

2) Montrons que 2013 est suffisant : remarquons que pour toute paire de points de la meme couleur A et B, on peut tracer deux droites qui les séparent du reste des points, puisqu'il suffit de prendre deux parallèles de part et d'autre de (AB) suffisemment proches de A et de B pour qu'aucun autre point ne soit dans la région. Considérons maintenant l'enveloppe convexe de nos points, on distingue deux cas : Si il y a un point rouge sur l'enveloppe convexe, on peut le séparer du reste des points par une droite, puis appairer le reste des points rouges pour les séparer comme vu précédement. Sinon, il n'y a que des sommets bleus sur l'enveloppe convexe, mais alors en en prenant deux consécutifs C et D, on peut les séparer du reste des points par une unique droite parallèle à (CD) et proche de C et D : c'est l'avantage de l'enveloppe convexe. Ensuite, on conclut comme précédement avec les 2012 points restants : on appaire les points, ce qui nous donne $2012/2 = 1006$ paires, et il nous faut 2 droites par paire, donc on a un total de $2 \times 1006 + 1 = 2013$ droites.

7 Comptage/ Pot pourri (Raphael)

"Somme"

Proposition 1.
La taille de l'union de deux ensembles est la somme de la taille de chacun des ensembles

moins la taille de leur intersection. On le note

$$|A \cup B| = |A| + |B| - |A \cap B|.$$

Démonstration. On essaye avec la formule $|A|+|B|$. Cependant on s'apperçoit que les éléments qui sont à la fois dans A et dans B ont été comptés 2 fois et il faut donc retirer $|A \cap B|$ pour obtenir le bon résultat. Finalement la bonne formule est $|A| + |B| - |A \cap B|$. □

Exercice 1
Dans une classe il y a 18 élèves ont un cahier rouge, 15 élèves ont cartable bleu, 7 élèves ont les deux. Combien y a t-il d'élèves (au moins) dans la classe ?

Solution de l'exercice 1
Avec la formule cela donne $18 + 15 - 7 = 26$ élèves .

Exercice 2

1. Combien de nombres inférieurs à 100 contiennent le chiffre 7 ?
2. Combien y a t il de nombres inférieurs à 100 divisibles par 3 ou 5 ?

Solution de l'exercice 2

1. Il y a 10 nombres de la forme $70, 71, \cdots, 79$ et 10 nombres de la forme $7, 17, \cdots, 97$. Le nombre 77 appartient à ces deux ensembles et on a donc $10 + 10 - 1 = 19$ nombres contenant le chiffre 7.
2. Il y a $\lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 3, $\lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20$ nombres inférieurs à 100 et divisibles par 5 et $\lfloor \frac{100}{15} \rfloor = 6$ nombres inférieurs à 100 et divisibles à la fois par 3 et par 5 (c'est à dire par 15). Cela nous donne donc $33 + 20 - 6 = 47$ nombres au total.

Exercice 3
Combien y a t il de nombres inférieurs à 100 divisible par 2,3 ou 5 ?

Solution de l'exercice 3
Ici il y a beaucoup de possibilités. On

— $A_2 = \lfloor \frac{100}{2} \rfloor = 50$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 2.
— $A_3 = \lfloor \frac{100}{3} \rfloor = 33$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 3
— $A_5 = \lfloor \frac{100}{5} \rfloor = 20$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 5
— $A_{2,3} = \lfloor \frac{100}{6} \rfloor = 16$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 2 et par 3
— $A_{2,5} = \lfloor \frac{100}{10} \rfloor = 10$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 2 et par 5.
— $A_{3,5} = \lfloor \frac{100}{15} \rfloor = 6$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 3 et par 5
— $A_{2,3,5} = \lfloor \frac{100}{30} \rfloor = 3$ nombres inférieurs à 100 divisibles par 2, 3 et 5.

Une première tentative serait de prendre $A_2+A_3+A_5-A_{2,3}-A_{2,5}-A_{3,5}$. Mais là on s'appercevrait que les nombres divisibles par 2, 3 et 5 ne serait pas comptés. La bonne formule est alors $A_2 + A_3 + A_5 - A_{2,3} - A_{2,5} - A_{3,5} + A_{2,3,5} = 50 + 33 + 20 - 16 - 10 - 6 + 3 = 74$.

"Produit"

Exercice 4
(L'alphabet à 26 lettres) Combien y a t-il de mots

1. de 5 lettres ?
2. de 5 lettres toutes différents ?
3. de 5 lettres mais sans avoir deux fois la même lettre à la suite ?

Solution de l'exercice 4

1. Pour chaque lettre il y a 26 possiblitités. Cela donne alors $26 \times 26 \times 26 \times 26 \times 26 = 26^5$ mots possibles.
2. Pour la première lettre il y a 26 possibilités. Pour la deuxième il est interdit de choisir la première ce qui donne 25 possibilités. Pour la troisième plus que 24, etc... Il y a alors $26 \times 25 \times 24 \times 23 \times 22$ possibilités.
3. Pour la première lettre il y a 26 possibilités. Pour la deuxième lettre il est interdit de choisir la même ce qui donne 25 possibilités. Même pour la troisième et les suivante il suffit de ne pas choisir la même lettre qu'avant donc 25 possibilités. Il y a alors $26 \times 25 \times 25 \times 25 \times 25$ possibilités.

Exercice 5
Combien y a t-il d'entiers a qui divisent $2^4 \times 3^2 \times 5$?

Solution de l'exercice 5
Il faut remarquer ici qu'un diviseur n de $2^4 \times 3^2 \times 5$ est de la forme $n = 2^x \times 3^y \times 5^z$. En effet si un nombre premier autre que $2, 3$ ou 5 divisait n alors alors il diviserait aussi $2^4 \times 3^2 \times 5$ ce qui n'est pas possible. Il faut aussi que $x \leqslant 4$, $y \leqslant 3$ et $z \leqslant 1$ et cela nous donnera bien tous les diviseurs possibles. En résumé pour fabriquer un diviseur il faut

1. Choisir x entre 0 et 4 donc 5 possibilités,
2. Choisir y entre 0 et 2 donc 3 possibilités,
3. Choisir z entre 0 et 1 donc 2 possibilités,

Ce qui donne au total $5 \times 3 \times 2 = 30$ diviseurs possibles.

Proposition 2.
Pour un ensemble de taille n, il existe 2^n "sous-ensembles".

Démonstration. Le raisonnement est le suivant, considérer le premier élément vous avez le choix entre le garder ou le laissé de côté c'est à dire 2 possibilités. Même chose pour le deuxième élément, soit vous le garder soit vous le laisser. etc... Au total cela vous donne $2 \times 2 \times \cdots \times 2 = 2^n$ possibilités. □

Exercice 6
Un élèves à 6 crayons tous de couleurs différentes. Il en choisit quelques-uns et les mets dans sa trousse. Combien y a t il de possibilités ?

Solution de l'exercice 6
Avec la formule cela donne $2^6 = 64$ possibilités.

Exercice 7
Un élèves a cinq amis dans sa classe. Pour une soirée il souhaiterait en inviter quelsques uns mais au moins un. Combien a t-il de choix possibles ?.

Solution de l'exercice 7
Comme il a 5 amis, Le nombre de groupes d'amis qu'il peut inviter est $2^5 = 32$. Cependant il souhaite inviter au moins un ami et donc il faut retirer le cas où il n'y a personne. Cela donne donc $32 - 1 = 31$ possibilités.

Définition 3.
On note $n! = 1 \times 2 \times \cdots \times n$ et on l'appelle « factoriel ».

Exercice 8
6 livres sont alignés dans une bibliothèque. Combien y a t il de manières de les ranger.

Solution de l'exercice 8
On a directement $6! = 6 \times 5 \times 4 \times 3 \times 2 \times 1$ possibilités.

Exercice 9
Avec un jeu de 32 cartes, un joueurs pioche 2 cartes. Combien y a t il de mains différentes

1. si l'ordre des cartes est important ?
2. si l'ordre des cartes n'a pas d'importance ?
3. si il pioche trois cartes et que l'ordre n'a pas d'importance ?

Solution de l'exercice 9
Pour le jeu de carte

1. Piocher la première carte donne 32 possibilités. Puis piocher la deuxième donne 31 possibilités. Au total cela donne 32×31 possibilités.
2. Si l'ordre n'a pas d'importance on peut voir que chaque paire de carte a été compté 2 fois dans la questions précédente. Par exemple (Roi coeur,As pique) = (As pique,Roi coeur). En notant P notre solution. On a alors $2 \times P = 32 \times 31$. Et donc $P = \frac{32 \times 31}{2}$.
3. On peut essayer le même raisonnement. Si l'ordre est important on a $32 \times 31 \times 30$ manières de piocher 3 cartes. Maintenant si l'ordre est important chaque main de trois cartes aurait été compté 6 fois. Par exemple

$$\begin{aligned}&\text{(Roi coeur,As pique, 3 carreau) = (As pique,Roi coeur, 3 carreau)}\\ &= \text{(As pique, 3 carreau, Roi coeur) = (3 carreau, As pique,Roi coeur)}\\ &= \text{(Roi coeur, 3 carreau, As pique) = (3 carreau, Roi coeur, As pique)}\end{aligned}$$

   En notant T notre solution on a donc $6 \times T = 32 \times 31 \times 30$. Conclusion $T = \frac{32 \times 31 \times 30}{6}$.

Coefficients binomiaux

Définition 4.
On note $\binom{n}{k}$ le nombre de manières de choisir k éléments parmi n.

Quelques exemple de coefficients binomiaux

— Notons $\{A, B, C\}$ un ensemble à 3 éléments. On a

$$\binom{3}{0} = 1 : \{\} \text{ "rien"}, \quad \binom{3}{1} = 3 : \{A\}, \{B\}, \{C\},$$
$$\binom{3}{2} = 3 : \{A, B\}, \{A, C\}, \{B, C\}, \quad \binom{3}{3} = 1 : \{A, B, C\}$$

— Pour tout n : $\binom{n}{0} = 1$ (ne rien prendre) et $\binom{n}{n} = 1$ (tout prendre).

— $\binom{n}{1} = 1$ choisir un élémént.

— $\binom{32}{2} = \frac{32\times31}{2}$ et $\binom{32}{3} = \frac{32\times31\times30}{6}$ comme dans l'exercice 9. « Piocher 2 (resp. 3) cartes dans un paquet de 32 cartes ».

Exercice 10
Un élèves à 6 crayons tous de couleurs différentes. Il en choisit trois et les mets dans sa trousse. Combien y a t il de possibilités ?

Solution de l'exercice 10
Il y a $\binom{6}{3}$ possibilités de choisir 3 crayons dans une trousse de 6 crayons.

Proposition 5.
On a

1. $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$
2. $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.
3. $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \cdots + \binom{n}{n} = 2^n$
4. $\binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!k!}$

Démonstration. On a

1. « Avec n éléments, choisir les k éléments que l'on garde c'est la même chose que choisir les $n-k$ éléments que l'on ne garde pas. » Donc $\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$.
2. Soit n éléments $\{A, B, \cdots, N\}$, on cherche à en choisir k. Considérons le premier élément A. Soit on le garde soit on le laisse de côté. Si on le garde il faut encore choisir $k-1$ éléments dans $\{B, \cdots, N\}$ (avec $n-1$ éléments). Cela donne $\binom{n-1}{k-1}$ choix possibles. Si on ne garde pas A, il faut alors choisir les k éléments dans $\{B, \cdots, N\}$ et cela donne $\binom{n-1}{k}$ choix possibles. Conclusion $\binom{n}{k} = \binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k}$.

3. $\binom{n}{0}$ est le nombre de sous ensembles de taille 0, $\binom{n}{1}$ est le nombre de sous ensembles de taille 1, $\binom{n}{2}$ est le nombre de sous ensembles de taille 2, etc... Donc $\binom{n}{0}+\binom{n}{1}+\binom{n}{2}+\cdots+\binom{n}{n}$ est le nombre total de tous les sous ensembles qui vaut 2^n.
4. Si l'ordre était important, choisir le premier élément donne n possibilités, le deuxième élément donne $n-1$ possibilités, etc.., le k-ième élément donne $n-k+1$ possibilités et on aurait alors $n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1)$ possibilités. Comme ici l'ordre n'a pas d'importance chaque groupe de k élément va apparaitre $k!$ fois. On a donc

$$\binom{n}{k}\times k! = n\times(n-1)\times\cdots\times(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}.$$

□

Exercice 11
Dans un hexagone combien de triangles différents dont les sommets sont des sommets de l'hexagone peut-on former en trançant des diagonales ?

Solution de l'exercice 11
Pour un triangle il suffit de choisir 3 sommets de l'héxagone et de tracer le ou les côtés manquant du triangle. Conclusion $\binom{6}{3}$ possibilités.

Exercice 12
Il y a k points placés sur un cercle. On trace tous les segments entre deux paires de points. Combien peut-il y avoir d'intersections entre ces segments ?

Solution de l'exercice 12
Pour chaque groupe de 4 sommets on trace les 6 segments. Cela forme un quadrilatère avec des diagonales qui se croisent. On en déduit qu'à partir de 4 sommets cela donne 1 croisement. Si il y a k points autour du cercle cela donne alors $\binom{k}{4}$ croisements.

Exercice 13
Sur un échiquier une pièce ne peut se déplacer que d'une case vers la droite ou vers le haut. Elle part du coin en bas à gauche et arrive dans le coin en haut à droite. Combien y a t il de de chemins possible ?

Solution de l'exercice 13
Sur un échiquier $k\times l$. La pièce doit ce déplacer de $k-1$ mouvements vers la droite et de $l-1$ mouvements vers le haut pour atteindre le coin opposé. Il y a au total $k+l-2$ mouvements à faire. On peut écrire un chemin comme une suite de flèche vers la droite ou vers le haut (exemple : $\rightarrow\rightarrow\rightarrow\uparrow\rightarrow\uparrow$). Il s'agit donc de placer $k-1$ flèches vers la droite parmi $k+l-2$ flèches c'est à dire $\binom{k+l-2}{k-1}$. Remarquer que si on avait choisit les flèches vers le haut on aurait $\binom{k+l-2}{l-1}$ ce qui est la même chose par la première égalité du cours.

Exercice 14
Un marchant de glace propose trois saveurs différentes. Une personne achète une glace à 5 boules. Combien y a t-il de possibilités (l'ordre des boules n'a pas d'importance).

Solution de l'exercice 14
Un choix de glaces c'est trois entiers (x, y, z) =(au chocolat,à la framboise, à la vanille) avec $x + y + z = 5$ par exemple $(2, 2, 1)$. Disons que les boules de glaces sont sur une ligne. Comme l'ordre n'a pas d'importance, supposons les boules au chocolat à gauche, celles à la framboise au milieu et les glaces à la vanilles à droite. Ajoutons deux séparateurs entre les boules de différentes saveurs. On a alors maintenant 5 boules de glaces et 2 séparateurs. La position des séparateurs donne le nombre de boules de chaque saveur. Par exemple un séparateur en position 3 et en position 6 signifie 2 glaces au chocolat (position 1 et 2), 2 glaces à la framboise (position 4 et 5) et 1 glace à la vanille (position 7). Cela donne une construction explicite des différentes combinaisons de glaces possibles. On a 7 objets (5 boules+2 séparateurs) et 2 séparateurs à placer. et donc $\binom{7}{2}$ possibilités.

Exercice 15
$2n$ joueurs participent à un tournois de tennis. Trouver le nombre de appariements possibles pour le premier tour.

Solution de l'exercice 15
Pour le premier joueur il y a $2n - 1$ adversaires possibles. Ensuite il reste à faire des paires avec les $2n - 2$ joueurs restant. On a donc la relation de récurrence suivante

$$P_{2n} = (2n - 1) \times P_{2n-2}$$

et donc

$$P_{2n} = (2n - 1) \times (2n - 3) \times \cdots \times 3 \times 1$$

soit la multiplication de tous les nombres impairs jusqu'à $2n$. Cela peut s'écrire avec des factoriels : $P_{2n} = \frac{(2n)!}{n!2^n}$.

Exercice 16
Combien y a t-il de nombres de n chiffres composés uniquement de 0 et de 1 avec exactement m bloc «01» ?

Solution de l'exercice 16
Considérons un tel nombre par exemple $X = 0010111$. On peut écrire entre chacun de ces chiffres le signe = ou ≠ indiquant si les deux chiffres successifs sont égaux ou non. Pour notre exemple cela donnerait =≠≠==. L'idée est que les blocs «01» et blocs «10» correspond à un signe ≠ et qu'il y a une alternance entre «01» et «10». Il y a ici deux soucis : d'abord on ne connait pas le premier chiffre donc on ne peut pas reconstruire le nombre initial, ensuite si on a m «01», on sait qu'il y a soit $m - 1$, soit m soit $m + 1$ blocs «10» ce qui ne donne pas un nombre fixé de signe ≠. L'astuce ici est d'ajouter un chiffre 1 à gauche du nombre X et un chiffre 0 à sa droite : 100101110. On a alors pour les signes ≠=≠≠≠==≠. Dans ce cas on peut bien reconstruire le nombre X et puisque l'on commence par un 1 et que l'on termine par un 0 il y a un bloc «10» de plus que de bloc «01». Il y a donc $2m + 1$ signes ≠. Le nombre a maintenant $n + 2$ chiffres ce qui donne $n + 1$ symboles =, ≠. Finalement choisir $2m + 1$ signes ≠ parmi les $n + 1$ positions possibles donne $\binom{n+1}{2m+1}$ possibilités.

8 Équations diophantiennes, factorisation (Augustin & Éva)

Cours

Une equation diophantienne est une équation dont les solutions sont entières. On a généralement plusieurs inconnues élevées à des puissances entières diverses. Il n'existe malheureusement pas de techniques de résolutions ou de méthodes fonctionnant pour toutes les équations, mais on peut tout de même relever certaines pistes "basiques".

Quelques factorisations utiles :

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b^1 + \ldots + b^{n-2}a^1 + b^{n-1}) = \sum_i^{n-1} a^{n-1-i}b^i$$

avec n impair :

$$a^n + b^n = (a+b)(a^{n-1} - a^{n-2}b^1 + \ldots - b^{n-2}a^1 + b^{n-1}) = \sum_i^{n-1} a^{n-1-i}(-b)^i$$

Exercices

Congruences

Comment choisir son modulo ? On essaye de faire en sorte que les puissances donnent des trucs sympas, par exemple 1, c'est à dire que l'on va essayer de choisir p un nombre premier tel que les puissances en question divisent ou soient des multiples de $p-1$.
En particulier, quand on a plein de carrés on regarde modulo 4, 3 et 8 (dans cet ordre) et quand on a des cubes, on regarde modulo 9 et 7.

Exercice 1
Soit $(x, y) \in \mathbb{Z}^2$ tels que : $8x + 3y^2 = 5$
Trouvez tous les couples (x, y)

Exercice 2
Soit, x, y des entiers positifs tels que : $x^{12} = 26y^3 + 2023$
Trouvez tous les couples solutions (x, y)

Exercice 3
Quel est le dernier chiffre de $2023^{2024^{2025^{2026^{2027}}}}$

Exercice 4
Trouvez tous les triplets d'entiers (x, y, z) tels que :

$$x^3 + y^3 = z^3 + 4$$

Factorisation

Exercice 5
Trouvez l'ensemble des entiers n positifs tel que $5^n + 4$ soit un carré parfait

Exercice 6
Montrez que $n^4 + 4^n$ n'est jamais un nombre premier si $n > 1$

indice : essayer de trouver une factorisation sympathique (niark niark niark)

Exercice 7 (Irlande 96)
Soit p un nombre premier, a, b des entiers positifs. Prouver que si $2^p + 3^p = a^n$ alors $n = 1$

Un peu de tout (jusqu'à la fin)

Exercice 8 (Olimpíada Matemáticos por Diversão 2020)
Trouvez tout les couples d'entiers (x, y) tels que :

$$x^4 - 6x^2 + 1 = 7 \cdot 2^y$$

Exercice 9
Montrez que $\sqrt{2}$ est irrationel.

Indice pour les exos suivants : chercher des arguments de taille

Exercice 10
Trouvez les a, b, c entiers strictement positifs tels que : $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} = 1$

Exercice 11
Trouvez tous les couples (a, b) d'entiers strictement positifs tels que $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ et $\frac{b^2+a}{a^2-b}$ soient des entiers

Exercice 12
Trouvez tous les $n > 1$ tels que $3^{n-1} + 5^{n-1} \mid 3^n + 5^n$

Concept de descente infinie :
On sait que toute suite dans $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément. Ainsi, il n'existe pas de suite avec une infinité d'éléments dans $\mathbb{N}$ qui soit strictement décroissante. C'est sur ce principe que se base cette méthode : on va montrer que si une solution existe, alors il en existe une autre strictement plus petite. On pourra donc conclure qu'il n'y a pas de solutions.

Exercice 13
Déterminez tous les triplets (x, y, z) d'entiers naturels tels que $x^2 + y^2 = 7z^2$

Solutions

Solution de l'exercice 1
On regarde modulo 8, on sait que un carré est congru à $0, 1$ ou 4 modulo 8 donc ici si $x \neq 0$ on a $5 \equiv 0, 3, 4[8]$ ce qui est absurde donc $x = 0$ alors on a $3y^2 = 5$ ce qui n'appelle aucune solution entière. Il n'y a donc pas de solutions. On pourrait aussi regarder modulo 4.

Solution de l'exercice 2
on a très envie de regarder modulo 13 car $12 = 13 - 1$ et 26 sera congru à 0.
On obtient alors $x^{12} \equiv 0y^3 + 2023 \equiv 8$, or l'on sait par petit fermat que si x est premier avec 13 alors $x^{12} \equiv 1$ et s'il ne l'est pas alors $x^{12} \equiv 0$, donc dans les deux cas il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 3
On a $2023^{2024^{2025^{2026^{2027}}}} \equiv 3^{2024^{2025^{2026^{2027}}}} \equiv 3^{(4\cdot 506)^{n>0}} \equiv (3^4)^{506^n} \equiv 1[10]$ avec $n = 2025^{2026^{2027}}$

Solution de l'exercice 4
On regarde modulo 9 et on se rend bien compte que le membre de gauche peut prendre les valeurs $0, 1, 2, 7, 8$ tandis que le membre de droite peut prendre les valeurs $3, 4, 5$. Il n'existe donc pas de triplet d'entier solution.

Solution de l'exercice 5
On pose $a > 0$ tel que $5^n + 4 = a^2$ cela nous donne $5^n = (a-2)(a+2)$ donc les deux termes de droites doivent être des puissances de 5, cependant elles ne sont pas congrues modulo 5 donc une d'entre elle est une puissance nulle. donc $a - 2 = 1 \Rightarrow a = 3$ on a donc $5^n + 4 = 9 \Rightarrow n = 1$
La seule solution est donc $n = 1$

Solution de l'exercice 6
identité sophie germain :
$a^4 + 4b^4 = (a^2 - 2ab + 2b^2)(a^2 + 2ab + 2b^2)$
Supposons par l'absurde que $n^4 + 4^n$ soit un nombre premier. On a tout de suite que n est impair sinon $2 \mid n^4 + 4^n$. Or pour tout $n > 0$ on a $2 < n^4 + 4^n$ donc on a pas un nombre premier.
Maintenant soit k tel que $n = 2k + 1$.
On a $n^4 + 4^n = n^4 + 4 \cdot 4^{2k} = n^4 + 4 \cdot (2^k)^4 = (n^2 - 2^{k+1}n + 2^{2k+1})(n^2 + 2^{k+1}n + 2^{2k+1})$
On a donc $n^2 - 2^{k+1}n + 2^{2k+1} = 1$ Or $n^2 - 2^{k+1}n + 2^{2k+1} = (n-2k)^2 + 2^k = 1 + 2^k > 1$ puisque $k > 0$
On a donc une absurdite, donc $n^4 + 4^n$ n'est jamais un nombre premier.

Solution de l'exercice 7
On teste pour $p = 2$ et on a $2^2 + 3^2 = 13$, donc bien $n = 1$.
On suppose maintenant p impair et on peut alors factoriser !

$$2^p + 3^p = (2+3)(2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \ldots - 3^{p-2} \cdot 2 + 3^{p-1}) = 5(2^{p-1} - 2^{p-2} \cdot 3 + \ldots - 3^{p-2} \cdot 2 + 3^{p-1})$$

On a donc $5 \mid a^n \Rightarrow 5 \mid a$, donc si $n > 1$ on a $25 \mid a^n$, ce qui signifie que $2^n + 3^n \equiv 0 \pmod{25}$
Or $3 = 5-2$, donc $2^p + 3^p \equiv 2^p + (5-2)^p \equiv 2^p + \ldots$(que des termes divisibles par 25)$+ C_1^p \cdot 5^1 \cdot 2^{p-1} - 2^p \equiv 5p \cdot 2^{p-1}[25]$ donc $p \cdot 2^{p-1} \equiv 0[5]$ ce qui signifie que $5 \mid p$ donc que $5 = p$.
Cependant on vérifie aisément que $2^5 + 3^5 = 5^2 \times 11$ n'est pas une puissance n-ième si $n > 1$.
On a donc bien prouvé que $n = 1$

Solution de l'exercice 8
Si $y = 0$ ou $y = 1$, on a $x^4 - 6x^2 = 6$ ou 13, donc x^2 divise 6 ou 13 (qui sont sans diviseurs étant

des carrés parfaits), donc $x = 1$ mais cela n'est pas une solution.
Si $y = 2$, alors x^2 divise 27, donc $x = 1$ ou $x = 3$, et on trouve la solution $(3, 2)$.
Si $y > 2$, alors $x^4 - 6x^2 + 1 \equiv x^4 + 2x^2 + 1 \equiv (x^2 + 1)^2 \equiv 0 \pmod 8$. Or, cela implique que $x^2 + 1$ soit divisible par 4, ce qui est impossible car 3 n'est pas une valeur possible pour x^2 modulo 4.

Solution de l'exercice 9
1) On pose $p, q > 0$ tels que $(\frac{p}{q})^2 = 2$ donc $p^2 = 2q^2$ donc $2 \mid p$ (puisque lorsqu'un nombre premier divise a^2 il divise aussi a) on pose donc $p_1 = \frac{p}{2}$, on a donc : $2p_1^2 = q^2$ On peut recommencer et on se retrouve avec un couple solution (p_1, q_1) plus petit strictement que le précédent. Par le principe de la descente infinie on peut conclure qu'il n'existe pas de couple solution, donc $\sqrt{2}$ n'est pas un rationnel.
2) sinon plus simple on suppose $\sqrt{2} = \frac{p}{q}$ avec p, q premier entre eux (fraction irréductible). On a donc $2q^2 = p^2 \Rightarrow 2 \mid p^2 \Rightarrow 2 \mid p$. On pose maintenant $p_1 = \frac{p}{2}$. On a donc $q^2 = 2p_1^2 \Rightarrow 2 \mid q^2 \Rightarrow 2 \mid q$. Or on avait supposé p, q premier entre eux. Il y a donc une absurdité donc une pareille fraction n'existe pas, donc $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel.

Technique de taille
On va essayer de trouver des bornes et de se restreindre à un nombre de cas fini, si possible assez petit pour pouvoir tout faire à la main. Pour cela, on va utiliser des inégalités (très simples en général). Par exemple on sait que la différence entre 2 carrés $b^2 - a^2 \geq 2a + 1$, si on a une équation symétrique, on va supposer $a \geq b$, etc.

Solution de l'exercice 10
On peut supposer spdg que $0 < a \leq b \leq c$ on a donc $\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c} \leq \frac{3}{x}$ donc $x \leq 3$ Maintenant on a $x = 2$ ou $x = 3$ on traite ces deux cas séparement et on reutilise la même méthode ce qui nous donne au final les triplets solutions $(2, 3, 6), (2, 4, 4)$ et $(3, 3, 3)$ (ainsi que les permutations $(2, 6, 3), (3, 2, 6)$, ... puisque l'énoncé ne précise pas $a \leqslant b \leqslant c$).

Solution de l'exercice 11
On suppose spdg que $b \geq a$. On a $\frac{a^2+b}{b^2-a}$ un entier donc $b^2 - a | a^2 + b$
$b^2 - a \leq a^2 + b \Leftrightarrow b^2 - a^2 \leq a + b \Rightarrow b - a \leq 1 \Rightarrow a \leq b \leq a + 1$ On a donc maintenant deux possibilités : $a = b$ ou $a = b + 1$
Vérification des cas :
1) $a = b$
$a^2 + b = a^2 + a = a(a + 1)$ et $b^2 - a = a^2 - a = a(a - 1)$. On a donc $a - 1 | a + 1$ donc $a - 1 | 2$ ce qui signifie que $a = 2$ ou $a = 3$ et ces deux valeurs fonctionnent bien.
2) $a + 1 = b$
$a^2 - b = a^2 - a - 1$ et $b^2 + a = a^2 + 3a + 1$ donc $a^2 - a - 1 \mid 4a + 2$. Or $2 \mid a(a-1)$ donc $pgcd(a^2 - a - 1; 2) = 1$ donc $a^2 - a - 1 \mid 2a + 1$. Ce qui nous donne $a^2 \leq 3a + 2 \Rightarrow a \leq 3$. $a = 1$ et $a = 2$ fonctionnent. Cependant, pour $a = 3$, on a $a^2 + 3a + 1 = 19$ et $a^2 - a - 1 = 5$. On a donc une absurdité puisque 5 ne divise pas 19.
Les couples solutions sont donc $(2, 2), (3, 3), (1, 2), (2, 3)$

Solution de l'exercice 12
1) On va essayer de "tuer" le plus grand terme :

$$3^{n-1} + 5^{n-1} \mid 3^n + 5^n - 5(3^{n-1} + 5^{n-1})$$

$$3^{n-1} + 5^{n-1} \mid 3^n - 5 \cdot 3^{n-1}$$
$$3^{n-1} + 5^{n-1} \mid 2 \cdot 3^{n-1}$$

or si $n > 1$ on a evidemment $3^{n-1} + 5^{n-1} > 3^{n-1} + 3^{n-1}$ on a donc ici pas de n solution.

2) Solution alternative :
Cela reviendrait alors à trouver tous les (k, n) tels que $(3^{n-1} + 5^{n-1}) \times k = 3^n + 5^n$. L'on remarque alors que $k > 3$ et que $k < 5$.
En effet, si $k = 3$ alors $(3^{n-1} + 5^{n-1}) \times k = 3^n + 5^{n-1} \times 3 < 3^n + 5^n$.
De même, si $k = 5$ alors $(3^{n-1} + 5^{n-1}) \times k = 3^{n-1} \times 5 + 5^3 > 3^n + 5^n$.
L'on a donc $k = 4$. On regarde alors modulo 3 et on obtient $0 + (-1)^{n-1} \times 1 \equiv 0 + (-1)^n \pmod 3$
n et $n - 1$ étant de parités différentes, il n'y a pas de solution.

Solution de l'exercice 13
On dresse la table des carrés modulo 7. Les valeurs possibles sont donc $0, 1, 2, 4$, alors on se rend clairement compte que la somme de deux carrés ne peut être congrue à 0 modulo 7 que si chaque carré est divisible par 7. On pose donc $x_1 = \frac{x}{7}$ et $y_1 = \frac{y}{7}$ on a donc l'équation $7x_1^2 + 7y_1^2 = z^2$ donc $7|z$ et soit $z_1 = \frac{z}{7}$: $x_1^2 + y_1^2 = 7z_1^2$. On a donc le triplet solution (x_1, y_1, z_1) strictement plus petit que le triplet précédent. Par descente infinie, il n'y a donc pas de solutions entières.

4 Entraînement de fin de parcours

Énoncés

Exercice 1
Trouver tous les triplets $(x, y, \ell) \in \mathbb{N}^3$ tels que

$$x^3 + y^3 - 53 = 7^\ell$$

Exercice 2
Lors d'une réunion secrète, 20 stagiaires élisent leur animatheur préféré. Chacun vote pour deux animatheurs. On sait que si l'on prend deux stagiaires quelconques, il y a toujours au moins un animatheur pour lequel ils ont tous les deux voté. Quel est le nombre minimal de votes reçus par l'animatheur qui gagne l'élection ?

Exercice 3
Trouver les p premiers tels qu'il existe $x, y \in \mathbb{N}^*$ tels que

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Exercice 4
On considère n points distincts du plan. Pour chaque segment formé par une paire de ces points, on colorie le milieu du segment en bleu. Combien doit-on avoir de points bleus, au miniumum ?
Si deux milieux sont confondus, il ne comptent que pour un point.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Si $l \geqslant 1$, on peut regarder modulo 7. L'équation se réécrit $x^3 + y^3 - 4 \equiv 0$, soit $x^3 + y^3 \equiv 4$. Or, les cubes modulo 7 sont $-1, 0$ et 1, donc la somme de deux cubes ne pourra jamais valoir 4. Il n'y a donc pas de solution pour $l \geqslant 1$.
Si maintenant $l = 0$, l'équation se réécrit $x^3 + y^3 = 54$. On peut tester les petits cas $x = 0, 1, 2$ et vérifier qu'alors on n'a pas de solution puisque $54 - x^3 (= y^3)$ n'est pas le cube d'un entier. Pour $x = 3$, on a $y = 3$ qui est une solution. Si $x \geqslant 4$, on n'a pas de solution pusique $x^3 > 54$ et $y^3 \geqslant 0$.
On a donc une unique solution : $(3, 3, 0)$.

Solution de l'exercice 2
Supposons qu'il n'y a pas d'animatheur qui a 20 voix (ce qui n'est pas un cas qui minimise le score du vainqueur de l'élection). Prenons alors un stagiaire s_1 et notons A et B les deux personnes pour qui il a voté. Par hypothèse, il a un camarade s_2 qui n'a pas voté pour A, mais d'après l'énoncé on sait qu'il a voté pour B. Notons C son autre vote. De même, il existe un stagiaire s_3 qui n'a pas voté pour B mais a un vote en commun avec s_1, il a donc voté pour A, et un vote en commun avec s_2, il a donc aussi voté pour C. Prenons maintenant n'importe quel autre stagiaire s. Comme il a un vote en commun avec chacun de s_1, s_2, s_3, ses deux votes sont parmi A, B et C. Ainsi, A, B et C se répartissent les 40 votes exprimés. D'après le principe des tiroirs, l'un d'eux a au moins 14 voix.

Enfin, on vérifie que c'est bien le minimum de la façon suivante : les stagiaires 1 à 14 ont voté pour A, les stagiaires 15 à 20 et 1 à 7 ont voté pour B, et les 13 autres votes restants sont pour C.

Solution de l'exercice 3
Réécrivons l'équation $(x + y)(xy - p) = 5p$. $x + y$ divise $5p$ et vaut donc $1, 5, p$ ou $5p$.

- Si $x + y = 1$: impossible car $x, y > 0$
- Si $x + y = 5$: On a $xy - p = p$, donc $xy = 2p$, donc x vaut $1, 2, p$ ou $2p$. Si $x = 1$, alors $y = 2p = 5 - x = 4$ donc $p = 2$. Réciproquement, $(x, y, p) = (1, 4, 2)$ est solution. Si $x = 2$, alors $y = p = 3$, et réciproquement $(x, y, p) = (2, 3, 3)$ est solution. Enfin, par symétrie, les seules solutions avec $x = p$, $x = 2p$ sont respectivement $(x, y, p) = (4, 1, 2)$ et $(x, y, p) = (3, 2, 3)$.
- Si $x+y = p$: On a $xy-p = 5$, donc $xy = p+5$. Et $(x-1)(y-1) = xy-x-y+1 = p+5-p+1 = 6$. Donc $(x, y) = (2, 7), (3, 4), (4, 3)$ ou $(7, 2)$. Si c'est $(2, 7)$ ou $(7, 2)$, alors $p = x + y = 9$ n'est pas premier, absurde. Si c'est $(3, 4)$ ou $(4, 3)$, alors $p = x + y = 7$ est premier, et on a bien $(x, y, p) = (3, 4, 7), (4, 3, 7)$ qui sont solution.
- Si $x+y = 5p$: On a $xt-p = 1$, donc $xy = p+1$. Et $(x-1)(y-1) = xy-x-y+1 = p+1-5p+1 = 2 - 4p < 0$, absurde.

Solution de l'exercice 4
La réponse est $2n - 3$.
Tout d'abord, on peut atteindre cette borne : on aligne les points sur les entiers de l'axe des abscisses $((0, 0), (1, 0), ..., (n - 1, 0))$. Alors les points bleus seront exactement les points a coordonnées entières ou semi-entières entre $(0, 0)$ et $(n-1, 0)$ exclus (donc $(0.5, 0), (1, 0), (1.5, 0), \ldots$), ce qui fait bien $2n - 3$ points.

Pour montrer que cette borne est optimale, on introduit un axe des abscisses, de manière a s'assurer que chaque point a une abscisse différente (c'est bien possible puisqu'il existe une infinité de directions pour l'axe, mais seulement un nombre fini de points). On considère le point le plus à gauche et le point le plus à droite. Le point le plus à gauche permet de former $n-1$ milieux avec les points restants (les abscisses de ces $n-1$ milieux sont alors bien distinctes puisque tous les points ont une abscisse différente). Le point le plus a droite, quant à lui, permet également de former $n-1$ points distincts par le même argument, mais on a alors compté deux fois le milieu formé par nos deux points extremaux, donc il y a bien au moins $(n-1)+(n-1)-1 = 2n-3$ points bleus.

V. Groupe C

Contenu de cette partie

1 Première partie : Arithmétique & Algèbre 248
1 Polynômes 1 (Vincent) 248
2 Ordre 1 (Félix) 259
3 Polynômes 2 (Georges) 260
4 Ordre 2 (Melvil & Maryam) 266
5 Inégalités (Thoé) 274
6 Problèmes d'ordre de grandeur (Quentin) 284
7 Équations fonctionnelles (Emilhan) 289
8 TD Équations diophantiennes (Antoine) 296
2 Entraînement de mi-parcours 300
3 Deuxième partie : Géométrie & Combinatoire 303
1 Double comptage 1 (Raphael) 303
2 Puissance d'un point (Benoît & Martin) 308
3 Pôle Sud (Aline) 324
4 Graphes (Jean) 336
5 Axes radicaux (Gaëtan & Gaspard C.) 351
6 Variants/invariants (Aimeric) 362
7 Double comptage 2 (Maena & Émile) 366
8 TD de Géométrie (Pierre-Marie) 370
4 Entraînement de fin de parcours 381

1 Première partie : Arithmétique & Algèbre

1 Polynômes 1 (Vincent)

Ce cours est une introduction aux polynômes, qui sont des fonctions très gentilles. Il s'appuie très largement le cours écrit par Igor Kortchemski et disponible sur le site de la POFM. Plus précisément, il reprend les sections 1, 2.1, 2.2 et 2.6 de ce cours.

Premières définitions et opérations

Définition 1.
Une fonction P de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est appelée *polynôme* à coefficients réels s'il existe un entier $n \geqslant 0$ et des nombres réels $a_0, a_1, \ldots, a_n$ tels que

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0$$

pour tout réel x.

On verra plus tard, dans le corollaire 5, que, quitte à choisir n minimal, cette écriture est unique. Une fois ce résultat admis, on peut alors définir les notions suivantes.

Définition 2.
Lorsque $a_n \neq 0$, on dit que

- le nombre n est le *degré* de P ; on le note couramment $\deg(P)$;
- les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont les *coefficients* de P ; le nombre a_k est appelé coefficient de *degré k* de P ;[1]
- le nombre a_n est le coefficient *dominant* de P ;
- le nombre a_0 est le coefficient *constant* de P ; il est ainsi appelé car, lorsque P est constant, la seule valeur qu'il prend est a_0.

Lorsque les nombres $a_0, a_1, \ldots, a_n$ sont tous nuls, on dit que P est le *polynôme nul*, et on définit (un peu arbitrairement en apparence, mais cette définition s'avérera pratique) son degré comme étant égal à $-\infty$.

Enfin, il peut arriver que l'on impose d'autres contraintes aux coefficients a_i. Par exemple, on peut s'intéresser aux polynômes P pour lesquels ces coefficients sont positifs ou nuls ; strictement positifs ; rationnels ; entiers ; ou alors simplement des nombres complexes, pas forcément réels.[2]

De manière générale, lorsque $\mathcal{E}$ est un ensemble de nombres, on notera $\mathcal{E}[X]$ l'ensemble des polynômes dont les coefficients appartiennent à $\mathcal{E}$. Ainsi, $\mathbb{R}[X]$ désigne l'ensemble des polynômes à coefficients réels, et $\mathbb{Q}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients rationnels.

Dans la suite, on utilisera indifféremment les notations P et $P(X)$, ou encore $a_n X^n + a_{n-1} X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ pour désigner ce polynôme. En revanche, on déconseille fortement d'utiliser la notation $P(x)$ pour désigner le polynôme P, car on risque trop souvent de la confondre avec le réel $P(x)$ obtenu pour une valeur de x donnée.

1. Lorsque $a_n = 0$, et même lorsque $k > \deg(P)$, il arrive parfois que l'on appelle malgré tout *coefficient de degré k* le nombre a_k.
2. Si vous ne savez pas ce qu'est un nombre complexe, ce n'est pas grave, car on ne s'en servira jamais.

Exemple 3.
La fonction $P(X) = \pi X^2 - 2X + 2$ est un polynôme de degré 2 dont les coefficients sont π, -2 et 2. Son coefficient dominant est égal à π et son coefficient constant vaut 2.

La fonction $Q(X) = \sqrt{X}$ n'est pas un polynôme, car elle n'est même pas définie sur $\mathbb{R}$ tout entier.

La fonction $S(X) = \sqrt{|X|}$ n'est pas non plus un polynôme. Démontrer ce résultat sera l'objet de l'exercice 3.

La fonction $T(X) = |X|$ n'est toujours pas un polynôme. Démontrer ce résultat sera l'objet de l'exercice 7.

Enfin, pour tout réel r et tout entier $n \geqslant 0$, la fonction $U(X) = (X - r)^n$ est un polynôme de degré n. Son coefficient dominant est égal à 1 et sont coefficient constant vaut $(-r)^n$.

Théorème 4.
Soit $n \geqslant 0$ un entier et $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels tels que

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = 0$$

pour tout réel x. Alors $a_0 = a_1 = \ldots = a_n = 0$.

Démonstration. Supposons qu'il existe au moins un entier k, que l'on choisira minimal, pour lequel le réel a_k est non nul. Pour tout réel x non nul, on a donc

$$0 = x^k(a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \cdots + a_{k+1} x + a_k).$$

Quitte à diviser le terme de droite par x^k, on en déduit que

$$0 = a_n x^{n-k} + a_{n-1} x^{n-1-k} + \cdots + a_{k+1} x + a_k.$$

Or, lorsque x tend vers 0 (sans être nul), chacun des termes $a_i x^{i-k}$ obtenus pour $i \geqslant k+1$ tend vers 0, donc le membre de droite de notre second égalité tend vers a_k, tout en restant égal à 0. Cela indique que a_k est en fait nul malgré tout, et invalide donc notre supposition, prouvant par là même le théorème. □

Corollaire 5.
Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ et $b_0, b_1, \ldots, b_n$ des nombres réels tels que

$$a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \cdots + a_1 x + a_0 = b_n x^n + b_{n-1} x^{n-1} + \cdots + b_1 x + b_0$$

pour tout réel x. L'égalité $a_k = b_k$ est satisfaite pour tout réel k compris entre 0 et n.

Démonstration. Par construction, le polynôme

$$P(X) = (a_n - b_n)X^n + (a_{n-1} - b_{n-1})X^{n-1} + \cdots + (a_1 - b_1)X + (a_0 - b_0),$$

ne prend que des valeurs nulles. Le théorème précédent indique donc comme souhaité que chacun des nombres $a_k - b_k$ est nul. □

Comme annoncé, ce corollaire indique que l'expression fournie en définition 1 est unique, sauf à ajouter un nombre fini de coefficients $a_{n+1}, a_{n+2}, \ldots$ nuls. On peut donc désormais parler sans autre forme de procès du degré de P et de ses coefficients.

Exercice 1
Démontrer qu'un polynôme $P(X)$ est une fonction

- *paire* (c'est-à-dire telle que $P(x) = P(-x)$ pour tout réel x) si et seulement si les seuls coefficients non nuls de P sont de degré pair ;
- *impaire* (c'est-à-dire telle que $P(x) = -P(-x)$ pour tout réel x) si et seulement si les seuls coefficients non nuls de P sont de degré impair.

Proposition 6.
Soit P et Q deux polynômes de degrés d et d' :

- la fonction $P(X) + Q(X)$ est un polynôme de degré au plus $\max\{d; d'\}$;
- la fonction $P(X) \times Q(X)$ est un polynôme de degré $d + d'$;
- la fonction $P \circ Q = P(Q(X))$ est un polynôme, donc le degré vaut $d \times d'$ lorsque $d' \geqslant 1$.

Démonstration. Soit $n = \max\{0; d; d'\}$: il existe des nombres réels $p_0, p_1, \dots, p_n$ et $q_0, q_1, \dots, q_n$ tels que

$$P(x) = p_n x^n + p_{n-1} x^{n-1} + \cdots + p_1 x + p_0 \text{ et } Q(x) = q_n x^n + q_{n-1} x^{n-1} + \cdots + q_1 x + q_0$$

pour tout réel x. Dès lors, on constate déjà que

$$P(x) + Q(x) = (p_n + q_n)x^n + (p_{n-1} + q_{n-1})x^{n-1} + \cdots + (p_1 + q_1)x + (p_0 + q_0),$$

ce qui fait de $P + Q$ un polynôme de degré au plus n.

Ensuite, en développant le produit $P(X) \times Q(X)$, on constate que $P \times Q(X)$ est un polynôme de degré au plus $d + d'$ dont le coefficient de degré k est égal à la somme des produits $p_u q_v$ obtenus lorsque $0 \leqslant u \leqslant d$, $0 \leqslant v \leqslant d'$ et $u + v = k$. En particulier, le coefficient de degré $d + d'$ faut $p_d q_{d'}$, et il est non nul. Ceci prouve bien que $\deg(PQ) = d + d'$.

Enfin, pour tout entier $k \leqslant d$, la fonction $p_k Q(X)^k$ est un polynôme, donc

$$P(Q(X)) = p_k Q(X)^k + p_{k-1} Q(X)^{k-1} + \cdots + p_1 Q(X) + p_0$$

est une somme de polynômes, et il s'agit également d'un polynôme. De surcroît, si $d' \geqslant 1$, chaque polynôme $p_k Q(X)^k$ pour lequel $p_k \neq 0$ est degré kd'. Par conséquent, $P \circ Q$ est de degré au plus dd', et son coefficient de degré dd' est égal au coefficient dominant de $p_d Q(X)^d$, donc il est non nul. Ceci prouve bien que $\deg(P \circ Q) = dd'$. □

On remarquera ici, par exemple, qu'avoir défini le degré du polynôme nul comme $-\infty$ trouve son intérêt lorsque l'on souhaite calculer le degré de PQ même quand P ou Q est nul.

En outre, c'est le résultat ci-dessus qui fait que les polynômes sont des fonctions qu'il est naturel d'étudier : il contient les constantes, la fonction identité, et il est stable par addition, par produit et par composition.

Exercice 2
Démontrer que la fonction $V(X) = \dfrac{1}{X^2 + 1}$ n'est pas un polynôme.

Exercice 3
Démontrer que la fonction $R(X) = \sqrt{|X|}$ n'est pas un polynôme.

Division euclidienne

Dans tout ce qui suit, la notation $\mathbb{K}$ désigne l'ensemble $\mathbb{Q}$ des nombres rationnels ou bien l'ensemble $\mathbb{R}$ des nombres réels. [3]

On commence par démontrer qu'il existe une notion de division euclidienne des polynômes très similaire à la division euclidienne des entiers.

Théorème 7.
Soit A et B des polynômes de $\mathbb{K}[X]$, avec $\deg(B) \geqslant 0$. Il existe un unique couple de polynômes (Q, R) de $\mathbb{K}[X]$ pour lesquels $A = BQ + R$ et $\deg(R) < \deg(B)$.

Le polynôme Q est appelé *quotient* de la division euclidienne de A par B, et R est appelé *reste* de cette même division.

Démonstration. Soit Ω l'ensemble des polynômes de $\mathbb{K}[X]$ que l'on peut écrire sous la forme $A - BQ$, où $Q \in \mathbb{K}[X]$. Par exemple, A et $A - B$ appartiennent à Ω. Soit ensuite R un polynôme de Ω de degré minimal.

Si $\deg(R) \geqslant \deg(Q)$, soit b et r les coefficients dominants respectifs de B et R ; ils sont non nuls. Le polynôme $Q^\bullet(X) = Q(X) + \frac{r}{b}X^{\deg(R)-\deg(B)}$ appartient à $\mathbb{K}[X]$, donc $R^\bullet = A - BQ^\bullet$ appartient à Ω. Or, $R(x) - R^\bullet(X) = \frac{r}{b}X^{\deg(R)-\deg(B)}B(X)$ est un polynôme de degré $\deg(R)$, de coefficient dominant égal à r. Par conséquent, $R^\bullet(X) = R(X) - (R(x) - R^\bullet(X))$ est un polynôme de degré au plus $\deg(R)$, dont le coefficient de degré $\deg(R)$ est égal à 0. Cela démontre que $\deg(R^\bullet) < \deg(R)$.

On en déduit que, si R est un élément de Ω de degré minimal, $\deg(R) < \deg(B)$. Ceci démontre l'existence du couple (Q, R) recherché.

Supposons maintenant qu'il existe deux solutions (Q_0, R_0) et (Q_1, R_1), non nécessairement distinctes. Puisque $BQ_0 + R_0 = A = BQ_1 + R_1$, on sait que $B(Q_0 - Q_1) = R_1 - R_0$, de sorte que

$$\deg(B) + \deg(Q_0 - Q_1) = \deg(B(Q_0 - Q_1)) = \deg(R_1 - R_0) \leqslant \max\{\deg(R_0), \deg(R_1)\} < \deg(B).$$

Cela signifie que le degré $\deg(Q_0 - Q_1)$ est strictement négatif, c'est-à-dire égal à $-\infty$, et donc que $Q_0 = Q_1$, auquel cas on a également $R_0 = R_1$. Le couple (Q, R) est donc bien unique. □

Exemple 8.
La division euclidienne de $X^5 - 3X^3 + 2x + 1$ par $X^3 - 3X^2 - 2X - 1$ et

$$X^5 - 3X^3 + 2x + 1 = (X^3 - 3X + 8)(X^3 - 3X^2 - 2X - 1) + (-29X^2 + 15X + 9).$$

Exercice 4
Calculer le quotient et le reste de la division euclidienne de $X^3 + 2X^2 + 3X + 4$ par $X^2 + 1$.

Définition 9.
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{K}[X]$. On dit que B divise A s'il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ pour lequel $A = BQ$.

Autrement dit, B divise A si le reste de la division euclidienne de A par B est nul.

Exercice 5
Soit A et B deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. On suppose qu'il existe un polynôme Q de $\mathbb{R}[X]$ tel que $A = BQ$. Démontrer que Q appartient à $\mathbb{Q}[X]$.

3. Cela marcherait également avec l'ensemble $\mathbb{C}$ des nombres complexes.

Exemple 10.
Trouvons le reste de la division euclidienne de $A(X) = X^{2023} + 2023$ par $B(X) = X - 1$. La division euclidienne de A par B nous fournit un quotient Q et un reste R de degré au plus 0 pour lesquels $A = BQ + R$.

Puisque $B(1) = 0$, on sait que

$$2024 = A(1) = B(1)Q(1) + R(1) = R(1).$$

Le polynôme R étant constant, il est donc égal à 2024.

Exercice 6
Calculer le reste de la division euclidienne de $X^{100} - 2X^{51} + 1$ par $X^2 - 1$.

Racines et factorisation

Notre but est ici d'expliquer en quoi les *racines* d'un polynôme P, c'est-à-dire les valeurs de x pour lesquelles $P(x) = 0$, donne des informations sur P.

Définition 11.
Une *racine réelle* d'un polynôme P de $\mathbb{R}[X]$ est un nombre réel x tel que $P(x) = 0$.

Exemple 12.
Le polynôme $P(X) = X + 1$ a une racine réelle, qui vaut -1.

Le polynôme $Q(X) = X^2 - 1$ a deux racines réelles, qui valent -1 et $+1$.

Le polynôme $R(X) = X^2 + 1$ n'a aucune racine réelle, car $R(x) = x^2 + 1 \geqslant 1 > 0$ pour tout nombre réel x.

Le polynôme $S(X) = X^2 - 2$ a deux racines réelles, qui valent $-\sqrt{2}$ et $\sqrt{2}$. On notera que, même si S est à coefficients rationnels, ces racines sont *irrationnelles*.

Le polynôme $T(X) = (X - 1)^{2023}$ a une racine réelle, qui vaut -1.

Le polynôme $U(X) = X^3 - 1$ a une racine réelle, qui vaut 1.

Théorème 13.
Soit $\mathbb{K}$ l'un des deux ensembles $\mathbb{Q}$ ou $\mathbb{R}$. Soit P un polynôme de $\mathbb{K}[X]$ et a un nombre appartenant à $\mathbb{K}$. Les deux assertions suivantes sont équivalentes :

1. a est une racine (réelle) de P ;
2. il existe un polynôme Q de $\mathbb{K}[X]$ pour lequel $P(X) = (X - a)Q(X)$.

Démonstration. Tout d'abord, si notre polynôme Q existe bien, il est clair que $P(a) = (a - a)Q(a) = 0$, c'est-à-dire que a est une racine de P.

Réciproquement, si $P(a) = 0$, soit Q et R le quotient et le reste de la division euclidienne de P par $X - a$. Puisque $0 = P(a) = (a - a)Q(a) + R(a) = R(a)$, et comme R est constant, car de degré au plus 0, on en conclut comme prévu que $R = 0$, et donc que $P(X) = (X - a)Q(X)$. □

Théorème 14.
Soit $n \geqslant 0$ un entier. Un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré n possède au plus n racines réelles distinctes.

Démonstration. Supposons qu'il existe un polynôme de $\mathbb{R}[X]$, non nul, dont le nombre de racines réelles est strictement supérieur au degré. On choisit un tel polynôme de degré minimal. On le note P, et on note d son degré.

Puisque P est non nul, son degré d vaut au moins 0, donc P possède au moins une racine réelle, disons r. Le théorème 13 indique qu'il existe un polynôme Q tel que $P(X) = (X-r)Q(X)$. Toute racine de P est soit égale à r, soit une racine de Q. Ainsi, Q possède au moins d racines distinctes, et il est non nul.

Or, $d = \deg(P) = \deg(X-r) + \deg(Q) = 1 + \deg(Q)$. Par conséquent, Q possède strictement plus de $\deg(Q)$ racines, ce qui contredit la minimalité du degré de P. Notre supposition initiale était donc invalide, ce qui conclut. □

Corollaire 15.
Soit $n \geqslant 0$ un entier. Un polynôme de degré au plus n ayant au moins $n+1$ racines réelles distinctes est nul. En particulier, un polynôme ayant une infinité de racines est forcément le polynôme nul.

Exercice 7
Démontrer que la fonction $T(X) = |X|$ n'est pas un polynôme.

Exercice 8
Démontrer que la fonction $(X^2+1)(2+\cos(X))$ n'est pas un polynôme.

Corollaire 16.
Soit $n \geqslant 0$ un entier, et $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme de degré n. Si P possède n racines réelles distinctes, disons $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$, alors

$$P(X) = a_n(X-r_1)(X-r_2)\cdots(X-r_n).$$

Démonstration. Le polynôme

$$Q(X) = P(X) - a_n(X-r_1)(X-r_2)\cdots(X-r_n)$$

est de degré au plus n, mais son coefficient de degré n vaut $a_n - a_n = 0$. Par conséquent, Q est de degré au plus $n-1$. Or, les n réels $r_1 < r_2 < \cdots < r_n$ sont des racines de Q. Par conséquent, Q est nul. □

Propriétés diverses

On énonce ici quelques résultats que vous aurez peut-être vus au lycée, et dont certains seront démontrés, tandis que d'autres seront simplement énoncés à des fins culturelles.

Théorème 17.
Tout polynôme est une fonction continue.

Démonstration. Soit $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$ un polynôme, et soit $(x_k)_{k\geqslant 0}$ une suite convergente, dont on note x la limite. Pour tout entier i compris entre 0 et n, la suite $(a_i x_k^i)_{k\geqslant 0}$ tend vers $a_i x^i$, en tant que produit d'une suite (constante) de limite a_i et de i suites de limite x. Dès lors, la suite $(P(x_k))_{k\geqslant 0}$ tend vers $P(x)$, en tant que somme de $n+1$ suites de limites $a_i x^i$. Ainsi, P est bien une fonction continue. □

Proposition 18.
Soit P un polynôme non nul, de degré n et de coefficient dominant a_n. Lorsque le réel x tend vers $+\infty$ ou $-\infty$, le ratio $\dfrac{P(x)}{a_n x^n}$ tend vers 1.

Démonstration. Soit $P(X) = a_n X^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1 X + a_0$ notre polynôme : lorsque $x \neq 0$, le ratio $\dfrac{P(x)}{a_n x^n}$ est égal à

$$1 + \frac{a_{n-1}}{a_n x} + \frac{a_{n-2}}{a_n x^2} + \cdots + \frac{a_1}{a_n x^{n-1}} + \frac{a_0}{a_n x^n}.$$

Puisque chacune des suites $\dfrac{a_i}{a_n x^{n-i}}$ obtenues lorsque $0 \leqslant i \leqslant n-1$ tend vers 0, notre ratio est une somme de $n+1$ termes dont l'un vaut 1 et les n autres tendent vers 0 ; il tend donc vers 1. □

Corollaire 19.
Tout polynôme de degré impair admet au moins une racine réelle.

Démonstration. Lorsque x tend vers $\pm\infty$, $P(x)$ est de même signe que $a_n x^n$, c'est-à-dire que de même signe que a_n si $x > 0$, et que $-a_n$ si $x < 0$. Par conséquent, P change au moins une fois de signe et, en vertu du théorème des valeurs intermédiaires, il admet nécessairement une racine réelle. □

Théorème 20.
Soit $P(X) = aX^2 + bX + c$ un polynôme de degré 2. La quantité $\Delta = b^2 - 4ac$ est appelée *discriminant* de P. Elle permet de déterminer les racines réelles de P en vertu de la disjonction de cas suivante :

- si $\Delta < 0$, le polynôme P n'a aucune racine réelle ;
- si $\Delta = 0$, le polynôme P admet $\dfrac{-b}{2a}$ pour unique racine réelle, et

$$P(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right)^2 ;$$

- si $\Delta > 0$, le polynôme P admet $\dfrac{-b - \sqrt{\Delta}}{2a}$ et $\dfrac{-b + \sqrt{\Delta}}{2a}$ pour racines réelles, et

$$P(X) = a\left(X + \frac{b + \sqrt{\Delta}}{2a}\right)\left(X + \frac{b - \sqrt{\Delta}}{2a}\right).$$

Démonstration. Il s'agit en fait de vérifier, pour tout réel x, que

$$\begin{aligned} P(x) = 0 &\Leftrightarrow ax^2 + bx + c = 0 \\ &\Leftrightarrow x^2 + \frac{b}{a}x + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 - \frac{b^2}{(2a)^2} + \frac{c}{a} = 0 \\ &\Leftrightarrow \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2 - 4ac}{(2a)^2} = \frac{\Delta}{(2a)^2} \\ &\Leftrightarrow x + \frac{b}{2a} = \pm\frac{\sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \Delta \geqslant 0 \\ &\Leftrightarrow x = \frac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a} \text{ et } \Delta \geqslant 0. \end{aligned}$$

On en déduit donc effectivement que P n'a aucune racine réelle lorsque $\Delta < 0$, et que $\dfrac{-b \pm \sqrt{\Delta}}{2a}$ sont les seules racines réelles de P lorsque $\Delta \geqslant 0$.

En particulier, si $\Delta > 0$, on dispose là de deux racines réelles distinctes, et le corollaire 16 nous fournit précisément l'expression de P indiquée.

Si $\Delta = 0$, on procède de façon légèrement différente : le théorème 13 nous assure qu'il existe un polynôme Q pour lequel $P(X) = \left(X + \dfrac{b}{2a}\right) Q(X)$, et Q est alors de degré 1. Par conséquent, Q admet une racine, qui ne peut être différente de $\dfrac{-b}{2a}$, et puisque Q est de coefficient dominant a, on en conclut que

$$Q(X) = a\left(X + \frac{b}{2a}\right),$$

ce qui nous donne bien la factorisation annoncée. □

Quelques éléments culturels

Enfin, voici deux résultats que nous ne démontrerons pas, et que nous n'utiliserons pas directement dans le cadre de ce cours, mais qui ont le bon goût d'être simple à exprimer.

Théorème 21.
Tout polynôme non constant de $\mathbb{C}[X]$ admet une racine complexe. Autrement dit, si $P(X)$ est un polynôme de degré au moins 1 à coefficients complexes, il existe un nombre complexe z tel que $P(z) = 0$.

Corollaire 22.
Tout polynôme $P(X)$ de $\mathbb{C}[X]$ de degré n et de coefficient dominant a_n admet une factorisation de la forme

$$P(X) = a_n(X - r_1)(X - r_2)\cdots(X - r_n),$$

où $r_1, r_2, \ldots, r_n$ sont des nombres complexes (non nécessairement distincts).

Théorème 23.
Soit P un polynôme de $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(x) \geqslant 0$ pour tout réel x. Il existe deux polynômes A et B de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P = A^2 + B^2$.

Exercices divers

Exercice 9
Trouver les réels a et b pour lesquels $(X-1)^2$ divise $aX^4 + bX^3 + 1$.

Exercice 10
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $16P(X^2) = P(2X)^2$.

Exercice 11
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ pour lesquels

$$P(a-b) + P(b-c) + P(c-a) = 2P(a+b+c)$$

pour tous réels a, b, c tels que $ab + bc + ca = 0$.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
La fonction P est paire si et seulement si

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = (-1)^n a_nX^n + (-1)^{n-1}a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + (-1)a_1X + a_0,$$

c'est-à-dire si et seulement si chacun des coefficients $a_1, a_3, a_5, \ldots$ de degré impair est nul.

De même, P est impaire si et seulement si

$$a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0 = (-1)^{n+1} a_nX^n + (-1)^n a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + (-1)^2 a_1X + (-1)a_0,$$

c'est-à-dire si et seulement si chacun des coefficients $a_0, a_2, a_4, \ldots$ de degré pair est nul.

Solution de l'exercice 2
Si V est un polynôme, alors

$$2 + \deg(V) = \deg(X^2+1) + \deg(V) = \deg(1) = 0,$$

ce qui n'est pas possible.

Solution de l'exercice 3
Si R est un polynôme, alors

$$4\deg(R) = \deg(X^2) = 2,$$

ce qui n'est pas possible.

Solution de l'exercice 4
La méthode utilisée pour démontrer le théorème 7 nous permet, étant donné un couple (Q, R) de polynômes pour lesquels $A = BQ + R$ et $\deg(R) \geqslant \deg(B)$, de calculer un nouveau couple (Q_1, R_1) pour lesquels $A = BQ_1 + R_1$ et $\deg(R_1) < \deg(R)$. En procédant ainsi de proche en proche, on finira par identifier le quotient et le reste recherchés.

Ici, on tombe donc successivement sur les couples

$$\begin{aligned}(Q_0, R_0) &= (0, X^3 + 2X^2 + 3X + 4);\\ (Q_1, R_1) &= (X, 2X^2 + 2X + 4);\\ (Q_2, R_2) &= (X+2, 2X+2).\end{aligned}$$

Puisque $\deg(R_2) = 1 < \deg(X^2+1)$, on s'arrête ici : le quotient et le reste recherchés sont donc $Q_2(X) = X+2$ et $R_2(X) = 2X+2$.

Solution de l'exercice 5
Soit (Q_1, R_1) le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{Q}[X]$: il s'agit de deux polynômes de $\mathbb{Q}[X]$. Puisque $A = BQ_1 + R_1$ et $\deg(R_1) < \deg(B)$, les polynômes Q_1 et R_1 sont également le quotient et le reste de la division euclidienne de A par B dans $\mathbb{R}[X]$, donc $Q_1 = Q$.

Solution de l'exercice 6
Soit Q et R le quotient et le reste de cette division euclidienne.

Puisque $\deg(R) < \deg(X^2-1) = 2$, le polynôme R est une fonction affine, il existe des réels a et b pour lesquels $R(X) = aX+b$. On entreprend alors de l'évaluer en $x = \pm 1$. En effet, puisque $x^2 - 1 = 1 - 1 = 0$, on constate alors que

$$x^{100} - 2x^{51} + 1 = (x^2-1)Q(x) + R(x) = R(x).$$

Ainsi, $R(-1) = (-1)^{100} - 2(-1)^{51} + 1 = 4$ et $R(1) = 1^{100} - 2\times 1^{51} + 1 = 0$. Cela signifie que $b-a = 4$ et $b+a = 0$, ou encore que $a = -2$ et $b = 2$. Par conséquent, $R(X) = -2X+2$.

Solution de l'exercice 7
Si $T(X)$ est un polynôme, la fonction $T(X) - X$ est aussi un polynôme. Or, cette dernière fonction est non nulle mais a une infinité de racines réelles. Cette absurdité nous permet de conclure que $T(X)$ n'est en fait pas un polynôme.

Solution de l'exercice 8
Soit $A(X)$ cette fonction. Si A est un polynôme, la fonction

$$(X^2+1)\cos(X) = A(X) - 2(X^2+1)$$

est aussi un polynôme. Or, cette dernière fonction est non nulle mais a une infinité de racines réelles. Cette absurdité nous permet de conclure que $A(X)$ n'est en fait pas un polynôme.

Solution de l'exercice 9
Si $(X-1)^2$ divise le polynôme $A(X) = aX^4 + bX^3 + 1$, c'est que $a+b+1 = A(1) = 0$. Dès lors, $b = -1-a$, et on peut réécrire A comme $A(X) = aX^4 - (a+1)X^3 + 1$, ce qui nous permet de le factoriser comme $A(X) = (X-1)(aX^3 - X^2 - X - 1)$.

Il reste alors à s'assurer que $X-1$ divise le polynôme $B(X) = aX^3 - X^2 - X - 1$, c'est-à-dire que $0 = B(1) = a-3$. On en déduit que $a = 4$ et $b = -4$, auquel cas $X-1$ divise effectivement B, donc $(X-1)$ divise A.

Solution de l'exercice 10
Tout d'abord, le polynôme nul est manifestement une solution. On suppose donc désormais P non nul, et on pose $P(X) = a_nX^n + a_{n-1}X^{n-1} + \cdots + a_1X + a_0$.

Si P admet deux coefficients non nuls de degrés distincts, soit d et $d+k$ les deux plus petits entiers pour lesquels a_d et a_{d+k} sont non nuls. Les deux premiers coefficients non nuls de $16P(X^2)$ sont de degrés $2d$ et $2d+2k$, tandis que les deux premiers coefficients non nuls de $P(2X)^2$ sont $2d$ et $2d+k$. Puisque $2d < 2d+k < 2d+2k$, il s'agit là d'une absurdité, qui invalide donc notre hypothèse : le polynôme P est en fait de la forme $P(X) = a_nX^n$.

Dès lors, l'équation de l'énoncé se réécrit comme $16a_nX^{2n} = 2^{2n}a_n^2X^{2n}$. Puisque a_n est non nul, elle est satisfaite si et seulement si $a_n = 2^{4-2n}$.

En conclusion, les solutions sont le polynôme nul et les polynômes $2^{4-2n}X^n$ obtenus lorsque $n \geqslant 0$.

Solution de l'exercice 11

Soit $P(X) = p_nX^n + p_{n-1}X^{n-1} + \cdots + p_1X + p_0$ une éventuelle solution non nulle.

Lorsque $a = b = c = 0$, on constate que $3P(0) = 2P(0)$, de sorte que $P(0) = 0$. Ainsi, n est non nul. Lorsque $b = c = 0$, on constate ensuite que $P(a) + P(0) + P(-a) = 2P(a)$, donc que $P(a) = P(-a)$ pour tout réel a. Ainsi, le polynôme P est pair ; cela nous assure déjà que l'équation de l'énoncé est vraie lorsqu'au moins un réel parmi a, b et c est nul. On s'intéresse donc désormais au cas où a, b et c sont tous non nuls.

Dans ces conditions, on pose $z = \dfrac{b}{a}$, de sorte que $c = \dfrac{-ab}{a+b} = \dfrac{-az}{1+z}$, puis $d = \dfrac{a}{1+z}$, et on souhaite que

$$P(d(1-z^2)) + P(dz(2+z)) + P(-d(1+2z)) = P(d(1+z+z^2))$$

pour tout réel d non nul et tout réel z différent de 0 et de 1. Il s'agit donc de vérifier que le polynôme en deux variables

$$Q(X,Y) = P(X(1-Y^2)) + P(XY(2+Y)) + P(-X(1+2Y)) - P(X(1+Y+Y^2))$$

est nul.

Or, le terme de degré X^k de ce polynôme vaut $p_kR_k(Y)$, où l'on a posé

$$R_k(Y) = (1-Y^2)^k + Y^k(2+Y)^k + (-1)^k(1+2Y)^k - (1+Y+Y^2)^k.$$

Les polynômes P solutions du problèmes sont donc ceux pour lesquels $R_k = 0$ (et k est pair) dès lors que $p_k \neq 0$. On entreprend donc de rechercher les entiers k pairs pour lesquels R_k, de degré au plus $2k$, admet au moins $2k+1$ racines distinctes.

Puisque a, b et c jouent des rôles symétriques, si l'égalité $R_k(z) = 0$ est satisfaite en un point $z \neq 0$, elle est aussi satisfaite en $\tau_1(z) = b/a = 1/z$ et en $\tau_2(z) = a/c = -(z+1)/z$. Si l'on note Ω_k l'ensemble des racines de Q_k, on sait donc que Ω_k contient $\tau_1(\Omega_k \setminus \{0\})$ et $\tau_2(\Omega_k \setminus \{0\})$.

Par exemple, $R_k(-1) = 0^k + 1^k + (-1)^k - 2\times 1^k = 0$, donc Ω_k contient -1, mais aussi $\tau_2(-1) = 0$. De même, $R_k(1) = 0^k + 3^k + 3^k - 2\times 3^k$, donc Ω_k contient 1, mais aussi $\tau_2(1) = -2$ et $\tau_1(-2) = -1/2$. Cela nous assure déjà que le polynôme R_2, de degré au plus 4, est nul, car il a au moins cinq racines distinctes.

En revanche, le nombre $R_k(2) = (-3)^k + 8^k + 5^k - 2\times 7^k$ est manifestement non nul quand k est trop grand : par exemple, si $k \geqslant 8$,

$$3^k + 8^k + 5^k > 8^k = (7+1)^k \geqslant 7^k + n\times 7^{k-1} = 2\times 7^k,$$

de sorte que $R_k(2) > 0$. De même,

$$R_6(2) \equiv 3^6 + 8^6 + 5^6 - 2\times 7^6 \equiv 1 + 1 + 1 \not\equiv 0 \pmod 7,$$

donc $R_6(2) \neq 0$, et $k \neq 6$. Enfin, on vérifie que

$$R_4(2) = 3^4 + 8^4 + 6^4 - 2\times 7^4 = 81 + 4096 + 625 - 4802 = 0.$$

Cela signifie que Ω_4 contient 2, mais aussi $\tau_1(2) = 1/2$, $\tau_2(2) = -3/2$ et $\tau_1(-3/2) = -2/3$. Ainsi, le polynôme R_4, de degré au plus 8, est nul, car il a au moins neuf racines distinctes.

En conclusion, les solutions sont les polynômes de la forme $P(X) = uX^4 + vX^2$.

Remarque
Il pourrait être tentant de dire, comme on le trouvera souvent sur internet pour ce problème donné à l'OIM 2004, que « la vérification que les polynômes $P(X) = uX^4 + vX^2$ fonctionnent est aisée ». Il ne faut surtout pas tomber dans ce piège. Les gens qui ont écrit que la vérification était aisée ont surtout voulu indiquer qu'elle était pénible bien que conceptuellement élémentaire, et qu'ils n'ont pas eu le courage de la mener sans leur logiciel de calcul formel préféré. En particulier, développer brutalement l'expression

$$(a-b)^4 + (b-c)^4 + (c-a)^4 - 2(a+b+c)^4$$

pour espérer la factoriser par $ab + bc + ca$ est hautement non trivial en pratique.

2 Ordre 1 (Félix)

— Ordre multiplicatif et petit théorème de Fermat —

Définition 1.
L'ordre multiplicatif d'un entier a modulo un entier strictement positif n premier avec a est le plus petit entier d tel que $a^d \equiv 1 \pmod{n}$.

Théorème 2. Étant donnés a et n premiers entre eux, $a^d \equiv 1 \pmod{n}$ si et seulement si l'ordre multiplicatif de a modulo n divise d.

Théorème 3 (Petit théorème de Fermat)**.** Pour tout entier premier p et tout entier a non multiple de p, $a^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$.

Définition 4.
On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers inférieurs à un entier strictement positif n et premiers avec lui.

Théorème 5 (Théorème d'Euler)**.** Pour tout entier positif n et tout entier a premier avec n, $a^{\varphi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$.

Exercice 1
Que vaut 2^{2023} modulo 13 ?

Exercice 2
Soient deux nombres premiers p et q, et un entier a tels que $a^p \equiv a \pmod{q}$ et $a^q \equiv a \pmod{p}$. Montrer que $a^{pq} \equiv a \pmod{pq}$.

Exercice 3
Quel jour de la semaine serons nous dans $10^{10^{100}}$ jours ?

Exercice 4
Montrer que tout entier premier avec 10 a un multiple composé uniquement du chiffre 1 répété plusieurs fois.

Exercice 5 (Un point historique)
Fermat avait conjecturé que $2^{2^5}+1$ était premier, mais Euler a montré que ce n'était pas le cas. Comment Euler a-t-il pu trouver rapidement un diviseur de ce nombre ?

Exercice 6
Montrer que pour tout p premier, $p^p - 1$ admet un diviseur premier congru à 1 modulo p.

3 Polynômes 2 (Georges)

Relations de Viète et racines :

Proposition 1 (Relation de Viète de degré 2)**.**
Soit α et β les racines du polynôme $aX^2 + bX + c$. On a

$$\alpha\beta = \frac{c}{a} \text{ et } \alpha + \beta = \frac{-b}{a}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x-\alpha)(x-\beta) \\ &= ax^2 - a(\alpha+\beta)x + a\alpha\beta \end{aligned}$$

et d'identifier les coefficients ainsi obtenus. □

Proposition 2 (Relation de Viète de degré 3)**.**
Soit α, β et γ les racines du polynôme $aX^3 + bX^2 + cX + d$. On a

$$\alpha\beta\gamma = \frac{-d}{a}, \alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma = \frac{c}{a} \text{ et } \alpha + \beta + \gamma = \frac{-b}{a}.$$

Démonstration. Il suffit de vérifier que

$$\begin{aligned} ax^2 + bx + c &= a(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) \\ &= ax^2 - a(\alpha+\beta+\gamma)x^2 + a(\alpha\beta+\alpha\gamma+\beta\gamma)x - \alpha\beta\gamma \end{aligned}$$

et d'identifier les coefficients ainsi obtenus. □

Corollaire 3.
Si, dans un système d'équations avec trois inconnues α, β et γ, on connaît les valeurs des trois nombres $\alpha\beta\gamma$, $\alpha\beta + \alpha\gamma + \beta\gamma$ et $\alpha + \beta + \gamma$, il suffit de calculer le polynôme $(X-\alpha)(X-\beta)(X-\gamma)$ et calculer ses racines pour en déduire α, β et γ.

Exemple 4.
On souhaite trouver les couples de réels (x, y) tels que $x + y = 3$ et $xy = 2$. Il suffit donc de

calculer les racines du polynôme

$$\begin{aligned} P(t) &= (t-x)(t-y) \\ &= t^2 - (x+y)t + xy \\ &= t^2 - 3t + 2 \\ &= (t-2)(t-1) \end{aligned}$$

pour en déduire que les couples solutions sont $(2,1)$ et $(1,2)$.

Exercice 1
Trouver les réels x, y et z tels que

$$\begin{cases} x+y+z = 3; \\ x^2+y^2+z^2 = 3; \\ x^3+y^3+z^3 = 3. \end{cases}$$

Exercice 2
Trouver les réels non nuls x tels que $x + \dfrac{1}{x} = 2$.

Exercice 3
Trouver les réels x et y tels que

$$\begin{cases} x+y = 1; \\ x^3+y^3 = 19. \end{cases}$$

Exercice 4 (JBMO P1 2020)
Trouver les triplets (a,b,c) de réels non nuls tels que

$$\begin{cases} a+b+c = \frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}; \\ a^2+b^2+c^2 = \frac{1}{a^2}+\frac{1}{b^2}+\frac{1}{c^2}. \end{cases}$$

Exercice 5
Soit P un polynôme unitaire à coefficients réels positifs, de degré n, possédant n racines réelles. On suppose que $P(0) = 1$. Montrer que $P(2) \geqslant 3^n$.

Croissance

Remarque 5.
Un polynôme de la forme $P(X) = a_0 + a_1X + \ldots + a_nX^n$, de degré n, se comporte comme a_nX^n à l'infini. Plus précisément, $P(x)$ est du même ordre de grandeur et a la même croissance que a_nx^n lorsque x est arbitrairement grand.

Exercice 6
Soient P et Q des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$. Montrer que, s'il existe un réel N tel que $P(x) < Q(x)$ pour tout $x > N$, alors $\deg(P) \leqslant \deg(Q)$.

Exercice 7
Soient P et Q des polynômes dans $\mathbb{R}[X]$, à coefficients dominants positifs. On suppose que $P(P(X)) = Q(Q(X))$. Montrer que $P(X) = Q(X)$.

Exercice 8
Existe t-il un polynôme P tel que $P(n) = \lfloor \sqrt{1} \rfloor + \lfloor \sqrt{2} \rfloor + \lfloor \sqrt{3} \rfloor \cdots + \lfloor \sqrt{n} \rfloor$ pour tout entier $n \geqslant 0$?

Exercice 9
Existe t-il un polynôme P tel que $P(n) = \lfloor \sqrt[3]{1} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{2} \rfloor + \lfloor \sqrt[3]{3} \rfloor \cdots + \lfloor \sqrt[3]{n^2} \rfloor$ pour tout entier $n \geqslant 0$?

Interpolation de Lagrange

Cette section est fortement inspiré du chapitre 2.5 de ce cours cours d'Igor Kortchemski sur les polynômes, disponible ici : https ://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/polynomes.pdf

Théorème 6 (Interpolation de Lagrange)**.**
Soient $a_1, \dots a_n$ et $b_1 \dots, b_n$ des nombres réels, tels que $a_1 < a_2 < \dots < a_n$. Il existe un unique polynôme P de degré $n-1$ tel que $P(a_i) = b_i$ pour tout i.

Démonstration. On montre d'abord l'unicité de ce polynôme. En effet, si P et Q sont deux polynômes vérifiant les conditions de l'énoncé du théorème, alors le polynôme $P - Q$ est de degré au plus $n-1$, et il admet au moins n racines différentes, à savoir $a_1, \dots, a_n$. Il est donc nécessairement nul, de sorte que $P = Q$.

Réciproquement, on montre maintenant qu'un tel polynôme P existe bien, en introduisant les polynômes d'interpolation de Lagrange :

$$L_i(X) = \prod_{j \neq i}^{n} \frac{X - a_j}{a_i - a_j}.$$

Notons que L_i est de degré $n-1$, que $L_i(a_j) = 0$ lorsque $j \neq i$, et que $L_i(a_i) = 1$. Le polynôme recherché est alors $P(X) = \sum_i b_i L_i(X)$: il vérifie bien les conditions imposées sur son degré et sur ses valeurs en chaque a_i. □

Exercice 10
Trouver le polynôme P de degré 2 dans $\mathbb{R}[X]$ tel que $P(0) = 1$, $P(1) = 2$ et $P(2) = 5$.

Exercice 11
Soit P un polynôme tel que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$. Montrer que P est à coefficients dans $\mathbb{Q}$. Ce résultat est-il toujours vrai si on remplace $\mathbb{Q}$ par $\mathbb{Z}$?

Exercice 12
Soient $a_1, \dots, a_n$ des réels deux à deux distincts et $b_1, \dots, b_n$ des réels quelconques. Quels sont les polynômes P tels que $P(a_i) = b_i$ pour tout i ?

Solutions

Solution de l'exercice 1

Tout d'abord, en tâtonnant, on constate que $x = y = z = 1$ fonctionne. On va donc démontrer qu'il s'agit de la seule solution. Pour ce faire, l l'idée est d'obtenir plusieurs polynômes de chacun des degrés qui nous intéressent, de manière à obtenir des expressions que l'on saura utiliser.

Par exemple, $(x+y+z)^2 = (x^2+y^2+z^2) + 2(xy+yz+zx)$, donc

$$xy+yz+zx = \frac{(x+y+z)^2 - (x^2+y^2+z^2)}{2} = \frac{3^2-3}{2} = 3.$$

De même,

$$(x+y+z)^3 = (x^3+y^3+z^3) + 3(x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y) + 6xyz \text{ et}$$
$$(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) = (x^3+y^3+z^3) + (x^2y+x^2z+y^2x+y^2z+z^2x+z^2y).$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} xyz &= \frac{(x+y+z)^3 - (x^3+y^3+z^3) - 3(x+y+z)(x^2+y^2+z^2) + 3(x^3+y^3+z^3)}{6} \\ &= \frac{3^3 - 3 - 3^3 + 3^2}{6} \\ &= 1. \end{aligned}$$

On en conclut que

$$(t-x)(t-y)(t-z) = t^3 - 3t^2 + 3t - 1 = (t-1)^3,$$

et donc que $x = y = z = 1$.

Solution de l'exercice 2

Soit x un réel tel que $x + \frac{1}{x} = 2$. Il suffit de considérer le polynôme

$$P(t) = (t-x)\left(t - \frac{1}{x}\right) = t - 2x + 1 = (t-1)^2$$

pour en déduire que $x = 1$. Réciproquement, $x = 1$ convient effectivement.

Solution de l'exercice 3

Encore une fois, en tâtonnant, on finit par trouver les solutions $(3,-2)$ et $(-2,3)$, et on va démontrer que ce sont les seules.

On constate ici que $(x+y)^3 = (x^3+y^3) + 3xy(x+y)$, et donc que

$$xy = \frac{(x+y)^3 - (x^3+y^3)}{3(x+y)} = \frac{1-19}{3} = -6.$$

On en conclut que

$$(t-x)(t-y) = t^2 - t - 6 = (t-3)(t+2),$$

et donc que $(3,-2)$ et $(-2,3)$ sont bien les seules solutions.

Solution de l'exercice 4

Soit (a,b,c) une solution, par exemple $(1,1,1)$. On observe tout d'abord que

$$(a+b+c)^2 = (a^2+b^2+c^2) + 2(ab+bc+ca)$$

et que

$$\left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)^2 = \left(\frac{1^2}{a}+\frac{1^2}{b}+\frac{1^2}{c}\right) + 2\left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right).$$

On en déduit que $ab+bc+ca = \dfrac{1}{ab}+\dfrac{1}{bc}+\dfrac{1}{ca}$.

Or,

$$ab+bc+ca = \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)abc = (a+b+c)abc,$$

et

$$\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca} = \frac{c+a+b}{abc}.$$

Par conséquent, $a+b+c=0$ ou bien $abc = \dfrac{1}{abc}$, c'est-à-dire $abc = \pm 1$.

Or, si $a+b+c=0$, on a vu que $ab+bc+ca=0$, donc que $a^2+b^2+c^2=0$, en contradiction avec la non nullité des réels a, b et c. Ainsi, il existe un nombre $\varepsilon = \pm 1$ pour lequel $abc = \varepsilon$, auquel cas

$$\begin{aligned}(t-a)(t-b)(t-c) &= t^3 - (a+b+c)t^2 + (ab+bc+ca)t - abc \\ &= t^2 - \left(\frac{1}{a}+\frac{1}{b}+\frac{1}{c}\right)t^2 + \left(\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{ca}\right)t - \frac{1}{abc} \\ &= \left(t-\frac{1}{a}\right)\left(t-\frac{1}{b}\right)\left(t-\frac{1}{c}\right).\end{aligned}$$

Par conséquent, les triplets (a,b,c) et $(1/a, 1/b, 1/c)$ sont identiques à l'ordre près, auquel cas les égalités de l'énoncé sont bien sûr vérifiées ; autrement dit, la fonction $xx \mapsto 1/x$ envoie chacun des nombres a, b et c sur l'un des nombres a, b et c.

Soit chacun est envoyé sur lui-même, ce qui signifie que $a,b,c = \pm 1$. Soit, quitte à échanger a, b et c, le nombre a est envoyé sur b, auquel cas b est envoyé sur a et c sur lui-même.

En conclusion, les solutions sont les triplets $\left(\pm 1, x, \dfrac{1}{x}\right)$ et leurs permutations.

Solution de l'exercice 5

Puisque $P(x) \geqslant P(0) = 1$ pour tout $x \geqslant 0$, les racines de P sont toutes négatives. Si on les nomme $-r_i$, on peut donc écrire

$$P(X) = (X+r_1)(X+r_2)\cdots(X+r_n).$$

Or, $r_1 r_2 \cdots r_n = P(0) = 1$. L'inégalité arithmético-géométrique pondérée indique donc que

$$\begin{aligned}P(x) &= (x+r_1)(x+r_2)\cdots(x+r_n) \\ &\geqslant ((x+1)\sqrt[x+1]{r_1})((x+1)\sqrt[x+1]{r_2})\cdots((x+1)\sqrt[x+1]{r_n}) \\ &\geqslant (x+1)^n.\end{aligned}$$

Pour $x = 2$, cela signifie précisément que $P(2) \geqslant 3$.

Solution de l'exercice 6

Soit p et q les degrés des polynômes P et Q, et soit a_p et a_q leurs coefficients dominants. Puisque $P(x)$ et $Q(x)$ se comportent comme $a_p x^p$ et $a_q x^q$ au voisinage de $+\infty$, et si $p > q$, il y aura nécessairement un moment à partir duquel $P(x) > P(y)$.

Solution de l'exercice 7

Posons $P(X) = a_0 + a_1 X + \cdots + a_p X^p$ et $Q(X) = b_0 + b_1 X + \cdots + b_q X^q$. Tout d'abord, $P \circ P$ et $Q \circ Q$ sont de degrés p^2 et q^2, donc $p = q$. En outre, si $p = q = 0$, on constate que $P(X) = a_0 = P(P(X)) = Q(Q(X)) = b_0 = Q(X)$.

On suppose maintenant que $P \neq Q$, et on considère le plus grand entier k pour lequel $a_k \neq b_k$; quitte à échanger P et Q, on suppose $a_k > b_k$. Dans ces conditions, $P(X) - Q(X)$ est de degré k, et de coefficient dominant $a_k - b_k > 0$, donc $P(x) > Q(x)$ quand x est assez grand.

En outre, comme $a_q > 0$ et $b_q > 0$, et puisque P et Q sont non constants, on sait que P et Q sont croissants et arbitrairement grands au voisinage de $+\infty$. Lorsque x est assez grand, on en déduit donc que $P(P(x)) > P(Q(x)) > Q(Q(x))$, ce qui est absurde. Les deux polynômes P et Q sont donc égaux.

Solution de l'exercice 8

Supposons qu'un tel polynôme P existe, soit d son degré, et soit k un entier tel que $k \geqslant d$. Pour tout entier n compris entre k^2 et $k^2 + 2k$, on a $P(n) - P(n-1) = k$. Le polynôme $P(X) - P(X-1) - k$, de degré au plus d, a donc $2k + 1$ racines, et il est nul. Puisque cette relation ne saurait être valable pour tout entier $k \geqslant d$, notre supposition était donc absurde.

Solution alternative

Supposons qu'un tel polynôme P existe, et soit d son degré. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on sait que $0 \leqslant P(n) \leqslant n\sqrt{n}$. On en déduit que $d \leqslant 1$.

Si l'on écrit $P(X) = aX + b$, on a donc $b = P(0) = 0$, puis $a = P(1) = 1$, de sorte que $P(X) = X$. Mais ceci est absurde, car $P(4) = 5$.

Solution de l'exercice 9

Supposons qu'un tel polynôme P existe, soit d son degré, et soit k un entier tel que $k \geqslant d$. Pour tout entier n compris entre k^3 et $k^3 + k$, on a

$$k^2 \leqslant \sqrt[3]{n^2} \leqslant \sqrt[3]{(k^3+k)^2} = \sqrt[3]{k^6 + 2k^4 + k^2} < \sqrt[3]{k^6 + 3k^4 + 2k^2 + 1} = k^2 + 1.$$

On en déduit que $P(n) - P(n-1) = k$.

Comme à l'exercice précédent, le polynôme $P(X) - P(X-1) - k$, de degré au plus d, a donc $k+1$ racines, et il est nul. Puisque cette relation ne saurait être valable pour tout entier $k \geqslant d$, notre supposition était donc absurde.

Solution alternative

Supposons qu'un tel polynôme P existe, et soit d son degré. Pour tout entier $n \geqslant 0$, on sait que $0 \leqslant P(n) \leqslant n^2 \times n^{2/3} = n^{8/3}$. On en déduit que $d \leqslant 2$.

Si l'on écrit $P(X) = aX^2 + bX + c$, on a donc $c = P(0) = 0$, puis $a + b = P(1) = 1$ et $4a + 2b = P(2) = 4$, de sorte que $a = 1$, $b = 0$, et donc que $P(X) = X^2$. Mais ceci est absurde, car $P(3) = 11$.

Solution de l'exercice 10
Le polynôme recherché vaut

$$\begin{aligned} P(X) &= \frac{(X-1)(X-2)}{(0-1)(0-2)} + 2\frac{(X-0)(X-2)}{(1-0)(1-2)} + 5\frac{(X-0)(X-1)}{(2-0)(2-1)} \\ &= \frac{X^2-3X+2}{2} + 2\frac{X^2-2X}{-1} + 5\frac{X^2-X}{2} \\ &= \frac{X^2-3X+2-4X^2+8X+5X^2-5X}{2} \\ &= \frac{2X^2+2}{2} \\ &= X^2+1. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 11
Soit n le degré du polynôme P. Soient également $a_1 < a_2 < \cdots < a_{n+1}$ des rationnels quelconques, et soit $b_1, b_2, \ldots, b_{n+1}$ leurs images par P : par hypothèse, ces images sont rationnelles. Par conséquent, chaque polynôme

$$L_i(X) = \prod_{j\neq i}^{n} \frac{X-a_j}{a_i-a_j}$$

est un polynôme à coefficients rationnels et P, qu est la somme de ces polynômes, est également à coefficients rationnels.

Ce résultat n'est plus vrai dans $\mathbb{Z}$, comme l'illustre le contre-exemple donné par le polynôme $P(X) = \dfrac{X(X-1)}{2}$.

Solution de l'exercice 12
Soit $L(X)$ le polynôme de degré au plus $n-1$ tel que $L(a_i) = b_i$ et soit $A(X)$ le polynôme $(X-a_1)(X-a_2)(X-a_3)\cdots(X-a_n)$. On vérifie facilement que l'ensemble des polynômes qui s'écrivent sous la forme $P(X) = A(X)Q(X) + L(X)$ vérifient les conditions de l'exercice.

Montrons que ce sont les seuls. Pour ce faire, on considère une solution P, puis on note Q et R son quotient et son reste dans la division euclidienne par A. Par construction, R est de degré au plus $n-1$, et

$$R(a_i) = P(a_i) - Q(a_i)A(a_i) = P(a_i) = b_i$$

pour tout i. Le théorème d'interpolation de Lagrange nous dit donc que $R = L$. En conclusion, les polynômes P recherchés sont les polynômes de la forme $P(X) = A(X)Q(X) + L(X)$.

4 Ordre 2 (Melvil & Maryam)

Exercice 1
Montrer que pour tout n entier naturel, $7 \mid 3^{12n+1} + 2^{6n+2}$.

Exercice 2
Soit p un nombre premier. Montrer que tout diviseur premier de $2^p - 1$ est strictement plus grand que p.

Exercice 3
Montrer que pour tout entier $n > 0$ impair, $n \mid 2^{n!} - 1$.

Exercice 4
Soient p un nombre premier et q un diviseur premier du nombre $1 + p + ... + p^{p-1}$. Montrer que $q \equiv 1 \pmod{p}$.

Exercice 5
Trouver tous les nombres premiers p tels que $2^p + p \mid 3^p + p$.

Exercice 6
Montrer que pour tout entier $n > 0$, $n \mid \phi(2^n - 1)$.

Utiliser le plus petit diviseur :

Exercice 7
Trouver tous les entiers $n > 0$ tels que $n \mid 2^n - 1$.

Exercice 8
Trouver tous les entiers $n > 0$ impairs tels que $n \mid 3^n + 1$.

Exercice 9
Trouver tous les couples d'entiers (n, p) avec p premiers,
$0 < n \leq 2p$ et :

$$n^{p-1} \mid (p-1)^n + 1$$

.

Exercice 10
Trouver tous les entiers $n > 0$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$

Modulos intéressants :

Exercice 11
Soit a un entier naturel. Quelles sont les valeurs pouvant être prises par a^5 modulo 11 ?

Exercice 12
Existe-il des entiers naturels a, b tels que $19^{19} = a^3 + b^4$?

Corrigé des exercices :

Solution de l'exercice 1
Les entiers 2 et 3 sont premiers avec 7, donc par petit Fermat $3^{12n+1} \equiv (3^6)^{2n} \cdot 3 \equiv 3 \pmod{7}$ et $2^{6n+2} \equiv (2^6)^n \cdot 2^2 \equiv 2^2 \pmod{7}$. Finalement $3^{12n+1} + 2^{6n+2} \equiv 3 + 2^2 \equiv 3 + 4 \equiv 0 \pmod{7}$

Solution de l'exercice 2
Soit q un diviseur premier de $2^p - 1$. Il est bien premier avec 2 car $2^p - 1$ étant impair, il n'admet pas 2 comme diviseur. Alors, soit ω l'ordre de 2 modulo q. On a

$$2^p \equiv 1 \pmod{q} \text{ß} \omega \mid p$$

Or p étant premier, $\omega = 1$ ou $\omega = p$ car il s'agit des seuls diviseurs positifs de p. Si $\omega = 1$, on a

$$2^1 \equiv 1 \pmod{q}$$

$$\implies 1 \equiv 0 \pmod{q} \implies q = 1$$

Ce qui est absurde. Donc $\omega = p$. De plus, d'après le petit théorème de Fermat, on a $2^{q-1} \equiv 1 \pmod{q}$, d'où $\omega \mid q-1$. En remplaçant ω par sa valeur, on obtient

$$p \mid q-1$$

Comme $q - 1 \neq 0$, cela implique donc

$$p \leqslant q-1 \implies p < q$$

C'est ce qu'il fallait démontrer.

Solution de l'exercice 3

Puisue 2 est premier avec n, on a d'après le théorème d'Euler-Fermat $2^{\phi(n)} \equiv 1 \pmod{n}$. De plus, $1 \leq \phi(n) \leq n$ donc $\phi(n) \mid n!$, d'où $2^{n!} \equiv 1 \pmod{n}$

Solution de l'exercice 4

Premièrement, rappelons la facorisation suivante :

$$a^n - 1 = (a-1)(a^{n-1} + a^{n-2} + \cdots + a^2 + a + 1)$$

Ainsi,

$$q \mid 1 + p + \cdots + p^{p-1}$$

$$\implies q \mid (p-1)(1 + p + \cdots + p^{p-1})$$

$$\implies q \mid p^p - 1$$

On a donc $p^p \equiv 1 \pmod{q}$. Bien entendu, $q \neq p$ (autrement on aurait $1 \equiv 0 \pmod{p} \implies p = 1$) et p admet donc un ordre ω modulo q. On a par conséquent :

$$\omega \mid p$$

$$\implies \omega = 1 \text{ ou } \omega = p$$

$$\omega = 1 \text{ ou } \omega = p$$

Ainsi, $\omega = 1$ nous donne

$$p^1 \equiv 1 \pmod{q}$$

. Mais alors,

$$0 \equiv 1 + p + \cdots + p^{p-1} \equiv 1 + 1 + \cdots + 1 \equiv p \pmod{q}$$

D'où $q \mid p$ et donc $q = p$, absurde car $p \neq q$.

Comme $\omega \mid q - 1$ par Fermat, $\omega = p$ donne

$$p \mid q-1$$

$$\iff q \equiv 1 \pmod{p}$$

On a donc bien $q \equiv 1 \pmod{p}$.

PS : le lecteur attentif aura remarqué qu'il s'agit d'une généralisation de l'exercice 2.

Solution de l'exercice 5

On peut tout de suite conclure que p est impair car lorsque $p = 2, 4$ ne divise pas 11.
Soit q un diviseur premier de $2^p + p$, q est impair car $2p + p$ est impair.
Par ailleurs,

$$q \mid 2^p + p \mid 3^p + p$$

Donc

$$-p \equiv 2^p \equiv 3^p \pmod{q}$$

Puisque q est impair, 2 admet un inverse modulo q, ainsi

$$\left(\frac{3}{2}\right)^p \equiv 1 \pmod{q}$$

Soit ω l'ordre de $\frac{3}{2}$ modulo q, $\omega \mid p$ donc $\omega = 1$ ou $\omega = p$. Si $\omega = 1$, $3 \equiv 2 \pmod{q}$ ce qui est impossible donc $\omega = p$. Par petit Fermat, on sait que

$$\omega \mid q - 1$$

donc $p \mid q - 1$ d'où $q \equiv 1 \pmod{p}$.
Ainsi, $2^p + p$ n'admet que des divieurs premiers congrus à 1 modulo p, donc lui même est congru à 1 moludulo p. On obtient alors $2^p + p \equiv 1 \pmod{p} \implies 2 \equiv 1 \pmod{p}$ ce qui est impossible donc l'équation n'admet aucune solution.

Solution de l'exercice 6

Motivation derrière le raisonnement : on maîtrise très mal l'indicatrice d'Euler, on a souvent besoin de la décomposition en produit de facteurs premiers pour la calculer explicitement, et dans notre cas, nous n'avons pas beaucoup d'information à propos de la décomposition en facteurs premiers de $2^n - 1$. Ainsi, on ne va pas tenter de faire des calculs explicites avec l'indicatrice d'Euler : il ne nous reste plus qu'un choix pour avoir des informations et divisibilités sur ϕ, c'est le théorème d'Euler.

Pour faire apparaître $\phi(2^n - 1)$, il faut donc regarder modulo $2^n - 1$. Si on prend a premier avec $2^n - 1$ et ω_a son ordre, on aura

$$\omega_a \mid \phi(2^n - 1)$$

Ici, le a astucieux paraît être 2. Il nous faut donc calculer ω_2 et espérer qu'il valle n. On a bien $2^n \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$, donc $\omega_2 \mid n$ d'où $\omega_2 \leqslant n$. De plus

$$2^{\omega_2} \equiv 1 \pmod{2^n - 1}$$

$$\iff \text{Il existe } k \in \mathbb{N} \text{ tel que } 2^{\omega_2} = k(2^n - 1) + 1$$

$k = 0$ donne $2^{\omega_2} = 1$ d'où $\omega_2 = 0$, ce qui est absurde car un ordre vaut au moins 1. Il s'ensuit que $k \geqslant 1$, autrement dit :

$$2^{\omega_2} = k(2^n - 1) + 1 \geqslant (2^n - 1) + 1$$

$$2^{\omega_2} \geqslant 2^n$$

Donc enfin, $\omega_2 \geqslant n$. On a $\omega_2 \geqslant n$ et $\omega_2 \leqslant n$: il s'ensuit que $\omega_2 = n$. On a donc bien $n \mid \phi(2^n - 1)$.

Solution de l'exercice 7
Tout d'abord, $n = 1$ est une solution.
Supposons maintenant $n > 1$ tel que $n \mid 2^n - 1$ et p le plus petit diviseur premier de n.

$$2^n \equiv 1 \pmod{p}$$

Donc l'ordre ω de 2 modulo p divise n. Par ailleurs

$$\omega \leq \phi(p) < p$$

donc ω est plus petit que tous les diviseurs premiers de n, pourtant $\omega \mid n$ donc $\omega = 1$. Ainsi,

$$2 \equiv 1 \pmod{p} \implies p = 1$$

Impossible, donc n ne peut admettre de plus petit diviseur premier, ainsi la seule solution de l'équation est 1.

Solution de l'exercice 8
Premièrement, $n = 1$ est solution. Maintenant, considérons le cas $n \geqslant 2$: n possède donc au moins un diviseur premier, soit p le plus petit d'entre eux. Nous avons

$$3^n \equiv -1 \pmod{p}$$

Nous savons manipuler l'ordre et le théorème de Fermat, et nous venons de voir à l'exo 7 que ces manipulations peuvent permettre de résoudre des exercices de ce type. Le seul probème est donc d'avoir un -1 plutôt qu'un 1. L'astuce consiste donc à mettre notre égalité au carré pour faire apparaître le 1 ! Ainsi,

$$(3^n)^2 \equiv (-1)^2 \pmod{p}$$

$$3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$$

Maintenant, soit ω l'ordre de 3 modulo p. On a

$$1 \leqslant \omega < p$$

Puis, $3^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ donne

$$\omega \mid 2n$$

Enfin, $3^n \equiv -1 \not\equiv 1 \pmod{p}$. En effet, sinon on aurait $p = 2$ or n est impair. Ainsi,

$$\omega \nmid n$$

Alors, $\omega \mid 2n$ fait que s'il existe un nombre premier q autre que 2 divisant ω, on aurait $q \mid \omega \mid 2n$

$$q \mid 2n$$

Or $pgcd(q, 2) = 1$ donc par le lemme de Gauss, $q \mid n$. Donc q est un diviseur premier de n strictement inféreur à p (q divise ω donc il est inférieur à ω, lui-même strictement inférieur à p), absurde !

Alors, il s'ensuit que ω est une puissance de deux. D'autre part, n est impair donc la plus grande puissance de 2 divisant $2n$ est 1 : ainsi,

$$\omega = 2^1 = 2 \text{ ou } \omega = 2^0 = 1$$

$\omega = 1$ ne convient pas puisque $1 \mid n$ or $\omega \nmid n$.

Ainsi, $\omega = 2$.

Donc,

$$3^2 \equiv 1 \pmod{p}$$

$$8 \equiv 0 \pmod{p}$$

D'où $p = 2$, or n est impair : absurde. En conclusion, la seule solution est $n = 1$.

Solution de l'exercice 9

Avant de commencer le cœur de l'exercice il est toujours bon d'exclure des petits cas, on remarque que pour tout p premier le couple $(1, p)$ est solution. Désormais on supposera $n > 1$. Si $p = 2$, $n \mid 2$ donc $(2, 2)$ est l'unique solution dans ce cas. Désormais on supposera p impair. Puisuque n est strictement plus grand que 1, il admet un plus petit diviseur premier q.

$$(p-1)^n \equiv -1 \pmod{q}$$

$$(p-1)^{2n} \equiv 1 \pmod{q}$$

Donc ω l'ordre de $p-1$ modulo q divise $2n$ et $\omega < q$ donc ω est premier avec tous les divieurs premiers de n, ainsi $\omega \mid 2$.

Si $\omega = 1$, alors $(p-1)^1 \equiv 1 \pmod{q}$ donc $1 \equiv -1 \pmod{q} \implies q = 2$, impossible car le terme de droite dans la division est impair. Donc $\omega = 2$.

Puisque $\omega = 2$

$$(p-1)^2 \equiv 1 \pmod{q}$$

$$p(p-2) \equiv 0 \pmod{q}$$

Or $\omega \not\equiv 1$ donc $(p-1) \not\equiv 1 \equiv q \implies p - 2 \not\equiv 0 \pmod{q}$. Donc q divise p donc nécessairement $q = p$.

Retour à l'énoncé, on se rappelle que $0 < n \leq 2p$, or n est un multiple de p donc $n = p$ ou $n = 2p$. Si $n = 2p$ alors son plus petit diviseur est 2 et on a déjà traité ce cas. Donc $n = p$.

On obtient alors $(p-1)^p + 1 \equiv 0 \pmod{p)^{p-1}}$. En développant avec le binôme de Newton on obtient

$$(p-1)^p + 1 = p^p - \binom{p}{1}p^{p-1} + \ldots + \binom{p}{3}p^3 - \binom{p}{2}p^2 + \binom{p}{1}p - 1 + 1 \equiv p^2 \pmod{p^3}$$

Tous les termes sont divisibles par p^3 sauf éventuellement les 3 derniers et $\binom{p}{2}p^2 = \dfrac{p(p-1)}{2}p^2$ est un multiple de p^3 car $\dfrac{p-1}{2}$ est un entier. Conclusion : $p^3 \nmid (p-1)^p + 1$ donc $p - 1 < 3 \implies p = 2$ ou $p = 3$.

Le cas $p = 2$ a déjà été traité, pour $p = 3$, la démonstration de $n = p$ tiens toujours donc $n = 3$, et on trouve notre dernier couple solution $(3, 3)$ car $9 \mid 8 + 1$. Finalement les solutions de l'équation sont $(1, p)$; $(2, 2)$ et $(3, 3)$.

Solution de l'exercice 10

Remarquons que $n = 1$ convient. De plus, 2^n+1 étant toujours impair, n est impair. Maintenant, supposons $n > 1$ et soit p le plus petit diviseur premier de n, et ω l'ordre de 2 modulo p Il faut commencer faire le même raisonnement qu'à l'exercice 8 maintenant, pour trouver $\omega = 2$. En effet, premièrement,

$$1 \leqslant \omega < p$$

Puis, $2^n \equiv -1 \pmod{p}$ implique

$$\omega \nmid n$$

Enfin, en mettant au carré, on a $2^{2n} \equiv 1 \pmod{p}$ d'où

$$\omega \mid 2n$$

Si w admet un diviseur premier q autre que 2, alors on a par le lemme de Gauss,

$$q \mid 2n \implies q \mid n$$

Mais donc q est un diviseur premier de n, et $q \leqslant \omega < p$: cela contrdit la minimalité de p, absurde. ω est donc une puissance de 2, or

$$\omega \mid 2n \implies \omega \mid 2 \text{ par Gauss, puisque } n \text{ est impair}$$

De plus, $\omega \nmid n$, donc $\omega \neq 1$. On a donc finalement $\omega = 2$. Alors :

$$p \mid 2^2 - 1$$

$$p = 3$$

Le plus petit diviseur premier de n est donc 3. Cependant, nous n'en connaissons pas la puissance dans la décomposition en produit de facteurs premiers (valuation 3-adique, notée v_3). Nous allons montrer qu'il s'agit de 1. Il nous faut utiliser le LTE, **Lifting The Exponent Lemma** :

Soient $a, b \in \mathbb{Z}$, p un nombre premier impair, $n \in \mathbb{N}$, tels que $p \mid a - b$, $p \nmid a$ ou b

Alors $v_p(a^n - b^n) = v_p(a-b) + v_p(n)$ Ainsi, pour n impair et en remplaçant b par $-b$, on obtient $v_p(a^n - (-b)^n) = v_p(a - (-b)) + v_p(n)$ quand $n \mid a + b$ et ni a ni b.

$$v_p(a^n + b)^n) = v_p(a + b) + v_p(n)$$

n est impair,$3 \mid 2^1 + 1$, 3 ne divise ni 2 ni 1. On peut appliquer le LTE donc :

$$v_3(2^n + 1) = v_3(2 + 1) + v_3(n)$$

$$= 1 + v_3(n)$$

D'autre part, $v_3(n^2) = 2v_3(n)$, et

$$n^2 \mid 2^n + 1 \implies v_3(n^2) \leqslant v_3(2^n + 1)$$

Autrement dit, il nous faut avoir

$$2v_3(n) \leqslant 1 + v_3(n)$$

$$v_3(n) \leqslant 1$$

D'où $v_3(n) = 1$.

Ainsi, la plus grande puissance de 3 divisant n est 1. De plus, $n = 3$ convient. En effet, $3^2 \mid 2^3 + 1$.

Maintenant supposons $n > 3$: n possède donc au moins un autre diviseur premier (3 étant à la puissance 1). Soit donc p' le deuxième plus petit diviseur premier de n, et ω' l'ordre de 2 modulo p'. Nous avons donc, de même, $\omega' < p'$, $\omega' \nmid n$, $\omega' \mid 2n$. Premièrement, $2 \mid \omega'$ puisque sinon, ω' et 2 seraient premiers entre eux, ce qui est absurde par le lemme de Gauss : $\omega' \mid 2n \implies \omega' \mid n$. On a donc $\frac{\omega'}{2} \mid n$, or $\frac{\omega'}{2} < \omega' < p'$. Les seuls diviseurs de n strictement inférieurs à p' étant 1 et 3 (car on n'a pas de plus grande puissance de 3 divisant n. Sinon, on aurait par exemple pu avoir $9 \mid n$ et $p' = 11$), $\frac{\omega'}{2} = 1$ ou $\frac{\omega'}{2} = 3$. D'où

$$\omega' = 2 \text{ ou } \omega' = 6$$

Le premier cas donc donc $p' \mid 2^2 - 1$, donc $p' = 3$. Cela est absurde car $p' > 3$. Le deuxième cas nous donne $p' \mid 2^6 - 1$, autrement dit, $p \mid 7 \times 9$. Ainsi,

$$p' = 7$$

.

Le problème étant que $2^3 \equiv 8 \equiv 1 \pmod 7$, donc $\omega' \mid 3$ (et c'est 3), d'où $\omega' \neq 6$. Cela est absurde. n n'admet donc pas de deuxième plus petit diviseur. En conclusions, les solutions sont $n = 1$ et $n = 3$.

Solution de l'exercice 11

Posons $x = a^5$, et intéressons nous aux valeurs prises par x.
Si a est divisible par 11, $x \equiv a^5 \equiv 0 \pmod{11}$. Supposons désormais que a et 11 soient premier entre eux. Alors

$$x^2 \equiv a^{10} \equiv 1 \pmod{11}$$

Donc x est une solution de l'équation

$$x^2 - 1 \equiv 0 \pmod{11}$$

On peut factoriser $x^2 - 1$ par $(x - 1)(x + 1)$ donc

$$11 \mid (x - 1)(x + 1)$$

Comme 11 est un nombre premier, 11 divise $x - 1$ ou $x + 1$. Ainsi $x \equiv a^5 \equiv \pm 1 \pmod{11}$.
Finalement les valeurs prises par a^5 modulo 11 sont $-1, 0, 1$ et on peut vérifier aisément qu'elles sont toutes atteintes.

Solution de l'exercice 12

Nous avons des puissances troisièmes et quatrièmes. L'idée est donc de trouver un nombre premier tel que 3 et 4 divisent $p - 1$. Nous allons donc essayer avec 13 pour ces raisons. Premièrement, calculons 19^{19}.

$$19^{19} \equiv 6^{19-12} \pmod{13} \text{ par petit Fermat}$$

$$\equiv 6^7 \equiv (6^2)^3 \times 6 \pmod{13}$$
$$\equiv 36^3 \times 6 \equiv (-3)^3 \times 6 \pmod{13}$$
$$\equiv -27 \times 6 \pmod{13}$$
$$\equiv -6 \pmod{13}$$

Nous calculons donc toutes les valeurs possibles pour des puissances troisèmes modulo 13 (en faisant une table de congruances :

$$0, -5, -1, 5, 1$$

De même, les puissances quatrièmes prennent les valeurs suivantes modulo 13 :

$$0, 3, -4, 1$$

Nous testons les sommes possibles dans ces ensembles, et nous rendons compte que -6 n'est jamais atteint(en effet, nous trouvons $-5, -4, -2, -3, -1, 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$ comme sommes possibles : toutes les classes modulo 13 sont atteintes à part -6). Ainsi, cette égalité ne peut être vérifiée. Il n'y a aucune solution.

5 Inégalités (Thoé)

L'objectif de cette séance était de revoir et utiliser les inégalités classiques : IAG, mauvais élèves, Cauchy Schwarz, réordonnement.

En effet, les inégalités reviennent un peu à la mode (P4 OIM 2023, P2 JBMO 2023), il faut donc continuer à pratiquer !

Les exercices de ce TD sont en partie repris sur ceux du TD de 2019 de Mathieu Barré : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/08/PolycopieV1-1.pdf. Il est fortement conseiller de n'utiliser aucun outil type Schur, Muirhead, et de se limiter à l'inégalité arithmético-géométrique, l'inégalité des mauvais élèves et l'inégalité de Cauchy Schwarz (cf https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2019/11/Inegalites-Theo.pdf)

Exercice 1
Lemme du tourniquet : Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant ab + bc + ca$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 2
Soit a, b, c, d des réels positifs de somme 1. Montrer que $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 3
Soit a, b, c des réels positifs de produit $\frac{1}{8}$. Montrer que $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 \geqslant \frac{15}{16}$. Trouver les cas d'égalité.

Exercice 4
Soit a, b, c trois réels strictement positifs tels que $a + b + c + ab + bc + ca + abc = 7$. Montrer que :

$$\sqrt{a^2 + b^2 + 2} + \sqrt{b^2 + c^2 + 2} + \sqrt{c^2 + a^2 + 2} \geq 6$$

Exercice 5
Soit x, y, z des réels strictement positifs avec $x^2 + y^2 + z^2 = 3$, montrer que

$$\frac{x^2 + yz}{x^2 + yz + 1} + \frac{y^2 + zx}{y^2 + zx + 1} + \frac{z^2 + xy}{z^2 + xy + 1} \leqslant 2$$

Exercice 6
Soit a, b positifs tels que $ab \geqslant 1$, montrer que

$$\left(a + 2b + \frac{2}{a+1}\right)\left(b + 2a + \frac{2}{b+1}\right) \geqslant 16$$

Exercice 7
Soit a, b, c positifs tels que $a + b + c = 1$, montrer que

$$\frac{7 + 2b}{1 + a} + \frac{7 + 2c}{1 + b} + \frac{7 + 2a}{1 + c} \geqslant \frac{69}{4}$$

Exercice 8
Soit a, b, c des réels strictement positifs tels que $abc = 1$, montrer que

$$\frac{1}{a^3 + bc} + \frac{1}{b^3 + ca} + \frac{1}{c^3 + ab} \leqslant \frac{(ab + bc + ca)^2}{6}$$

Exercice 9
Soit x, y, z des réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{x + 2y}{z + 2x + 3y} + \frac{y + 2z}{x + 2y + 3z} + \frac{z + 2x}{y + 2z + 3x} \leqslant \frac{3}{2}$$

Exercice 10
Soit x, y, z des réels positifs tels que $x^3y^2z = 1$. Quelle est la valeur minimale que peut prendre $x + 2y + 3z$?

Exercice 11
Soit a, b, x, y, z des réels strictement positifs. Démontrer que

$$\frac{x}{ay + bz} + \frac{y}{az + bx} + \frac{z}{ax + by} \geqslant \frac{3}{a + b}$$

Exercice 12
Soit $n \geqslant 1$ un entier et $x_0 > \cdots > x_n$ des réels. Montrer que l'inégalité suivante est vérifiée :

$$x_0 + \frac{1}{x_0 - x_1} + \cdots + \frac{1}{x_{n-1} - x_n} \geqslant x_n + 2n$$

Exercice 13
Soit $n \geqslant 3$ un entier $x_2, \ldots, x_n$ des réels positifs tels que $x_2 \times \cdots \times x_n = 1$. Montrer l'inégalité suivante :

$$(1 + a_2)^2 \times (1 + a_3)^3 \times \cdots \times (1 + a_n)^n > n^n$$

Exercice 14
Soit $x_1, \ldots, x_{2023}$ des réels strictement positifs et deux à deux distincts tels que pour tout entier n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2023$, le nombre

$$a_n = \sqrt{(x_1 + \cdots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

est un entier. Démontrer que $a_{2023} \geqslant 3034$

Exercice 15
Démontrer que, pour tous réels positifs ou nuls x, y, z, non tous nuls, l'inégalité suivante est vraie :

$$\frac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + \frac{2y^2 + x - y + z}{x^2 + y + z^2} + \frac{2z^2 + x + y - z}{x^2 + y^2 + z} \geqslant 3.$$

Déterminer tous les triplets (x, y, z) pour lesquels l'inégalité ci-dessus est une égalité.

Exercice 16
Soit a, b, c trois reels strictement positifs tels que $a + b + c = 1$. Montrer l'inégalité suivante :

$$a\sqrt[3]{\frac{b}{a}} + b\sqrt[3]{\frac{c}{b}} + c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} \leqslant ab + bc + ca + \frac{2}{3}$$

Exercice 17
Soit x, y et z des réels strictement positifs tels que $xy + yz + zx = 3$.
Démontrer que

$$\frac{x+3}{y+z} + \frac{y+3}{z+x} + \frac{z+3}{x+y} + 3 \geqslant 27\frac{(\sqrt{x} + \sqrt{y} + \sqrt{z})^2}{(x+y+z)^3}.$$

Solution de l'exercice 1

Regardons le terme de droite : on cherche à majorer des produits de deux nombres par une somme de carrés. On utilise donc le fait que $ab \leqslant \frac{a^2+b^2}{2}$, $bc \leqslant \frac{b^2+c^2}{2}$ et $ac \leqslant \frac{a^2+c^2}{2}$. En sommant ces trois inégalités, on obtient $ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2$.

Supposons qu'on a égalité. Dans ce cas on a égalité dans les trois inégalités utilisées, donc par la proposition 2, $a = b$, $b = c$ et $a = c$. En particulier $a = b = c$. Réciproquement, si $a = b = c$, alors $a^2 + b^2 + c^2 = 3a^2 = ab + bc + ca$: on a bien égalité.

Solution de l'exercice 2

On utilise que $1 - a = b + c + d$, $1 - b = a + c + d$ et similairement pour $1 - c$ et $1 - d$.

$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} = \frac{bcd}{(b+c+d)^2} + \frac{acd}{(a+c+d)^2} + \frac{abd}{(a+b+d)^2} + \frac{abc}{(a+b+c)^2}$

Or, par l'inégalité arithmético-géométrique, $\frac{bcd}{(b+c+d)^2} \leqslant \frac{\left(\frac{b+c+d}{3}\right)^3}{(b+c+d)^2} = \frac{b+c+d}{27}$. On utilise la même majoration pour les 3 autres termes de la somme, on obtient :

$$\frac{bcd}{(1-a)^2}+\frac{acd}{(1-b)^2}+\frac{abd}{(1-c)^2}+\frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{b+c+d}{27}+\frac{a+c+d}{27}+\frac{a+b+d}{27}+\frac{a+b+c}{27} = \frac{3(a+b+c+d)}{27}$$

donc

$$\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} \leqslant \frac{1}{9}.$$

Supposons qu'on a égalité. En particulier, on a égalité dans les différentes inégalités arithmético-géométriques utilisées. Pour avoir égalité dans la première, on doit avoir $b = c = d$; pour la seconde, on doit avoir $a = c = d$, de sorte que $a = b = c = d$. Comme $a+b+c+d = 1$, on a nécessairement $a = b = c = d = \frac{1}{4}$. Réciproquement, si $a = b = c = d = \frac{1}{4}$, $a + b + c + d = 1$ et $\frac{bcd}{(1-a)^2} + \frac{acd}{(1-b)^2} + \frac{abd}{(1-c)^2} + \frac{abc}{(1-d)^2} = 4 \times \frac{a^3}{(1-a)^2} = 4 \times \frac{4^2}{4^3 \times 3^2} = \frac{1}{9}$.

Solution de l'exercice 3

On est tenté d'utiliser directement une inégalité arithmético-géométrique sur les 6 termes. Mais si on regarde attentivement, on peut voir qu'on a l'égalité pour $a = b = c = \frac{1}{2}$, et que dans ce cas $a^2 = \frac{1}{4}$ et $a^2b^2 = \frac{1}{16}$. On ne pourra pas avoir égalité dans l'inégalité arithmético-géométrique, et on ne peut donc utiliser directement l'inégalité arithmético-géométrique. Par contre, on a bien $a^2 = b^2 = c^2$ et $a^2b^2 = a^2c^2 = b^2c^2$. On a va donc faire séparément une inégalité arithmético-géométrique sur les deux triplets de termes. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2+b^2+c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2} = 3(\sqrt[3]{abc})^2 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^2 = 3\frac{1}{2^2} = \frac{3}{4}$. Par l'inégalité arithmético-géométrique, $a^2b^2 + b^2c^2 + a^2c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^4b^4c^4} = 3(\sqrt[3]{abc})^4 = 3(\sqrt[3]{\frac{1}{8}})^4 = 3\frac{1}{2^4} = \frac{3}{16}$. Ainsi, $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 \geqslant \frac{3}{4} + \frac{3}{16} = \frac{15}{16}$.

Supposons maintenant qu'on a égalité. Dans ce cas, comme on a égalité dans $a^2 + b^2 + c^2 \geqslant 3\sqrt[3]{a^2b^2c^2}$, on a $a^2 = b^2 = c^2$ donc $a = b = c$. Comme $a^3 = abc = \frac{1}{8}$, $a = b = c = \frac{1}{2}$. Réciproquement, si $a = b = c = \frac{1}{2}$, alors $a^2 + b^2 + c^2 + a^2b^2 + a^2c^2 + c^2b^2 = 3(a^2 + a^4) = 3(\frac{1}{4} + \frac{1}{16}) = 3\frac{5}{16} = \frac{15}{16}$.

Solution de l'exercice 4

La contrainte étant assez moche, on essaie de la simplifier. On a quasiment le produit $(1+a)(1+b)(1+c)$. Calculons donc ce produit : $(1+a)(1+b)(1+c) = 1+a+b+c+ab+bc+ca+abc = 1+7 = 8$ par hypothèse. Il faut donc essayer de faire apparaître $1 + a, 1 + b, 1 + c$ dans les inégalités. Notons que par IAQ, $a^2 + b^2 + 2 = (a^2 + 1) + (b^2 + 1) \geqslant \frac{(a+1)^2+(b+1)^2}{2}$, ainsi par IAQ :

$$\sqrt{a^2+b^2+2} \geqslant \sqrt{\frac{(a+1)^2+(b+1)^2}{2}} \geqslant \frac{(a+1)+(b+1)}{2}$$

On obtient ainsi

$$\sqrt{a^2+b^2+2}+\sqrt{b^2+c^2+2}+\sqrt{c^2+a^2+2} \geqslant \frac{(a+1)+(b+1)+(b+1)+(c+1)+(c+1)+(a+1)}{2}$$

donc par IAG

$$\sqrt{a^2+b^2+2}+\sqrt{b^2+c^2+2}+\sqrt{c^2+a^2+2} \geqslant (a+1)+(b+1)+(c+1) \geqslant 3\sqrt[3]{8} = 6$$

Solution de l'exercice 5

Remarquons que $\frac{x^2+yz}{x^2+yz+1} = 1 - \frac{1}{x^2+yz+1}$ et de même cycliquement. Ainsi l'inégalité est équivalente à

$$\frac{1}{x^2+yz+1}+\frac{1}{y^2+zx+1}+\frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant 1.$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves

$$\frac{1}{x^2+yz+1}+\frac{1}{y^2+zx+1}+\frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{x^2+y^2+z^2+xy+xz+yz+3}.$$

Or par le lemme du tourniquet, $xy+yz+xz \leqslant x^2+y^2+z^2 = 3$ donc

$$\frac{1}{x^2+yz+1}+\frac{1}{y^2+zx+1}+\frac{1}{z^2+xy+1} \geqslant \frac{9}{3+3+3} = 1$$

ce qui donne le résultat voulu.

Solution de l'exercice 6

L'objectif est de se débarasser de $\frac{2}{a+1}$. Notons que si $a = b = 1$ on a égalité et $\frac{2}{a+1} = 1$. On utilise donc le fait que par IAG $\frac{a+1}{2}+\frac{2}{a+1} \geqslant 2$, donc $\frac{2}{a+1} \geqslant \frac{3-a}{2}$.

On obtient ainsi par IAG

$$\begin{aligned}\left(a+2b+\frac{2}{a+1}\right)\left(b+2a+\frac{2}{b+1}\right) &\geqslant \frac{1}{4}(a+4b+3)(b+4a+3)\\ &= \frac{9+17ab+4(a^2+b^2)+15(a+b)}{4}\\ &\geqslant \frac{9+17+8+30}{4} = 16\end{aligned}$$

Solution de l'exercice 7

Notons que les nombres $7+2a, 7+2b, 7+2c$ sont rangés dans le même ordre que a, b, c,

idem pour $1+a, 1+b, 1+c$. Donc $7+2a, 7+2b, 7+2c$ sont rangés dans l'ordre opposé de $\frac{1}{1+a}, \frac{1}{1+b}, \frac{1}{1+c}$.

On utilise donc l'inégalité du réordonnement, on a

$$\frac{7+2b}{1+a}+\frac{7+2c}{1+b}+\frac{7+2a}{1+c} \geqslant \frac{7+2a}{1+a}+\frac{7+2b}{1+b}+\frac{7+2c}{1+c} = 6+5\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)$$

On en déduit par l'inégalité des mauvais élèves que

$$\frac{7+2b}{1+a}+\frac{7+2c}{1+b}+\frac{7+2a}{1+c} \geqslant 6+5\times\frac{3^2}{1+a+b+c} = 6+\frac{45}{4} = \frac{69}{4}$$

Solution alternative :

Notons que

$$\frac{7+2b}{1+a}+\frac{7+2c}{1+b}+\frac{7+2a}{1+c} = 5\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)+2\left(\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+c}{1+b}+\frac{1+a}{1+c}\right)$$

Or par IAG

$$\left(\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+c}{1+b}+\frac{1+a}{1+c}\right) \geqslant 3$$

et par inégalité des mauvais élèves

$$\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right) \geqslant \frac{3^2}{3+a+b+c} = \frac{9}{4}$$

Ainsi en sommant

$$5\left(\frac{1}{1+a}+\frac{1}{1+b}+\frac{1}{1+c}\right)+2\left(\frac{1+b}{1+a}+\frac{1+c}{1+b}+\frac{1+a}{1+c}\right) \geqslant \frac{45}{4}+6 = \frac{69}{4}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 8

Essayons de simplifier le dénominateur. On a $a^3+bc \geqslant 2\sqrt{a^3bc} = 2a$ par IAG, en faisant cycliquement cela on a

$$\frac{1}{a^3+bc}+\frac{1}{b^3+ca}+\frac{1}{c^3+ab} \leqslant \frac{1}{2a}+\frac{1}{2b}+\frac{1}{2c} = \frac{ab+bc+ca}{2}.$$

Pour conclure il suffit donc de montrer que $\frac{ab+bc+ca}{2} \leqslant \frac{(ab+bc+ca)^2}{6}$, c'est-à-dire que $\frac{ab+bc+ac}{3} \geqslant 1$, ce qui est une conséquence de l'IAG.

Solution de l'exercice 9

La différence entre le numérateur et le dénominateur de chaque fraction vaut $x+y+z$, il faut donc probablement utiliser ce fait. On a $\frac{x+2y}{z+2x+3y} = 1-\frac{x+y+z}{z+2x+3y}$. En faisant de même pour les trois autres termes, l'inégalité est équivalente à

$$3-(x+y+z)\left(\frac{1}{x+2y}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right) \leqslant \frac{3}{2}$$

soit à

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+2y+3z}+\frac{1}{y+2z+3x}+\frac{1}{z+2x+3y}\right)\geqslant\frac{3}{2}.$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves,

$$\left(\frac{1}{x+2y+3z}+\frac{1}{y+2z}+\frac{1}{z+2x}\right)\geqslant\frac{3^2}{x+2y+3z+y+2z+3x+z+2x+3y}=\frac{3}{2(x+y+z)}$$

donc

$$(x+y+z)\left(\frac{1}{x+2y+3z}+\frac{1}{y+2z+3x}+\frac{1}{z+2x+3y}\right)\geqslant\frac{3}{2}$$

On a donc l'inégalité voulue

Solution de l'exercice 10

Pour trouver la valeur minimale de $x+2y+3z$, on veut faire une IAG. Mais pour faire apparaître x^3y^2z, il faudrait avoir 3 facteurs avec x, 2 avec y et un avec z. Pour cela, on va découper le x en trois, et le $2y$ en deux. On a :

$$x+2y+3z=\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+\frac{x}{3}+y+y+3z\geqslant 6\sqrt[6]{\frac{x^3y^2z}{3^2}}=6\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$$

Il reste à montrer que cette valeur est atteinte. Pour cela, si on a égalité dans l'inégalité précédente, chacun des termes est égal à la moyenne géométrique. Donc $x=3\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$, $y=\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$ et $y=\frac{1}{3}\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$.

Si on fixe ces valeurs, alors $x^3y^2z=\frac{3^3}{3}\left(\sqrt[3]{\frac{1}{3}}\right)^6=\frac{3^2}{3^2}=1$, et $x+2y+3z=(3+2+1)\sqrt[3]{\frac{1}{3}}$

Solution de l'exercice 11

Comme on a une somme de fractions, on a envie d'utiliser l'inégalité des mauvais élèves. Pour cela, il faudrait avoir des carrés au numérateur. On peut donc multiplier la première fraction par x au numérateur et dénominateur, la seconde par y et la troisième par z.

On a :

$$\frac{x}{ay+bz}+\frac{y}{az+bx}+\frac{z}{ax+by}=\frac{x^2}{axy+bxz}+\frac{y^2}{ayz+bxy}+\frac{z^2}{axz+byz}\geqslant\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+xz)}$$

Ainsi il sufit de montrer que $\frac{(x+y+z)^2}{(a+b)(xy+yz+xz)}\geqslant\frac{3}{a+b}$ donc que $(x+y+z)^2\geqslant 3(xy+yz+xz)$. Or $(x+y+z)^2=x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+xz)\geqslant 3(xy+yz+xz)$ par lemme du tourniquet ce qui conclut.

Solution de l'exercice 12

On utilise l'inégalité des mauvais élèves sur la somme de fractions :

$$\frac{1^2}{x_0-x_1}+\cdots+\frac{1^2}{x_{n-1}-x_n}\geqslant\frac{n^2}{x_0-x_n}$$

En particulier, il suffit de montrer que $x_0 - x_n + \frac{n^2}{x_0 - x_n} \geqslant 2n$ pour prouver l'inégalité de l'énoncé. Or par IAG, $x_0 - x_n + \dfrac{n^2}{x_0 - x_n} \geqslant 2\sqrt{n^2} = 2n$ ce qui conclut.

Solution de l'exercice 13

Soit j un entier vérifiant $2 \leqslant j \leqslant n$. On aimerait minorer $(1 + a_j)^j$ par $C_j a_j$, où C_j est une constante, dépendant potentiellement de j, pour ensuite avoir que le produit des $(1 + a_j)^j$ est plus grand que le produit des C_j, donc ne plus avoir de dépendance en les a_j. Donc logiquement, il faudrait utiliser une IAG à j termes sur $1 + a_j$, avec un factuer a_j. On découpe donc le 1 en $j - 1$, on a :

$$1 + a_j = \frac{1}{j-1} + \cdots + \frac{1}{j-1} \geqslant j\frac{a_j}{(j-1)^{\frac{j-1}{j}}}$$

En particulier, $(1 + a_j)^j \geqslant a_j \frac{j^j}{(j-1)^{j-1}}$. Ainsi

$$(1 + a_2)^2 \times \cdots \times (1 + a_n)^n \geqslant a_2 \ldots a_n \times \frac{2^2}{1^1} \times \cdots \times \frac{n^n}{(n-1)^{n-1}} = n^n$$

On a quasiment l'inégalité voulue, il faut juste montrer qu'on ne peut avoir égalité pour montrer que l'inégalité est stricte. Si on a égalité, on a égalité dans chaque IAG, donc $a_j = \frac{1}{j-1}$ pour tout j. Or dans ce cas le produit des a_j est strictement inférieur à 1, donc on ne peut avoir égalité, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 14

On propose deux solutions, une plus rapide, une moins astucieuse. Dans tous les cas on note $s_n = x_1 + \cdots + x_n$ et $h_n = \frac{1}{x_1} + \cdots + \frac{1}{x_n}$ pour tout entier n vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2023$. On a alors $a_n = \sqrt{s_n h_n}$.

Première solution : calculons $a_{n+2}^2 - a_n^2$ pour n un entier quelconque vérifiant $1 \leqslant n \leqslant 2021$. On a

$$\begin{aligned} a_{n+2}^2 - a_n^2 &= (s_n + x_{n+1} + x_{n+2})\left(h_n + \frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) - s_n h_n \\ &= (x_{n+1} + x_{n+2})h_n + \left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) s_n + (x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \\ &\geqslant 2\sqrt{(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right)}\sqrt{s_n h_n} + (x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \end{aligned}$$

où la dernière inégalité vient d'une IAG.

Or par l'inégalité arithmético harmonique (ou mauvais élèves ou Cauchy-Schwarz),

$$(x_{n+1} + x_{n+2})\left(\frac{1}{x_{n+1}} + \frac{1}{x_{n+2}}\right) \geqslant 4$$

On ne peut pas avoir égalité : si on a égalité, alors $x_{n+1} = x_{n+2}$ ce qui contredit l'énoncé. Ainsi on a

$$a_{n+2}^2 > a_n^2 + 2\sqrt{4}a_n + 4 = (a_n + 2)^2$$

Comme la suite ne prend quedes valeurs entières, $a_{n+2} \geqslant a_n+3$. On en déduit par récurrence que $a_{1+2k} \geqslant a_1 + 3k \geqslant 3k+1$ tant que $2k+1 \leqslant 2023$. Pour $k = 1011$, $a_{2023} \geqslant 3034$ ce qui conclut.

Autre solution : on calcule $a_{n+1}^2 a - a_n^2$.

$$\begin{aligned} a_{n+1}^2 - a_n^2 &= (s_n + x_{n+1})\left(h_n + \frac{1}{x_{n+1}}\right) - s_n h_n \\ &= x_{n+1}h_n + \frac{1}{x_{n+1}}s_n + 1 \\ &\geqslant 2\sqrt{s_n h_n} + 1 \\ &\geqslant 2a_n + 1 \end{aligned}$$

Ceci étant vrai par IAG. On a donc $a_{n+1}^2 \geqslant a_n^2 + 2a_n + 1 = (a_n+1)^2$, donc $a_{n+1} \geqslant a_n + 1$. L'égalité vient si $x_{n+1}h_n = \frac{s_n}{x_{n+1}}$ i.e. $x_{n+1} = \sqrt{\frac{s_n}{h_n}}$

On va montrer que $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. Pour l'instant, on sait juste que $a_{n+2} \geqslant a_{n+1} + 1 \geqslant a_n + 2$, et donc que sauf si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$, on a $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$ vu que la suite prend des valeurs entières. Il suffit donc de montrer que si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$ on a une contradiction.

Si $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ et $a_{n+1} = a_n + 1$, alors

$$x_{n+2}^2 = \frac{s_{n+1}}{h_{n+1}} = \frac{s_n + \sqrt{\frac{s_n}{h_n}}}{h_n + \sqrt{\frac{h_n}{s_n}}} = \frac{s_n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{s_n h_n}}\right)}{h_n\left(1 + \sqrt{\frac{1}{h_n s_n}}\right)} = \frac{s_n}{h_n} = x_{n+1}^2$$

On a donc une contradiction, ainsi $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. On conclut de même que dans l'autre solution.

Solution de l'exercice 15

On présente deux solutions.

Première solution : pour ne plus avoir de termes négatifs, et avoir une certaine symétrie on ajoute 2 à chaque fraction. On note que $\dfrac{2x^2 - x + y + z}{x + y^2 + z^2} + 2 = \dfrac{2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z}{x + y^2 + z^2}$, et de même cliquement. L'inégalité à prouver devient :

$$(2x^2 + 2y^2 + 2z^2 + x + y + z)\left(\frac{1}{x + y^2 + z^2} + \frac{1}{y + z^2 + x^2} + \frac{1}{z + x^2 + y^2}\right) \geqslant 9$$

Or par l'inégalité des mauvais élèves :

$$\left(\frac{1^2}{x + y^2 + z^2} + \frac{1^2}{y + z^2 + x^2} + \frac{1^2}{z + x^2 + y^2}\right) \geqslant \frac{(1+1+1)^2}{2(x^2 + y^2 + z^2) + (x + y + z)}$$

ce qui prouve l'inégalité précédente. D'après le cas d'égalité des mauvais élèves, on a égalité si et seulement si $x + y^2 + z^2 = y + z^2 + x^2 = z + x^2 + y^2$, donc si et seulement si $x + y^2 = y + x^2$ et $y + z^2 = z + y^2$. Or la première égalité est équivalente à $0 = y^2 - x^2 - (y - x) = (y - x)(y + x - 1)$, et la seconde à $0 = (z - y)(z + y - 1)$. En particulier, on a égalité si et seulement si $x = y = z$, ou $x = y$ et $z + y = 1$, ou $y = z$ et $x + y = 1$, ou $x + y = 1$ et $z + y = 1$. Le dernier cas implique que $x = z$, et dans chacun des trois derniers cas, deux variables sont égales, et la dernière vaut un moins la valeur des deux variables.

Ainsi les triplets solutions sont les (t,t,t) pour $t > 0$, et les $(t,t,1-t)$ pour $t \in [0,1]$ pour avoir la positivité et la non nullité des trois variables.

Autre solution : pour ne plus avoir de termes négatifs, on ajoute 1 à chaque fraction. On note que $\dfrac{2x^2-x+y+z}{x+y^2+z^2}+1 = \dfrac{2x^2+y^2+z^2+y+z}{x+y^2+z^2}$, et de même cliquement. L'inégalité à prouver devient :

$$\frac{2x^2+y^2+z^2+y+z}{x+y^2+z^2}+\frac{2y^2+z^2+x^2+z+x}{y+z^2+x^2}+\frac{2z^2+x^2+y^2+x+y}{z+x^2+y^2}\geqslant 6$$

Posons $A = x+y^2+z^2$, $B = y+z^2+x^2$ et $C = z+x^2+y^2$, l'inégalité précédente se réécrit :

$$\frac{B+C}{A}+\frac{A+C}{B}+\frac{A+B}{C}\geqslant 6$$

Or par IAG $\dfrac{A}{B}+\dfrac{B}{A}\geqslant 2$, $\dfrac{C}{B}+\dfrac{B}{C}\geqslant 2$ et $\dfrac{A}{C}+\dfrac{C}{A}\geqslant 2$, ce qui prouve l'inégalité précédente.

On a égalité si et seulement si $A = B = C$, donc le cas d'égalité se ramène à la discussion précédente.

Solution de l'exercice 16

Notons déjà qu'on a égalité si $a = b = c = \dfrac{1}{3}$. Ici on a des racines cubiques affreuses, donc la bonne idée est de faire une IAG, en découpant $\frac{b}{a}$ en produit de 3 termes. Quand on a égalité, la fraction vaut 1, donc on va chercher à la réécrire comme produit de 3 quantités qui quand on a égalité valent 1. On a $\dfrac{b}{a} = 3b\times\dfrac{1}{3a}\times 1$, donc $\sqrt[3]{\dfrac{b}{a}}\leqslant\dfrac{3b+1+\dfrac{1}{3a}}{3}$. En faisant de même cycliquement et en sommant, on obtient :

$$\begin{aligned}
a\sqrt[3]{\frac{b}{a}}+b\sqrt[3]{\frac{c}{b}}+c\sqrt[3]{\frac{a}{c}} &\leqslant a\frac{3b+1+\frac{1}{3a}}{3}+b\frac{3c+1+\frac{1}{3b}}{3}+c\frac{3a+1+\frac{1}{3b}}{3}\\
&= \frac{3ab+a+\frac{1}{3}+3bc+b+\frac{1}{3}+3ca+c+\frac{1}{3}}{3}\\
&= ab+bc+ca+\frac{1}{3}+\frac{a+b+c}{3}\\
&= ab+bc+ca+\frac{2}{3}
\end{aligned}$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 17

Posons $s = x+y+z$, et soit L et R les membres de gauche et de droite de notre inégalité. On peut réécrire L comme

$$L = \frac{x+3}{y+z}+1+\frac{y+3}{z+x}+1+\frac{z+3}{x+y}+1 = (s+3)\left(\frac{1}{y+z}+\frac{1}{z+x}+\frac{1}{x+y}\right).$$

Or, par l'inégalité des mauvais élèves

$$\left(\frac{1^2}{y+z}+\frac{1^2}{z+x}+\frac{1^2}{x+y}\right)\geqslant\frac{(1+1+1)^2}{y+z+z+x+x+y}.$$

On en déduit que $L \geqslant 9(s+3)/(2s)$.

En outre, l'inégalité arithmético-quadratique, appliquée aux termes $\sqrt{x}$, $\sqrt{y}$ et $\sqrt{z}$, indique que

$$\frac{s}{3} \geqslant \left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z}}{3}\right)^2.$$

Ainsi, $(\sqrt{x}+\sqrt{y}+\sqrt{z})^2 \leqslant 3(x+y+z) = 3s$ et $R \leqslant 81/s^2$.

Pour montrer que $L \geqslant R$, il suffit donc de démontrer que $9(s+3) \times s^2 \geqslant 81 \times 2s$, c'est-à-dire que $s(s+3) \geqslant 18$, ou encore que $s \geqslant 3$. On conclut alors en utilisant le lemme du tourniquet, qui indique que

$$s^2 = x^2+y^2+z^2+2(xy+yz+zx) \geqslant 3(xy+yz+zx) \geqslant 9,$$

c'est-à-dire que $s \geqslant 3$.

6 Problèmes d'ordre de grandeur (Quentin)

Idées importantes

- Si $a, b > 0$ sont tels que $a \mid b$, alors $a \leq b$, et si $a \neq b$ alors $2a \leq b$.
- Plus généralement, si a, b sont entiers, $a, b \neq 0$ et $a \mid b$, alors $|a| \leq |b|$.
- Entre deux carrés d'entiers consécutifs il n'y a pas d'autre carré d'entier : si a est tel que $n^2 < a < (n+1)^2$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors a n'est pas le carré d'un entier.
- Plus généralement, entre deux puissances k-èmes consécutives, il n'y a pas d'autre puissance k-ème : si a est tel que $n^k < a < (n+1)^k$ pour un certain $n \in \mathbb{N}$, alors a n'est pas la puissance k-ème d'un entier.
- Si $p > q$, les puissances p-èmes croissent plus vite que les puissances q-èmes : si on obtient une inégalité du type $x^p \leq \alpha x^q$, elle ne peut être vérifiée que pour des petites valeurs de x.
- La factorielle croît très vite. Plus formellement, on retiendra que pour tout $a > 0$ et tout $p > 0$, à partir d'un certain rang, $n! > a^n > n^p$. Donc si on obtient des égalités ou inégalités entraînant par exemple $n! \leq a^n$, on sait qu'il n'y aura qu'un petit nombre de solutions potentielles à tester.
- Quand on est amené à comparer les croissances de différentes quantités en montrant qu'une inégalité est vérifiée à partir d'un certain rang, on procède ainsi : on trouve à partir de quel rang une inégalité est vérifiée (par récurrence par exemple, ou directement en résolvant l'inégalité), puis on traite à la main le cas des nombres pour lesquels l'inégalité n'est pas vérifiée.

Exercices

Exercice 1 (traité pendant la séance)
Trouver tous les entiers naturels n tels que n^2+11 divise n^3+13.

Exercice 2 (traité)
Soient $a, b \in \mathbb{N}$, $a > b$. On suppose que $a - b \mid a^2 + b$.
Montrer que $\dfrac{a+1}{b+1} \leq \text{pgcd}(a, b) + 1$.

Exercice 3 (traité)
À quelle condition sur $y \in \mathbb{N}$ a-t-on que $y^2 + 5y + 12$ est un carré ?

Exercice 4 (Inspiré de OIM 1972 Longlist 1, traité)
Trouver tous les entiers relatifs x tels que $x^4 + x^3 + x^2 + x + 1$ est un carré parfait.

Exercice 5 (Inspiré de Indian Regional Mathematical Olympiad 2000, P1, non-traité)
Trouver tous les couples d'entiers positifs (x, y) tels que $x^3 + 4x^2 - 3x + 6 = y^3$.

Exercice 6 (D'après Romanian 1st JBMO TST 2019, P1, non-traité)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$.

1. Soit $d \in \mathbb{N}^*$ tel que $d \mid 2n^2$. Montrer que $n^2 + d$ n'est pas un carré parfait.
2. Trouver tous les $d \in \mathbb{N}^*$ tels que $d \mid 3n^2$ et $n^2 + d$ est un carré parfait.

Exercice 7 (non-traité)
Trouver tous les entiers positifs x vérifiant $x! = x^3 - 11x + 4$.

Exercice 8 (Inspiré de All Soviet Union Mathematical Olympiad 1981, 316, non-traité)
Trouver tous les couples (x, y) d'entiers positifs tels que $x^3 - y^3 = xy + 41$.

Exercice 9 (Indian Olympiad Qualifier in Mathematics 2020, Q13, non-traité)
Trouver tous les n, x entiers naturels tels que $2^n + 5^n = x^2 + 65$.

Exercice 10 (P4 IMO 1998, non-traité)
Trouver tous les couples d'entiers strictement positifs (a, b) telles que $a^2b + a + b$ est divisible par $ab^2 + b + 7$.

Exercice 11 (P4 IMO 2019, non traité)
Trouver tous les couples (k, n) d'entiers strictement positifs tels que :

$$k! = (2^n - 1)(2^n - 2)(2^n - 4)\dots(2^n - 2^{n-1})$$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Supposons que $n \in \mathbb{N}$ est tel que $n^2 + 11$ divise $n^3 + 13$. Alors $n^2 + 11$ divise $n(n^2 + 11) - (n^3 + 13) = 11n - 13$, et réciproquement si $n^2 + 11$ divise $11n - 13$ alors $n^2 + 11$ divise $n(n^2 + 11) - (11n - 13) = n^3 + 13$: on a équivalence. Il s'agit donc de trouver les n tels que $n^2 + 11$ divise $11n - 13$.
Or $n^2 + 11$ est de degré 2 en n et $11n - 13$ est de degré 1 : pour n grand, $0 < 11n - 13 < n^2 + 11$ et donc $n^2 + 11$ ne divisera pas $11n - 13$. Il s'agit donc de déterminer pour quelles valeurs de n a-t-on $n^2 + 11 > 11n - 13 > 0$ puis de tester les valeurs restantes.
$11n - 13 > 0$ est vérifié pour $n \geq 2$. Puis, $n^2 + 11 > 11n - 13$ équivaut à $n^2 - 11n + 24 > 0$, qui équivaut à $(n - 3)(n - 8) > 0$, c'est-à-dire $n > 8$ ou $n < 3$.
Il ne reste plus qu'à tester les valeurs n de 0 à 8.

n	n^2+11	$11n-13$	n^2+11 divise $11n-13$?
0	11	-13	non
1	12	-2	non
2	15	9	non
3	20	20	OUI
4	27	31	non
5	36	42	non
6	47	53	non
7	60	64	non
8	75	75	OUI

Finalement il y a deux solutions : $n = 3$ et $n = 8$.

Solution de l'exercice 2

Soit $d = \text{pgcd}(a,b)$, on écrit $a = dx, b = dy, x, y \in \mathbb{N}, x > y, \text{pgcd}(x,y) = 1$.
La condition devient $d(x-y) \mid d(dx^2+y)$ c'est-à-dire $x-y \mid dx^2+y$, d'où $x-y \mid dx^2+y+x-y = x(dx+1)$. Comme $\text{pgcd}(x-y,x) = 1$, on en déduit par le lemme de Gauss que $x-y \mid dx+1$.
Alors $x-y \mid dx+1-d(x-y) = dy+1$. Comme $dy+1, x-y > 0$, on en déduit $x-y \leq dy+1$.
D'où $\dfrac{a+1}{b+1} = \dfrac{dx+1}{dy+1} = 1 + d\dfrac{x-y}{dy+1} \leq 1+d = 1+\text{pgcd}(a,b)$, comme voulu.

Solution de l'exercice 3

On sait que $(y+2)^2 = y^2+4y+4 < y^2+5y+12$ pour $y \geq 0$. De plus, $(y+3)^2 = y^2+6y+9$: $(y+3)^2 > y^2+5y+12$ si et seulement si $6y+9 > 5y+12$, si et seulement si $y > 3$.
Dès lors, pour $y \geq 4$, $(y+2)^2 < y^2+5y+12 < (y+3)^2$, dans ces conditions $y^2+5y+12$ ne peut pas être un carré.
Finalement, les seules solutions potentielles sont $0 \leq y \leq 3$. On teste :

y	$y^2+5y+12$	Carré parfait ?
0	12	non
1	18	non
2	26	non
3	$36 = 6^2$	OUI

Finalement il y a une unique solution $y = 3$.

Solution de l'exercice 4

Supposons que x est solution, alors $4(x^4+x^3+x^2+x+1)$ est encore un carré parfait. Or, $(2x^2+x)^2 = 4x^4+4x^3+x^2$, $4(x^4+x^3+x^2+x+1) > (2x^2+x)^2$ si et seulement si $3x^2+4x+4 > 0$, si et seulement si $2x^2+(x+2)^2 > 0$, ce qui est toujours vrai.
De plus, $4(x^4+x^3+x^2+x+1) < (2x^2+x+1)^2$ si et seulement si $x^2-2x-3 > 0$, si et seulement si $(x-3)(x+1) > 0$, ce qui est vrai pour $x < -1$ et $x > 3$.
Donc les seules solutions potentielles sont pour $-1 \leq x \leq 3$. On teste :

x	$x^4+x^3+x^2+x+1$	Carré parfait ?
-1	$1 = 1^2$	OUI
0	$1 = 1^2$	OUI
1	5	non
2	31	non
3	$121 = 11^2$	OUI

En conclusion, il y a également trois solutions, $x = -1$, $x = 0$ et $x = 3$.

Solution de l'exercice 5

On a $(x+1)^3 = x^3 + 3x^2 + 3x + 1$ et $(x+2)^3 = x^3 + 6x^2 + 12x + 8$.
On peut déjà affirmer que pour $x \geq 0$, $x^3 + 4x^2 - 3x + 6 < x^3 + 6x^2 + 12x + 8 = (x+2)^3$.
De plus, $x^3 + 4x^2 - 3x + 6 \leq (x+1)^3$ si et seulement si $x^2 - 6x + 5 \leq 0$, si et seulement si $(x-1)(x-5) \leq 0$, si et seulement si $1 \leq x \leq 5$.
Autrement dit, pour $x = 0$ ou $x \geq 6$, on a $(x+1)^3 < x^3 + 4x^2 - 3x + 6 < (x+2)^3$, donc ce ne sont pas des solutions.
Reste à tester $1 \leq x \leq 5$:

x	$x^3 + 4x^2 - 3x + 6$	Cube parfait ?
1	$8 = 2^3$	OUI
2	24	non
3	60	non
4	122	non
5	$216 = 6^3$	OUI

Finalement, il y a exactement deux solutions, $(x, y) = (1, 2)$ et $(x, y) = (5, 6)$.

Solution de l'exercice 6

1. On écrit $2n^2 = k \times d$, $k \geq 1$ un entier. Supposons par l'absurde qu'on dispose de $m \in \mathbb{N}^*$ tel que $n^2 + d = m^2$. Alors $n^2 + d = n^2 + \dfrac{2n^2}{k} = m^2$ donc $n^2k^2 + 2n^2k = m^2k^2 : n^2(k^2 + 2k) = (mk)^2$. Il vient $n^2 \mid (mk)^2$ donc $n \mid mk$, et alors $k^2 + 2k = \left(\dfrac{mk}{n}\right)^2$ est un carré parfait. Mais $k \geq 1$ donc $k^2 < k^2 + 2k < k^2 + 2k + 1 = (k+1)^2$: c'est absurde, c'est la contradiction recherchée. Donc $n^2 + d$ n'est pas un carré parfait.
2. Supposons que d est solution. On écrit $3n^2 = k \times d$ et $n^2 + d = m^2$ de même. Alors on obtient, de même que précédemment, $k^2 + 3k = \left(\dfrac{mk}{n}\right)^2$. Or $k^2 < k^2 + 3k < k^2 + 4k + 4 = (k+2)^2$. Donc nécessairement, $k^2 + 3k = (k+1)^2 = k^2 + 2k + 1$, d'où $k = 1$ et $d = 3n^2$. Réciproquement si $d = 3n^2$, alors $n^2 + d = (2n)^2$. C'est donc l'unique solution.

Solution de l'exercice 7

Intuitivement la factorielle croit plus vite que le cube, donc assez vite $x^3 - 11x + 4 < x!$ et l'inégalité n'est plus vérifiée.
Pour $x \geq 4$, $x! \geq x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$ donc $x! - (x^3 - 11x + 4) \geq x^4 - 7x^3 + 11x^2 + 5x - 4 = (x-4)(x^3 - 3x^2 - x + 1)$, en particulier on peut vérifier que pour $x \geq 5$, $x^3 - 3x^2 - x + 1 > 0$. Donc pour $x \geq 5$, on a $x! > x^3 - 11x + 4$, on ne peut pas avoir égalité.
Reste à tester les valeurs $0 \leq x \leq 4$:

x	$x!$	$x^3 - 11x + 4$	Égalité ?
0	1	4	non
1	1	-6	non
2	2	-10	non
3	6	-2	non
4	24	24	OUI

Finalement, il y a une unique solution $x = 4$.

Solution de l'exercice 8
Si (x, y) est solution : $x^3 - y^3 = xy + 41 \geq 41 > 0$ donc $x > y$. Posons $d = x - y > 0$. L'équation devient $(y + d)^3 - y^3 = y(y + d) + 41$ donc $3y^2d + 3yd^2 + d^3 = y^2 + yd + 41$.
Alors $d^3 \leq (3d - 1)y^2 + d(3d - 1)y + d^3 = 41$. Donc $d = 1, 2$ ou 3.
Si $d = 1$, on obtient $2y^2 + 2y = 40$ donc $y^2 + y - 20 = 0$, autrement écrit $(y - 4)(y + 5) = 0$, on obtient $y = 4$ et donc $x = 5$.
Si $d = 2$, on obtient $5y^2 + 10y + 8 = 41$ donc $5(y^2 + 2y) = 33$, absurde (5 ne divise pas 33).
Si $d = 3$, on obtient $8y^2 + 24y + 27 = 41$ donc $8(y^2 + 3y) = 14$, absurde (8 ne divise pas 14).
Réciproquement, $(x, y) = (5, 4)$ convient, c'est donc l'unique solution.

Solution de l'exercice 9
Supposons que (n, x) est solution. Modulo 3, on remarque que $2 \times (-1)^n \equiv x^2 + 2$ donc $x^2 \equiv 2((-1)^n - 1)$. Un carré valant 0 ou 1 modulo 3, nécessairement $x \equiv 0 \pmod 3$ et n est pair. On dispose donc de $m \in \mathbb{N}$ tel que $n = 2m$.
Alors $(5^m)^2 + 4^m - 65 = x^2$.
Si $m \geq 4$, alors $4^m - 65 > 0$. Donc $(5^m)^2 < x^2 = 5^{2m} + 4^m - 65 < 5^{2m} + 2 \times 5^m + 1 = (5^m + 1)^2$, absurde.
Donc $0 \leq m \leq 3$.
On teste :

m	$5^{2m} + 2^{2m} - 65$	Carré parfait ?
0	-63	non
1	-36	non
2	$576 = 24^2$	OUI
3	15624	non

Finalement, il y a une unique solution $(n, x) = (4, 24)$.

Solution de l'exercice 10
Supposons que (a, b) est solution. On a que $ab^2 + b + 7$ divise $b(a^2b + a + b) - a(ab^2 + b + 7) = b^2 - 7a$.
En particulier, soit $b^2 - 7a = 0$ (ce qui donne des solutions potentielles de la forme $(a, b) = (7k^2, (7k)^2)$, $k \in \mathbb{N}^*$), soit $b^2 - 7a \neq 0$ et $|b^2 - 7a| \geq |ab^2 + b + 7| = ab^2 + b + 7$.
Comme $a > 0$, alors $ab^2 + b + 7 \geq b^2 + b + 7 > b^2 > b^2 - 7a$. Donc forcément $b^2 - 7a < 0$ et donc $ab^2 + b + 7 \leq 7a - b^2$. Alors $(a + 1)b^2 + b - 7a + 7 \leq 0$.
Si $b \geq 3$, alors $(a + 1)b^2 + b - 7a + 7 \geq 9a + 9 + 3 - 7a + 7 = 2a + 19 > 0$ donc ça ne peut pas être solution.
Si $b = 2$ alors on veut que $4a + 9$ divise $4 - 7a$ et donc $4a + 9$ divise $7(4a + 9) + 4(4 - 7a) = 79$ qui est un nombre premier : comme $4a + 9 > 1$, alors $4a + 9 = 79$, impossible car 70 n'est pas divisible par 4.
Si $b = 1$ alors $a + 8$ divise $1 - 7a$ donc il divise $7(a + 8) + (1 - 7a) = 57 = 3 \times 19$. Comme $a + 8 \geq 8$, soit $a + 8 = 19$ c'est-à-dire $a = 11$, soit $a + 8 = 57$ c'est-à-dire $a = 49$.
Réciproquement, on vérifie que $(a, b) = (7k^2, (7k)^2)$ $(k \in \mathbb{N}^*)$, $(a, b) = (11, 1)$ et $(a, b) = (49, 1)$ fonctionnent effectivement, ce sont donc toutes les solutions.

Solution de l'exercice 11
Avec les facteurs 2, on s'intéresse à la valuation 2-adique.
À droite, elle vaut $0 + 1 + 2 + \ldots + (n - 1) = \dfrac{n(n - 1)}{2}$.

À gauche, elle vaut, par la formule de Legendre, $\sum_{p\geq 1}\left\lfloor \frac{k}{2^p}\right\rfloor \leq \sum_{p=1}^{k}\frac{k}{2^p} = \frac{k}{2}\times\frac{1-\left(\frac{1}{2}\right)^{k+1}}{1-\frac{1}{2}} < k$.

On en déduit que $k > \frac{n(n-1)}{2}$. Alors par croissance de la factorielle, $\left(\frac{n(n-1)}{2}\right)! \leq (2^n-1)(2^n-2)(2^n-4)\dots(2^n-2^{n-1}) \leq 2^{n^2}$. Or, intuitivement, la factorielle croit beaucoup plus vite que les puissances, donc pour n grand l'inégalité ne pourra pas être vérifiée. Essayons de formaliser tout ça.

Il s'agit de montrer qu'à partir d'un certain rang, $2^{n^2} < \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!$. On peut vérifier que pour $n = 6$, l'inégalité est vérifiée. Montrons par récurrence que pour $n \geq 6$, c'est encore le cas.

Soit $n \geq 6$, supposons que $2^{n^2} < \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!$. On a :

$$\begin{aligned}
2^{(n+1)^2} &= 2^{n^2}\times 2^{2n+1}\\
&< \left(\frac{n(n-1)}{2}\right)!\times 2^{2n+1}\\
&= \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!\times\frac{2^{2n+1}}{\left(\frac{n(n-1)}{2}+1\right)\left(\frac{n(n-1)}{2}+2\right)\dots\left(\frac{n(n-1)}{2}+n\right)}\\
&< \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!\times\frac{2^{2n+1}}{\left(\frac{n(n+1)}{2}\right)^n}
\end{aligned}$$

Or comme $n \geq 6$, alors $\frac{n(n+1)}{2} \geq 15$, et donc $2^{(n+1)^2} < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!\times 2\times\left(\frac{4}{15}\right)^n < \left(\frac{n(n+1)}{2}\right)!$ (pour $n \geq 6$, $2\left(\frac{4}{15}\right)^n < 1$). Ceci achève la récurrence.

En particulier, les solutions potentielles sont pour $1 \leq n \leq 5$.

- Pour $n = 1$, on doit trouver $k > 0$ tel que $k! = 1$: seul $k = 1$ convient.
- Pour $n = 2$, on doit avoir $k! = 6$ donc $k = 3$.
- Pour $n = 3$, on doit avoir $k! = 168$, c'est impossible.
- Pour $n = 4$, 7 divise $(16-1)(16-2)(16-4)(16-8)$ donc $k \geq 7$, en particulier 9 divise $k!$, c'est impossible car 9 ne divise pas $(16-1)(16-2)(16-4)(16-8)$.
- Pour $n = 5$: $2^5 - 1 = 31$ qui est premier, donc $k \geq 31$, d'où $k! = 31! \geq 29\times(2^5-1)(2^5-2)(2^5-4)(2^5-8)(2^5-16) > (2^5-1)(2^5-2)(2^5-4)(2^5-8)(2^5-16) = k!$, absurde

Finalement, il y a exactement deux couples solutions : $(k,n) = (1,1)$ et $(k,n) = (3,2)$.

7 Équations fonctionnelles (Emilhan)

Rappels théoriques

– Introduction –

Une équation fonctionnelle est une équation dont les inconnues sont des fonctions.

Exemple 1.
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Afin de résoudre une équation fonctionnelle, il faut procéder par analyse-synthèse. Dans la phase d'analyse, on récolte le plus d'informations possible sur la fonction grâce à plusieurs méthodes qui seront présentées dans la suite. Ensuite, il faut vérifier que les fonctions que l'on a trouvées sont effectivement des solutions.

La première méthode est la **substitution**. Elle consiste à utiliser l'équation qui nous est donnée pour des valeurs particulières de x et y afin d'obtenir des renseignements.

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = xf(x) + y$$

Solution de l'exercice 1
Dans le membre de droite, le terme en $xf(x)$ est compliqué et nous embête. Mais si on prend la valeur particulière $x = 0$, on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(y) = y$.
Ainsi, seule la fonction identité peut être solution. Cependant, il faut encore vérifier : si f est l'identité, le membre de gauche vaut $x + y$, tandis que celui de droite vaut $x^2 + y$; ils ne sont donc pas toujours égaux (on peut le voir avec $x = 2$ par exemple). L'équation n'a donc pas de solution !

Remarque 2.
Une équation fonctionnelle peut avoir une seule solution, ou plusieurs, ou même une infinité. Mais dans certains cas, il n'y en a aucune.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(x + y) = f(x - y)$$

Solution de l'exercice 2
Ici, il est judicieux de choisir $y = x$ dans l'équation, afin de simplifier le membre de droite. On obtient :

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad f(2x) = f(0)$$

En remplaçant x par $\frac{x}{2}$, on obtient que f est une fonction constante : pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = C$, avec $C \in \mathbb{R}$. Réciproquement, toutes les fonctions constantes sont clairement solutions.

Remarque 3.
Si a et b sont des réels, on pouvait également poser $x = \frac{a+b}{2}$ et $y = \frac{a-b}{2}$ pour obtenir $f(a) = f(b)$, et on retrouve que f doit être constante.

Remarque 4.
Dans l'exercice précédent, on peut remarquer que dans le membre de gauche, les variables x et y jouent un rôle symétrique, ce qui n'est pas le cas dans le membre de droite. Pour exploiter ce genre de propriétés de **symétrie/asymétrie**, il est souvent utile d'échanger x et y.

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tous $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x+y) = f(x) - f(y)$$

Solution de l'exercice 3
En échangeant x et y, on obtient que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $f(y+x) = f(y) - f(x)$. En ajoutant l'équation de départ, on obtient que $2f(x+y)$ est toujours nul, donc f est identiquement nulle (on peut le voir en posant $y = 0$ par exemple).
Une autre façon de trouver ce résultat est de poser $y = x$, ce qui donne $f(2x) = 0$ pour tout x, avec $2x$ qui parcourt $\mathbb{R}$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$. N'oublions pas de vérifier que la fonction nulle est effectivement solution !

Remarque 5.
Pour orienter ses recherches, il peut souvent être utile d'essayer de trouver des fonctions solutions, ou des valeurs particulières de la fonction à l'aide de substitutions.

– Injectivité/Surjectivité –

Définition 6.
Soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est **injective** si pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ a au plus une solution dans A. En d'autres termes, deux éléments distincts de A ont des images distinctes :

$$\forall a, a' \in A, \quad a \neq a' \implies f(a) \neq f(a')$$

Exemple 7.
La fonction identité est injective, mais la fonction $f : \left| \begin{array}{c} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas injective car $f(1) = f(-1) = 1$.

Remarque 8.
Pour prouver qu'une fonction est injective, on montre la contraposée : si $f(a) = f(a')$, alors $a = a'$. Dans un exercice, si on montre que la fonction f est injective et qu'on obtient une égalité de la forme $f(truc) = f(bidule)$, on peut donc en déduire que $truc = bidule$.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(f(x) + y) = x + f(f(y))$$

Solution de l'exercice 4
On prend $y = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(f(x)) = x + f(f(0))$. On en déduit que f est bijective.
En prenant $x = 0$, on a pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(f(0)+y) = f(f(y))$, donc par injectivité $f(y) = y + f(0)$.
On vérifie réciproquement que les fonctions de la forme $x \mapsto x + C$, $C \in \mathbb{R}$ sont solutions.

Définition 9.
Soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est **surjective** si pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet au moins une solution dans A. En d'autres termes, f atteint tous les éléments de B.

Exemple 10.
la fonction identité de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ est surjective, mais la fonction $f : \left| \begin{array}{l} \mathbb{R} \to \mathbb{R} \\ x \mapsto x^2 \end{array} \right.$ n'est pas surjective car -1 n'admet aucun antécédent.

Remarque 11.
Pour montrer la surjectivité de f, on essaie de se ramener à une égalité de la forme $f(C) = D$, avec C et D qui dépendent de x et D qui parcourt l'ensemble d'arrivée. Si on montre que la fonction f est surjective et si $b \in B$, on peut toujours trouver $a \in A$ tel que $f(a) = b$, ce qui est utile pour les substitutions.

Définition 12.
Soit $f : A \to B$ une fonction. On dit que f est **bijective** si elle est surjective et injective, ssi pour tout $b \in B$, l'équation $f(x) = b$ admet exactement une solution dans A.

Exemple 13.
On considère l'équation : pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = x$.
Montrons qu'une fonction solution f est bijective. Premièrement, si $x, y \in \mathbb{R}$ sont tels que $f(x) = f(y)$, on a $x = f(f(x)) = f(f(y)) = y$. Donc f est injective. En outre, pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $f(f(x)) = x$. Donc f est surjective, et par conséquent bijective.

Exercice 5 (repris du cours de Rémi de 2020)
Parmi les équations fonctionnelles suivantes, déterminer lesquelles n'admettent que des solutions injectives, surjectives ou bijectives :

1. $f(x + f(y)) = 2f(x) + y$
2. $f(x + y) = f(x)f(y)$
3. $f(f(x)) = \sin(x)$

Solution de l'exercice 5
1. En posant $x = 0$ on obtient $f(f(y)) = 2f(0) + y$. Si $f(a) = f(b)$, alors $f(f(a)) = f(f(b))$, donc $2f(0) + a = 2f(0) + b$, d'où $a = b$. Ainsi f est injective. De plus, l'expression $2f(0) + y$ parcourt $\mathbb{R}$ quand y parcourt $\mathbb{R}$, donc f est surjective. Finalement, f est bijective.
2. La fonction nulle est solution, donc f n'est ni injective, ni surjective.
3. Si $f(0) = f(\pi)$, alors f n'est pas injective. Sinon, $f(f(0)) = \sin(0) = \sin(\pi) = f(f(\pi))$, donc f n'est pas injective. De plus $f \circ f$ est à valeurs dans $[-1, 1]$, donc n'est pas surjective, mais si f était surjective alors $f \circ f$ le serait aussi, donc f n'est pas surjective.

Conseils pour s'attaquer à une EF

★ Deviner les solutions, trouver des valeurs particulières.
★ Effectuer des simplifications grâce à des substitutions judicieuses.
★ Utiliser les symétries du problème.
★ Essayer de montrer la surjectivité/injectivité.
★ Étudier la parité de la fonction.
★ Étudier les points fixes, les racines, les itérées, ...

Exercices

Exercice 6
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(xf(y) + y) = f(f(xy)) + y$$

Exercice 7
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) = 2f(x) + f(y)$$

Exercice 8
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(f(x + y)) = f(x) + y$$

Exercice 9 (Repris du cours de Benoît 2021)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(2f(x) + f(y)) = 2x + f(y)$$

Exercice 10 (Équation de Cauchy)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x + y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 11
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(f(x) + f(y)) = f(f(x)) + y$$

Exercice 12
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ qui vérifient :

$$\forall x \in \mathbb{N}, \quad f(f(x)) = x + 1$$

Exercice 13
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(x + y) + xy = f(x)f(y)$$

Exercice 14
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad xf(x + f(y)) = (y - x)f(f(x))$$

Exercice 15
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ qui vérifient :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, \quad f(f(x) + 2y) = 3x + f(f(f(y)) - x)$$

Solutions

Solution de l'exercice 6
En prenant $x = 0$, on obtient pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(y) = f(f(0)) + y$. Ainsi, pour tout $y \in \mathbb{R}$, on a $f(y) = y + C$, avec $C \in \mathbb{R}$, et l'équation de départ devient : pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, $xy + xC + y + C = xy + 2C + y$, donc $C = 0$ (en prenant $x = 0$ par exemple). Réciproquement, la fonction identité est bien solution.

Solution de l'exercice 7
En prenant $y = 0$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 2f(x) + f(0)$, donc $f(x) = -f(0)$ est constante. Réciproquement, la seule fonction constante solution est la fonction identiquement nulle.
Alternativement, échanger x et y permet de remarquer que f est constante.

Solution de l'exercice 8
En échangeant x et y, on obtient pour tous $x, y \in \mathbb{R}$: $f(x) + y = f(y) + x$. En particulier, en prenant $x = 0$ on a pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(y) = y + f(0)$. Réciproquement, la seule fonction solution est l'identité.
Il était ici aussi possible de remarquer que f est bijective en prenant $x = 0$: pour tout $y \in \mathbb{R}$, $f(f(y)) = y + f(0)$. Or, pour $y = 0$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(f(x)) = f(x)$, donc $f(x) = x$ par injectivité. On retombe bien sur le même résultat.
Enfin, prendre $y = -x$ permet de conclure également.

Solution de l'exercice 9
On prend $y = 0$, on a $f(2f(x) + f(0)) = 2x + f(0)$. Soit a et b deux réels tels que $f(a) = f(b)$, on a alors $f(2f(a) + f(0)) = f(2f(b) + f(0))$ d'où $2a + f(0) = 2b + f(0)$ et $a = b$, donc f est injective. On considère $x = 0$, on a alors $f(2f(0) + f(y)) = f(y)$, par injectivité, $f(y) = y - 2f(0)$, en particulier $f(0) = -f(0)$ donc $f(0) = 0$ et f est l'identité. Elle convient, c'est donc l'unique solution.

Solution de l'exercice 10
En posant $x = y = 0$, on obtient $f(0) = 2f(0)$, donc $f(0) = 0$. En prenant $y = -x$, on a alors que $0 = f(x) + f(-x)$ pour tout x, donc f est impaire. On a en posant $y = 1$: pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x+1) = f(x) + f(1)$. Par récurrence immédiate, on en déduit que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = nf(1)$ et par imparité, on étend ce résultat à $\mathbb{Z}$.
On montre de même que pour tout $q \in \mathbb{Q}$ et $n \in \mathbb{N}$, $f(nq) = nf(q)$. En prenant $q = \frac{m}{n}$, avec $m \in \mathbb{Z}$ et $n \in \mathbb{N}^*$, on a donc $f(m) = mf(1) = nf(\frac{m}{n})$. Ainsi, $f(q) = qf(1)$ pour tout $q \in \mathbb{Q}$. On vérifie réciproquement que les fonctions linéaires sont bien solutions.

Solution de l'exercice 11
En posant $x = 0$, on trouve que pour tout $y \in \mathbb{Q}$, $f(f(0) + f(y)) = f(f(0)) + y$. Ainsi, f est surjective. On peut donc réécrire l'équation de départ :

$$\forall x, y \in \mathbb{Q}, \quad f(x + f(y)) = f(x) + y$$

En posant $x = 0$, on trouve que $f(f(y)) = y + f(0)$ pour tout y, donc f est bijective. En posant $y = 0$, on trouve alors que $f(x + f(0)) = f(x)$ pour tout x, donc par injectivité $f(0) = 0$. En remplaçant y par $f(y)$ dans l'équation de départ, on retombe sur l'équation de Cauchy. Par l'exercice précédent, on dispose de $a \in \mathbb{Q}$ tel que pour tout $x \in \mathbb{Q}$, $f(x) = a \cdot x$. Réciproquement, on voit que seules la fonction identité $x \to x$ et son opposée $x \to -x$ sont solutions (l'équation de départ se transforme en $a^2 \cdot y = y$ pour tout y).

Solution de l'exercice 12

Il s'agit ici d'une astuce classique : on calcule $f(f(f(x)))$ de deux manières différentes. Soit $x \in \mathbb{N}$. On a $f(f(f(x))) = f(x) + 1$ en prenant $f(x)$ dans l'équation de départ. Et en composant par f des deux côtés de l'équation de départ, on a $f(f(f(x))) = f(x+1)$. Ainsi, pour tout $x \in \mathbb{N}$, $f(x+1) = f(x) + 1$. Par récurrence immédiate, on trouve alors que pour tout $n \in \mathbb{N}$, $f(n) = f(0)+n$. Ainsi, on a pour tout $x \in \mathbb{N}$ $f(f(x)) = f(f(0)+x) = 2f(0)+x$. Mais $f(f(x)) = x+1$, donc $f(0) = \frac{1}{2}$, absurde. Donc l'équation n'a pas de solutions.

Solution de l'exercice 13

En posant $y = 0$, on obtient pout tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x) \cdot f(0)$. Or, la fonction nulle n'est pas solution, donc on dispose de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(x_0) \neq 0$. Puisque $f(x_0) = f(x_0) \cdot f(0)$, on en déduit que $f(0) = 1$.

En outre, pour $y = -x$, on a $1 - x^2 = f(x)f(-x)$, donc en particulier pour $x = 1$, on a $0 = f(1)f(-1)$. On a alors deux cas à traiter. Si $f(1) = 0$, alors en prenant $y = 1$, $f(x+1)+x = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = 1 - x$. Si $f(-1) = 0$, alors pour $y = -1$ on a $f(x-1) - x = 0$, donc pour tout $x \in \mathbb{R}$, $f(x) = x + 1$. Réciproquement, on vérifie que les fonctions $x \to x + 1$ et $x \to 1 - x$ sont bien solutions, et il s'agit donc des seules.

Solution de l'exercice 14

Si $f(f(x))$ est nul pour tout $x \in \mathbb{R}$, alors pour tout $x \neq 0$ et $y \in \mathbb{R}$, $f(x + f(y)) = 0$. On fixe $y \in \mathbb{R}$. Ainsi, f est nulle en tout point autre que $f(y)$ (en prenant $x = z - f(y)$ avec $z \neq f(y)$). Puisque $f(f(y)) = 0$, on en déduit que f est identiquement nulle, et cette fonction est réciproquement bien solution.

On suppose maintenant que l'on dispose de $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que $f(f(x_0)) \neq 0$. En prenant $y = x$ dans l'équation de départ, on voit que $xf(x+f(x)) = 0$, donc $x+f(x)$ est toujours une racine de f (car $f(f(0)) = 0$ en prenant $x = 0$ et $y = 1$). Ainsi, pour $y = x + f(x)$, on trouve : $xf(x) = f(x)f(f(x))$. Pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a donc $f(x) = 0$ ou $f(f(x)) = x$. En outre, si r est une racine de f, on a pour $y = r$: $x_0 f(x_0) = (r - x_0)f(f(x_0))$. Ainsi, f possède une unique racine $r = \frac{x_0 f(x_0)}{f(f(x_0))} + x_0 = K$. Finalement, pour tout $x \in \mathbb{R}$, $x + f(x) = K$, donc $f(x) = K - x$. On vérifie réciproquement que les fonctions de cette forme sont toutes solutions.

Les fonctions solutions sont donc $x \mapsto 0$ et $x \mapsto K - x$, $K \in \mathbb{R}$.

Solution de l'exercice 15

On pose dans la suite $a = f(0)$. En prenant $y = -\frac{f(x)}{2}$, on obtient $a = 3x + f(f(f(-\frac{f(x)}{2})) - x)$, donc f est surjective car $a - 3x$ parcourt $\mathbb{R}$ lorsque x parcourt $\mathbb{R}$.

Soit $y, z \in \mathbb{R}$ tels que $f(y) = f(z)$. On a alors pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(f(x) + 2y) = f(f(x) + 2z)$. Par surjectivité de f, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$ $f(x+2y) = f(x+2z)$, donc en remplaçant x par $x-2y$, on a pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(x) = f(x + 2z - 2y)$. De même, en remplaçant x par $x - 2z$, on obtient pour tout x : $f(x) = f(x + 2y - 2z)$. Ainsi, en remplaçant x par $x + 2z - 2y$ dans l'équation de départ, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$3x + f(f(f(y)) - x) = f(f(x) + 2y)$$

$$= f(f(x + 2z - 2y) + 2y) = 3x + 6z - 6y + f(f(f(y)) - x + 2y - 2z)$$

$$= 3x + 6z - 6y + f(f(f(y)) - x)$$

On en déduit que $y = z$, donc f est injective.

En posant $x = 0$ dans l'équation de départ, on obtient alors pour tout $y \in \mathbb{R}$: $f(a + 2y) = f(f(f(y)))$. Par injectivité de f, on en déduit que pour tout $y \in \mathbb{R}$, $a + 2y = f(f(y))$. En outre,

en prenant $y = 0$, on a $a = f(a)$. Enfin, en prenant $y = 0$ dans l'équation de départ, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$: $f(f(x)) = 3x + f(f(a) - x)$. En comparant nos deux expressions pour $f(f(x))$, on obtient pour tout $x \in \mathbb{R}$: $x + f(f(a) - x) = x + f(a - x) = a$. En remplaçant x par $a - x$, on obtient que $f(x) = x$ pour tout x.
Cependant, l'identité n'est clairement pas solution de l'équation de départ ($x + 2y \neq 2x + y$ pour $x \neq y$), donc l'équation n'a pas de solution.

8 TD Équations diophantiennes (Antoine)

Exercice 1
Y a-t-il des points à coordonnées rationnelles sur le cercle de centre 0 et de rayon $\sqrt{3}$?

Exercice 2
Quels sont les (x, y, z) entiers tels que $x^3 + 2y^3 = 4z^3$?

Exercice 3
Pour quels entiers strictement positifs n a-t-on $5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 5^n + 3^n$?

Exercice 4
Trouver tous les n relatifs tels que $n^2 + 8n + 44$ soit un carré parfait.

Exercice 5
Quels sont les n tels que $4^n + 5^n$ est un carré parfait ?

Exercice 6
Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers vérifiant $x^2 = y^2(x + y^4 + 2y^2)$

Exercice 7
Trouver tous les entiers strictement positifs x, y et nombres premiers p tels que $\sqrt[3]{x} + \sqrt[3]{y} = \sqrt[3]{p}$.

Exercice 8
Trouver les $p, q > 5$ tels que $pq \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$.

Exercice 9
Trouver les x, y entiers relatifs tels que $x^3(y + 1) + y^3(x + 1) = 19$.

Solution de l'exercice 1
On cherche des couples (x, y) de rationnels tels que $x^2 + y^2 = 3$. Si $x = \frac{p}{q}, y = \frac{r}{s}$, on trouve alors $p^2s^2 + r^2q^2 = 3q^2s^2$. Si on pose $a = ps, b = qr, c = qs$, on obtient $a^2 + b^2 = 3c^2$. Maintenant on a des carrés, donc on regarde modulo $4, 3, 8$. Ici modulo 3 fait sens vu qu'on a déjà un 3 qui traîne, mais il s'avère que tout marche ici. Modulo 3 on trouve $a^2 + b^2 \equiv 0$, et en regardant les valeurs possibles pour les carrés modulo 3 on se rend compte que la seule possibilité est que $a \equiv b \equiv 0 \pmod 3$. On pose donc $a = 3a', b = 3b'$, et on obtient $3a'^2 + 3b'^2 = c^2$. Ainsi $3 \mid c^2$, et $3 \mid c$. On pose $c = 3c'$, et on obtient $a'^2 + b'^2 = 3c'^2$. Mais c'est l'équation de départ ! On est donc dans un cas de descente infinie, la seule possibilité était donc le triplet $(0, 0, 0)$ (car alors on ne diminue pas strictement en divisant par 3), mais celui-ci ne correspond à rien dans notre équation de départ. Ainsi, il n'y a pas de points rationnels sur ce cercle.

Solution de l'exercice 2
Si on prend un triplet solution, on se rend compte que x^3 doit être pair, et donc que x doit être pair. On pose $x = 2x'$, ce qui donne $4x'^3 + y^3 = 2z^3$. On en déduit que y est pair, et on montre de même que z est pair. On en arrive donc à une équation $x'^3 + 2y'^3 = 4z'^3$ comme pour l'exercice précédent, et on conclut de même par descente infinie : la seule solution est $(0, 0, 0)$

Solution de l'exercice 3
On essaye de faire disparaître les gros termes. Par exemple, par combinaison linéaire,

$$5^{n-1} - 3^{n-1} \mid 5^n - 3^n - 5(5^{n-1} - 3^{n-1}) = -2 \times 3^{n-1}.$$

De même, en remplaçant 5 par 3 on trouve $5^{n-1} + 3^{n-1} \mid 2 \times 5^{n-1}$. Comme 3 et 5 sont premiers entre eux, $5^{n-1} - 3^{n-1} \mid 2$, et en particulier $5^{n-1} - 3^{n-1} \leq 2$, donc $n = 1$.

Réciproquement, $n = 1$ est effectivement solution.

Solution de l'exercice 4
On procède par encadrement entre deux carrés. Supposons déjà $n \geq 0$, puisqu'on sait faire.
On a $n^2 + 8n + 44 > n^2 + 8n + 16 = (n + 4)^2$. De plus, on a $n^2 + 8n + 44 < n^2 + 10n + 25 \iff 19 < 2n \iff n \leq 9$. En vérifiant chacune des valeurs pour $0 \leq n \leq 9$, on trouve que $n = 2$ est la seule solution, pour laquelle on trouve $n^2 + 8n + 44 = 64$. Pour les négatifs, on a plusieurs manières de faire. Ou alors on encadre de la même manière, mais cette fois par $(n + 3)^2$, ce qui refait pas mal de vérifications derrière.
Ou alors on dit que vu que $n^2 + 8n + 44 = (n + 4)^2 + 28$, on dit que si le terme dans le carré prend un signe -, on a le même résultat. En d'autres termes, $f(n) = f(-8 - n)$. Ainsi, toute valeur qui est un carré pour $n \geq -4$ correspond à une valeur pour $n \leq -4$, et réciproquement. On obtient $n = -10$ comme solution, et on vérifie que pour $-4 \leq n \leq 0$, il n'y a pas de solutions.
Une dernière méthode consiste à écrire $n^2 + 8n + 44 = (n + 4)^2 + 28 = m^2$, factoriser et résoudre.

Dans tous les cas, on trouve $n = 2, -10$ comme seules solutions.

Solution de l'exercice 5
Soient k, n tels que $4^n + 5^n = k^2$.
On a alors $5^n = k^2 - 2^{2n} = (k - 2^n)(k + 2^n)$,. Si 5 divise chacun des deux facteurs, 5 divise aussi leur différence, à savoir 2^{n+1}, contradiction. Ainsi $k + 2^n = 5^n$, et $k - 2^n = 1$. En prenant encore une fois la différence, on trouve $2^{n+1} = 5^n - 1$. Cette équation admet une solution quand $n = 1$, et si $n \geq 2$ on a $5^n > 2^{n+1} + 1$ (par récurrence par exemple). Ainsi $n = 1$ est la seule solution potentielle, et elle est effectivement solution.

Solution de l'exercice 6
Des fois il n'y a pas le choix, il faut faire des trucs moches. Cet exercice est là pour vous entraîner à faire des trucs moches, et à reconnaître que des fois il n'y a juste pas mieux.

On voit notre expression comme l'annulation d'un polynôme en x :

$$x^2 - y^2 x - (y^6 + 2y^4) = 0$$

x doit être entier, donc le discriminant du polynôme est un carré parfait. Ce discriminant vaut

$$\Delta = y^4 - 4 \times 1 \times -(y^6 + 2y^4) = 4y^6 + 9y^4.$$

Δ est un carré parfait si et seulement si $4y^2 + 9$ l'est, ou $y = 0$ (puisque y^4 est un carré). On écrit $4y^2 + 9 = z^2$, avec spdg $z \geq 0$ et on obtient $(2y - z)(2y + z) = -9$. Si (x, y) est une solution,

$(x,-y)$ en est une aussi, on suppose donc que $y \geq 0$ également. Cela nous permet de simplifier le problème, on a $2y+z \geq 0$ et $2y+z \geq 2y-z$. On a donc deux possibilités : la première est $2y+z=3, 2y-z=-3$, et la deuxième est $2y+z=9, 2y-z=-1$. Dans le premier cas on trouve $z=0, y=0$, qui donne $x=0$. Dans le deuxième cas, on trouve $y=2, z=5$. En reprenant la formule des racines d'un trinôme, on a

$$x = \frac{-(-y^2) \pm y^2 z}{2} = 8 \text{ ou } 12.$$

Réciproquement, tous ces couples sont solutions. Notons également que le cas $y=0$ n'a pas à être traité de nouveau.

Solution de l'exercice 7
On voit des racines cubiques, on élève au cube. On trouve

$$x+y+3\sqrt[3]{x^2y}+3\sqrt[3]{xy^2} = x+y+3\sqrt[3]{pxy} = p.$$

Notre équation donne donc $(x+y-p)^3 = 27xyp$. Si $p=3$, on doit avoir $1 \leq x, y \leq 2$, et on vérifie que ça ne marche pas. Sinon, on a un cube qui est divisible par p, il est donc divisible par p^3, et $p^2 \mid xy$. On a aussi $p \mid x+y-p$, donc $p \mid x+y$, donc p ne peut pas diviser exactement un des nombres x et y, il divise donc les deux. Mais à présent $1 \leq x, y < p$ et $p \mid x, y$, impossible.

Solution de l'exercice 8
$p \mid (5^p - 2^p)(5^q - 2^q)$. Si $p \mid 5^p - 2^p$, on a par Petit Fermat

$$5^p - 2^p \equiv 5 - 2 = 3 \equiv 0 \pmod{p},$$

et $p=3$, impossible. donc $p \mid 5^q - 2^q$. Modulo p on a donc

$$5^q (2^q)^{-1} \equiv (5 \times 2^{-1})^q \equiv 1 \pmod{p}$$

L'ordre de 5×2^-1 modulo p est donc un diviseur de q, c'est 1 ou q. Si c'est 1, on a donc $5 \times 2^{-1} \equiv 1 \pmod{p}$, puis $5 \equiv 2 \pmod{p}$, impossible. Donc l'ordre est exactement q. Seulement l'ordre divise $p-1$ par petit Fermat, donc $q \mid p-1$. On peut refaire tout ce raisonnement en échangeant p et q, on a donc également $p \mid q-1$. Mais alors

$$q \leq p-1 < p \leq q-1 < q,$$

contradiction.

Solution de l'exercice 9
Là encore, rien de très joli. Déjà notons que le problème est symétrique en x, y. Si d est le pgcd de x et y, d^3 divise 19, donc $d=1$: x et y sont premiers entre eux.
Essayons de traiter des cas simples : si $x=0$, alors $y^3 = 19$ ce qui est impossible, si $x=-1$, on obtient $-(y+1) = 19$, i.e. $y=-20$. On supposera donc à l'avenir x, y différents de 0 et -1. Réciproquement les couples $(-1,-20)$ et $(-20,-1)$ sont solutions.
Si x et y sont positifs, ils ne peuvent pas être trop grands, car toutes les quantités présentes sont positives. En effet, si $x \geq 3$, $19 \geq x^3(y+1) \geq 27$ ce qui est impossible. Donc x et y valent 1 ou 2. Comme ils sont premiers entre eux on a $(x,y) = (1,2), (2,1), (1,1)$. Pour $(x,y)=(1,1)$, on obtient $4 = 19$ contradiction. Pour $(x,y)=(2,1)$, on obtient $82+13=19$. Ainsi $(2,1)$ et $(1,2)$ sont solutions.

Si x et y sont négatifs, on a $x \leq -2$ et $y \leq -2$. Si $x \leq -3$, on a $x^3(y+1) + y^3(x+1) \geq 27 > 19$ ce qui est impossible. On a donc $y > -3$ et $x > -3$ par symétrie, donc $x = -2 = y$. Néanmoins dans ce cas x et y ne sont par premier entre eux, contradiction.
Reste le cas où x est strictement positif, et y strictement négatif (l'autre cas est identique par symétrie). Dans ce cas $x^3(y+1) \leq 0$ et $y^3(x+1) \leq 0$ donc (x, y) n'est pas solution.
Ainsi les solutions de l'équation sont les couples $(2, 1), (1, 2), (-20, -1), (-1, -20)$.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Soit $n \in \mathbb{N}$ et soit p un nombre premier. On suppose que p divise $2^{2^n}+1$. Montrer que 2^{n+1} divise $p-1$.

Exercice 2 (Inspiré de USAMO 2014, P1)
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ unitaire de degré 2. On suppose que $P(1) \geq P(0)+3$, et que P a deux racines réelles (pas nécessairement distinctes) x_1 et x_2. Trouver la plus petite valeur possible pour $(x_1^2+1)(x_2^2+1)$.

Exercice 3 (JBMO Shortlist 2007, A2)
Soient $a, b, c > 0$ des réels. Montrer que :

$$\frac{a^2-bc}{2a^2+bc}+\frac{b^2-ca}{2b^2+ca}+\frac{c^2-ab}{2c^2+ab} \leq 0$$

Exercice 4 (OIM 2006, P4)
Déterminer tous les couples (x, y) d'entiers naturels tels que $2^{2x+1}+2^x+1 = y^2$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
On a $2^{2^n} \equiv -1 \pmod{p}$ donc en élevant au carré, $2^{2^{n+1}} \equiv 1 \pmod{p}$. En particulier p est premier avec 2, et l'ordre de 2 modulo p, qu'on note d, vérifie que d divise 2^{n+1}, donc $d = 2^k$ pour $0 \leq k \leq n+1$. D'autre part, comme p est premier avec 2, $p \geq 3$ donc $-1 \not\equiv 1 \pmod{p}$, en particulier $2^{2^n} \not\equiv 1 \pmod{p}$. Alors d ne divise pas 2^n, donc $k > n$. Nécessairement $k = n+1$: l'ordre de 2 modulo p est 2^{n+1}.
Or d'après le petit théorème de Fermat, $2^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$ donc d divise $p-1$. On a donc bien que 2^{n+1} divise $p-1$.

Solution de l'exercice 2
Écrivons $P = X^2+aX+b$ avec $a, b \in \mathbb{R}$. La condition de l'énoncé devient $1+a+b \geq b+3$ donc $a \geq 2$. De plus, par les relations de Viete, $x_1+x_2 = -a$ et $x_1x_2 = b$. On écrit :

$$\begin{aligned}(x_1^2+1)(x_2^2+1) &= x_1^2x_2^2+x_1^2+x_2^2+1\\ &= (x_1x_2)^2+(x_1+x_2)^2-2x_1x_2+1\\ &= b^2+(-a)^2-2b+1\\ &= (b-1)^2+a^2\\ &\geq 0^2+2^2\\ &= 4\end{aligned}$$

Donc $(x_1^2+1)(x_2^2+1) \geq 4$. De plus, on a égalité pour $a = 2, b = 1$, c'est-à-dire pour $P = X^2+2X+1 = (X+1)^2$, qui vérifie bien $P(1) = 4 \geq 4 = 3+P(0)$. La valeur minimale est donc 4.

Méthode alternative : on applique l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

$$(x_1^2+1)(x_2^2+1) = (x_1^2+1^2)(1^2+x_2^2) \underset{\substack{\text{Inégalité de}\\ \text{Cauchy-Schwarz}}}{\geq} (x_1\times 1 + 1\times x_2)^2 = (-a)^2 = a^2 \geq 4$$

De plus, on a égalité pour $x_1 = x_2 = -1$, et on conclut de même.

Solution de l'exercice 3

Les signes $-$ dans les fractions gênent un peu pour appliquer les inégalités qu'on connaît, essayons de s'en débarasser. On a $\dfrac{a^2-bc}{2a^2+bc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2a^2-2bc}{2a^2+bc} = \dfrac{1}{2}\dfrac{2a^2+bc-3bc}{2a^2+bc}$, ainsi on a $\dfrac{a^2-bc}{2a^2+bc} = \dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{bc}{2a^2+bc}\right)$. L'inégalité à prouver est alors équivalente à :

$$\frac{1}{2}\left(3-\frac{3bc}{2a^2+bc}-\frac{3ca}{2b^2+ca}-\frac{3ab}{2c^2+ab}\right)\leq 0$$

C'est-à-dire à :

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\geq 1$$

Il s'agit de prouver cette dernière inégalité. On souhaite minorer une somme de fractions : ceci nous fait penser à l'inégalité des mauvais élèves. Mais il faut faire apparaître des carrés au numérateur si on souhaite l'appliquer. Pour ce faire, on écrit $\dfrac{bc}{2a^2+bc} = \dfrac{(bc)^2}{2a^2bc+(bc)^2}$. Ainsi :

$$\begin{aligned}\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab} &= \frac{(bc)^2}{2a^2bc+(bc)^2}+\frac{(ca)^2}{2b^2ca+(ca)^2}+\frac{(ab)^2}{2c^2ab+(ab)}\\ &\underset{\substack{\text{Inégalité des}\\ \text{mauvais élèves}}}{\geq} \frac{(bc+ca+ab)^2}{2a^2bc+2b^2ca+2c^2ab+(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2}\\ &= \frac{(bc+ca+ab)^2}{(bc)^2+(ca)^2+(ab)^2+2bcca+2caab+2abbc}\end{aligned}$$

Au dénominateur, on reconnaît le développement de $(ab+bc+ca)^2$, et donc finalement, on a bien prouvé que :

$$\frac{bc}{2a^2+bc}+\frac{ca}{2b^2+ca}+\frac{ab}{2c^2+ab}\geq 1$$

Ceci conclut.

Solution de l'exercice 4

On teste les petits cas.

- $x = 0$ donne $2^{2x+1}+2^x+1 = 2+1+1 = 4 = 2^2$ donc $(0,2)$ est solution.
- $x = 1$ donne $2^{2x+1}+2^x+1 = 8+2+1 = 11$ qui n'est pas un carré parfait, donc $x = 1$ ne donne aucune solution.
- $x = 2$ donne $2^{2x+1}+2^x+1 = 32+4+1 = 37$ qui n'est pas un carré parfait, donc $x = 2$ ne donne aucune solution.

Supposons maintenant que (x,y) est une solution avec $x \geq 3$. Comme $x \geq 3 > 0$, y^2 doit être impair donc y aussi : on écrit $y = 2k+1$, $k \in \mathbb{N}$. Alors l'équation se réécrit $2^x(2^{x+1}+1) =$

$(2k+1)^2-1 = 2k(2k+2) = 4k(k+1)$ donc $k(k+1) = 2^{x-2}(2^{x+1}+1)$, en particulier $k > 0$ (le membre de droite est non-nul). Comme k et $k+1$ sont des entiers consécutifs, l'un est pair et l'autre impair. En particulier, 2^{x-2} divise $k(k+1)$ mais est premier avec l'un des deux (celui qui est impair), donc 2^{x-2} divise l'un ou l'autre (d'après le lemme de Gauss).

- Supposons que 2^{x-2} divise k. On dispose d'un entier $m \geq 1$ tel que $k = 2^{x-2}m$, et alors $k+1 = 2^{x-2}m+1$. En réinjectant dans l'équation, $m(2^{x-2}m+1) = 2^{x+1}+1$ donc $2^{x-2}(m^2-8) = 1-m$. Si $m \geq 3$, $2^{x-2}(m^2-8) > 0 > 1-m$, c'est impossible. Si $m = 2$, $-4 \times 2^{x-2} = -1$, impossible car 4 ne divise pas 1. Enfin si $m = 1$, $-7 \times 2^{x-2} = 0$, impossible également. Donc ce cas est impossible.
- Supposons désormais que 2^{x-2} divise $k+1$. On dispse d'un entier $m \geq 1$ tel que $k+1 = 2^{x-2}m$, et alors $k = 2^{x-2}m-1$. En réinjectant dans l'équation, $m \times (2^{x-2}m-1) = 2^{x+1}+1$ et donc $2^{x-2}(m^2-8) = 1+m$. Comme $1+m > 0$, alors $m^2-8 > 0$ et donc $m \geq 3$. Alors $1+m = 2^{x-2}(m^2-8) \geq 2(m^2-8)$ car $x-2 \geq 1$ et $m^2-8 > 0$. Alors $2m^2-m-17 \leq 0$ donc $m(2m-1) \leq 17$. Le membre de gauche est croissant en m, et en $m = 4$ on a $4 \times (2 \times 4-1) = 28 > 17$ donc pour $m \geq 4$, l'inégalité n'est pas vérifiée. La seule possibilité est donc $m = 3$. En remplaçant, on obtient $2^{x-2} \times (3^2-8) = 1+3$ donc $2^{x-2} = 4$, d'où $x-2 = 2$, et alors $x = 4$. On vérifie : $2^{2x+1}+2^x+1 = 512+16+1 = 529 = 23^2$, donc $(4, 23)$ est solution.

Finalement, il y a exactement deux solutions, $(x, y) = (0, 2)$ et $(x, y) = (4, 23)$.

3 Deuxième partie : Géométrie & Combinatoire

1 Double comptage 1 (Raphael)

Exercices Double-Comptage

Pour des exercices de double comptage la question qu'il faut se poser est d'abord *: «Que faut-il compter ?»*

Exercice 1
À Valbonne, n problèmes ont été accrochés sur un mur. Chacun des m stagiaires a résolu au moins $\frac{n}{2}$ problèmes. Montrer qu'il existe un problème qui a été résolu par au moins $\frac{m}{2}$ stagiaires.

Solution de l'exercice 1
On compte P=le nombre total de problème résolus par les stagiaires : Il y en a au moins

$$P \geqslant m \times \frac{n}{2} = \frac{nm}{2}.$$

Si on suppose par l'absurde qu'aucun n'exercice n'a été résolu par $\frac{m}{2}$ stagiaire on a

$$P < n \times \frac{m}{2} = \frac{nm}{2}.$$

Absurde.

Exercice 2
Dans une école, chaque club compte 3 membres et chaque élève est membre de 3 clubs. Montrer qu'il y a autant de clubs que d'élèves.

Solution de l'exercice 2
On compte N= le nombre total d'inscriptions à un club. Avec C le nombre de clubs et E le nombre d'élèves on a

$$N = 3C \quad \text{et} \quad N = 3E.$$

Donc $C = E$.

Exercice 3
Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et qu'un élève a toujours exactement ℓ professeur. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ.

Solution de l'exercice 3
On note I le nombres de relation élèves-professeurs alors

$$I = n \times \ell \quad \text{et} \quad I = m \times k$$

et donc $n \times \ell = m \times k$.

Exercice 4
Comptons les triplets (x, y, z) de $\{1, 2, \cdots, n+1\}$ qui vérifient $z > \max\{x, y\}$.

Solution de l'exercice 4
On compte T le nombre de triplet. Pour chaque $z \in \{1, 2, \cdots, n+1\}$ il y a $(z-1)^2$ couples (x, y) satisfaisant $x, y < z$. Donc

$$T = \sum_{z=1}^{n+1} (z-1)^2 = 1 + 2^2 + \cdots + n^2.$$

On compte T d'une autre manière. Il y a

— $\binom{n+1}{2}$ triplets tels que $x = y < z$,

— $\binom{n+1}{3}$ triplets qui correspondent à $x < y < z$,

— $\binom{n+1}{3}$ triplets qui correspondent à $y < x < z$,

On en déduit que

$$T = 2\binom{n+1}{3} + \binom{n+1}{2} = \frac{(n+1)n(n-1)}{3} + \frac{(n+1)n}{2} = \frac{(n+1)n(2n+1)}{6}$$

et on en déduit la formule bien connue

$$1 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}.$$

Exercice 5
Prouver ces égalités sans utiliser la formule $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$.

$$\binom{n}{s} = \frac{n}{s}\binom{n-1}{s-1}, \qquad \binom{n}{r}\binom{r}{k} = \binom{n}{k}\binom{n-k}{r-k},$$

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i}\binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}, \qquad \binom{n}{s} = \frac{n}{n-s}\binom{n-1}{s},$$

$$\sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i} = \sum_{i=0}^{\lfloor n/2 \rfloor} \binom{n}{2i+1}, \qquad \sum_{i=0}^{r} \binom{n+i}{i} = \binom{n+r+1}{r}$$

Solution de l'exercice 5
La bonne question ici est toujours : *«Que faut-il compter ?»*.

Parmi n billes (allignés) il y a $s-1$ billes bleues et une bille rouge soit au total s billes de couleurs. Combien y a t-il de configurations possibles (que l'on note C_1) ? Première de méthode

1. Choisir la bille rouge : n choix possibles
2. Choisir les $s-1$ billes bleues parmi les $n-1$ billes restantes : $\binom{n-1}{s-1}$ choix possibles.

Donc $C_1 = n \times \binom{n-1}{s-1}$. On compte maintenant d'une autre manière :

1. Choisir les s billes de couleurs : $\binom{n-1}{s-1}$ choix possibles
2. Parmi ces s billes choisir la bille rouge : s choix possibles.

Donc $C_1 = s \times \binom{n}{s}$. Conclusion

$$s \times \binom{n}{s} = n \times \binom{n-1}{s-1}.$$

Parmi n billes (allignés) il y a k billes bleues et $r-k$ bille rouges soit au total r billes de couleurs. On note C_2 le nombre de configurations possibles. Comptons d'un première manière

1. Choisir les billes bleues : $\binom{n}{k}$ choix possibles
2. Choisir les $r-k$ billes rouges parmi les $n-k$ billes restantes : $\binom{n-k}{r-k}$ choix possibles.

Donc $C_2 = \binom{n}{k} \times \binom{n-k}{r-k}$. Et maintenant d'une autre manière :

1. Choisir les r billes de couleurs : $\binom{n}{r}$ choix possibles
2. Parmi ces r billes choisir les k billes bleues : $\binom{r}{k}$ choix possibles.

Donc $C_2 = \binom{n}{r} \times \binom{r}{k}$. Conclusion

$$\binom{n}{k} \times \binom{n-k}{r-k} = \binom{n}{r} \times \binom{r}{k}.$$

On choisi n entiers parmi $\{1, \cdots, 2n\}$ et on compte le nombre d'entiers choisies dans la première moitié $\{1, \cdots, n\}$ que l'on note i. Sous cette condition dans la première moitié il y a donc $\binom{n}{i}$ configurations possibles. Dans la deuxième moitié il reste $n-i$ entiers ce qui donne $\binom{n}{n-i}$ configurations possibles donc au total $\binom{n}{i} \times \binom{n}{n-i}$. Lorsque i prends toutes les valeurs de 0 à n on obtient toutes les manières possibles de choisir n entiers dans $\{1, \cdots, 2n\}$. Conclusion

$$\sum_{i=0}^{n} \binom{n}{i} \binom{n}{n-i} = \binom{2n}{n}.$$

Parmi n billes (allignés) il y a s billes bleues et une bille rouge. Première de méthode

1. Choisir la bille rouge : n choix possibles
2. Choisir les s billes bleues parmi les $n-1$ billes restantes : $\binom{n-1}{s}$ choix possibles.

Donc $C_4 = n \times \binom{n-1}{s}$. Deuxième méthode :

1. Choisir les s billes bleue : $\binom{n}{s}$ choix possibles
2. Parmi les $n-s$ billes restantes choisir la bille rouge : $n-s$ choix possibles.

Donc $C_4 = (n-s) \times \binom{n}{s}$. Conclusion

$$n \times \binom{n-1}{s} = (n-s) \times \binom{n}{s}.$$

On cherche à calculer I_n le nombre de manière de choisir un nombre impair d'éléments parmi $\{1, \cdots, n\}$ et on note également P_n le nombre de manière de choisir un nombre pair d'éléments parmi $\{1, \cdots, n\}$. Pour calculer I_n on considère le premier élément $\{1\}$. Si $\{1\}$ est choisi, il reste à choisir un nombre pair d'éléments parmi $\{2, \cdots, n\}$ soit P_{n-1} possibilités. Si $\{1\}$ n'est pas choisi il reste à choisir un nombre impair d'éléments parmi $\{2, \cdots, n\}$ soit I_{n-1} possibilités. Conclusion

$$I_n = P_{n-1} + I_{n-1} = 2^{n-1}$$

car $I_{n-1} + P_{n-1}$ donne toutes les manière possibles de choisir un sous ensemble de $\{1, \cdots, n-1\}$.

Parmi $n+r+1$ billes il y a r billes bleues et $n+1$ billes noires. On note k la position de la première bille noire. Sous cette condition les $k-1$ premières billes sont bleues et il reste $r-k+1$ billes bleues à choisir parmi les $(n+r+1)-k$ billes restantes, il y a donc $\binom{n+r+1-k}{r-k+1}$ configurations possibles. On a alors que

$$\binom{n+r+1}{r} = \sum_{k=1}^{r+1} \binom{n+r+1-k}{r-k+1} = \binom{n+r}{r} + \binom{n+r-1}{r-1} + \cdots + \binom{n+1}{1} + \binom{n}{0}$$

Exercice 6

Calculer $S_n = \sum_{k=1}^{n} k^2 \binom{n}{k}$.

Solution de l'exercice 6

On commence par calculer

$$A_n = \sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k}$$

Parmi n billes il y a une bille rouge et un nombre quelconque de billes bleues. Première méthode :

1. On choisi k billes de couleurs : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
2. On choisi la bille rouge parmi ces k billes : k choix possibles.

Au total en parcourant tous les k possibles on a obtient bien A_n. Deuxième méthode

1. On choisi la bille rouge : n choix possibles.
2. On choisi des billes bleues parmi les $n-1$ billes restantes : 2^{n-1} choix possibles.

Et donc $A_n = n2^{n-1}$. Conclusion

$$\sum_{k=1}^{n} k \binom{n}{k} = n2^{n-1}$$

On calcul maintenant $B_n = \sum_{k=1}^{n} k(k-1)\binom{n}{k}$. Parmi n billes il y a une bille rouge, une bille verte et un nombre quelconque de billes bleues. Première méthode :

1. On choisi k billes de couleurs : $\binom{n}{k}$ choix possibles.
2. On choisi la bille rouge parmi ces k billes : k choix possibles.
3. On choisi la bille verte parmi ces $k-1$ billes restante : $k-1$ choix possibles.

Et on obtient B_n en considérant les différant k possibles. Deuxième méthode

1. On choisi la bille rouge : n choix possibles.
2. On choisi la bille verte : $n-1$ choix possibles
3. On choisi des billes bleues parmi les $n-2$ billes restantes : 2^{n-2} choix possibles.

Donc $B_n = n(n-1)2^{n-2}$. Conclusion

$$\begin{aligned} S_n &= \sum_{k=1}^{n} (k(k-1)+k)\binom{n}{k} \\ &= B_n + A_n \\ &= n2^{n-1} + n(n-1)2^{n-2} \\ &= n(n+1)2^{n-2} \end{aligned}$$

Exercice 7
Combien de façon peut-on sélectionner deux sous-ensembles disjoints d'un ensemble à n éléments.

Solution de l'exercice 7
On note A et B les deux ensembles disjoints. Pour chaque élément, il peut appartenir soit à A soit à B soit à ni A ni B. On a alors 3^n configurations possibles.

Exercice 8
Existe-t-il un polyèdre comportant un nombre impair de faces chacune ayant un nombre impair d'arètes ?

Solution de l'exercice 8
On fait la somme du nombre d'arêtes de toutes les faces du polyèdres. On obtient alors un nombre impair. Or toutes les arêtes ont été compté deux fois. Ce nombre est donc égale à 2 fois le nombre d'arêtes du polydres qui est donc un nombre pair. Absurde.

Exercice 9

1. Est-il possible de numéroter les arêtes d'un cube par les valeurs $1, 2, \cdots, 12$ de sorte que les étiquettes des arêtes partant de chaque sommet aient la même somme ?

2. On remplace l'une des étiquettes par 13. Même question.

Solution de l'exercice 9

1. On note S la somme sur chaque sommet. La somme totale sur tous les sommet donne alors $8S$. Chaque arête est connectée à deux sommets donc chacune des étiquettes apparait deux fois dans cette somme totale. On a donc

$$8S = 2 \times (1 + 2 + \cdots + 12) = 132.$$

   Donc $2S = 33$ absurde. Il n'y a donc pas de solution possible
2. Si on remplace la i-ème étiquette par 13 l'égalité du dessus devient

$$8S = 2 \times (1 + 2 + \cdots + 12 - i + 13) = 158 - 2i$$

   et donc $4S = 79 - i$. Les seuls i possibles sont alors 3, 7 et 11. Il se trouve qu'on peut contruire explicitement des solution dans ces cas là.

Exercice 10
Dans une école, il y a m professeurs et n élèves. On suppose que chaque professeur a exactement k élèves, et que *deux élèves* ont toujours exactement ℓ professeurs *en commun*. Déterminer une relation entre m, n, k, ℓ.

Solution de l'exercice 10
On compte T =le nombre de triplet élève-élève-professeurs dont le professeur est commun au deux élèves.

Méthode 1 : Chaque professeur a $\binom{k}{2}$ binomes d'élèves dans sa classe et donc

$$T = m \times \binom{k}{2}.$$

Méthode 2, il y a $\binom{n}{2}$ pairs d'élèves possibles et alors

$$T = \binom{n}{2} \times \ell$$

On obtient alors comme relation

$$n(n-1)\ell = mk(k-1).$$

2 Puissance d'un point (Benoît & Martin)

Dans ce cours, on présente la notion de puissance d'un point, que l'on peut retrouver dans le premier cours de géométrie du groupe C du polycopié du stage de Montpellier 2014. On a ensuite traité les exercices suivants :

Exercices

Exercice 1
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. Soit X un point de (PQ). Une droite d_1 passant par X coupe Γ_1 en A et B et une droite d_2 passant par X coupe Γ_2 en C et D.
Montrer que $ABCD$ est cyclique.

Exercice 2 (inspiré du P1 de Chine 2007)
Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H. On note E et F les pieds des hauteurs issues de B et C. On note J le milieu de $[HB]$ et K le milieu de $[HC]$.
Montrer que $JKEF$ est cyclique.

Exercice 3
(Envoi Géométrie 2022-2023 P4) Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P autre que D et ω_2 en le point Q autre que B. Montrer que $BQ = DP$.

Exercice 4
(JBMO SL 2015 G2) Soit k un cercle et soit P un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cerlce k passant par le point P touchent le cercle k en les points A et B. Soit M le milieu du segment $[BP]$. Soit C le second point d'intersection de la droite (AM) avec le cercle k. Soit D le second point d'intersection de la droite (PC) avec le cercle k. Montrer que les droites (AD) et (BP) sont parallèles.

Exercice 5
Soit ABC un triangle. On note D, E et F les pieds des hauteurs issus de A, B et C. Le cercle de diamètre $[AC]$ coupe (BE) en K et L. Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe (CF) en M et N.
Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Exercice 6
(Belarus MO 2019) Soit ABC un triangle et M le milieu du segment $[BC]$. Soit B_1 le second point d'intersection de (ABM) avec (AC) et C_1 le second poitn d'intersection de (ACM) avec (AB). Soit O le centre de (AB_1C_1). Montrer que $OB = OC$.

Exercice 7
(Envoi Géométrie 2021/2022 P13) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On suppose que les points A, B, C et D sont cocycliques et on note Ω leur cercle circonscrit. Soit ω un cercle qui passe par les points C et D. Soient A_1 et B_1 les points d'intersection, autres que C, du cercle ω avec les droites (CA) et (CB) respectivement. Soit A_2 le symétrique du point A_1 par rapport au milieu du segment $[CA]$. Soit B_2 le symétrique du point B_1 par rapport au milieu du segment $[CB]$. Montrer que les points A, B, A_2 et B_2 sont cocycliques.

Exercice 8
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit H l'orthocentre de ABC. La parallèle à (AB) passant par H coupe (BC) en P et (AD) en Q. La parallèle à (BC) passant pas H coupe (AB) en R et (CD) en

S.
Montrer que S, P, Q et R sont cocycliques.

Exercice 9
(Iran MO 2015 Round 3) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Soit E un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite (BE) passant par C coupe la droite (BD) en F. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BED appartient à la droite (AC).

Exercice 10
Soit ABC un triangle, P un point à l'intérieur du triangle tel que $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Soit Q tel que $PBQC$ est un parallélogramme. Montrer que $\widehat{CAQ} = \widehat{PAB}$.

Exercice 11
(Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

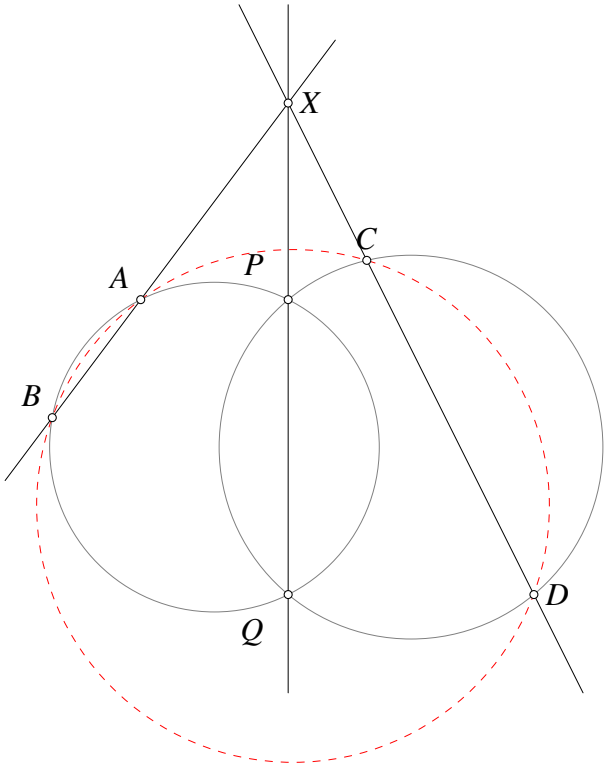
Exercice 12
(Baltic Way 2022 P12) Soit ABC un triangle acutangle et D, E et F les pieds de ses hauteurs. Soit Q un point du segment $[AD]$. Le cercle (QED) recoupe (BC) en X et le cercle (QFD) recoupe (BC) en Y. Montrer que $BX = CY$.

Exercice 13
(JBMO 2005) Soit ABC un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit k son cercle circonscrit. Soit P la point d'intersection de la tangente au cercle k en A et de la droite (BC). Soit M le milieu du segment $[PA]$ soit R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle k. La droite (PR) recoupe le cercle k en un point S. Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Solutions

Exercice 1
Soit Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. Soit X un point de (PQ). Une droite d_1 passant par X coupe Γ_1 en A et B et une droite d_2 passant par X coupe Γ_2 en C et D.
Montrer que $ABCD$ est cyclique.

Solution de l'exercice 1



Le point X est point d'intersection des droites (AB) et (CD) et central dans la construction. On peut donc essayer d'avoir $XA \cdot XB = XC \cdot XD$ cela montrera que $ABCD$ est cyclique. Utilisons pour cela la puissance du point X pour les deux cercles :

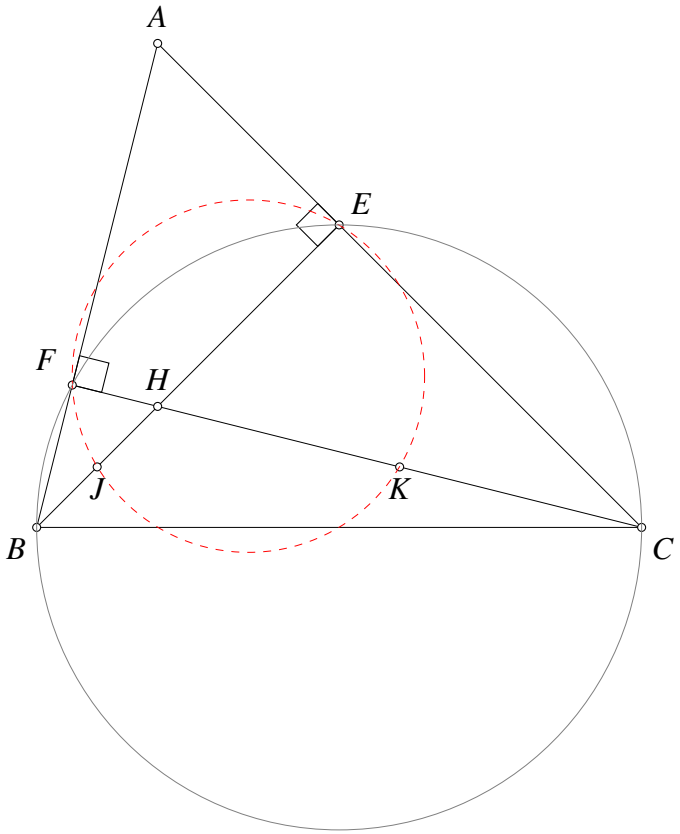
— La puissance donne pour Γ_1 : $XA \cdot XB = XP \cdot XQ$

— La puissance donne pour Γ_2 : $XC \cdot XD = XP \cdot XQ$

Ainsi, on obtient $XA \cdot XB = XC \cdot XD$ ce qui conclut.

Exercice 2 (inspiré du P1 de Chine 2007)
Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H. On note E et F les pieds des hauteurs issues de B et C. On note J le milieu de $[HB]$ et K le milieu de $[HC]$.
Montrer que $JKEF$ est cyclique.

Solution de l'exercice 2



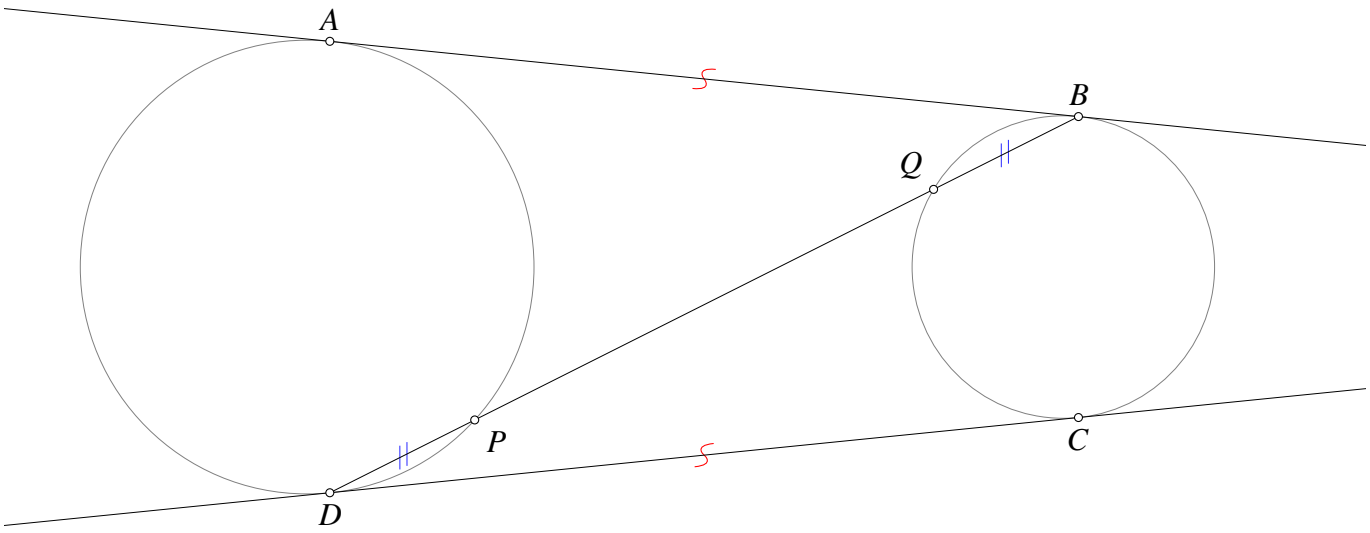
On a une situation assez classique avec l'orthocentre et les pieds de hauteurs. En particulier, F, E, C et B sont cocycliques. Ainsi la puissance du point H donne pour ce cercle :

$$HF \cdot HC = HE \cdot HB$$

Comme $HB = 2 \cdot HJ$ et $HC = 2 \cdot HK$, on a $HF \cdot HK = HE \cdot HJ$ ainsi, F, E, J et K sont cocycliques.

Exercice 3
(Envoi Géométrie 2022-2023 P4) Soient ω_1 et ω_2 deux cercles disjoints. Une tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en A et ω_2 en B. La deuxième tangente commune extérieure à ces deux cercles coupe ω_1 en D et ω_2 en C. La droite (BD) coupe ω_1 en le point P autre que D et ω_2 en le point Q autre que B. Montrer que $BQ = DP$.

Solution de l'exercice 3



Une symétrie axiale par rapport à la droite joignant les centres des deux cercles échange A et D ainsi que B et C. Donc, $AB = DC$. On pense alors à appliquer la puissance d'un point, on a alors :

$$DQ \cdot DB = DC^2 = AB^2 = BP \cdot BD,$$

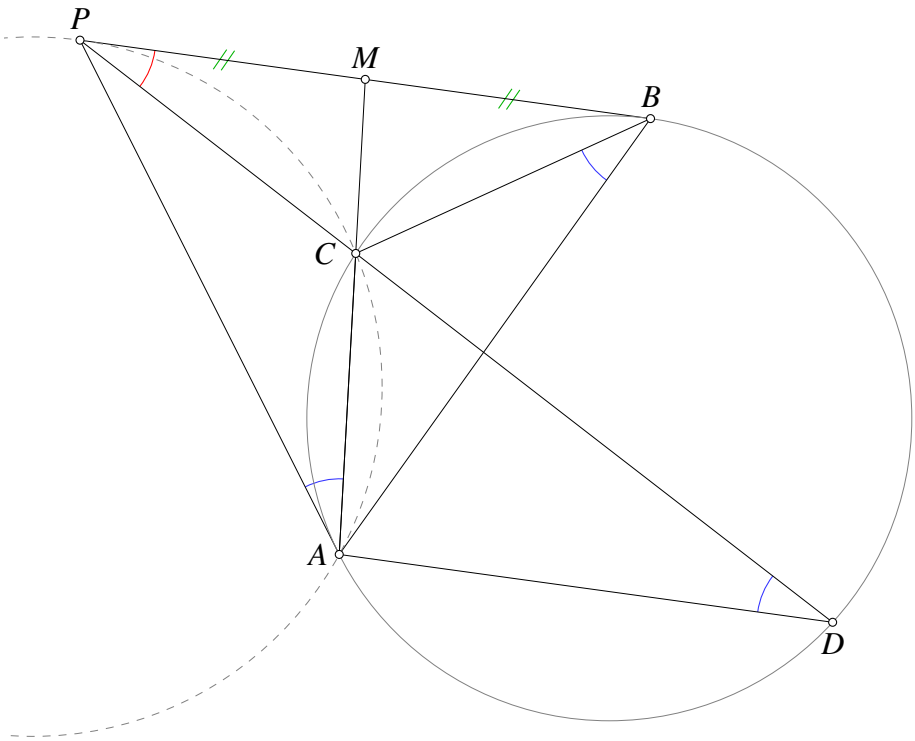
où la première égalité vient de la puissance du point depuis D par rapport à ω_2 et la troisième égalité vient de la puissance du point depuis B par rapport au cercle ω_1. On peut réécrire cette identité de la manière suivante :

$$(BP - DQ)BD = 0.$$

Cela implique que $BP = DQ$ et donc que $DP = BQ$, d'où la conclusion.

Exercice 4
(JBMO SL 2015 G2) Soit k un cercle et soit P un point à l'extérieur du cercle. Les tangentes au cerlce k passant par le point P touchent le cercle k en les points A et B. Soit M le milieu du segment $[BP]$. Soit C le second point d'intersection de la droite (AM) avec le cercle k. Soit D le second point d'intersection de la droite (PC) avec le cercle k. Montrer que les droites (AD) et (BP) sont parallèles.

Solution de l'exercice 4



On commence par effectuer un chasse aux angles, avec pour objectif de montrer que $\widehat{PDA} = \widehat{CPB}$. On a

$$\widehat{PDA} = \widehat{CDA} = \widehat{CBA} = \widehat{CAP}$$

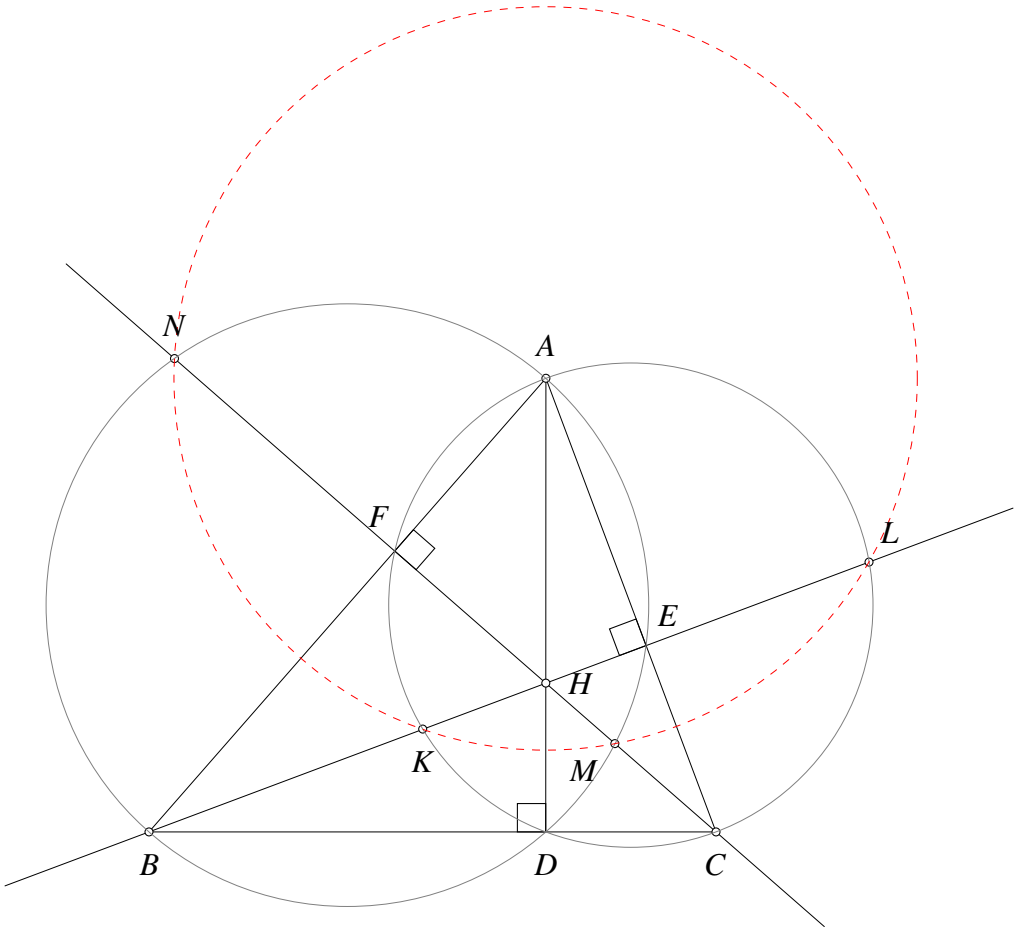
en utilisant successivement le théorème de l'angl inscrit puis le théorème de l'angle tangentiel. Autrement dit, il suffit de montrer que $\widehat{CAP} = \widehat{CPB}$, c'est-à-dire de montrer que la droite (PB) est tangente au cercle circonscrit au triangle PDA. Or par puissance d'un point, en utilisant que $PM = MB$:

$$MP^2 = MB^2 = MD \cdot MA$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 5
Soit ABC un triangle. On note D, E et F les pieds des hauteurs issus de A, B et C. Le cercle de diamètre $[AC]$ coupe (BE) en K et L. Le cercle de diamètre $[AB]$ coupe (CF) en M et N. Montrer que K, L, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 5



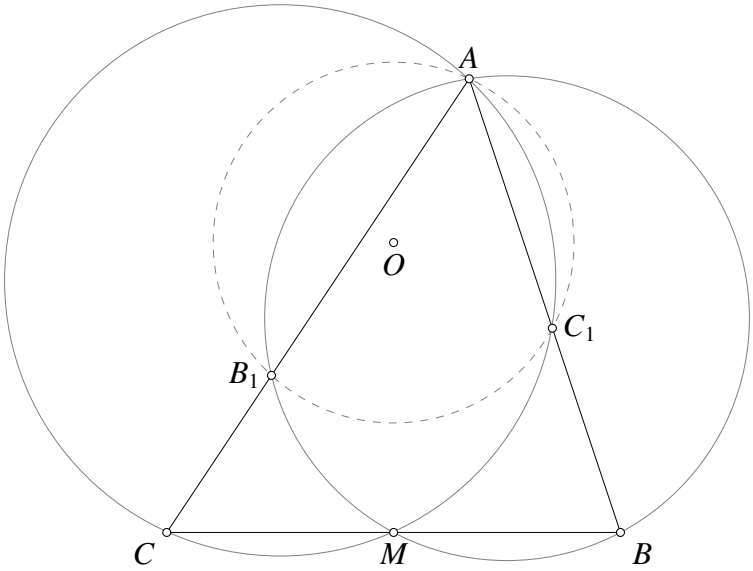
On voit rapidement que D est aussi sur les cercles de diamètre $[AB]$ et $[AC]$. On remarque qu'on est ramené à la situation de l'exo 1 en considérant H l'orthocentre. En effet, par la puissance du point H dans les deux cercles, on a :

$$HK \cdot HL = HA \cdot HD = HM \cdot HN$$

D'où N, K, M, L cyclique.

Exercice 6
(Belarus MO 2019) Soit ABC un triangle et M le milieu du segment $[BC]$. Soit B_1 le second point d'intersection de (ABM) avec (AC) et C_1 le second poitn d'intersection de (ACM) avec (AB). Soit O le centre de (AB_1C_1). Montrer que $OB = OC$.

Solution de l'exercice 6



Par puissance du point B par rapport au cercle (ACM), on a

$$BA \times BC_1 = BM \times BC.$$

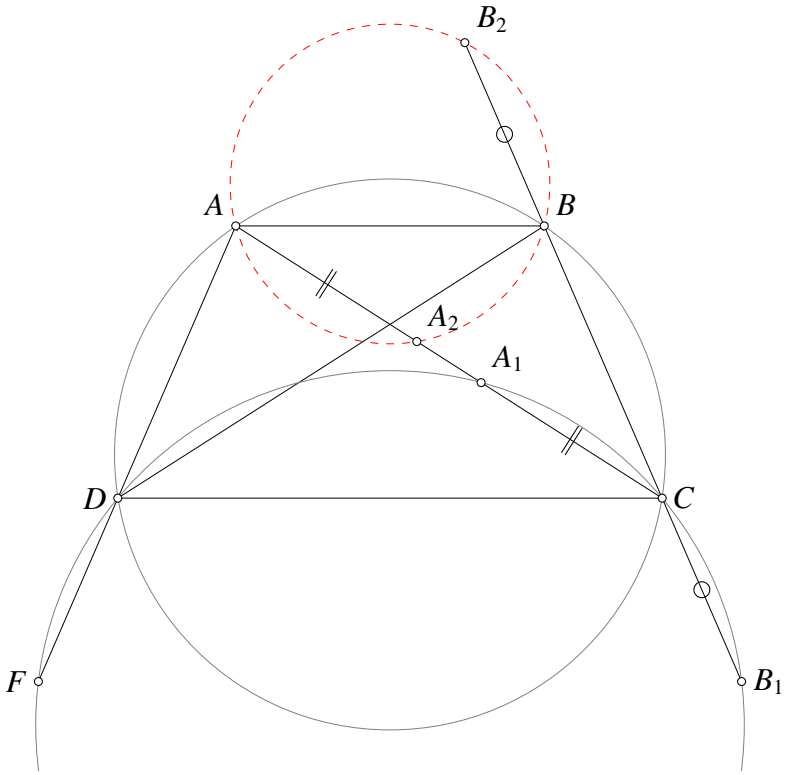
De même, par puissance du point C par rapport au cercle (ABM), on trouve

$$CA \times CB_1 = CM \times BC.$$

Puisque M est le milieu de $[BC]$, on obtient que $BA \times BC_1 = CA \times CB_1$, ce qui signifie que les points B et C ont la même puissance par rapport au cercle (AB_1C_1). Comme cette puissance correspond au carré de leur distance au centre moins le carré du rayon du cercle, les deux points ont même distance au centre O.

Exercice 7
(Envoi Géométrie 2021/2022 P13) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. On suppose que les points A, B, C et D sont cocycliques et on note Ω leur cercle circonscrit. Soit ω un cercle qui passe par les points C et D. Soient A_1 et B_1 les points d'intersection, autres que C, du cercle ω avec les droites (CA) et (CB) respectivement. Soit A_2 le symétrique du point A_1 par rapport au milieu du segment $[CA]$. Soit B_2 le symétrique du point B_1 par rapport au milieu du segment $[CB]$. Montrer que les points A, B, A_2 et B_2 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 7



Faisons appel à la puissance d'un point. L'exercice est résolu si on montre que

$$CB \cdot CB_2 = CA_2 \cdot CA.$$

Par symétrie, on a

$$CB \cdot CB_2 = BC \cdot BB_1$$

et

$$CA_2 \cdot CA = AC \cdot AA_1.$$

Puis, en notant F le point d'intersection de (AD) et ω

$$AC \cdot AA_1 = AD \cdot AF.$$

Or, puisque le trapèze $ABCD$ est cyclique, il est isocèle.

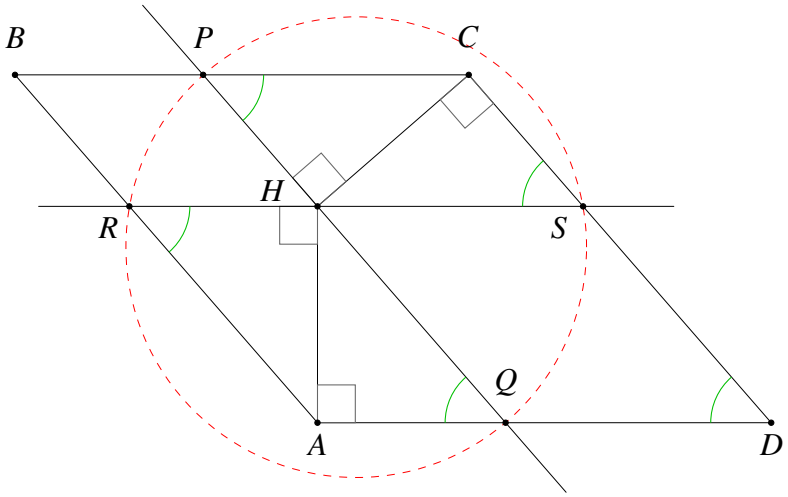
Donc, par symétrie axiale de la figure, $AD = BC$ et $AF = BB_1$. Par conséquent,

$$CB \cdot CB_2 = CA_2 \cdot CA,$$

comme désiré.

Exercice 8 (Stage Valbonne 2018)
Soit $ABCD$ un parallélogramme. Soit H l'orthocentre de ABC. La parallèle à (AB) passant par H coupe (BC) en P et (AD) en Q. La parallèle à (BC) passant pas H coupe (AB) en R et (CD) en S.
Montrer que S, P, Q et R sont cocycliques.

Solution de l'exercice 8



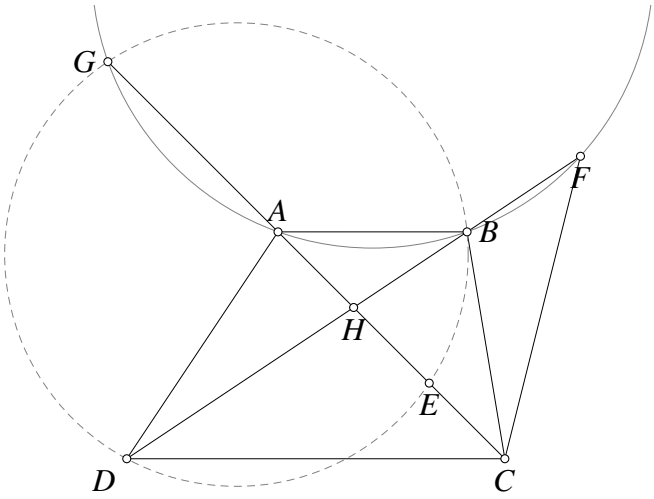
Avec les droites parallèles qu'on a, les triangles HAQ, HAR, HPC et HCS sont semblables. Donc on a :

$$\begin{aligned}\frac{HQ}{HR} &= \frac{HQ}{HA}\cdot\frac{HA}{HR}\\ &= \frac{HS}{HC}\cdot\frac{HC}{HP}\\ &= \frac{HS}{HP}\end{aligned}$$

Ce qui fait $HQ \cdot HP = HS \cdot HR$ et donc P, Q, R et S sont cocycliques.

Exercice 9
(Iran MO 2015 Round 3) Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel les droites (AB) et (CD) sont parallèles. Soit E un point appartenant au segment $[AC]$. La parallèle à la droite (BE) passant par C coupe la droite (BD) en F. Montrer que le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABF et BED appartient à la droite (AC).

Solution de l'exercice 9



La présence de nombreuses droites parallèes nous encourage à essyaer une chasse aux rapports et donc à utiliser la puissance d'un point.

Soit G le second point d'intersection de la droite (AC) avec le cercle circonscrit au triangle ABF. Plutôt que de montrer que deux cercles se coupent sur la droite (AC), nous aloons montrer que le point G appartient au cercle circonscrit au triangle BED.

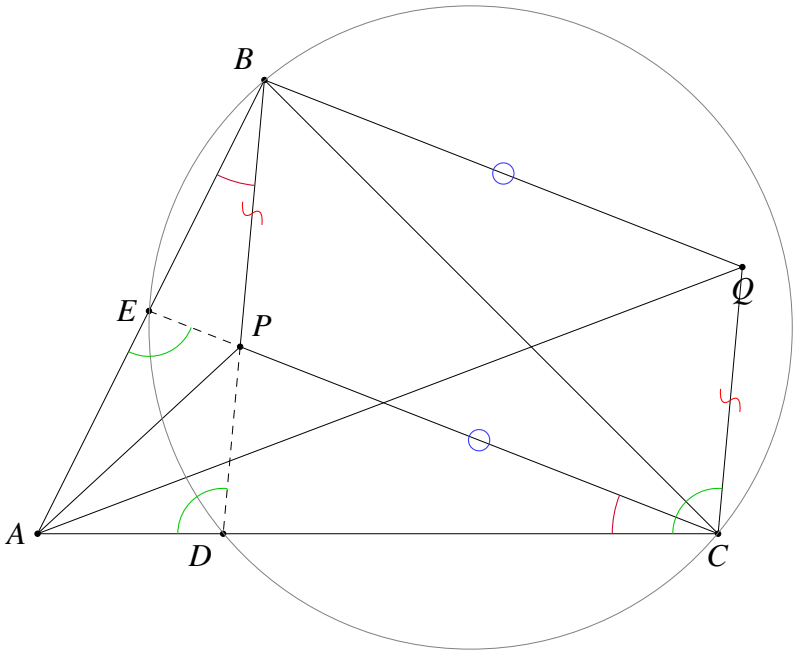
Soit H le point d'intersection des droites (AC) et (BD). D'après la puissance du point H par rapport au cercle circonscrit au triangle ABF, $HG \cdot HA = HB \cdot HF$. De plus le fait que les droites (BE) et (CF) soient parallèles se traduit, d'après le théorème de Thalès, par $HE \cdot HF = HB \cdot HC$. N'oublions par que les droites (AB) et (CD) sont parallèles, donc par le théorème de Thalès, on sait aussi que $\frac{HC}{HA} = \frac{HD}{HB}$. Nous avons désormais tous les outils pour démontrer que $HG \cdot HE = HB \cdot HD$:

$$HG \cdot HE = \frac{HB \cdot HF \cdot HE}{HA} = HB \cdot HB \cdot \frac{HC}{HA} = HB^2 \cdot \frac{HD}{HB} = HD \cdot HB$$

ce qui signifie, par la réciproque de la puissance d'un point, que les points G, B, E et F sont cocycliques.

Exercice 10
Soit ABC un triangle, P un point à l'intérieur du triangle tel que $\widehat{PBA} = \widehat{PCA}$. Soit Q tel que $PBQC$ est un parallélogramme. Montrer que $\widehat{CAQ} = \widehat{PAB}$.

Solution de l'exercice 10



Soit D l'intersection de (BP) avec $[AC]$ et E l'intersection de (CP) avec $[AB]$. Le quadrilatère $DCBE$ est cyclique par hypothèse. On a va montrer que PEA et QCA sont des triangles semblables. On a déjà $\widehat{PEA} = 180 - \widehat{PEB} = 180 - \widehat{PDC} = \widehat{PDA}$ par cocyclicité de $DCBE$ et $\widehat{PDA} = \widehat{QCA}$ par parallélisme donc $\widehat{QCA} = \widehat{PEA}$. On note que par cocyclicité de $DCBE$, les triangles PDE et PCB sont semblables et de même les triangles ADE et ABC sont semblables. D'où

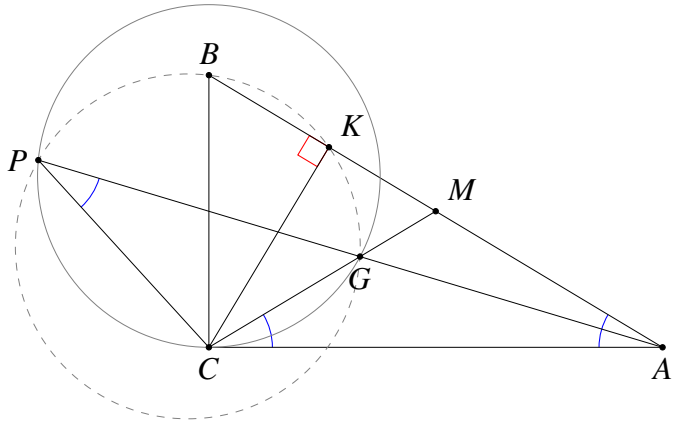
$$\frac{PE}{QC} = \frac{PE}{PB} = \frac{DE}{BC} = \frac{AE}{AC}$$

Donc les triangles PEA et QCA sont semblables d'où $\widehat{CAQ} = \widehat{PAB}$.

Exercice 11

(Canada 2013) Soit ABC un triangle rectangle en C et G son centre de gravité. Soit P le point sur la demi-droite $[AG)$ tel que $\widehat{CPA} = \widehat{BAC}$. Soit Q le point sur la demi-droite $[BG)$ tel que $\widehat{CQB} = \widehat{CBA}$. Montrer que les cercles circonscrits aux triangle AQG et BPG se coupent une deuxième fois en un point du segment $[AB]$.

Solution de l'exercice 11



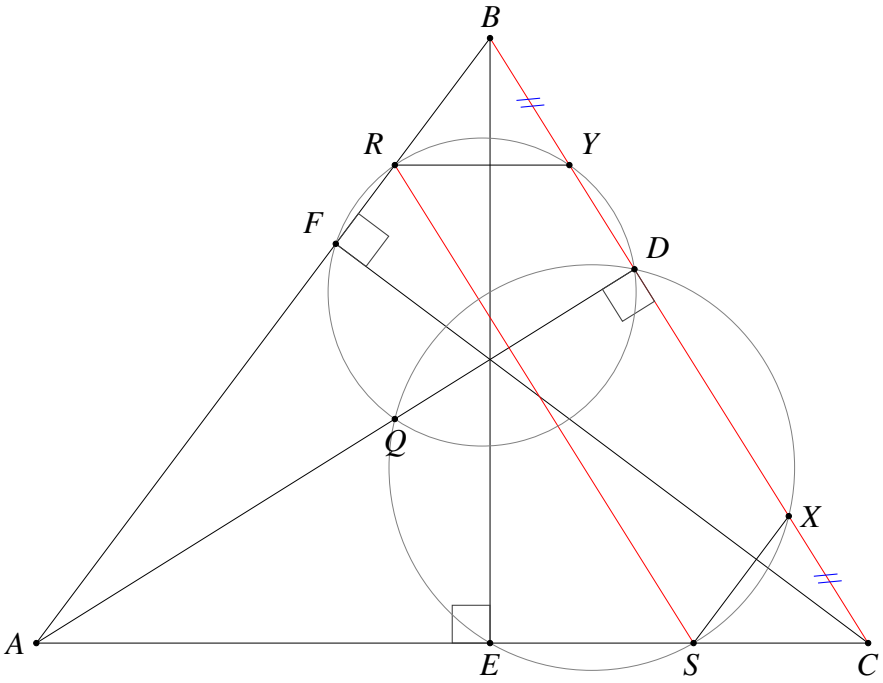
Commençons par tracer la figure et tracer de façon exacte le point P. Pour cela, on cherche un angle plus commode qui vaut $\widehat{BAC}$ pour appliquer le théorème de l'angle inscrit. La médiane (CG) étant déjà présente sur la figure, on la prolong pour qu'elle coupe le segment $[AB]$ au poin M et comme le triangle ABC est rectangle en C, $\widehat{BAC} = \widehat{MCA}$. La droite (AC) est donc tangente au cercle circonscrit au triangle PCG. On peut tracer le cercle tangent à la droite (AC) passant par G, donc on peut tracer le point P.

Une fois la figure tracée, on peut conjecturer que le point K d'intersection des deux cercles est le pied de la hauteur issue du sommet C dans le triangle ABC. On note K le pied de la hauteur et on montre que K appartient au cercle circonscrit au triangle BPG.

Utilisons les informations que nous a apportées notre construction : d'après la puissance du point A par rapport au cercle (PCG), $AC^2 = AG \cdot AP$ et on sait que $AC^2 = AK \cdot AB$. On a donc $AB \cdot AK = AG \cdot AP$ et l'on peut conclure avec la réciproque de la puissance d'un point.

Exercice 12
(Baltic Way 2022 P12) Soit ABC un triangle acutangle et D, E et F les pieds de ses hauteurs. Soit Q un point du segment $[AD]$. Le cercle (QED) recoupe (BC) en X et le cercle (QFD) recoupe (BC) en Y. Montrer que $BX = CY$.

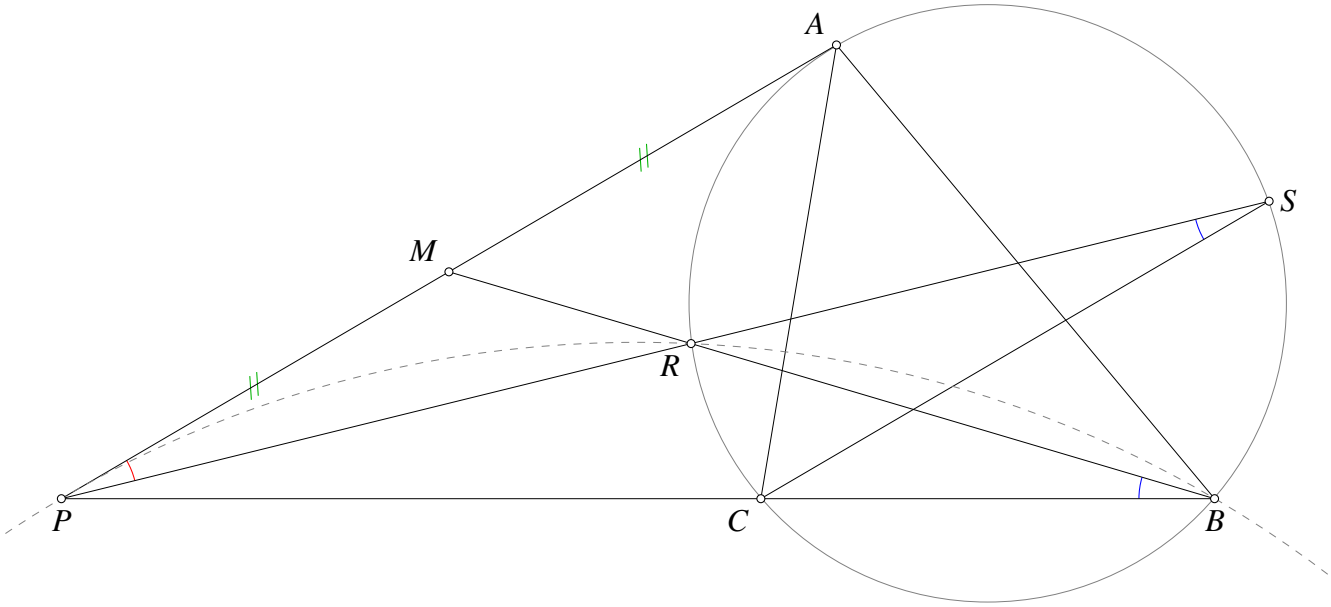
Solution de l'exercice 12



On note R l'intersection entre (QFD) et (BA) et S l'intersection entre (QDE) et (AC).
Par la puissance du point par rapport à A : $AF \cdot AR = AQ \cdot AD = AE \cdot AS$. Donc $FRES$ est cocyclique. Comme $FRES$ et $FECB$ sont cocycliques donc (RS) et (BC) sont parallèles. De la même façon $RYDF$ et $FDCA$ sont cocycliques donc (RY) et (AC) sont parallèles. Ainsi, $RYCS$ est un parallélogramme. De la même façon, $RBXS$ est un parallélogramme. Ainsi, $BX = RS = YC$ et donc $BY = XC$.

Exercice 13
(JBMO 2005) Soit ABC un triangle aux angles aigus avec $AC < AB$ et soit k son cercle circonscrit. Soit P la point d'intersection de la tangente au cercle k en A et de la droite (BC). Soit M le milieu du segment $[PA]$ soit R le second point d'intersection de la droite (MB) avec le cercle k. La droite (PR) recoupe le cercle k en un point S. Montrer que les droites (CS) et (AP) sont parallèles.

Solution de l'exercice 13



On désire montrer que $\widehat{RSC} = \widehat{RPA}$ pour conclure par angles alternes-internes. Or par angles inscrit, $\widehat{RSC} = \widehat{RSB}$. on veut donc montrer que $\widehat{RPA} = \widehat{RBC} = \widehat{RBP}$, c'est-à-dire que la droite (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle PRB. Mais par puissance d'un point, puisque M est le milieu de $[AP]$ et que (AP) est tangente au cercle circonscrit au triangle ABC :

$$MP^2 = AM^2 = MR \cdot MB$$

ce qui donne le résultat voulu.

3 Pôle Sud (Aline)

Introduction et énoncé du théorème

En géométrie, repérer une configuration remarquable permet de décrocher immédiatement tout un lot de propriétés, sans avoir à les retrouver une par une par chasse aux angles. On peut toujours retrouver celles qui servent à la solution de l'exercice sans faire appel à ces résultats, mais ils permettent de gagner un temps précieux. La configuration du Pôle Sud est un de ces petits théorèmes utiles à retenir. On rappelle d'abord quelques notions.

Définition 1 (Cercle inscrit)**.**
Le **cercle inscrit** à un triangle ABC est le cercle tangent à ses trois côtés par l'intérieur du triangle (voir figure 1). Son centre I est l'intersection des trois bissectrices intérieures.

Définition 2 (Cercle exinscrit)**.**
Le **cercle A-exinscrit** à un triangle ABC est le cercle tangent aux trois côtés du triangle par l'intérieur sur (AB) et (AC) et par l'extérieur sur $[BC]$ (voir figure 1). Son centre I_A est l'intersection de la bissectrice intérieure à $\widehat{BAC}$ et des bissectrices extérieures aux deux autres angles de ABC.

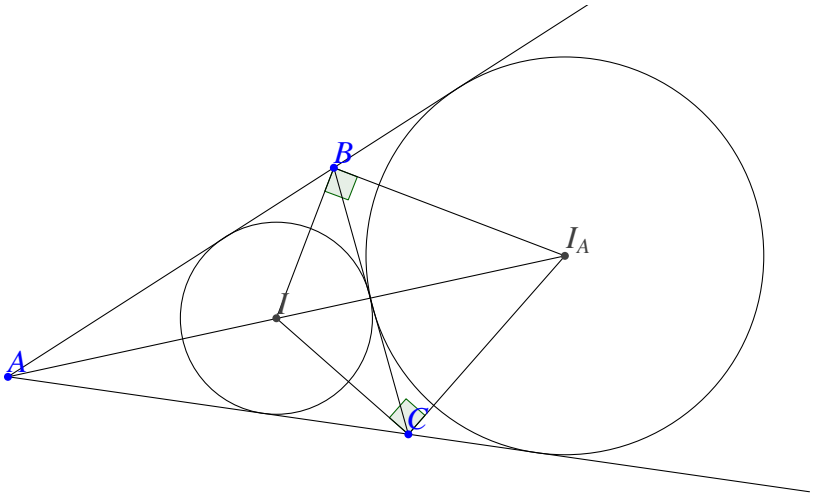


FIGURE 1 – Cercles inscrit et exinscrit

Le théorème s'énonce comme suit :

Théorème 3 (Théorème du Pôle Sud)**.**
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit ω. Soit d la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ et m la médiatrice de $[BC]$. Alors d, m et ω sont concourants en un point S appelé le *Pôle Sud de A* dans le triangle ABC (voir figure 2). Par ailleurs, si I est le centre du cercle inscrit à ABC, alors $SB = SC = SI$.

Remarque 4.

1. Pour le retenir en une phrase : "*la médiatrice et la bissectrice se recoupent sur le cercle circonscrit*".
2. Remarquez que le deuxième point du théorème donne un moyen rapide de construire I : il suffit de tracer une bissectrice et d'un coup de compas.
3. S est le milieu de l'arc BC ne contenant pas A
4. La tangente au Pôle Sud est parallèle à (BC).

Démonstration. Comme annoncé, il s'agit d'une petite chasse aux angles. On pose S la deuxième intersection de d et ω et on va montrer que S est équidistant de B, C et I grâce à des triangles isocèles en S. Pour simplifier les notations, introduisons $\alpha = \widehat{BAC}$, $\beta = \widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{BCA}$. Tout d'abord, par angle inscrit et définition de d :

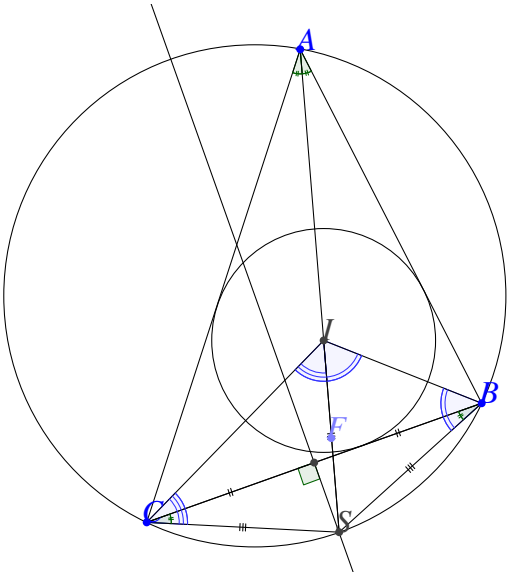


FIGURE 2 – Théorème du Pôle Sud 3

— $\widehat{BCS} = \widehat{BAS} = \alpha/2$
— $\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \alpha/2$

D'où $\widehat{BAS} = \widehat{SAC}$ et SBC isocèle en S, qui est en particulier sur la médiatrice de $[BC]$. Ensuite, on remarque que

$$\widehat{SBI} = \widehat{SBC} + \widehat{CBI} = \alpha/2 + \beta/2$$

et que par ailleurs

$$\widehat{BIS} = 180 - \widehat{AIB} = \widehat{IBA} + \widehat{BAI} = \beta/2 + \alpha/2$$

Donc BIS est aussi isocèle en S et $SI = SB$. En combinant avec $SB = SC$ que l'on sait déjà, $SI = SB = SC$. □

Le Pôle Sud a un analogue qui sert un peu moins en mathématiques olympiques, mais se démontre de façon tout à fait semblable.

Théorème 5 (Théorème du Pôle Nord)**.**
Soit ABC un triangle et ω son cercle circonscrit. On pose d' la bissectrice extérieure issue de A et m la médiatrice de $[BC]$. Alors m, d' et ω sont concourants en un point N appelé *Pôle Nord de A* dans ABC (voir figure 3). Par ailleurs, si I_B (resp I_C) est le cercle B-exinscrit à ABC(resp C-exinscit) alors $NI_C = NB = NC = NI_B$.

Démonstration. Il s'agit d'une chasse aux angles tout à fait analogue à celle de la preuve du théorème 3. □

Quelques résultats complémentaires

Comme le théorème du Pôle Sud ne suffit pas toujours à conclure les exercices du TD, voici quelques résultats classiques utilisés plus bas. Pour un cours avec preuves complètes, nous renvoyons aux cours des stages précédents.

Un résultat utile sur les rapports de longueurs quand on a une bissectrice :

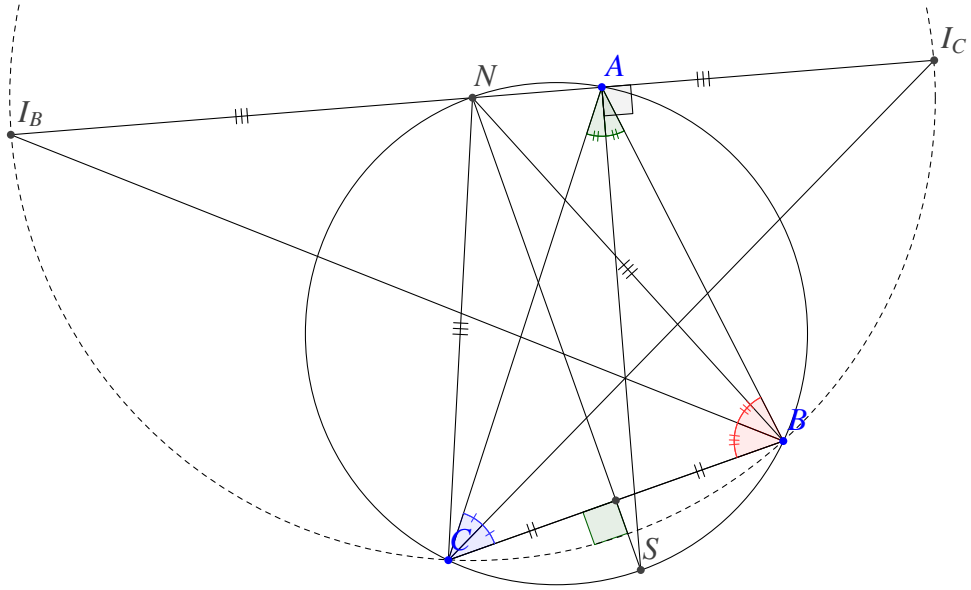


FIGURE 3 – Théorème du Pôle Nord 5

Lemme 6 (Théorème de la bissectrice)**.**
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A (voir figure 4). Alors

$$\frac{BD}{CD} = \frac{AB}{AC}$$

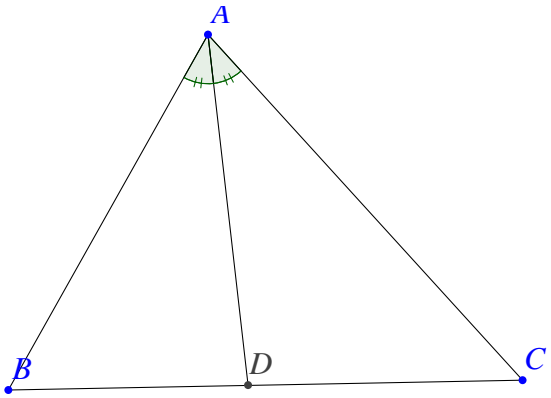


FIGURE 4 – Théorème de la bissectrice 6

Démonstration. Par loi des sinus (voir le cours de 2019). □

Un résultat élégant sur les axes radicaux :

Théorème 7 (Théorème des axes radicaux)**.**
Soit $\omega_1, \omega_2, \omega_3$ trois cercles. Leurs trois axes radicaux (deux à deux) sont soit concourants, soit alignés.

Démonstration. Par puissance d'un point (voir le cours de 2019). □

Et une configuration très utile également (voir un cours sur les transformations géométriques et les similitudes pour un tour plus approfondi du sujet) :

Théorème 8 (Point de Miquel)**.**
Soit A, B, C, D quatre points distincts du plan. Il existe une unique similitude directe qui envoie $[AB] \to [CD]$. Son centre est appelé **point de Miquel** du quadrilatère $ABCD$, car il s'agit du même centre pour la similitude envoyant $[AC] \to [BD]$ (voir figure 5). Le point du Miquel de $ABCD$ est le point d'intersection des cercles circonscrits à ABX, CDX, ACY et BDY, où X (resp Y) est le point d'intersection des droites (AB) et (CD) (resp (AB) et (CD)).

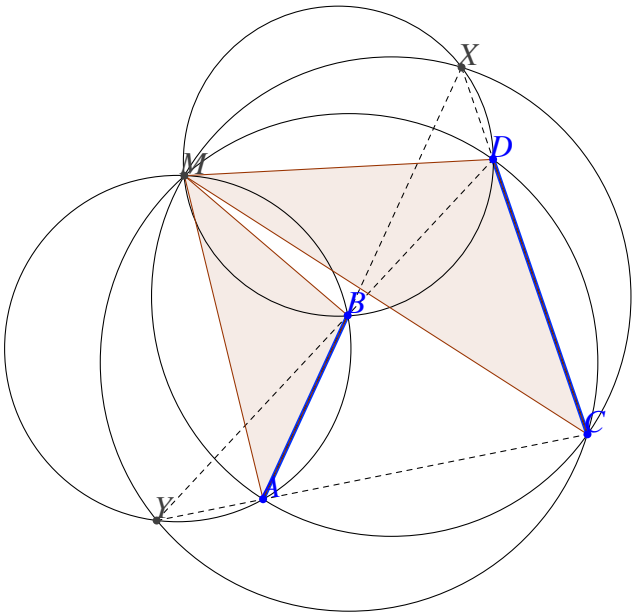


FIGURE 5 – Point de Miquel (théorème 8)

Démonstration. Par chasse aux angles (voir le cours de 2018). □

Exercices

Exercice 1
Soit ABC un triangle, ω son cercle circonscrit et P un point variable sur l'arc $[BC]$ ne contenant pas A. On note I et J les centres des cercles inscrits à PAB et PAC. Montrer que quant P varie, la seconde intersection du cercle circonscrit à PIJ avec ω est fixe.

Solution de l'exercice 1
Soit K et L les milieux respectifs des arcs AB et AC (voir figure 6) : d'après le théorème du Pôle Sud, P, I et K sont alignés de même que P, J et L. De plus, $KA = KB = KI$ et $LA = LC = LJ$. D'après la construction du centre d'une similitude, le second point qui nous intéresse, noté Q, est le centre de la similitude directe qui envoie K sur L et I sur J. Il suffit donc de montrer que la similitude qui envoie K sur L et I sur J est toujours la même. Or l'angle de la similitude est l'angle entre les deux droites (IK) et (JL), qui vaut $180 - \widehat{KPL} = \widehat{KAL}$; qui est fixe. De plus,

le rapport vaut $\frac{JL}{IK} = \frac{AL}{AK}$, fixe aussi. Comme il n'existe qu'une similitude de rapport et d'angle fixé qui envoie K sur L, la similitude qui nous intéresse est toujours la même. En particulier, son centre est fixe.

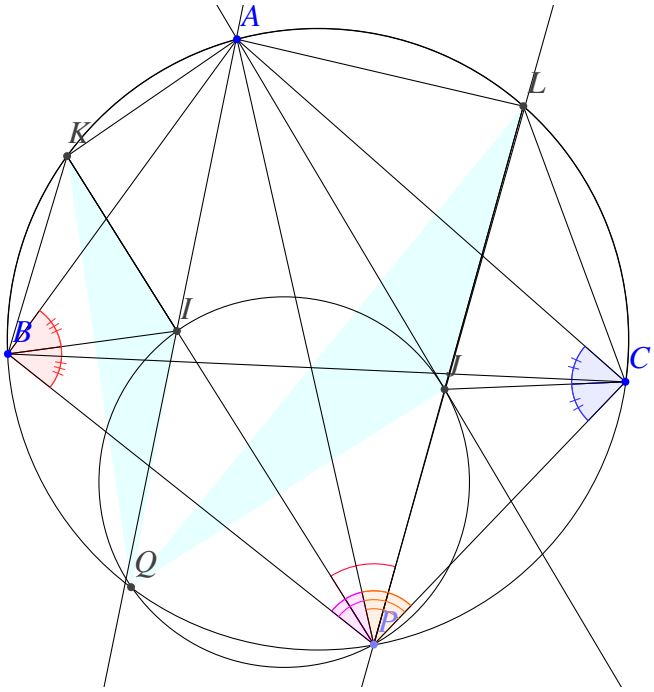


FIGURE 6 – Solution pour l'exercice 1

Exercice 2 (Inspiré du P1 IMO 2006)
Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit P un point à l'intérieur du triangle tel que

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} \geqslant \widehat{PBC} + \widehat{PCB}$$

Montrer que $AP \geqslant AI$ avec égalité si et seulement si $P = I$

Solution de l'exercice 2
Soit S le Pôle Sud de A dans ABC (voir figure 7). On a

$$\widehat{PBA} + \widehat{PCA} + \widehat{PBC} + \widehat{PCB} = \widehat{ABC} + \widehat{ACB} = 2\left(90 - \frac{\widehat{BAC}}{2}\right)$$

La condition de l'énoncé revient donc à $\widehat{PBC} + \widehat{PCB} \leqslant 90 - \frac{\widehat{BAC}}{2}$, ou encore à

$$\widehat{BPC} \geqslant 90 + \frac{\widehat{BAC}}{2} = \widehat{BIC}$$

On en déduit que P est entre l'arc de cercle BIC de centre S et la droite (BC) (zone verte). Or $AP \leqslant AI$ si et seulement si P est dans le cercle de centre A et de rayon I (zone bleue). Ces deux cercles sont tangents en I puisque A, I, S sont alignés. Ainsi, dans le cas général $AP \geqslant AI$ et le seul point appartenant aux deux zones est le point I, ce qui conclut le cas d'égalité.

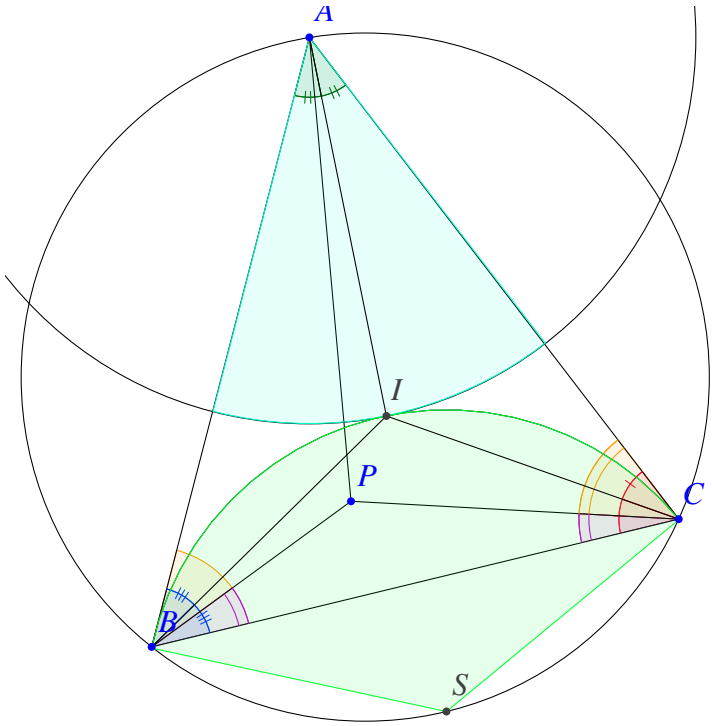


FIGURE 7 – Solution pour l'exercice 2

Exercice 3
Soit A, B, C, D quatre points dans cet ordre sur un cercle et soit S le milieu de l'arc AB ne contenant pas C et D. Les droites (SD) et (SC) intersectent (AB) en E et F respectivement. Montrer que C, D, E et F sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3
La tangente T en S au cercle est parallèle à (AB). On reporte donc par angles alterne-internes l'angle α (voir figure 8) entre cette tangente et (CS) en $\widehat{AFS}$, puis par le théorème de l'angle à la tangente en $\widehat{SDC}$. On obtient $\widehat{EDC} = \widehat{SDC} = 180 - \widehat{EFC}$ et la cocyclicité de C, D, E et F.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On appelle respectivement I_A, I_B, I_C et I_D les centres des cercles inscrits aux triangles BCD, DCA, ADB et BAC. Montrer que $I_AI_BI_CI_D$ est un rectangle.

Solution de l'exercice 4
Soit S le milieu de l'arc AB. Le théorème du Pôle Sud dans ABC nous dit que $SA = SB = SI_C$. De même, dans ABD on obtient que $SA = SB = SI_D$. Ainsi, A, B, I_C, I_D sont sur le même cercle de centre S. On montre de même que les quadrilatères BCI_AI_D, CDI_BI_A et DAI_CI_B sont cy-

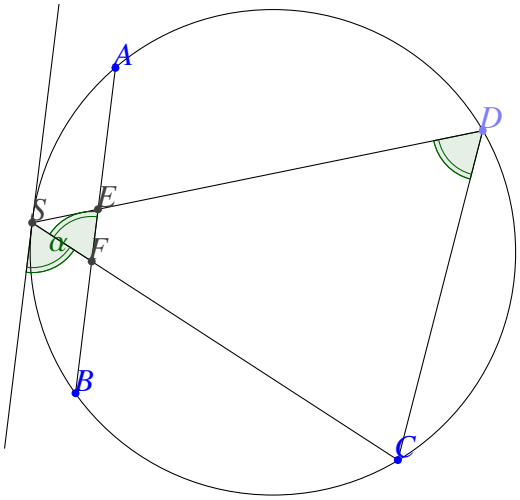


FIGURE 8 – Solution pour l'exercice 3

cliques. On en tire les relations d'angles suivantes (voir figure 9) :

$$\begin{aligned}
\widehat{I_DI_AI_B} &= 360 - \widehat{CI_AI_B} - \widehat{CI_AI_D} = (180 - \widehat{CI_AI_B}) + (180 - \widehat{CI_AI_D}) \\
&= \widehat{CDI_B} + \widehat{CBI_D} && \text{par cyclicité} \\
&= \frac{\widehat{CDA}}{2} + \frac{\widehat{ABC}}{2} = \frac{\widehat{CDA} + \widehat{ABC}}{2} && \text{par définition de } I_B, I_D \\
&= \frac{180}{2} = 90 && \text{par cyclicité de } ABCD
\end{aligned}$$

Le raisonnement est le même pour chacun des angles de $I_AI_BI_CI_D$, qui est donc un rectangle.

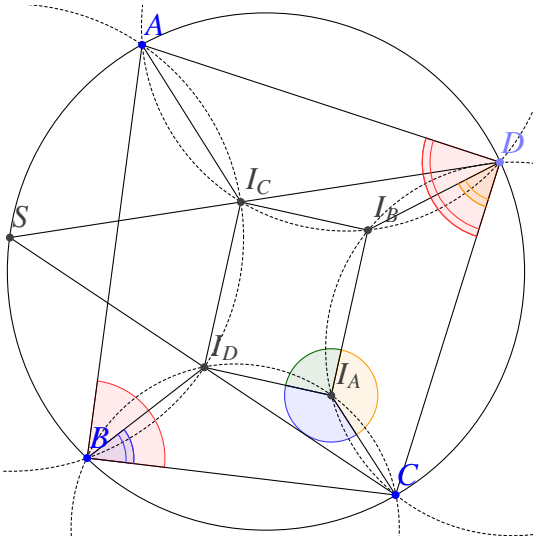


FIGURE 9 – Solution pour l'exercice 4

Exercice 5
Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de B. Les cercles circonscrits aux triangles ABD et BCD recoupent $[BC]$ et $[AB]$ en E et F respectivement. Montrer que $AE = CF$

Solution de l'exercice 5

D est le Pôle Sud de B dans ABF et CBE (voir figure 10). On obtient donc d'une part $DA = DF$ et d'autre part $DE = DC$. De plus, par le théorème de l'angle inscrit et cocyclicité de B, C, D et E, il vient $\widehat{CBE} = \widehat{EDA}$ et par cocyclicité de A, B, F et D, il vient $\widehat{ABF} = \widehat{FDC}$. Ainsi, $\widehat{ADE} = \widehat{FDC}$. En combinant cette égalité d'angle avec les égalités de longueurs précédemment établies, on en déduit que les triangles ADE et FDC sont superposables, ce qui implique $AE = CF$.

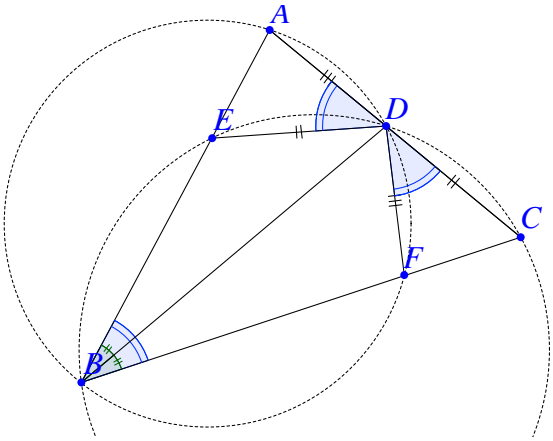


FIGURE 10 – Solution pour l'exercice 5

Exercice 6 (BXMO 2011)

Soit ABC un triangle et D l'intersection de la bissectrice intérieure issue de A avec $[BC]$. La médiatrice de $[AD]$ recoupe la bissectrice issue de B en M et celle issue de C en N. On note enfin I le centre du cercle inscrit à ABC. Montrer que les points A, I, M et N sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6

Le point M est par définition le Pôle Sud de D dans ABD, et les points M, A, B et D sont donc cocycliques (voir figure 11). On en déduit que

$$\widehat{IAM} = \widehat{DAM} = \widehat{DBM} = \frac{\widehat{ABC}}{2}$$

Par ailleurs, avec J le milieu de $[AD]$,

$$\begin{aligned}\widehat{MNI} = \widehat{JNI} &= 90 - \widehat{JNI} = 90 - \widehat{AIN} \\ &= 90 - (\widehat{IAC} + \widehat{ICA}) \\ &= \frac{180 - \widehat{BAC} - \widehat{BCA}}{2} = \frac{\widehat{ABC}}{2}\end{aligned}$$

Ainsi, $\widehat{MNI} = \widehat{MAI}$, d'où la cocyclicité de A, M, I et N.

Exercice 7

Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$. Soit H l'orthocentre de ABC et M le milieu de $[BC]$. Soit $D \in [AB]$ et $E \in [AC]$ tels que $AD = AE$ et D, H et E sont alignés. Les cercles circonscrits à ABC

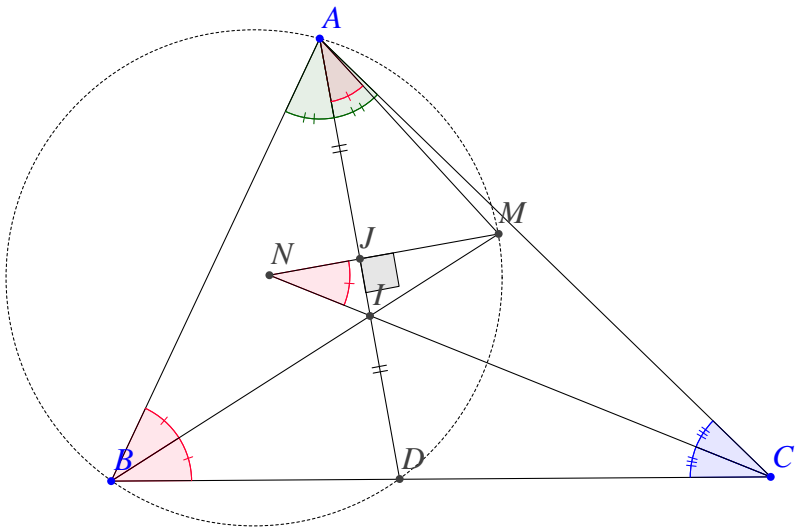


FIGURE 11 – Solution pour l'exercice 6

et ADE se recoupent en X. Montrer que (AX) est perpendiculaire à (HM). *Indice : on pourra utiliser le théorème du Point de Miquel 8.*.

Solution de l'exercice 7

Soit A' le point diamétralement opposé à A sur le cercle circonscrit à ABC. $(A'C)$ et (BH) sont toutes deux perpendiculaires à (AC), donc elles sont parallèles entre elles, et de même $(A'B) \parallel (CH)$. Ainsi, $A'BHC$ est un parallélogramme (voir figure 12). Les diagonales se recoupent donc en leur milieu et M est aligné avec A' et H, c'est en fait le milieu de $[A'H]$. On sait de plus que $(AX) \perp (A'X)$, donc il suffit de montrer que X est sur la droite passant par A', H et M, donc de montrer que A', H et X sont alignés : on a fait disparaître M du problème. On a

$$\widehat{BDH} = 180 - \widehat{ADE} = 180 - \widehat{AED} = \widehat{CEH}$$

et $\widehat{DBH} = 90 - \widehat{BAC} = \widehat{ECH}$, donc les triangles BDH et CEH sont semblables et $\frac{BD}{CE} = \frac{HD}{HE}$. D'autre part, X est le centre de la similitude directe qui envoie B sur C et D sur E (point de Miquel 8), donc $\frac{XD}{XE} = \frac{BD}{CE}$. Ainsi, $\frac{XD}{XE} = \frac{HD}{HE}$ et le théorème de la bissectrice 6, (XH) est donc la bissectrice de $\widehat{DXE}$. Le second point d'intersection S entre (XH) et ω le cercle circonscrit à ADE est donc le Pôle Sud de A dans ADE et en particulier le milieu de l'arc DE, donc S est diamétralement opposé à A sur ω. La droite $(XH) = (XS)$ est donc perpendiculaire à (AX). Elle est donc confondue avec (XA'), donc A', H et X sont alignés, ce qui conclut.

Exercice 8

Soit ABC un triangle et M le milieu de $[BC]$. On note D et E les points des côtés $[AC]$ et $[AB]$ tels que $MC = MB = ME = MD$. La bissectrice issue de A coupe (BC) en F et la bissectrice de $\widehat{EMD}$ recoupe (AF) en X. Montrer que les quadrilatères $BEXF$ et $DXFC$ sont cycliques.

Solution de l'exercice 8

Notons tout d'abord que (BD) et (CE) sont des hauteurs du triangle puisque D et E sont sur le cercle de diamètre $[BC]$. On sait que $ME = MD$ et que $\widehat{XME} = \widehat{XMD}$, donc les triangles

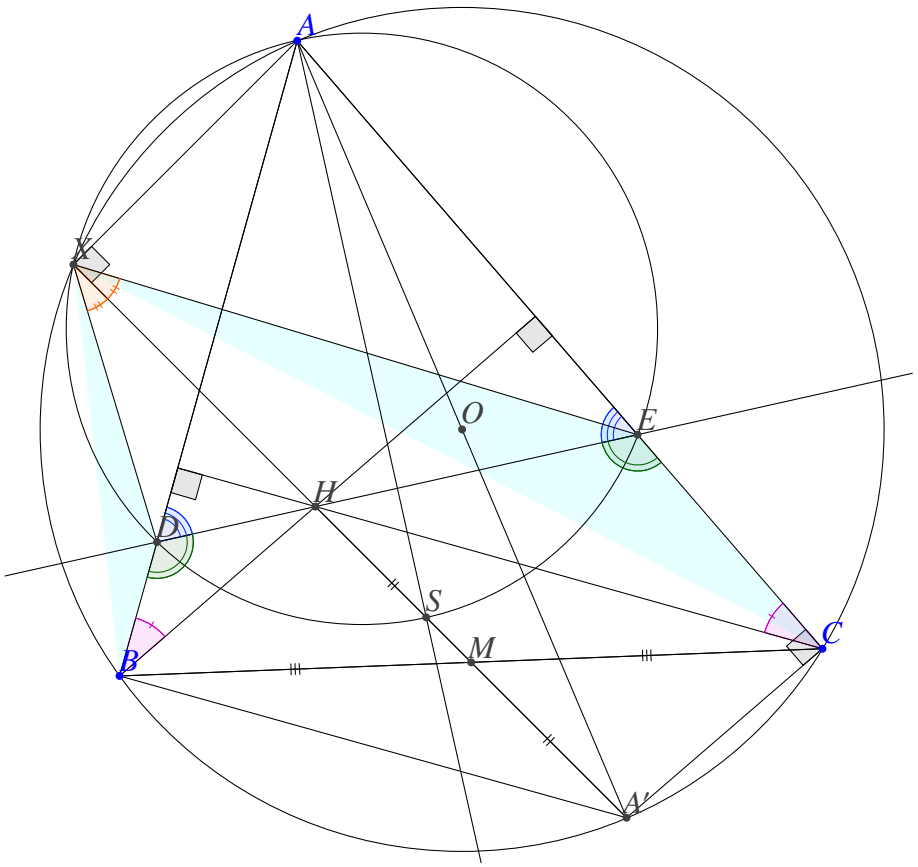


FIGURE 12 – Solution pour l'exercice 7

EXM et DXM sont isométriques et $XE = XD$. On peut ainsi redéfinir X comme l'intersection de la médiatrice de $[ED]$ avec la bissectrice de $\widehat{EAD}$. C'est donc le Pôle Sud de EAD de E et il est sur son cercle circonscrit (voir figure 13). On conclut par chasse aux angles : $\widehat{AXD} = \widehat{AED} = \widehat{ACB} = \widehat{ACF}$, donc D, X, F et C sont aussi cocycliques. Par symétrie, il en va de même de B, E, X et F.

Exercice 9 (P1 IMO 2004)
Soit ABC un triangle acutangle avec $AB \neq AC$. Soit P (resp Q) le pied de la hauteur issue de B (resp C) et M le milieu de $[BC]$. Les bissectrices des angles $\widehat{BAC}$ et $\widehat{PMQ}$ s'intersectent en R. Montrer que les cercles circonscrits à BQR et CPR se recoupent sur (BC).

Solution de l'exercice 9
Notons X le second point d'intersection des cercles circonscrits à BQR et CPR. Par chasse aux angles,

$$\widehat{BXC} = \widehat{BXR} + \widehat{CXR} = 180 - \widehat{BQR} + 180 - \widehat{CPR} = \widehat{AQR} + \widehat{APR}$$

Le problème revient donc à montrer que $\widehat{AQR} + \widehat{APR} = 180$, c'est-à-dire que A, P, Q et R sont cocycliques (voir figure 14). Or les triangles BCP et BCQ sont rectangles en P et Q, donc P et Q sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, de centre M. Ainsi $MP = MQ$, et la bissectrice de $\widehat{PMQ}$ est également la médiatrice de $[PQ]$. R est donc l'intersection de la bissectrice de $\widehat{PAQ}$ avec la médiatrice de $[PQ]$; c'est le Pôle Sud de A dans APQ. En particulier, il est sur le cercle circonscrit à APQ, ce qui conclut.

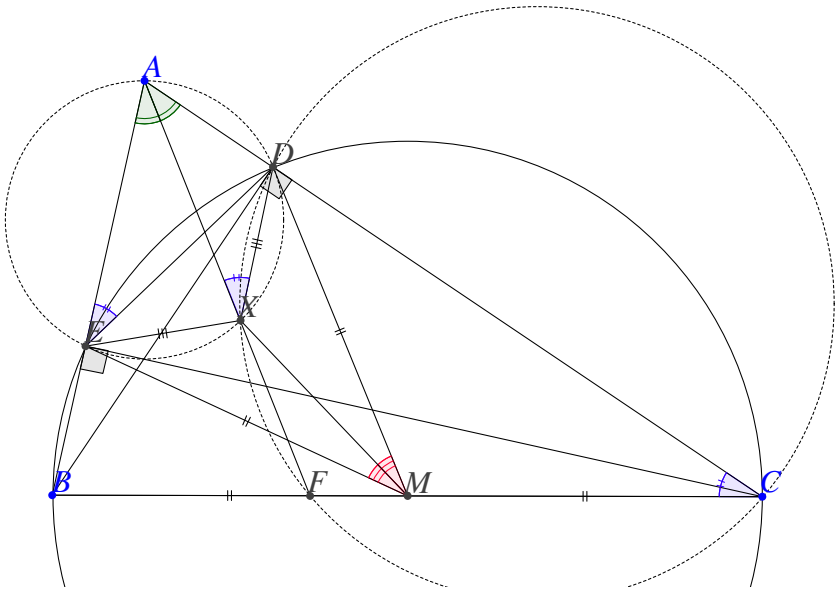


FIGURE 13 – Solution pour l'exercice 8

Exercice 10
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit ω_1 et I le centre de son cercle inscrit. On note S le centre du cercle ω_2 circonscrit à BCI et D (resp E) la seconde intersection de ω_2 avec (BS) (resp (CS)). Soit F sur l'arc BC de ω_1 ne contenant pas S tel que $\widehat{BSA} = \widehat{FSC}$. Montrer que A, F, D et E sont cocycliques.

Solution de l'exercice 10
S est le Pôle Sud de A dans ABC, donc $\widehat{DBC} = \widehat{SBC} = \widehat{BCS} = \widehat{BDE}$, et $(BC) \parallel (ED)$. De même, par chasse aux angles on obtient $\widehat{AFB} = \widehat{ASB} = \widehat{FSC} = \widehat{FAC}$ et $(AF) \parallel (BC)$ (voir figure 15). Or (BC) est l'axe radical de ω_1 et ω_2, (DE) celui de ω_2 et du cercle ω_3 circonscrit à AED. Comme ils sont parallèles, d'après le théorème des axes radicaux 7, l'axe radical entre ω_1 et ω_3 est la parallèle à (BC) passant par A, donc c'est (AF), et on obtient que F est la seconde intersection de ω_1 et ω_3. En particulier, F est sur ω_3 et donc A, F, E, D sont cocycliques. *NB : sans utiliser l'argument des axes radicaux, on peut utiliser la symétrie par rapport à la médiatrice de BC pour conclure à partir du parallélisme $(AF) \parallel (BC) \parallel (DE)$.*

Exercice 11 (JBMO 2010)
Soit K (resp L) le pied de la bissectrice issue de A (resp B) dans le triangle ABC non isocèle. La médiatrice de $[BL]$ coupe (AK) en M. On appelle N le point de (BL) tel que $(KN) \parallel (ML)$. Montrer que $KN = NA$

Solution de l'exercice 11
M est le Pôle Sud de A dans le triangle LBA, donc $MLAB$ est cyclique (voir figure 16). On remarque ensuite que $\widehat{NKA} = \widehat{LMA} = \widehat{LBA} = \widehat{NBA}$ donc $NKBA$ est cyclique et N est le Pôle Sud de B dans KBA (intersection d'une bissectrice et du cercle circonscrit). Donc $KN = NA$.

Exercice 12
Soit ABC un triangle tel que $AB \neq AC$ et O le centre de son cercle circonscrit. La bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe $[BC]$ en D. Soit E le symétrique de D par rapport au milieu de $[BC]$. La

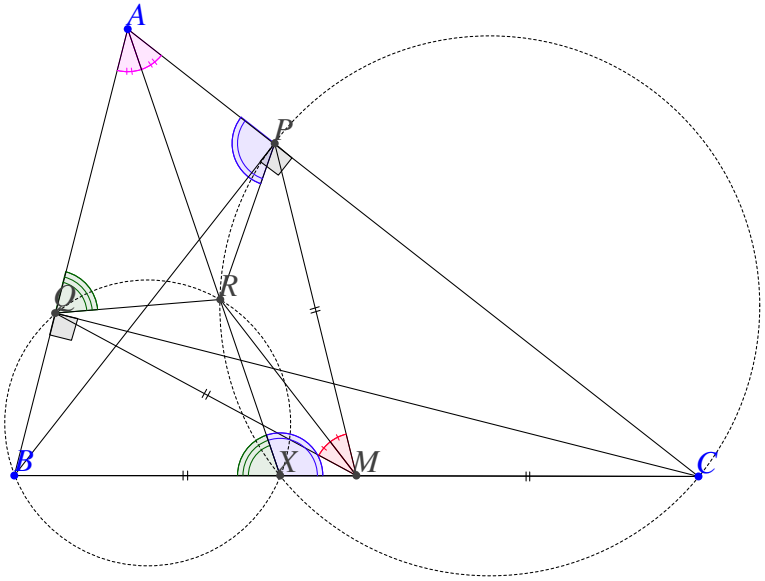


FIGURE 14 – Solution pour l'exercice 9

perpendiculaire à (BC) passant par D coupe $[AO]$ en X et la perpendiculaire à (BC) passant par E coupe (AD) en Y. Montrer que les points B, X, C et Y sont cocycliques.

Solution de l'exercice 12

On note que les droites (EY) et (DX) sont symétriques par rapport à la médiatrice de $[BC]$ que l'on note d (voir figure 17). On considère donc le symétriques Y' de Y par rapport à d. Soit M le milieu de $[BC]$ et S le point d'intersection de (AD) avec le cercle circonscrit à ABC (Pôle Sud de A). La symétrie d'axe d envoie (EY') sur (DY), donc (DY) et (EY') se coupent sur l'intersection de (DY) avec d, c'est-à-dire en S. Par symétrie, on obtient que $CYY'B$ est un trapèze isocèle, donc c'est un quadrilatère cyclique. On obtient également que $EDY'Y$ est un rectangle. Par parallélisme de d et (EY),

$$\widehat{SY'X} = \widehat{EY'D} = \widehat{EYD} = \widehat{MSA} = \widehat{OSA} = \widehat{OAS} = \widehat{XAS}$$

d'où l'on déduit que les points A, X, S et Y' sont cocycliques. (AS) est l'axe radical des cercles circonscrits à ABC et à AXS. Comme D est sur cet axe, $DX \cdot DY' = AD \cdot DS = DB \cdot DC$, et par réciproque du théorème de la puissance d'un point, X, Y', B et C sont cocycliques. Ainsi, X, B, C, Y et Y' sont cocycliques.

Exercice 13

Solution de l'exercice 13

(voir figure 18)

4 Graphes (Jean)

On renvoie par exemple vers le cours de Pierre Bornstein (https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/graphes.pdf) pour les

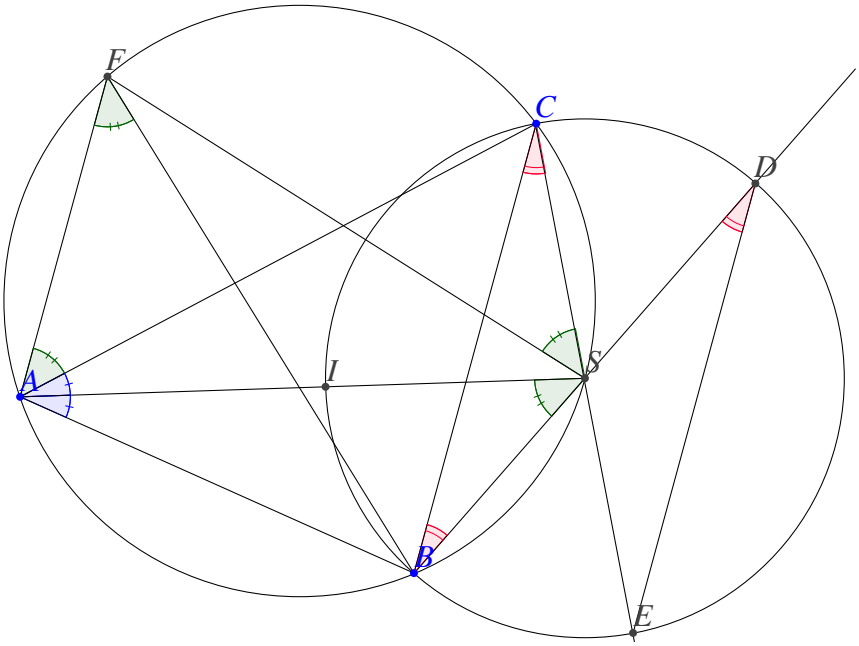


FIGURE 15 – Solution pour l'exercice 10

définitions usuelles de théorie des graphes.

Dans la suite étant donné un graphe $G = (V, E)$ on utilisera les notations suivantes :

— pour $v \in V$, $d(v)$ le degré de V
— $\delta(G) = \min(\{d(v), v \in V\})$ le plus petit degré des sommets du graphe.
— $\Delta(G) = \max(\{d(v), v \in V\})$ le plus grand degré des sommets du graphe.
— $\overline{G}$ le graphe complémentaire à G c'est à dire le graphe de même sommets et dont les arêtes sont tous

Pour $n \in \mathbb{N}$ on notera aussi

— N_n le graphe vide à n sommets.
— K_n le graphe complet à n sommets.
— C_n le graphe cycle à n sommets.

Proposition 1 (Lemme des poignées de main)**.** Étant donné un graphe $G = (V, E)$ on a

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v).$$

Démonstration. À chaque arête est associée exactement deux sommets.

Alternativement si on veut rédiger plus précisément, on a par double comptage, d'un coté comme à chaque arête $\{v_1, v_2\}$ est associée exactement deux couples (v_1, v_2).

$$|\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \in E\}| = 2|E|$$

et de l'autre en notant pour tout $v \in V$, $N(v)$ l'ensemble des voisins de v,

$$\begin{aligned} |\{(v_1, v_2) \mid \{v_1, v_2\} \in E\}| &= \sum_{v_1 \in V} |\{(v_1, v_2) \mid v_2 \in N(v_1)\}| \\ &= \sum_{v_1 \in V} d(v_1) \end{aligned}$$

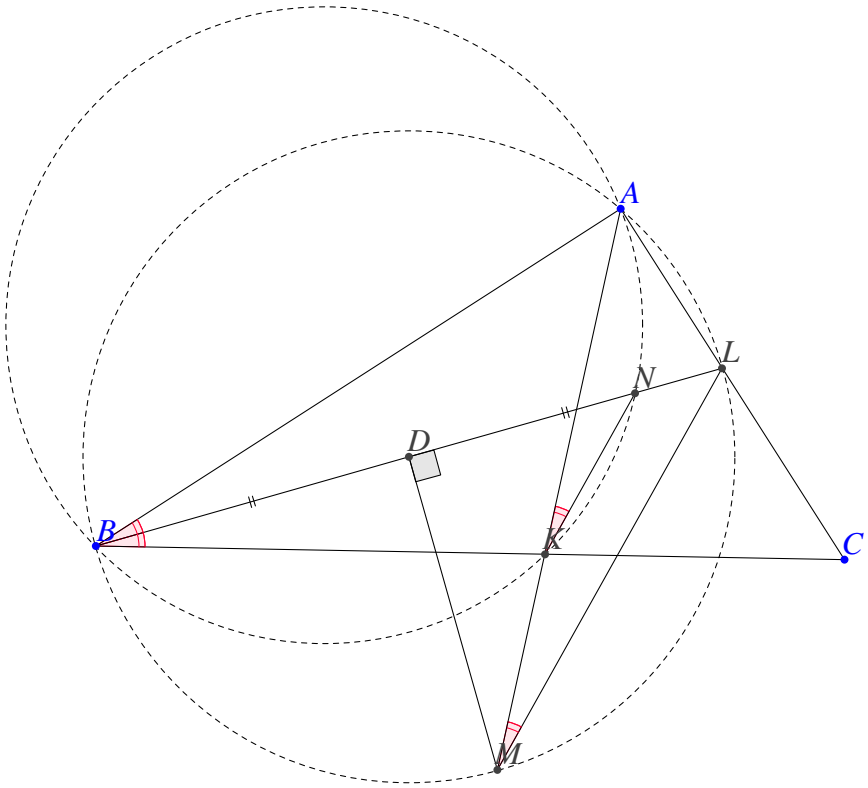


FIGURE 16 – Solution pour l'exercice 11

d'où le résultat. □

Exercice 1
Montrer que dans un graphe le nombre de sommets de degré impair est pair.

Solution de l'exercice 1
On a d'après le lemme des poignées de main

$$2|E| = \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{\substack{v\in V \\ d(v) \text{ pair}}} d(v) + \sum_{\substack{v\in V \\ d(v) \text{ impair}}} d(v)$$

et donc modulo 2,

$$0 \equiv \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{\substack{v\in V \\ d(v) \text{ pair}}} d(v) + \sum_{\substack{v\in V \\ d(v) \text{ impair}}} d(v) \quad [2]$$

ou encore

$$0 \equiv \sum_{v\in V} d(v) = \sum_{\substack{v\in V \\ d(v) \text{ pair}}} 0 + \sum_{\substack{v\in V \\ d(v) \text{ impair}}} 1 \quad [2]$$

c'est à dire

$$\left|\left\{v \in V \mid d(v) \text{ impair } \right\}\right| \equiv 0[2].$$

Exercice 2
Montrer que dans tout graphe il existe deux sommets de même degré.

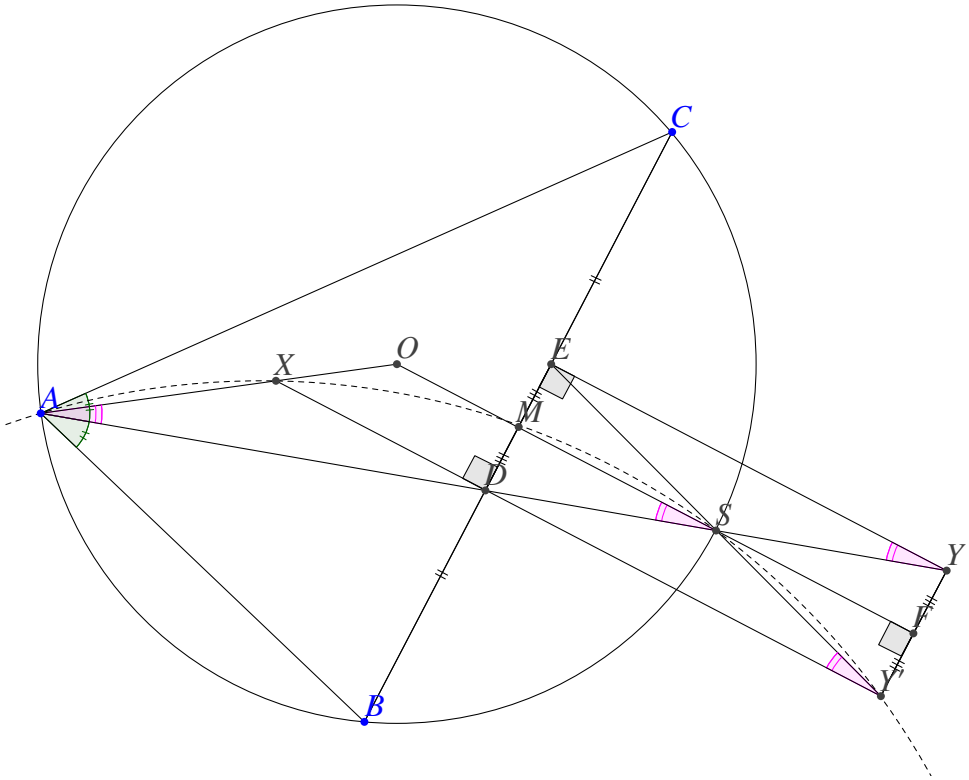


FIGURE 17 – Solution pour l'exercice 12

FIGURE 18 – Solution pour l'exercice 13

Solution de l'exercice 2
Si tous les sommets sont de degré non nul, alors comme les degrés sont dans $[\![1, n-1]\!]$ et au nombre de n, par le principe des tiroirs il en existe deux de même degré.

Sinon on note G' le sous-graphe obtenu à partir de G en retirant tous les sommets de degré 0.

Alors dans G' deux sommets sont de même degré, et donc de même degré dans G (car on n'a retiré que des sommets sans voisins).

Définition 2. Un ensemble de sommets est appelé *clique* (resp. *anticlique*) ssi le graphe qu'il induit est le graphe complet (resp. le graphe vide).

Exercice 3
Soit A une anticlique d'un graphe G.

Montrer que

$$|E| \leqslant \sum_{v \in V \setminus A} d(v).$$

Solution de l'exercice 3
On partitionne les sommets de G en $V = A \sqcup (V \setminus A)$, ce qui revient à colorier d'une couleur les

sommmets dans A et d'une autre les autres sommets, par exemple en vert les sommets de A et en bleu les sommets de $V\backslash A$.

On note aussi pour un sommet v, $d_{V\backslash A}(v)$ le nombre de voisins bleus et $d_A(v)$ le nombre de voisins verts.

On compte ensuite le nombre d'arêtes selon la "couleur" de ses extrémités.

— Le nombre d'arêtes dont les deux sommets sont verts est de 0 par définition des anticliques.

— Le nombre d'arêtes reliant un sommet bleu à un sommet vert est par définition (en sommant sur les bleus, comme dans la preuve du lemme des poignées de main)

$$\sum_{v\in V\backslash A} d_A(v)$$

— Le nombre d'arêtes dont les deux sommets sont bleus est le degré dans le graphe induit par $V\backslash A$ c'est à dire par le lemme des poignées de main

$$\frac{1}{2}\sum_{v\in V\backslash A} d_{V\backslash A}(v)$$

au final on a donc

$$|E| = 0 + \sum_{v\in V\backslash A} d_A(v) + \frac{1}{2}\sum_{v\in V\backslash A} d_{V\backslash A}(v)$$

et comme les degrés sont positifs et que

$$\sum_{v\in V\backslash A} d(v) = \sum_{v\in V\backslash A} d_A(v) + \sum_{v\in V\backslash A} d_{V\backslash A}(v)$$

on en déduit donc le résultat.

Exercice 4

Montrer que tout graphe à 6 sommets possède soit une clique de 3 sommets soit une anticlique de 3 sommets.

Solution de l'exercice 4

Cela revient à montrer que G contient une clique à 3 sommets ou $\overline{G}$ le graphe complémentaire à G contient une clique à 3 sommets.

Soit v_0 un sommet quelconque.

Comme il y a 5 autres sommets, au moins 3 sommets sont voisins de v_0 ou au moins 3 sommets ne sont pas sommets de v_0.

Quitte à considérer $\overline{G}$ on peut supposer qu'au moins trois sommets sont voisins de v_0. Notons v_1, v_2, v_3 trois tels sommets.

Si $\{v_1, v_2, v_3\}$ forme une anticlique c'est terminé.

Sinon, si par exemple v_1 et v_2 sont voisins alors $\{v_0, v_1, v_2\}$ forme une clique.

On procède de même si v_2 et v_3 sont voisins ou si v_3 et v_1 sont voisins.

Dans tous les cas on a bien une clique de 3 sommets ou une anticlique de 3 sommmets.

Exercice 5

À une fête de village, tout le monde connaît au moins une personne (et on suppose que la relation «connaître» est réflexive).

On suppose que dans tout groupe d'au moins 3 personnes il n'y a jamais exactement deux paires de connaissances.

Montrer que tout le monde se connaît.

Solution de l'exercice 5

Cela revient à montrer qu'un graphe dont aucun sommet n'est de degré 0 et donc aucun graphe induit possède exactement deux arêtes est un graphe complet.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux sommets v_1 et v_2 qui ne sont pas voisins.

Par hypothèse il existe v_1' voisin de v_1.

— Si v_1' est voisin de v_2 alors en considérant le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_1'\}$, par hypothèse v_1 et v_2 sont voisins. Absurde.

— Donc v_1' n'est pas voisin de v_2.

Par le même raisonnement il existe v_2' un sommet voisin de v_2 qui n'est pas voisin de v_1.

De plus en considèrant le graphe induit par (par exemple) $\{v_1, v_1', v_2'\}$, v_1' et v_2' ne sont pas voisins.

Mais alors en considérant le graphe induit par $\{v_1, v_2, v_1', v_2'\}$ on obtient un sous-graphe constitué de deux arêtes. C'est donc absurde.

Chemins et connexité

Exercice 6

Soit G un graphe.

Montrer que si G est non connexe alors $\overline{G}$ est connexe.

Solution de l'exercice 6

Soit G un graphe non connexe.

Il possède alors au moins deux composantes connexes, et en particuliers il existe un coloriage de G en deux couleurs (par exemple bleu et vert) tel qu'aucun sommet d'une couleur n'est dans la même composante connexe qu'un sommet d'une autre couleur (et que les deux couleurs apparaissent).

Étant donné deux sommets v_1 et v_2 on procède alors par disjonction de cas.

— Si v_1 et v_2 sont deux couleurs différentes, ils ne sont pas dans une composante connexe commune, en particulier ne sont pas voisins dans G et donc sont voisins dans $\overline{G}$ et donc en particulier dans la même composante connexe dans $\overline{G}$.

— Si v_1 et v_2 de couleurs différentes. Sans perte de généralité supposons qu'ils soient tous les deux bleus.

Soit w un sommet vert (existe bien par hypothèse).

Alors de même que précédemment v_1 et w sont voisins dans $\overline{G}$ et v_2 et w sont voisins dans $\overline{G}$. Par conséquent (v_1, w, v_2) est un chemin de v_1 à v_2 dans $\overline{G}$.

Et donc dans tous les cas il existe un chemin entre v_1 et v_2.

On remarque que l'on a en fait montré beaucoup plus fort : non seulement il existe un chemin mais on peut s'arranger pour que ce chemin soit de longueur 1 ou 2 (selon que v_1 et v_2 sont ou non dans la même composante connexe de G).

Exercice 7
Soit $G = (V, E)$ un graphe.
Montré que si $\delta(G) \geqslant \frac{|V|-1}{2}$ alors G est connexe.

Solution de l'exercice 7
On va même montrer qu'il existe un chemin de longueur au plus 2 entre tous sommets de G.
Soient v_1 et v_2 deux sommets distincts de G.
On procède par disjonction de cas.

— Si v_1 et v_2 sont voisins ils sont reliés par un chemin de longueur 1.

— Sinon comme $d(v_1) \geqslant \frac{n-1}{2}$ et $d(v_2) \geqslant \frac{n-1}{2}$, en particulier

$$d(v_1) + d(v_2) \geqslant n - 1.$$

Or il y $n-2$ sommets différents de v_1 et v_2, d'où le nombre de sommets voisins de v_1 et de v_2 est au moins de 1.
Avec w un tel sommet on a donc le chemin (v_1, w, v_2) de longueur 2 qui relie v_1 et v_2.

Dans tous les cas v_1 et v_2 sont reliés par un chemin de longueur au plus 2.
On remarque que pour $n \geqslant 1$, si on met deux copies de K_n "côte-à-côte" alors on obtient un graphe non connexe tel que $\delta(G) = n - 1 = \frac{|V|-2}{2}$ et par conséquent l'inégalité précédente et optimale.

Exercice 8
Montrer que si $G = (V, E)$ est un graphe connexe alors $|E| \geqslant |V| - 1$.

Solution de l'exercice 8
Pour tout entier naturel n on note $\mathcal{H}_n$ la proposition «tout graphe connexe admettant n sommets admet au moins $n-1$ arêtes».

— **Initialisation**
Pour $n = 1$ c'est bien le cas.

— **Hérédité**
Soit n un entier naturel, et supposons $\mathcal{H}_n$ est vraie.
Soit $G = (V, E)$ tel que $|V| = n + 1$.
On procède par disjonction de cas.

— Si tous les sommets sont de degrés plus grands que 2 alors, par le lemme des poignées de main

$$2|E| = \sum_{v \in V} d(v) \geqslant \sum_{v \in V} 2 = 2|V| = 2(n+1)$$

donc $|E| \geqslant n + 1 \geqslant (n+1) - 1$.

— Si il existe un sommet de degré 1 (comme le graphe est connexe avec au moins 2 sommets, en particulier tous les degrés sont non nuls). Notons v_0 un tel sommet.
Notons $G' = (V', E')$ le sous-graphe obtenu en retirant le sommet v_0.
Alors comme $|V'| = (n+1) - 1 = n$ par hypothèse de récurrence, $|E'| \geqslant n - 1$. Et donc $|E| = |E'| - d(v_0) = |E| + 1$ vérifie bien $|E| \geqslant (n+1) - 1$.

Dans tous les cas $|E| \geqslant (n+1) - 1$.
D'où $\mathcal{H}_{n+1}$.

— **Conclusion**
On a montré $\mathcal{H}_1$ et que pour tout entier n, $\mathcal{H}_n$ implique $\mathcal{H}_{n+1}$, donc par récurrence pour tout n, $\mathcal{H}_n$.

Exercice 9
Soit $G = (V, E)$ un graphe avec $|V| \geqslant 3$.

Montrer que G est connexe **ssi** il existe deux sommets distincts v_1 et v_2 tels que les graphes G'_1 et G'_2 obtenus en retirant respectivement v_1 et v_2 sont connexes.

Solution de l'exercice 9
On procède par double implication.

— **Sens réciproque**
Supposons qu'il existe deux sommets distincts v_1 et v_2 tels que les graphes G'_1 et G'_2 obtenus en retirant respectivement v_1 et v_2 sont connexes, et fixons v_1 et v_2 de tels sommets.
Soient u et w deux sommets de G. Montrons par disjonction de cas qu'il existe un chemin de u à w.

— Si $\{u, w\} = \{v_1, v_2\}$. Comme $|V| \geqslant 3$ il existe un sommet $\omega \in V$ distincts de v_1 et v_2 et donc sommet de G'_1 et G'_2.
Comme G'_1 est connexe il existe un chemin de v_2 à ω dans G'_1 et donc dans G.
De même comme G'_2 est connexe il existe un chemin de ω à v_1 dans G'_2 et donc dans G.
En les concaténant on obtient alors un chemin de v_2 à v_1.
— Sinon sans perte de généralité on peut supposer $v_1 \notin \{u, w\}$. Comme G'_1 est connexe il existe un chemin de u à w dans G'_1 et donc dans G.

Dans tous les cas il existe un chemin de u à w, et ce quelque soient les sommets et donc G est connexe.

— **Sens direct**
Comme l'ensemble des distances entre sommets est fini il existe un couple (v_1, v_2) de distance maximale c'est à dire tel que

$$\operatorname{dist}(v_1, v_2) = \max\left(\left\{\operatorname{dist}(u_1, u_2), (u_1, u_2) \in E^2\right\}\right).$$

(Cette distance est appelée diamètre du graphe)
Montrons que ces sommets conviennent.
Sans perte de généralité montrons que G'_1 obtenu en enlevant v_1 de G est connexe.
Soient u et w deux sommets de G (distincts de v_1). On cherche à montrer qu'il existe un chemin entre u et v dans G'_1, c'est à dire un chemin entre u et w dans G ne passant par v_1.
Comme G est connexe il existe un chemin entre u et v_2 et un chemin entre w et v_2. Considérons les plus courts chemins parmi ces chemins que l'on note C_u et C_w.
Si v_1 est sur le chemin de C_u on a $\operatorname{dist}(v_1, v_2) < \operatorname{dist}(u, v_2)$ ce qui contredit la maximalité. Donc v_1 n'est pas sur C_u. De même v_1 n'est pas sur C_v.
Mais en concaténant C_u et C_v on obtient alors un chemin entre u et v ne passant pas par v_1.

Exercice 10
Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geqslant 2$.

Montrer G possède un cycle de longueur au moins $\delta(G) + 1$.

Solution de l'exercice 10
On construit récursivement un tel cycle.

- On choisit v_1 un sommet quelconque du graphe.
- On suppose construit un tel cycle $(v_1, \dots, v_r)$.
  - Si $r \leqslant k$, comme v_r a au moins k voisins l'un de ces voisins n'est pas dans l'ensemble $\{v_1, \dots, v_{r-1}\}$ de cardinal $r - 1 < k$. On prend pour v_{r+1} un tel sommet.
  - Si $r > k$, comme comme v_r a au moins k voisins l'un de ces voisins n'est pas dans l'ensemble $\{v_{r-k}, \dots, v_{r-1}\}$ de cardinal $k - 1 < k$. On prend pour v_{r+1} un tel sommet.

Par le principe des tiroirs (infinité de chaussettes dans un nombre fini de tiroirs) il existe i et j distincts tels que $v_i = v_j$. Sans perte de généralité $j > i$.

Si par l'absurde $j - i \leqslant k$ alors par construction v_j et v_i ne sont pas voisins.

Donc $j - i > k$ et donc $(v_i, v_{i+1}, \dots, v_j)$ est un tel cycle.

Exercice 11
Soit G un graphe.

Montrer que l'on peut colorier le graphe en deux couleurs tel que chaque sommet a une majorité (au sens large) de voisins de l'autre couleur.

Solution de l'exercice 11
L'ensemble des coloriages possibles est fini (il y en a même $2^{|V|}$), parmi cet ensemble considérons un coloriage maximisant le nombre d'arêtes "bicolores" (dont les deux extrémités sont de couleurs différentes).

Montrons qu'un tel coloriage convient.

Suposons par l'absurde qu'un sommet a strictement plus de voisins de sa couleur que de voisins de couleur différente.

En changeant la couleur de ce sommet on augment alors strictement le nombre d'arêtes bicolores ce qui contredit l'hypothèse de maximalité.

D'où le résultat.

Coloriages

Étant donné un graphe $G = (V, E)$ un *coloriage* (par sommets) d'un graphe correspond à l'attribution d'une couleur à chaque sommet du graphe.

Formellement un coloriage à m couleurs est donc une application de $c : V \to C$ où C est un ensemble à m éléments.

Un coloriage est dit *propre* ssi il n'existe jamais deux voisins de même couleur, c'est à dire formellement pour tout $\{v_1, v_2\} \in V$, $c(v_1) \neq c(v_2)$.

Étant donné G un graphe on note $\chi(G)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour obtenir un coloriage propre de G, appelé *nombre chromatique* de G.

Autrement dit il existe au moins un coloriage propre à $\chi(G)$ couleurs et aucun coloriage propre à strictement moins de $\chi(G)$ couleurs.

Pour montrer que $\chi(G) = m$ on procède souvent en deux étapes

— Montrer que $\chi(G) \leqslant m$ en construisant explicitement un coloriage propre à m couleur.

— Montrer que $\chi(G) \geqslant m$ en montrant qu'il n'existe aucun coloriage propre à strictement moins de m couleurs, par exemple par l'absurde.

Remarque 3.

— Le nombre chromatique $\chi(G)$ est bien défini car il existe toujours au moins un coloriage propre fini.

— Pour tout graphe $G = (V, E)$ on a $1 \leqslant \chi(G) \leqslant |E|$ (il faut au moins une couleur et attribué une couleur différente à chaque sommet de G fournit un coloriage correct).

— Si H est un sous-grape de G alors $\chi(H) \leqslant \chi(G)$. En effet tout coloriage propre de G induit un coloriage propre de H.

— Pour $n \in \mathbb{N}$, le nombre chromatique du graphe vide N_n est 1. Pour un graphe non vide $\chi(G) \geqslant 2$ (car deux voisins sont de couleurs différentes).

— Pour $n \in \mathbb{N}$ nombre chromatique du graphe complet K_n est n (faire un schéma). Par conséquent si un graphe G admet une clique de taille m alors $\chi(G) \leqslant m$.

Exemple 4. Soit $n \geqslant 2$ et considérons C_n le graphe complet dont on numérote les sommets $0, 1, \ldots, n-1$.

— Si n est pair alors $\chi(C_n) = 2$. En effet comme le graphe est non vide $\chi(C_n) \geqslant 2$ et en coloriant les sommets selon leur parité on a $\chi(C_n) \leqslant 2$.

— Si n est impair alors $\chi(C_n) = 3$.

Tout d'abord en coloriant les sommets de 0 à $n-2$ en deux couleurs selon leur parité et en coloriant $n-1$ en une troisième couleur on obtient un coloriage propre en 3 couleurs donc $\chi(C_n) \leqslant 3$.

Par ailleurs supposons par l'absurde qu'il existe un coloriage propre de C_n en 2 coulerurs. Comme pour tout i, i est voisin de $i+1$, les sommets de 0 à $n-1$ sont coloriés selon leur parités. Mais alors 0 et $n-1$ qui sont voisins sont de même couleur. Absurde.

On dit qu'un graphe est biparti si son nombre chromatique est inférieur ou égal à 2.

Exercice 12 (Théorème de König)
Montrer qu'un graphe est biparti ssi tous ses cycles sont de longueurs paires.

Solution de l'exercice 12
On procède par double implication.

— **Sens direct** Considérons un graphe biparti G et un cycle $v_1, \ldots, v_{r-1}, v_r = v_1$ de longueur r.

Comme $\chi(G) \leqslant 2$ on peut colorier G en deux couleurs, disons bleu et vert.

Sans perte de généralité v_1 est bleu, d'où v_2 est vert, et de même par récurrence immédiate v_k est bleu si k est impair et vert si k est pair. Comme $v_r = v_1$ on en déduit que r est pair.

Alternativement on aurait pu précedr par contraposée, si un graphe G possède un cycle de longueur impaire, on a donc C_n est un sous-graphe de G pour un certain n impair, et donc $\chi(G) \geqslant \chi(C_n) = 3 > 2$.

— **Sens réciproque**

Soit G un graphe dont tous les cycles sont de longueurs paires.

Quitte à colorier chaque composante connexe on peut se ramener au cas où G est connexe.

On propose ici un algorithme pour construire un tel coloriage.

Fixons un sommet arbitraire w.

Pour tout sommet v on note $\text{dist}(w, v)$ la longueur du plus petit chemin de v à w (existe par connexité).

On colorie alors en bleu les sommets de distance minimale paire et en vert les sommets de distance minimale impaire.

Supposons par l'absurde qu'il existe deux sommets de même couleurs voisins.

Si ce sont deux sommets verts v_1 et v_2 alors en considérant un chemin minimal de w à v_1 puis une arête de v_1 à v_2 puis un chemin minimal de v_2 à w on obtient un cycle de longueur

$$\underbrace{\text{dist}(w, v_1)}_{\text{impair}} + 1 + \underbrace{\text{dist}(w, v_2)}_{\text{impair}}$$

qui est donc impaire. Absurde.

De même pour deux sommets bleus.

Par conséquence on obtient bien un coloriage en deux coulers tel qu'aucun sommet n'est de la même couleur que son voisin, c'est à dire $\chi(G) \leqslant 2$.

Exercice 13

Déterminer tous les graphes G tels que $\chi(G) \leqslant 2$ et $\chi(\overline{G}) \leqslant 2$.

Solution de l'exercice 13

Montrons que si $G = (V, E)$ vérifie $|V| \geqslant 3$ alors $\chi(G) > 2$ ou $\chi(\overline{G}) > 2$.

Soit $G = (V, E)$ un graphe tel que $|V| \geqslant 3$ et supposons que $\chi(G) \leqslant 2$. Colorions G en deux couleurs, par exemple bleu et vert et notons V_b et V_v les sommets de couleurs respectives bleu et vert.

Comme $|V| = |V_b| + |V_v| \geqslant 5$ on peut supposer sans perte de généralité que $|V_b| \geqslant 3$.

Mais comme le graphe induit par V_b dans $\overline{G}$ est $K_{|V_b|}$ on a donc

$$\chi(\overline{G}) \geqslant \chi\left(K_{|V_b|}\right) > 2.$$

Il reste donc à regarder le cas $|V| \leqslant 4$ ce qui fait un nombre fini de cas à traiter (cf schémas).

Exercice 14 (Un encadrement grossier)

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

Montrer que $\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}$.

Solution de l'exercice 14

Montrons tout d'abord que $\binom{\chi(G)}{2} \leqslant |E|$.

Le cas $\chi(G) = 1$ étant immédiat on suppose désormais $\chi(G) \geqslant 2$.

Considérons un coloriage propre avec $\chi(G)$ couleurs.

Si un couple de couleurs distinctes n'est pas présent parmi les arêtes, par exemple si il n'y a aucune arête dont les extrémités sont de couleurs 1, 2 alors en coloriant tous les sommets de couleurs 1 ou 2 en la couleur 1 on obtient un coloriage propre.

Par conséquent on obtient un coloriage propre avec $\chi(G) - 1$ couleurs ce qui est absurde.

On a donc montré que tous les couples de couleurs distinctes sont présents parmi les arêtes, et comme il y en a $\binom{\chi(G)}{2}$ on a bien

$$\binom{\chi(G)}{2} \leqslant |E|.$$

On rappelle que pour tout entier N, $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$. Donc le résultat précédent se réécrit

$$\chi(G)^2 - \chi(G) \leqslant 2|E|$$

et une étude de trinôme du second degré, par exemple en mettant l'inégalité sous la forme canonique

$$\left(\chi(G) - \frac{1}{2}\right)^2 \leqslant 2|E| + \frac{1}{4}$$

et en constatant que $\chi(G) \geqslant \frac{1}{2}$, par croissance de la fonction racine sur $\mathbb{R}_+$,

$$\chi(G) \leqslant \frac{1}{2} + \sqrt{2|E| + \frac{1}{4}}.$$

On remarque par ailleurs que pour tout graphe complet K_n, $\chi(K_n) = n$ et $|E| = \frac{n(n-1)}{2}$ et il y a alors égalité. L'inégalité est donc optimale.

Exercice 15

Soit G un graphe.

Montrer que $\chi(G) \leqslant \Delta(G) + 1$.

Solution de l'exercice 15

On se donne $\Delta(G) + 1$ couleurs.

On choisit une énumération des sommets, et on les colorie récursivement.

Pour chaque sommet on le colorie d'une couleur qui n'est pas utilisée par ses voisins déjà coloriés. Comme il y a au moins $\Delta(G) + 1 - \Delta(G)$ possibilités c'est toujours possible.

Par construction le coloriage obtenu est propre.

On remarque que l'inégalité est obtenue pour les graphes complets K_n pour tout n (car $\chi(G) = n$ et $\Delta(G) = n - 1$) et pour les graphes cyles C_n pour n impair (car $\chi(G) = 3$ et $\Delta(G) = 2$).

En fait ces deux cas sont les seuls cas d'égalité.

Proposition 5 (Théorème de Brooks, 1941)**.** Soit G un graphe qui n'est pas un graphe complet K_n pour un certain n, ni un graphe cycle C_n avec n impair.

Alors on a

$$\chi(G) \leqslant \Delta(G).$$

Exercice 16

Pour un graphe G on note $\omega(G)$ le maximum des tailles des cliques de G et $\overline{\omega}(G)$ le maximum des tailles des anticliques de G.

Montrer que pour tout graphe $G = (V, E)$,

$$\chi(G) \geqslant \max\left(\omega(G), \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}\right).$$

Solution de l'exercice 16

Soit $G = (V, E)$ un graphe.

— Comme G admet une clique de taille $\omega(G)$, $K_{\omega(G)}$ est un sous-graphe de G.
Donc
$$\chi(G) \geqslant \chi(K_{\omega(G)}) = \omega(G).$$

— Considérons un coloriage en $\chi(G)$ couleurs notées $1, 2, \ldots, \chi(G)$.
Alors pour tout i l'ensemble des sommets de couleur i, noté V_i forme une anticlique.
Donc
$$\sum_{i \in [\![1, \chi(G)]\!]} |V_i| = |V|$$
et comme
$$\sum_{i \in [\![1, \chi(G)]\!]} |V_i| \leqslant \chi(G)\overline{\omega}(G)$$
on obtient bien
$$\chi(G) \geqslant \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}.$$

Donc
$$\chi(G) \geqslant \max\left(\omega(G), \frac{|V|}{\overline{\omega}(G)}\right).$$

On remarque par ailleur que l'égalité est atteinte pour les graphes comples K_n on de manière générale des graphes multiparti $K_{m,\ldots,m}$.

Exercices en vrac

Exercice 17
On dit qu'un coloriage *par arêtes* est propre ssi il n'existe deux arêtes de même couleur ayant une extrémité commune.

Étant donné un graphe G on note $\chi'(G)$ le plus petit nombre de couleurs nécessaires pour colorier par arêtes G.

Montrer que si G est un graphe bipartite alors $\chi'(G) = \Delta(G)$.

Solution de l'exercice 17
Tout d'abord quel que soit le graphe on a $\chi'(G) \geqslant \Delta(G)$ (car les arêtes ayant pour extrémité un sommet commun de degré maximal sont toutes de couleurs différentes).

On procède par **récurrence sur le nombre d'arêtes**.

Plus précisément pour $m \in \mathbb{N}$ on note $\mathcal{H}_m$ la propriété «Pour tout graphe bipartite $G = (V, E)$ tel que $|E| = m$, on a $\chi'(G) = \Delta(G)$.»

— **Initialisation**
Pour $m = 0$, si un graphe G n'a pas d'arêtes on a $\Delta(G) = 1$ et $\chi'(G) = 1$.

— **Hérédité**
Soit $m \in \mathbb{N}$, on suppose $\mathcal{H}_m$.
Soit $G = (V, E)$ tel que $|E| = m$.
On choisit deux sommets v_1, v_2 distincts de manière arbitraire et on considère H le sous-graphe obtenu en retirant l'arête $\{v_1, v_2\}$.
Comme $\Delta(H) \leqslant \Delta(G)$ et H a m arêtes, on a $\chi'(H) \leqslant \Delta(G)$ par hypothèse de récurrence.

On considère un coloriage par arêtes de H en $\Delta(G)$ couleurs.

On note C_1 (resp. C_2) l'ensemble des couleurs non prises par les arêtes ayant pour extrémité v_1.

Comme v_1 et v_2 sont de degré au plus $\Delta(G) - 1$ dans H (car de degré au plus $\Delta(G)$ dans G et on a retiré une arête), et que $|C_1| = \Delta(G) - d_H(v_1)$ on obtient que C_1 est non vide. De même pour C_2.

— Si $C_1 \cap C_2 \neq \emptyset$ il suffit de colorier $\{v_1, v_2\}$ d'une de ces couleurs communes.

— Sinon soient $c_1 \in C_1$ et $c_2 \in C_2$.

On considère alors le plus long chemin, dans H, issu de v_1 et dont les couleurs alternent entre c_2 et c_1.

Comme le graphe est **bipartite** ce chemin ne repasse pas deux fois par le même sommet (faire un dessin pour s'en convaincre en séparant clairement les deux composantes), car si un chemin passe deux fois par le même sommet comme les couleurs des arêtes alternent on peux en déduire un cycle de longueur impaire ce qui est impossible.

Pour la même raison le chemin ne peut pas passer par v_2.

En intervertissant les couleurs c_1 et c_2 pour toutes les arêtes du chemin, par maximalité dudit chemin on obtient toujours un coloriage propre de H.

Dans ce nouveau coloriage v_1 et v_2 sont coloriés de la couleur c_2 et on se ramène donc au cas précédent.

— **Conclusion**

Par récurrence, pour tout $m \in \mathbb{N}$, tout graphe biparti G ayant m arêtes admet un coloriage propre en au plus $\Delta(G)$ couleurs donc pour tout graphe G

$$\chi'(G) \leqslant \Delta(G)$$

Exercice 18 (Tournoi des villes 1985)
Soit n un entier naturel.

On considère un tableau $n \times n$ dans lequel on inscrit n fois chaque nombre entre 1 et n.

Montrer qu'il existe une ligne ou une colonne contenant au moins $\lceil \sqrt{n} \rceil$ nombres différents.

Solution de l'exercice 18

On considère un graphe bipartite avec d'un coté des sommets représentant les nombres, $k_1, \ldots, k_n$ et de l'autre coté des sommets sommets représentant les lignes et colonnes $\ell_1, \ldots, \ell_n$, $c_1, \ldots, c_n$.

Pour i et j entre 1 et n on trace une arête entre le sommet k_i et celui ℓ_j (resp. k_i et c_j) ssi k_i apparait sur la ligne ℓ_j (resp. sur la colonne c_j).

On cherche donc à montrer que parmi les sommets $\ell_1, \ldots, \ell_n, c_1, \ldots, c_n$ au moins un est de degré supérieur à $\sqrt{n}$.

Par principe des tiroirs il suffit de montrer que le nombre d'arêtes est supérieur à $2n \times \sqrt{n}$.

Considérons maintenant un sommet k_i correspondant à un nombre i.

Notons $L(i)$ l'ensemble des lignes où i apparait et $C(i)$ l'ensemble des colonnes où i apparait.

En considérant le sous-tableau de lignes $L(i)$ et de colonnes $C(i)$ on a comme i apparait n fois $L(i) \times C(i) \geqslant n$.

Par IAG on en déduit $L(i) + C(i) \geqslant 2\sqrt{(n)}$. Donc $\deg(k_i) = L(i) + C(i) \geqslant 2\sqrt{(n)}$ et donc le nombre de sommets est au moins $n \times 2\sqrt{n}$.

D'où le résultat.

Exercice 19 (Olympiades de Mathématiques Balkanique 2002)
Soit G un graphe tel que $\delta(G) \geqslant 3$.

Montrer que G contient au moins un cycle de longueur impaire.

Solution de l'exercice 19
On considère un chemin de longueur maximale, que l'on note $(v_1, v_2, \ldots, v_r)$.

Comme $d(v_1) \geqslant 3$ il existe au moins deux voisins de v_1 distincs de v_2.

Si ces sommets ne sont dans le chemin on pourrait étendre le chemin ce qui contredit la maximalité.

On peut donc choisir i, j tels que $2 < i < j \leqslant r$ et v_i et v_j voisins de v_1.

On considère les trois cycles $(v_1, \ldots, v_i, v_1)$, $(v_1, \ldots, v_j)$ et $(v_1, v_i, v_{i+1}, \ldots, v_j, v_1)$. La somme de leur longueur est $(i + 1) + (j + 1) + (j - i + 2)$ qui est pair donc au moins un est de longueur paire.

Exercice 20
On considère des ampoules placées sur les sommets d'un graphe $G = (V, E)$.

À chaque étape on peut changer l'état (allumée ou éteinte) d'une ampoule et de toutes les ampoules sur les sommets voisins.

Est-il toujours possible de passer en un nombre fini d'étapes de la configuration où toutes les ampoules sont éteintes à la configuration où toutes les ampoules sont allumées ?

Solution de l'exercice 20
Montrons par récurrence sur n que cela est bien possible pour tout graphe possédant n sommets (et on décrit par la même occasion un algorithme récursif de résolution).

- **Initialisation**
  Pour $n = 1$ c'est bien le cas.
- **Hérédité**
  Soit n un entier naturel, supposons que c'est possible pour tout graphe possédant n sommets de changer l'état de toutes les ampoules.
  Soit $G = (V, E)$ un graphe de $n + 1$ sommets.
  Pour tout sommet $v \in V$, par hypothèse de récurrence sur le graphe obtenu en retirant v il est possible de changer d'état l'ensemble des ampoules sur les sommets différents de v, par une suite d'opérations notée O_v.
  On procède par disjonction de cas.
  - Si il existe un sommet v tel qu'en faisant la suite d'opérations O_v l'état de la lampe située en v est aussi changé alors c'est bon.
  - Sinon pour tout v, après la suite d'opérations O_v le sommet v est inchangé.
    On procède de nouveau par disjonction de cas sur la parité de n.
    - Si n est pair, en appliquant tous les O_v pour $v \in V$, chaque ampoule change d'état $n - 1$ fois et comme $n - 1$ est impair chaque ampoule change donc d'état.

— Si n est impair, comme la somme des degrés est paire (par le lemme des poignées de main), il existe au moins un sommet de degré pair. Notons w un tel sommet. En appliquant O_v pour chaque sommet voisin de w on obtient alors que toutes les ampoules changent d'état sauf celles situées en w et sur les sommets voisins de w.

Il reste alors à changer l'état de w et de ses voisins pour conclure.

Exercice 21
On considère 2024 points distincts sur le cercle unité.

Montré qu'il existe au moins 1023132 cordes dont l'angle au centre est inférieur ou égal à $\frac{2\pi}{3}$.

Solution de l'exercice 21
Posons $n = 2024$.

On considère le graphe $G = (V, E)$ dont les sommets sont les points, et tel que deux sommets sont reliés ssi l'angle au centre de la corde associée est strictement supérieur à $\frac{2\pi}{3}$.

Alors si on considère un triangle constitué de trois cordes, comme la somme des angles au centre des cordes est de 2π, les trois angles au centre ne peuvent pas tous être strictement supérieurs à $\frac{2\pi}{3}$.

Le graphe G n'admet donc pas de triangle, et par le théorème de Mantel $|E| \leqslant \frac{n^2}{4}$.

Donc le nombre d'arêtes dans $\overline{G}$ est d'au moins $\frac{n}{2} - \left\lfloor \frac{n^2}{4} \right\rfloor$ ce qui donne le résultat.

Quelques références pour aller plus loin

- Cours de Pierre Bornstein sur les graphes pour la POFM https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/graphes.pdf
- Cours de Margaret Bilu sur la théorie des graphes https://www.math.u-bordeaux.fr/~mbilu/graphesdeb.pdf et la théorie extrémale des graphes https://www.math.u-bordeaux.fr/~mbilu/graphes.pdf
- Diestel, R., 2000. *Graduate texts in mathematics : Graph theory*. SpringerVerlag.
- Trudeau, R.J., 2013. *Introduction to graph theory*. Dover.
- Chartrand, G. and Zhang, P., 2013. *A first course in graph theory*. Dover.

5 Axes radicaux (Gaëtan & Gaspard C.)

Exercice 1
Soient ω_1 et ω_2 des cercles disjoints extérieurs l'un à l'autre. On trace les 4 tangentes communes à ces deux cercles et, pour chaque tangente, un lutin maléfique se place sur le milieu du segment formé par les points de contact aux deux cercles. Montrer que tous les lutins maléfiques sont alignés.

Exercice 2
Soient C_1 et C_2 deux cercles qui s'intersectent en $U \neq V$, A, X des points de C_1 et B, Y des points de C_2. On suppose que les angles $\widehat{AXB}$ et $\widehat{AYB}$ sont droits. Montrer que $(AX), (BY), (UV)$ sont concourantes.

Exercice 3 (Orthogonalité de l'axe radical)
Soit $ABCD$ un quadrilatère. On note M et N les milieux de $[AC]$ et $[BD]$ respectivement. On note P l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (AD)$ et Q l'orthocentre du triangle formé par les droites $(AB), (CD), (BC)$. Montrer que (MN) est perpendiculaire à (PQ).

Exercice 4
Soient D, E, F les pieds des hauteurs dans un triangle non équilatéral ABC issues de A, B, C respectivement. Le centre du cercle circonscrit de ABC est noté O. Montrer que les cercles (AOD), (BOE) et (COF) s'intersectent en un point X autre que O.

Exercice 5
Soit ω un cercle de diamètre $[AB]$. On note O un point sur ω. Le projeté orthogonal de O sur $[AB]$ est H. Le cercle de centre O et de rayon OH recoupe ω en X et Y . Montrer que X, Y et le milieu de $[OH]$ sont alignés.

Exercice 6
Les points A, B, C et D se trouvent dans cet ordre sur une droite. Soit k_1 le cercle de diamètre $[AC]$ et k_2 le cercle de diamètre $[BD]$. Les deux cercles se coupent aux points E et F. Une tangente commune de k_1 et k_2 est tangente à k_1 en M et à k_2 en N. Montrer que les droites (AM), (EF) et (ND) sont concourantes.

Exercice 7
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[AB]$, N le milieu de $[AC]$. Montrer que le cercle de diamètre $[CM]$ et le cercle de diamètre $[BN]$ s'intersectent sur la hauteur issue de A.

Exercice 8 (Cercle de Conway)
Soit ABC un triangle, on place les points A_1 et A_2 de telle sorte que $AA_1 = AA_2 = BC$, $A_1 \in (AB)$ et $A_2 \in (AC)$ du côté opposé de B et C par rapport à A, on définit B_1, B_2, C_1 et C_2 de manière similaire. Montrer que les points A_1, A_2, B_1, B_2, C_1 et C_2 sont sur un même cercle.

Exercice 9
Soit ABC un triangle et D, E des points sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ respectivement, vérifiant $(DE)//(BC)$. Soit P un point intérieur à ADE tel que (DE) intersecte (PB) en U et (PC) en V. On note Q le point d'intersection autre que P des cercles circonscrits à PDV et PEU. Montrer que A, P et Q sont alignés.

Exercice 10
Soit ABC un triangle acutangle, L, M, N les milieux de $[BC], [AB], [AC]$ respectivement. (LM) recoupe le cercle Γ_1 de diamètre $[AB]$ au dessus de la droite (BC) en U et (LN) recoupe le cercle Γ_2 de diamètre $[AC]$ au dessus de la droite (BC) en V. On note X l'intersection des tangentes en U à Γ_1 et en V à Γ_2. Montrer que (XA) est perpendiculaire à (BC).

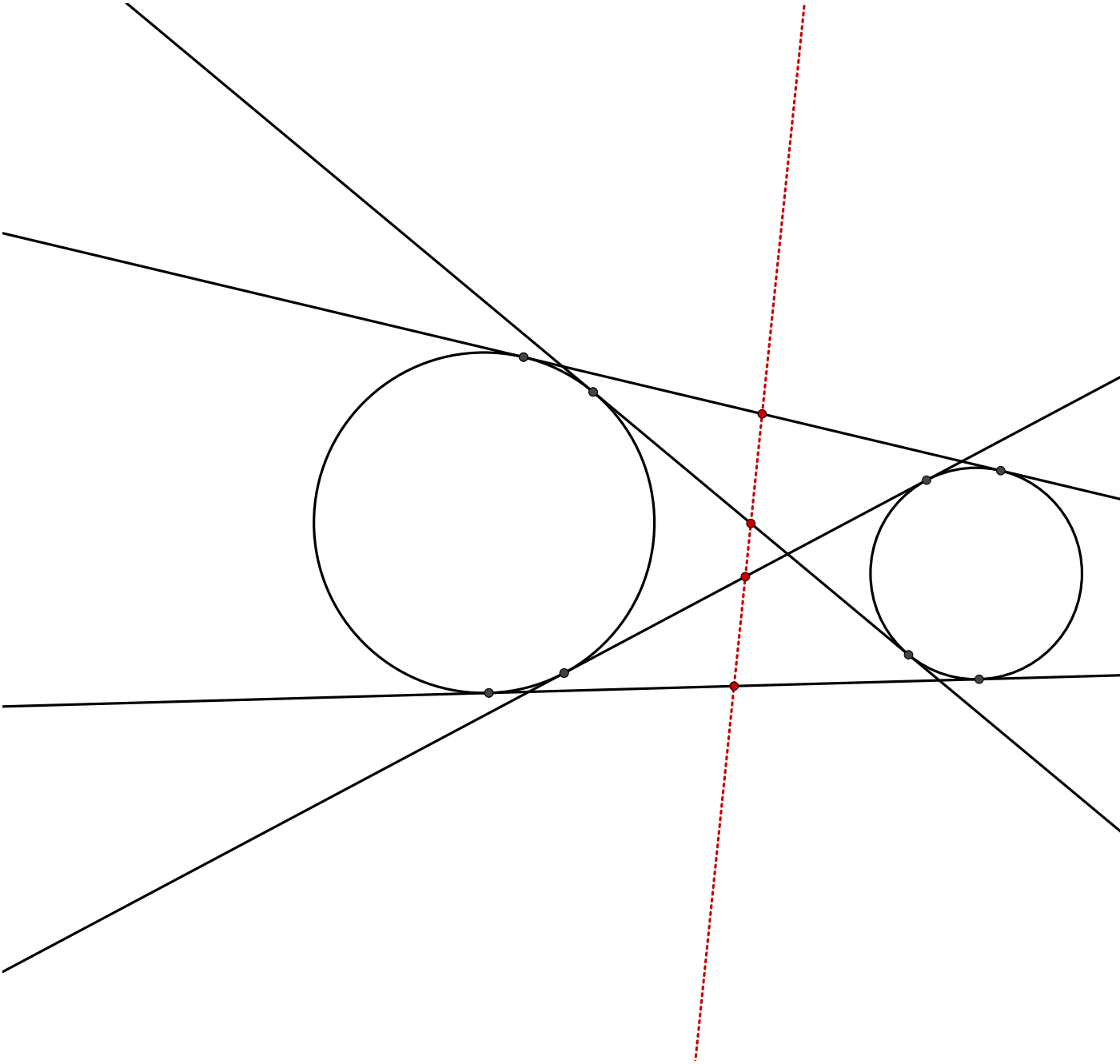
Exercice 11
Soit ABC un triangle acutangle d'orthocentre H, E, F les pieds de hauteur issus de B, C et M le milieu de $[BC]$. La droite (MH) recoupe le cercle circonscrit à ABC en un point Q au dessus de la droite (BC). Montrer que les droites (AQ) et (EF) se coupent sur (BC).

Exercice 12
Soit ABC un triangle et Γ son cercle circonscrit. La tangente au cercle Γ au point A coupe la droite (BC) en un point P. Soient E et F les pieds des hauteurs issues des sommets B et C respectivement. Soit Q le point d'intersection de la droite (EF) avec la parallèle à la droite (BC) passant par le point A. Soit M le milieu du segment $[BC]$.
Montrer que les droites (AM) et (PQ) sont perpendiculaires.

Exercice 13 (P2 BMO 2015)
Soit ABC un triangle de centre de cercle inscrit I. Le cercle circonscrit à ABC est recoupé par (AI) en D, par (BI) en E et par (CI) en F. La droite passant par I parallèle à (BC) (resp $(AC), (AB)$) intersecte (EF) (resp $(DF), (DE)$) en un point K (resp L, M). Montrer que K, L, M sont alignés.

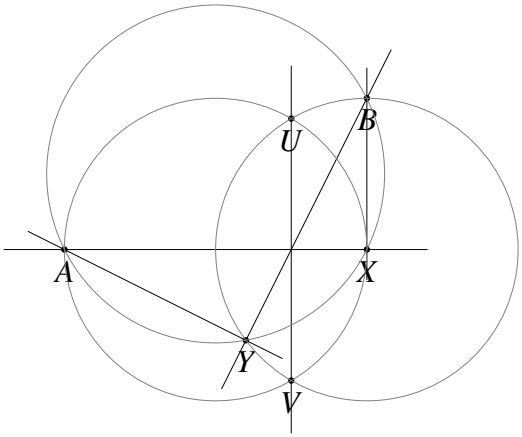
Exercice 14 (P1 Iran TST 2011)
Dans un triangle acutangle ABC où $AC > AB$, M est le milieu de $[BC]$, E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. K est le milieu de $[ME]$, L est le milieu de $[MF]$ et T est un point de la droite (KL) tel que $(TA)//(BC)$. Montrer que $TA = TM$.

Solution de l'exercice 1



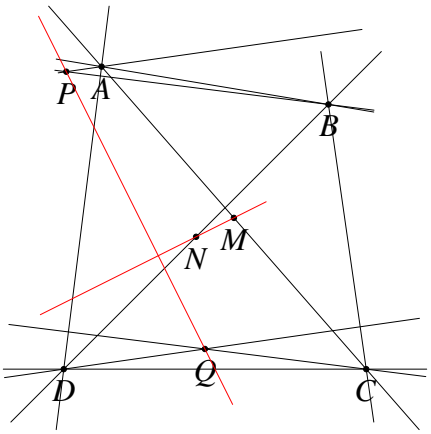
Tous les points ont la même puissance par rapport à chaque cercle. Ils sont donc tous sur l'axe radical des deux cercles et sont de la sorte alignés.

Solution de l'exercice 2



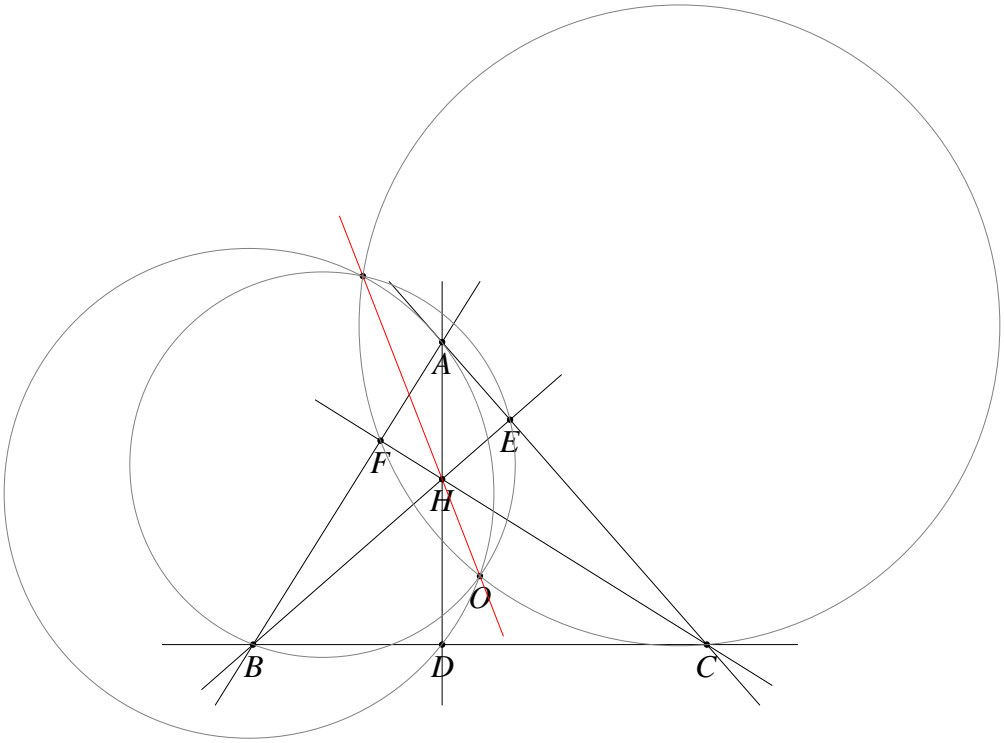
Comme $\widehat{AXB} = \widehat{AYB} = 90$, $AXYB$ est cyclique. Les trois droites mentionnées sont donc les axes radicaux des cercles $(AXYB), C_1, C_2$ et sont donc concourantes (ou parallèles, c'est-à-dire concourantes sur la droite à l'infini).

Solution de l'exercice 3



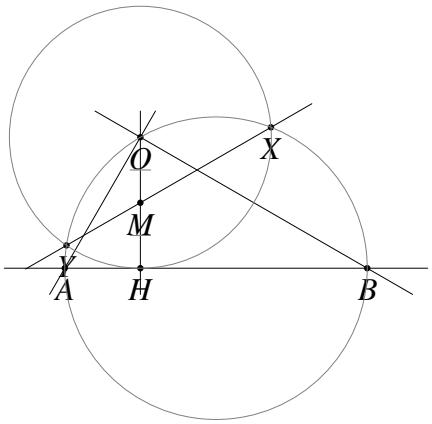
Considérons les cercles Ω_1 et Ω_2 de centre M et N et de rayons respectifs MA et NB. Montrons que P est sur l'axe radical des deux cercles. Soit X et Y les pieds des hauteurs issus de A et D respectivement sur $[CD]$ et $[AB]$. L'angle droit donne de façon immédiate que X appartient à Ω_1 et que Y appartient à Ω_2. Comme $XYAD$ est cyclique, P à la même puissance par rapport aux deux cercles et il est sur l'axe radical. De la même manière on montre que Q est sur l'axe radical de Ω_1 et Ω_2. L'axe radical de deux cercles étant perpendiculaire à la droite qui relie leurs centres, on peut conclure.

Solution de l'exercice 4



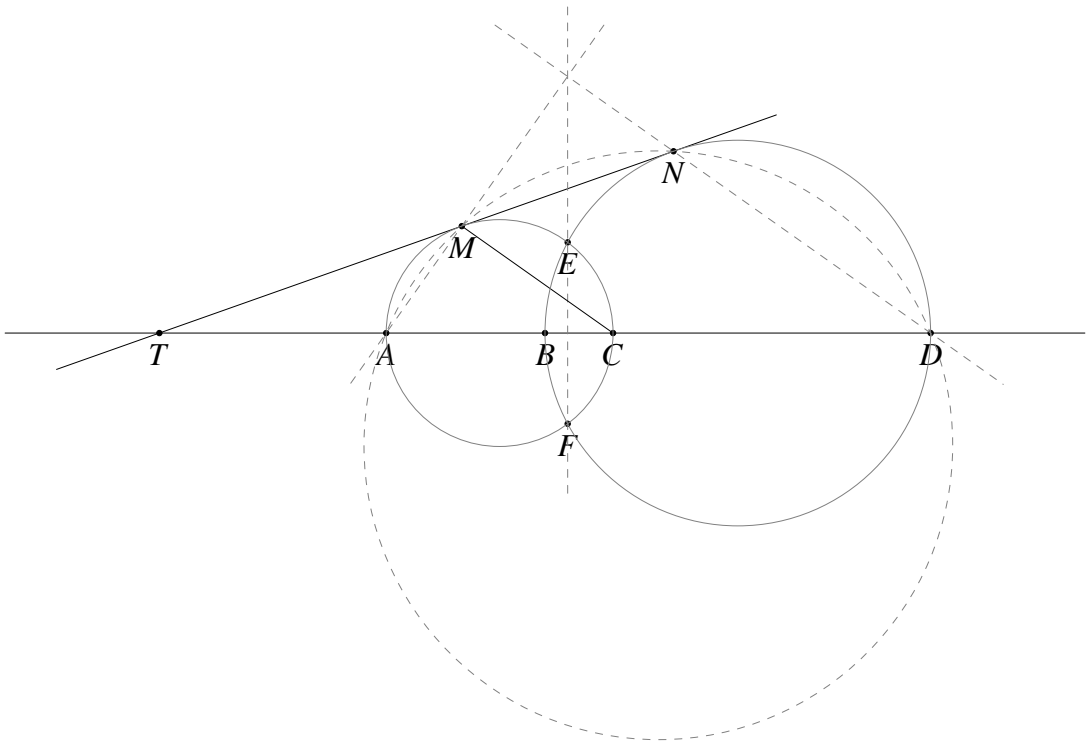
On introduit H l'orthocentre de ABC et on montre facilement qu'il est sur l'axe radical des trois cercles en calculant sa puissance par rapport à chaque cercle puis en utilisant entre autres $EADB$ cyclique. Les cercles sont donc coaxiaux (leurs axes radicaux sont confondus) et ils se rencontrent en un point autre que O.

Solution de l'exercice 5



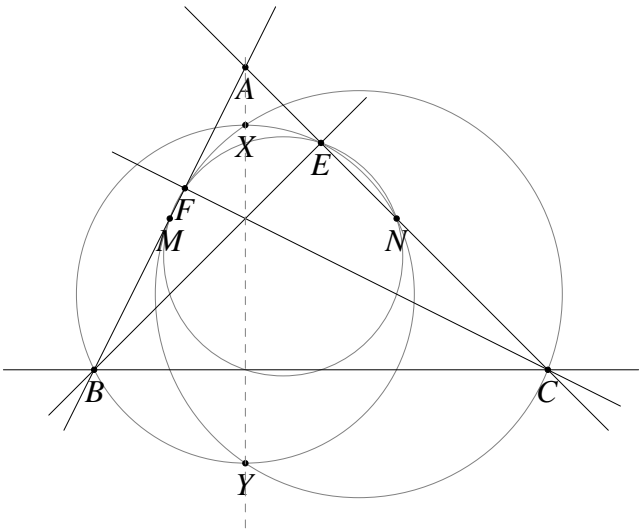
Soit M le milieu de $[OH]$. On nomme D l'intersection, autre que H, de (OH) avec le cercle de centre O et de rayon OH. On nomme C l'intersection, autre que O, de (OH) et du cercle de diamètre AB. Il faut montrer que M est sur l'axe radical des deux cercles. Pour cela, montrons que M a la même puissance par rapport aux deux cercles. On note $d = MO$. On a $MH = d$ et $OH = 2d$, mais on a aussi $HC = MO = 2d$ par symétrie d'axe (AB) et $OD = OM = 2d$ par symétrie de centre O. On a donc $MO \cdot MC = d \cdot 3d = 3d^2$ et $MH \cdot MD = d \cdot 3d = 3d^2$, d'où $MO \cdot MC = MH \cdot MD$, ce qui conclut par puissance du point M.

Solution de l'exercice 6



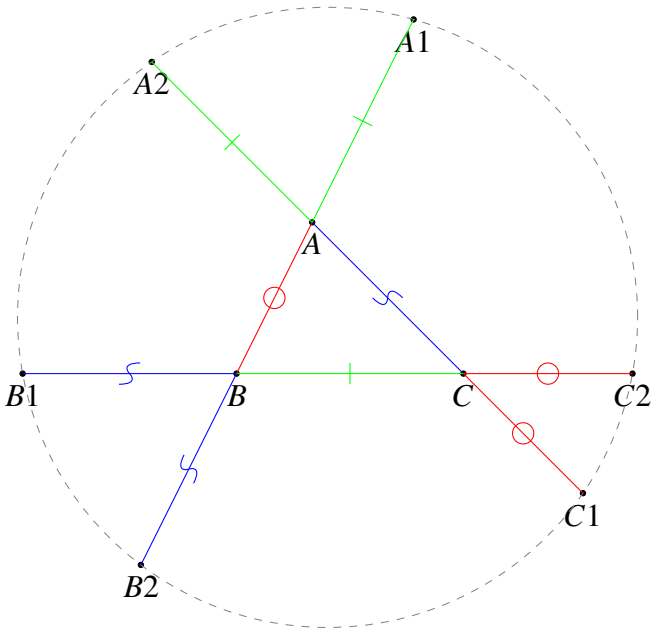
La concourance revient à montrer que $AMND$ est cyclique par théorème du centre radical. De plus, par homothétie, on a (MC) parallèle à (ND). On conclut avec le théorème de l'angle inscrit car $\widehat{TMA} = \widehat{MCA} = \widehat{NDA}$.

Solution de l'exercice 7



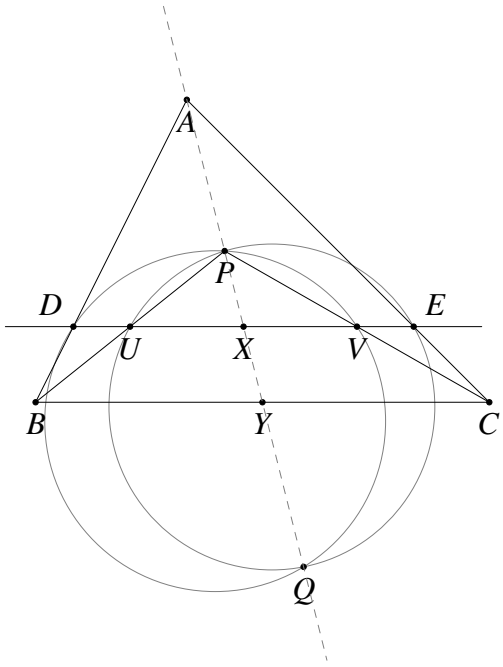
Soient E, F respectivement les pieds de hauteurs issues de B et C dans ABC. Alors E, F, M, N sont cocycliques sur le cercle d'Euler (on peut par exemple le montrer par simple chasse aux angles en utilisant $(MN)//(BC)$ et $BCEF$ cyclique). De plus E et F sont clairement sur les cercles de diamètre $[BN]$ et $[CM]$ respectivement. Ainsi A est le centre radical de $(FEMN), (MFXY), (NEXY)$, et donc A est sur (XY) qui est l'axe radical de $(MFXY)$ et $(NEXY)$. De plus cet axe radical est perpendiculaire à la droite joignant leurs centres, c'est-à-dire (MN), et donc est perpendiculaire à (BC). (XY) est donc la hauteur issue de A dans ABC.

Solution de l'exercice 8



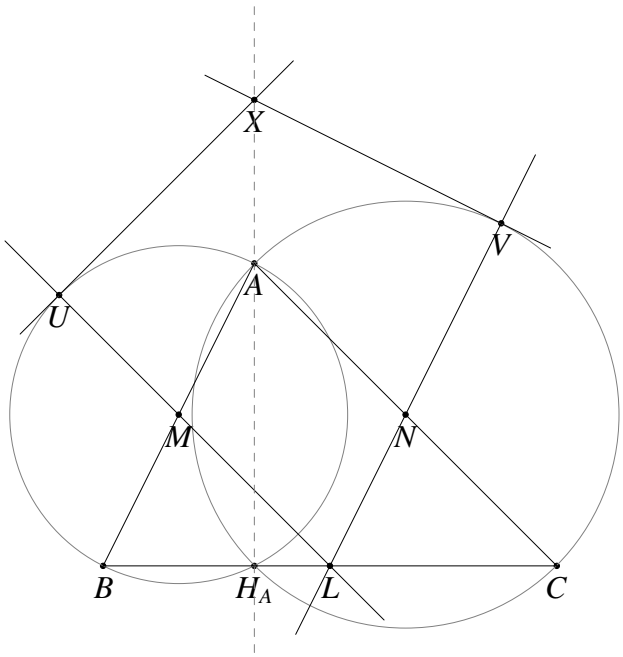
Tout d'abord, montrons que $A_1A_2B_2C_1$, $B_1B_2C_2A_1 et C_1C_2A_2B_1$ sont cycliques. Posons $a = BC$, $b = CA$ et $c = AB$. On a $AA_1AB_2 = a(c + b)$ et $AA_2AC_1 = a(b + c)$, d'où $AA_1AB_2 = AA_2AC_1$. Donc $A_1A_2B_2C_1$ est cyclique, de même que $B_1B_2C_2A_1$ et $C_1C_2A_2B_1$. Il suffit donc de montrer que les cercles circonscrits de ces quadrilatères sont confondus pour conclure. Supposons qu'ils sont disjoints. Leurs axes radicaux sont alors (A_1B_2), (B_1C_2) et (C_1A_2). Ce sont les côtés du triangle ABC. Ceci est une contradiction car les axes radicaux doivent être concourants.

Solution de l'exercice 9



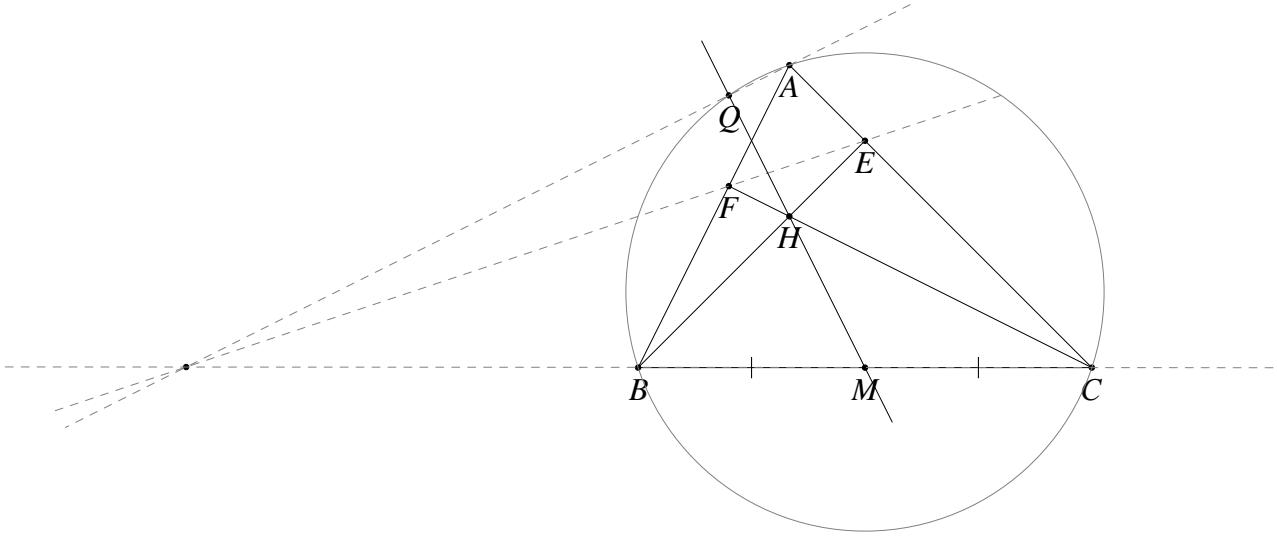
Soient X, Y les intersections de (AP) avec (DE), (BC) respectivement. On a alors par Thalès $\frac{XU}{XV} = \frac{YB}{YC} = \frac{XD}{XE}$, d'où $XU \cdot XE = XV \cdot XD$, et ainsi X appartient à l'axe radical de (PEU) et (PDV), qui est donc (PX) et donc A est aussi dessus, c'est-à-dire A est sur (PQ) comme voulu.

Solution de l'exercice 10



Puisque Γ_1 et Γ_2 passent par H_A le pied de hauteur issue de A dans ABC, il suffit de montrer que X est sur leur axe radical, c'est-à-dire $XU = XV$. On remarque alors $LM = NA = NV$ et $LN = MA = MU$ donc $LU = LV$. De plus $\widehat{LMX} = 90 = \widehat{LNX}$, ce qui nous donne bien l'égalité voulue.

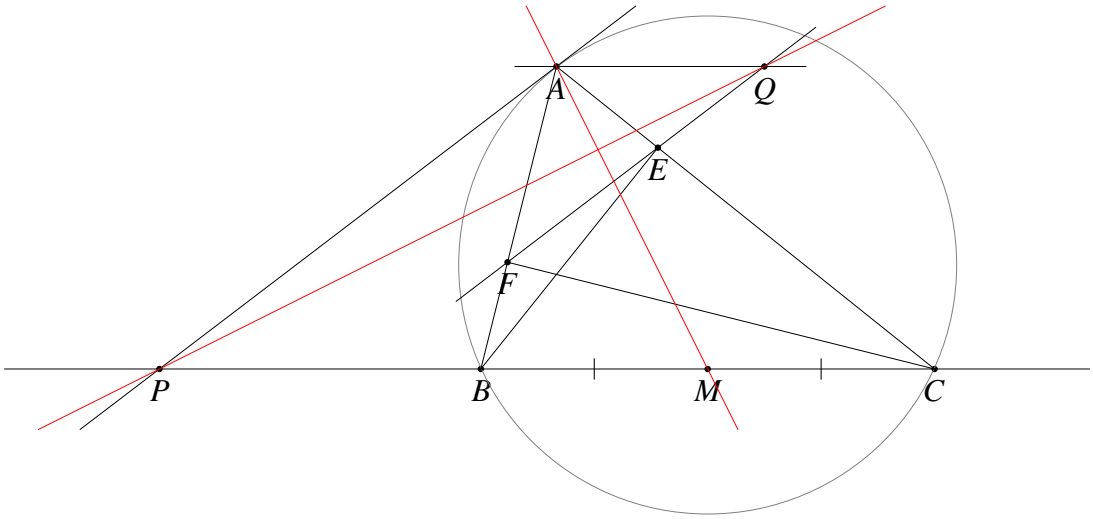
Solution de l'exercice 11



On note D le pied de hauteur issue de A, U le symétrique de H par (BC) et V le symétrique de H par M. On peut montrer par chasse aux angles que U et V sont sur (ABC). Ainsi on a

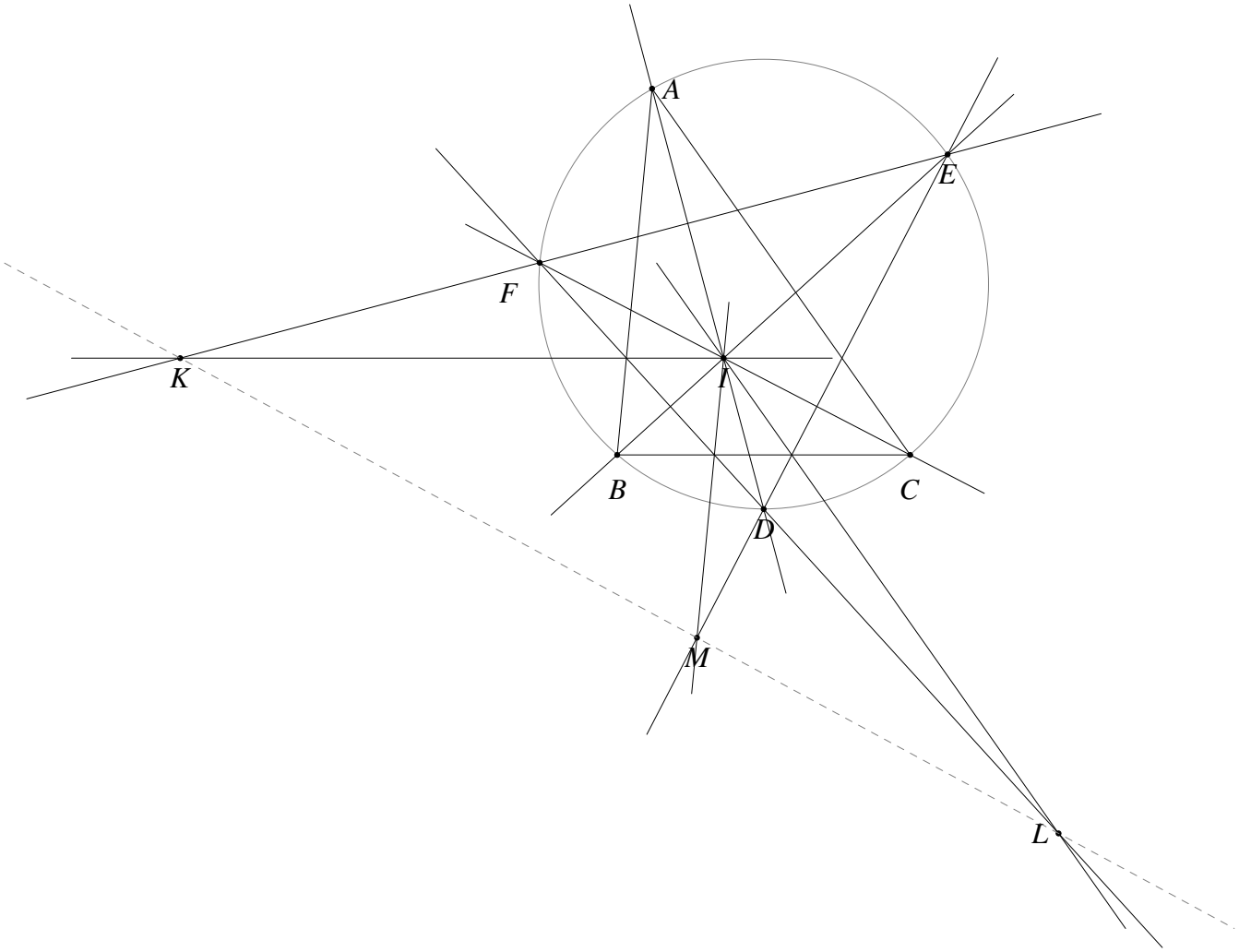
$\widehat{HQA} = \widehat{VQA} = \widehat{VUA} = \widehat{MDA} = 90$ et donc $AHEFQ$ cyclique par angle inscrit. On peut alors conclure avec le théorème du centre radical sur $(AQEF)$,$(EFBC)$ et (ABC).

Solution de l'exercice 12



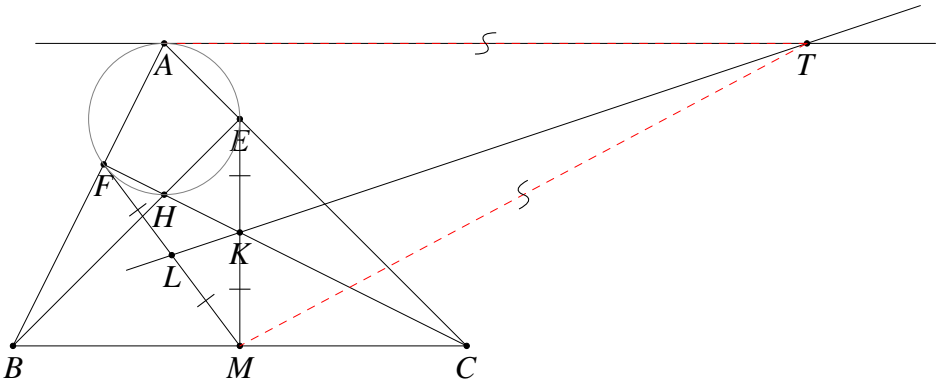
Par puissance d'un point on a $PA^2 = PB \cdot PC$ donc P est sur l'axe radical d du cercle point A et de $(BCFE)$. On a $\widehat{QAE} = \widehat{QAC} = \widehat{ACB} = \widehat{AFE}$ par angle inscrit donc (AEF) est tangent à (QA) et donc par puissance d'un point, $QA^2 = QE \cdot QF$ et donc Q est aussi sur d. Puisque M et A sont les centres des cercles mentionnés, on obtient la relation voulue.

Solution de l'exercice 13



Par angle inscrit puis parallélisme on a $\widehat{FEI} = \widehat{FCB} = \widehat{FEI} = \widehat{FIK}$ et donc (KI) est tangente à (FIE) : cela signifie $KI^2 = KE \cdot KF$ et donc K est sur l'axe radical de (ABC) et du cercle point (I). De même, L et M sont également sur cet axe et on en déduit l'alignement voulu.

Solution de l'exercice 14



On note H l'orthocentre de ABC. Remarquons que (MF) et (ME) sont tangentes au cercle $(AEFH)$ de diamètre $[AH]$ (on peut le voir avec une chasse aux angles par exemple : $\widehat{HAF} =$

$\widehat{FCM} = \widehat{MFH}$ car M est le centre de $(BFEC)$). Ainsi les points K et L, qui sont les milieux des segments $[ME]$ et $[MF]$ respectivement, ont la même puissance par rapport au cercle de diamètre $[AH]$ et au cercle-point M : on en déduit que l'axe radical de ces cercles est (KL) et donc que T a également la même puissance par rapport aux deux cercles. Clairement (TA) est perpendiculaire à (AH) et donc (TA) est tangente au cercle de diamètre $[AH]$: on en déduit $TA^2 = TM^2$, c'est-à-dire $TA = TM$ ce qui est l'égalité voulue.

6 Variants/invariants (Aimeric)

Théorème 1 (Algorithme d'Euclide)**.**
Si on part de deux entiers naturels (a, b), en remplaçant autant de fois que nécessaire le plus grand des deux nombres par son reste modulo le plus petit, on arrivera à $(\text{pgcd}(a, b), 0)$

Démonstration. On remarque que le min des deux décroit strictement à chaque étape. Puisqu'il est positif, il va atteindre 0 en un nombre fini d'étapes. Les diviseurs communs à a et b sont aussi ceux communs à $a - kb$ et b, donc à chaque étape $\text{pgcd}(a, b)$ est conservé. Ainsi, on va arriver à $(\text{pgcd}(a, b), 0)$ □
On a utilisé un invariant et un monovariant.

Définition 2.
Lorsque l'on répète des opérations, il peut être utile d'extraire du problème des quantités, nommées invariants qui ne changent pas ou (mono)variants qui changent de manière contrôlée (de manière monotone). Les invariants donnent souvent des informations sur le résultat, les variants également sur le nombre d'étapes d'un algorithme.

Exercice 1 (Solutions d'expert)
On part de 2^{2023} et, plusieurs fois, on retire son dernier chiffre au nombre pour l'ajouter au nombre sans le chiffre des unités. On répète cette opération jusqu'à n'avoir plus que dix chiffres. Prouver que deux d'entre eux sont égaux.

Exercice 2 (Poly 2018)
On a 2023 piles de jetons. Sur la i-ème pile, il y a p_i jetons, où p_i est le i-ème nombre premier.
On s'autorise :
— à séparer une pile en deux autres et ajouter un jeton à l'une des deux piles ainsi créées.
— à fusionner deux piles et ajouter un jeton à la pile créée.
Peut-on aboutir à la situation avec 2023 piles de 2023 jetons chacune ?

Exercice 3 (Solutions d'expert)
On dispose d'un carré de pièces 4×4. On peut retourner toutes les pièces d'une ligne, d'une colonne ou d'une diagonale (ex : $(0, 1), (1, 0)$ est une diagonale, les coins également). On part des deux premières pièces de la première rangée sur pile, les autres sur face. Prouver que l'on ne peut pas avoir toutes les pièces sur face.

Exercice 4 (Poly 2021)
Sur une île se trouvent 2023 caméléons. Parmi eux, on compte 800 caméléons bleus, 220 caméléons blancs et 1003 caméléons rouges. Puis, lorsque deux caméléons de couleurs différentes se rencontrent, ils changent tous les deux de couleur, et prennent la troisième couleur. Prouver

qu'il est possible que, après un certain temps, tous les caméléons soient de la même couleur. Est-il possible qu'ils prennent une autre couleur ?

Solution de l'exercice 1
On reconnaît les critères de divisibilité par 3 ou 9 : le nombre ne change pas modulo 3. Si les dix chiffres finaux étaient différents, on devrait avoir $2^{2023} = 1 + 2 + \cdots + 8 + 9 = 0$ modulo 3, impossible.

Solution de l'exercice 2
En testant les différentes possibilités, on remarque que la parité du nombre de piles paires ne change pas : elle est impaire au début mais paire à la fin, impossible.

Solution de l'exercice 3
Pour chaque pièce, on compte 1 si elle est pile et 0 sinon, modulo 2. La transformation correspond donc à ajouter 1 sur une ligne/colonne/diagonale. On considère la somme de ces nombres pour les deux pièces au centre de chaque côté extérieur (ex : $(0,1)$ et $(0,2)$ pour le côté de gauche). Chaque transformation ajoute 2 ou 0, donc cette quantité est invariante. Elle vaut 1 au début mais on veut 0 dans notre situation finale : impossible.

Solution de l'exercice 4
On regarde modulo 3 en comptant 1 pour chaque caméléon bleu, -1 pour chaque blanc : cette quantité est invariante (enlever un de chaque ne change pas le total, on aura $+3$ si un blanc et rouge se croisent et -3). Pour avoir uniquement des caméléons rouges à la fin, cet invariant doit valoir 0 : or ce n'est pas le cas au départ. De même, il ne peut pas y avoir uniquement des caméléons blancs.
De plus, il est possible de transférer 3 caméléons d'une couleur à une autre si aucune couleur n'est éteinte : si on considère six caméléons répartis $(4,1,1)$ selon trois couleurs, on peut arriver aux situations $(3,0,3)$, $(2,2,2)$ puis $(1,4,1)$ en faisant se rencontrer les bons caméléons. De cette manière, 783 caméléons rouges peuvent devenir bleus, puis les 220 blancs et rouges restants se rencontrent pour faire des caméléons bleus.

Beaucoup d'invariants sont des sommes avec un modulo, des études de parité etc. Lorsqu'un problème comporte des objets ayant n états, il peut souvent être utile de regarder modulo n.

Exercice 5 (Poly 2018)
Trois fourmis sont en $(0,1), (1,0), (1,2)$. À chaque étape, l'une se déplace selon la droite parallèle aux deux autres. Peuvent-elles se retrouver dans la situation $(0,0), (0,1), (1,0)$?

Solution de l'exercice 5
On remarque que l'aire du triangle formé par les fourmis est invariante. Au départ, on a une aire de 1, mais au final de $\frac{1}{2}$. C'est donc impossible.

Exercice 6 (Poly 2018)
On écrit n fois 1 sur une ligne, et on se propose de de remplacer deux nombres a et b par $\frac{a+b}{4}$. Montrer que le nombre obtenu lorsqu'il n'en reste plus qu'un est plus grand que $\frac{1}{n}$.

Exercice 7 (Poly 2021)
On commence par inscrire n nombres au tableau. On choisit à chaque étape d'en remplacer deux par $\text{ppcm}(a,b)$ et $\text{pgcd}(a,b)$. Montrer qu'au bout d'un moment, le tableau ne changera plus.

Exercice 8 (Poly 2018)
Dans une classe, chaque élève en déteste au maximum trois autres (de manière réciproque). Montrer qu'on peut la séparer en deux équipes telles que chaque personne ait au maximum un ennemi dans son équipe.

Solution de l'exercice 6
Non modifié.

Solution de l'exercice 7
On choisit d'écrire le ppcm à droite et le pgcd à gauche. On utilise l'ordre lexicographique : quand on compare deux n-uplets, on utilise le premier nombre. Si ils sont égaux, on utilise le deuxième etc. On peut prouver qu'il n'existe pas de chaîne positive infinie strictement descendante par l'ordre lexicographique, comme avec les entiers. Enfin, on remarque qu'à chaque étape la nouvelle séquence est strictement inférieure (si, parmi les deux nombres choisis, l'un ne divise pas l'autre ou si le plus grand et à gauche) ou égale (si le nombre de gauche divise le nombre de droite).

Solution de l'exercice 8
Non modifié.

Exercice 9 (Shortlist OIM 2006)
Sur une grille $n \times n$, on a une fraise exactement par colonne et une par ligne, ainsi que une prune. Pour chaque rectangle ayant pour sommet le coin supérieur gauche, il y a plus de prunes que de fraises. On s'autorise à changer des positions comme ceci : pour un rectangle contenant exactement deux fraises en haut à droite et en bas à gauche (et aucune autre), on déplace ces deux fraises vers les deux autres coins. Prouver qu'il est possible de se retrouver avec une fraise par case où il y a une prune.

Solution de l'exercice 9
On note $f(x, y)$ le nombre de fraises dans le carré de sommet (x, y), $g(x, y)$ pour les prunes avec le sommet en haut à gauche qui vaut $(0, 0)$. Le monovariant important est suggéré dans l'énoncé : la somme pour chaque rectangle du nombre de fraises dedans. Si on arrive à trouver une transformation qui conserve la propriété et qui augmente notre monovariant, on aura gagné. En effet, au final il y aura la même somme sur les rectangles de fraises et de prunes, et comme il y a plus de prunes à chaque fois il y en aura autant pour chaque rectangle. La seule façon d'avoir autant est d'avoir les fraises et les prunes aux mêmes emplacements : en effet, le nombre de fraises dans une case (x, y) vaut $f(x, y) - f(x-1, y) - f(x, y-1) + f(x-1, y-1)$.
On prend le rectangle minimal par hauteur puis largeur qui contient strictement plus de prunes que de fraises. On a donc une prune sans fraise dans le coin inférieur droit : notons cette case A.
Il existe une fraise sur la même ligne et sur la même colonne (à droite, B et en bas, C) qui forment un rectangle. On prend la fraise la plus haute après la ligne de B contenue entre les colonnes de A et B : cela peut être C mais pas B. On note cette case X et on effectue alors l'opération avec X et B. On rappelle que en A, $g(A) > f(A)$.
Comme il n'y a pas d'autre fraise dans le rectangle de sommets A et X, on a également $g(P) > f(P)$ pour tout point dans I, le rectangle de sommets X et B auquel on enlève les côtés du bas et de droite. De plus, cette opération augmente $f(P)$ de 1 dans I, et laisse le nombre de fraises de tous les autres rectangles inchangés. On a donc bien toujours $g(P) \geqslant f(P)$ partout, et on a augmenté la somme du nombre de fraises par rectangle.

Exercice 10 (OIM 2019 et polys précédents)
On a n pièces alignées de gauche à droite. Si k pièces sont du côté pile, on retourne la k-ième (en partant de 1) ; si elles sont toutes du côté face, on s'arrête.
- Montrer que ce processus se finit toujours.
- Calculer la moyenne du nombre d'étapes nécessaires sur toutes les positions de départ possibles.

Solution de l'exercice 10
Non modifié.

Exercice 11 (APMO 2020)
On écrit $n \geqslant 3$ fois le nombre 1 sur un tableau, on dispose de deux seaux en-dessous. À chaque étape, on efface deux nombres a et b, on écrit 1 et $a+b$ à la place, on ajoute une pierre dans le premier seau et $\text{pgcd}(a,b)$ dans le deuxième. Après un certain nombre d'étapes, si s est le nombre de pierres dans le premier seau et t dans le deuxième, on calcule $\frac{t}{s}$. Montrer que $\frac{t}{s} \in [1, n-1[$.

Solution de l'exercice 11
On voit tout de suite que t augmente de plus que s à chaque tour, donc $\frac{t}{s} \geqslant 1$ À chaque étape, on ajoute une pierre à s et un au total des nombres inscrits. Ainsi, si p est la somme des nombres inscrits, on a l'invariant : $p - s = n$.

Voyons si on peut trouver un majorant pour t, de la forme $q = \sum a_i x_i$, où les x_i sont nombres écrits au tableau et les a_i des coefficients astucieusement choisis. q varierait à chaque tour si on fait l'opération sur deux nombres consécutifs de $a_{i+1}(x_{i+1} + x_i) + a_i - (a_i x_i + a_{i+1}x_{i+1}) = x_i(a_{i+1} - a_i) + a_i$. Avec $a_i = i$, on a une variation à chaque fois de $x_i + a_i \geqslant \text{pgcd}(x_i, x_{i+1})$, donc $q - t$ est un monovariant. Il semble difficile d'en trouver un plus précis qui croirait moins vite, car il est possible d'avoir un pgcd qui vaut effectivement x_i, et a_i devient négligeable devant x_i après un assez grand nombre d'étapes. On vérifie que cela reste vrai si on applique l'opération à deux nombres qui ne sont pas consécutifs.
Au départ, il vaut $\sum_{k=0}^{n-1} = \frac{n(n-1)}{2}$. On a un invariant sur le total des nombres et s, donc essayons de relier p et q : notre monovariant vaut au maximum, si on a des 1 partout sauf le dernier nombre

$$\begin{aligned} q &\leqslant (n-1)(p-(n-1)) + (1 + \cdots + n - 2) \\ &= (n-1)(p-(n-1)) + (n-1-1) + (n-1-2) + \cdots + (n-1-(n-1)) \\ &= p(n-1) - \frac{n(n-1)}{2} = s(n-1) + \frac{n(n-1)}{2} \end{aligned}$$

d'après notre invariant.

On a donc :

$$\begin{aligned} t &\leqslant q - \frac{n(n-1)}{2} \\ &\leqslant s(n-1) \end{aligned}$$

en réinjectant la majoration trouvée de q.

Toutefois, ce n'est pas exactement ce qui est recherché, on demande une inégalité stricte. On peut résoudre cela en trouvant une meilleure minoration de notre monovariant croissant :

au terme du deuxième tour, $q-t = \sum_{k=0}^{n-2} k+2(n-1)-1 = \frac{(n+2)(n-1)}{2}-1 > \frac{n(n-1)}{2}$. Ainsi, en remplaçant $\frac{n(n-1)}{2}$ par $\frac{(n+2)(n-1)}{2} - 1$ dans le calcul précédent, on obtiendra une inégalité stricte.
On peut même prouver réciproquement que chaque rationnel est atteint.

7 Double comptage 2 (Maena & Émile)

Double comptage

Exercice 1
Soit S un ensemble de n points dans le plan tel que trois points de S ne soient jamais sur une même droite. Montrez que le nombre de triangles d'aire 1 dont les trois sommets sont dans S est d'au plus :

$$\frac{2n(n-1)}{3}$$

Solution de l'exercice 1
Considérons tous les triplets de points (P, Q, R) de points de S tels que le triangle PQR soit d'aire 1, soit N le nombre de tels triplets. Si P, Q sont fixés, alors les points R tels que PQR soit d'aire 1 sont situés sur deux droites parallèles à (PQ). Sur chacune des droites, il y a au plus 2 points de S, donc il y a au plus 4 points R qui fonctionnent. Ainsi, N est au plus $4 \times n(n-1)$. Maintenant, un triangle PQR correspond à 6 triplets comptés dans N, qui correspondent à toutes les permutations de P, Q, R. Le nombre de triangles est donc

$$\frac{N}{6} \leq \frac{4n(n-1)}{6} = \frac{2n(n-1)}{3}.$$

Exercice 2 (Formule d'Euler)
Considérons un polyèdre (convexe) à S sommets, A arêtes et F faces. Montrer que

$$S + F = A + 2.$$

Solution de l'exercice 2
On montre le résultat par récurrence sur le nombre S de sommets. Comme trois points sont toujours coplanaires, le polyèdre avec le plus petits nombres de sommets est le tétraèdre, avec $S = 4, A = 6$ et $F = 4$, on vérifie que la formule est effectivement correcte. Montrons à présent l'hérédité.

Supposons que la formule d'Euler soit vraie pour tous les polyèdres à n sommets, et considérons un polyèdre P à $S = n + 1 \geq 5$ sommets. Supposons alors que x est relié aux points $y_1, y_2, \ldots, y_k$ dans cet ordre en tournant autour de x. On va se ramener à un polygone P' à n sommets en "retirant" x. Pour ceci, on ramène les sommets $y_1, \ldots, y_k$ sur un même plan. Ensuite, pour tout i tel que y_i n'est pas relié à y_{i+1} par une arête (avec $y_{k+1} = y_1$), on rajoute une arête entre y_i et y_{i+1}, ce qui rajoute une arête et une face, puisque la face contenant x, y_i et y_{i+1} comme sommets est séparée en deux. Maintenant, on supprime x, ainsi que toutes les arêtes reliant x à un y_i. Alors S diminue de 1 et A diminue de k. D'un côté, on a supprimé toutes les k faces triangulaires xy_iy_{i+1}, mais on a rajouté une face $y_1y_2 \ldots y_k$, donc F diminue de $k-1$. Ainsi, $S - A + F$ reste constant, et vaut donc 2 par hypothèse de récurrence.

La preuve précédente est très subtile à faire rigoureusement, car par exemple si $y_1, \dots, y_k$ et x sont les seuls sommets de P, on se retrouve avec seulement une face. Il faudrait modifier la preuve pour prendre en compte ce cas, ce qui n'a pas été fait en cours afin de pouvoir passer plus de temps sur les exercices de double comptage.

Exercice 3
Un polyèdre possède 20 faces triangulaires. Déterminer son nombre de sommets et d'arêtes.

Solution de l'exercice 3
Effectuons un double comptage entre les faces et les arêtes, en reprenant les notations S, A, F de l'exercice précédent. Soit N le nombre de couples (f, a) avec f une face et a un arête qui est un côté de f. Alors d'un côté, si on fixe f, il y a trois arêtes qui marchent car toutes les faces du polyèdre sont triangulaires, et donc $N = 3F$. D'un autre côté, si on fixe a, il y a 2 faces qui marchent car une arête est le côté d'exactement deux triangles. On obtient donc $N = 2A$, et donc

$$A = \frac{3}{2}F = 30.$$

Maintenant, le nombre S de sommets est obtenu par la formule d'Euler

$$S = A - F + 2 = 12.$$

Exercice 4
Une permutation de $\{1, \dots, n\}$ est tirée au hasard. Combien a-t-elle de points fixes en moyenne ?

Solution de l'exercice 4
En tout, il y a $n!$ permutations. Comptons le nombre de couples (σ, k) avec σ une permutation et k un entier entre 1 et n, tel que k soit un point fixe de σ. Soit N le nombre de tels couples. Si m est la moyenne du nombre de points fixes d'une permutation prise au hasard, on a donc que $N = n! \times m$.

Maintenant, pour un élément k dans $\{1, \dots, n\}$, le nombre de permutations qui fixent k est égal au nombre de permutations de $\{1, \dots, n\} \backslash \{k\}$ (l'ensemble des entiers de 1 à n qui ne valent pas k), c'est-à-dire $(n-1)!$. Comme il y a n valeurs de k différentes, on a donc $N = n \times (n-1)! = n!$. Finalement, on obtient donc

$$m = 1.$$

Exercice 5
Soit k un entier naturel. Soit S un ensemble de n points dans le plan tel que :

— trois points de S ne soient jamais sur une même droite

— pour tout point P de S, il existe un réel r tel qu'il y ait au moins k points à distance r de P.

Montrez que :

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}.$$

Solution de l'exercice 5
L'énoncé nous assure que pour tout point P de S, il existe k points à égale distance de P. Ainsi, il semble intéressant de considérer les triangles isocèles, qui correspondent à deux points à même distance d'un même point. Soit donc N le nombre de triplets de points (P,Q,R) de S deux-à-deux distincts, et tel que PQR soit isocèle en P. D'un côté, si P est fixé, par hypothèse de l'énoncé, il existe k points à égale distance de P, ce qui donne $k(k-1)$ couples de points (Q,R) tels que PQR soit isocèle. Comme il y a n valeurs possibles pour P, on en déduit que $N \geq nk(k-1)$. Mais d'un autre côté, si on fixe un couple (Q,R) de points de S, alors les points P tels que PQR soit isocèle en P sont les points de S sur la médiatrice de $[QR]$, par hypothèse il ne peut y en avoir que deux au plus. Ainsi, comme il y a $n(n-1)$ choix pour le couple (Q,R), on trouve $N \leq 2n(n-1)$. On a donc

$$nk(k-1) \leq N \leq 2n(n-1)$$

$$\left(k^2 - \frac{1}{2}\right)^2 - \frac{3}{4} \leq 2n-2$$

et donc

$$\left(k - \frac{1}{2}\right)^2 < 2n$$

$$k - \frac{1}{2} < \sqrt{2n}$$

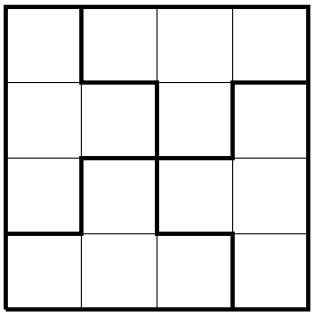
et finalement,

$$k < \frac{1}{2} + \sqrt{2n}$$

Pot pourri

Exercice 6
Considérons une grille $n \times n$. Un T-tetramino est un ensemble de quatre cases de la grille en "T". Trouver les valeurs de n telles que la grille $n \times n$ peut être recouverte par des T-tetramino sans chevauchement des pièces.

Solution de l'exercice 6
Si $4|n$, alors on peut couvrir chaque grille de côté 4 par le pavage suivant :



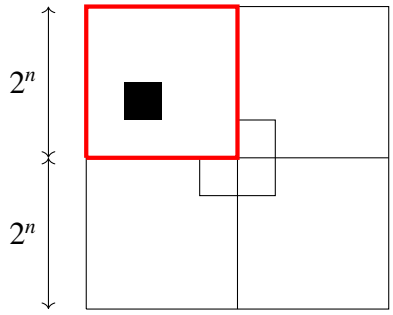
Montrons maintenant que pour que la grille soit pavable par des T, il est nécessaire que $4|n$. On colorie la grille en échéquier (donc il y a autant de cases blanches que de cases noires). Il y a deux types de T : ceux qui recouvrent trois cases blanches et une case noire, et ceux qui recouvrent trois cases noires et une case blanche. On note k le nombre de T de type 1. Comme il y a autant de cases blanches que de cases noires, il y doit y avoir autant de T de type 1 que de T de type 2. Il y a donc également k T de type 2, ce qui nous donne $3k + k$ cases blanches, de même pour les cases blanches. Il y a donc $4k + 4k = 8k$ cases au total. Donc $8|n^2$, ce qui implique que $4|n$.

Exercice 7
Soit $n \in \mathbb{N}$. On considère un quadrillage $2^n \times 2^n$ et on enlève une case. Est-il toujours possible, quelque soit la case enlevée, de couvrir le nouveau quadrillage avec des L-triominos ?

Solution de l'exercice 7
On raisonne par récurrence pour montrer que l'on peut effectivement paver le quadrillage quelque soit la case retirée.

Si $n = 1$, on a un carré de côté 4×4. Quand on enlève une case, on peut bien placer un L-triominos sur les trois cases restantes.

On suppose que c'est vrai pour $n \in \mathbb{N}$. On considère un carré $2^{n+1} \times 2^{n+1}$ et on le divise en 4 grands carrés donc de taille $2^n \times 2^n$. Un de ces grands carrés possède la case retirée, par hypothèse de récurrence celui-ci peut être pavé par des L-triominos. On place ensuite un triomino au centre de la grille sur les trois grands carrés restants comme dans la figure suivante. Par hypothèse de récurrence, chacun de ces trois carrés restants privés de la case prise par le triomino déjà placé peut être pavé par des L-triominos. Ainsi, le quadrillage total peut effectivement être pavé par des L-triominos.



Exercice 8
On donne $2n$ points dans l'espace. On trace au total $n^2 + 1$ segments entre ces points. Montrer qu'il y a au moins un ensemble de trois points reliés deux à deux.

Solution de l'exercice 8
On procède par récurrence pour montrer que si l'on a $2n$ points reliés par des segments sans que trois points soient reliés deux à deux, alors il y a au plus n^2 segments. Pour $n = 1$, l'énoncé est évident.

Supposons le résultat vrai au rang n et montrons le au rang $n + 1$. Soient donc $2n + 2$ points reliés par des segments sans que trois points soient reliés deux à deux. S'il n'y a aucun segment, on a démontré le résultat voulu. Sinon, il existe deux points A et B reliés par un segment. Alors entre les $2n$ points restants, l'hypothèse de récurrence nous assure qu'il y a au

plus n^2 segments. Mais si l'on considère les segments issus de A où B vers un de ces $2n$ points, il ne peut pas y en avoir plus de $2n$, car sinon par le principe des tiroirs un des $2n$ points C est relié à A et B et les points A, B, C sont reliés deux à deux. Mais alors le nombre de segments dans le plan vaut au plus

$$n^2 \text{ (entre les 2n points)} + 2n \text{ (de A ou B vers les 2n points)} + 1 \text{ (entre A et B)}$$
$$= (n+1)^2$$

ce qui conclut.

Exercice 9
On considère $n \geq 3$ points du plan, pas tous alignés. Chaque point porte un nombre, de sorte que la somme sur chaque droite passant par au moins deux points vaut 0. Montrer que tous les nombres valent 0.

Solution de l'exercice 9
Pour un point P, notons s_P la valeur portée par ce point. Alors pour chaque point P, considérons l'ensemble $\mathcal{D}$ des droites passant par P et au moins un autre des n points. Il y en a au moins deux car tous les n points ne sont pas alignés. De plus, sur chaque droite de $\mathcal{D}$, la somme des nombres sur les points est nulle. En sommant toutes les sommes sur $\mathcal{D}$, on a

$$0 = \sum_{(d)\in\mathcal{D}} \sum_{Q\in(d)} s_Q = S + (|\mathcal{D}| - 1)s_P$$

où on a noté par S la somme de tous les s_Q pour Q appartenant à S. En effet, chaque point Q appartient à une et une seule droite de $\mathcal{D}$, sauf P qui appartient à toutes. Mais alors comme $|\mathcal{D}| - 1 > 0$, on a que si $S = 0$, alors tous les s_P sont nuls. Sinon, tous les s_P sont de signes opposés à S, mais c'est absurde car S est la somme de tous les s_P. Ainsi, tous les s_P sont bien nuls.

8 TD de Géométrie (Pierre-Marie)

Quelques éléments de cours

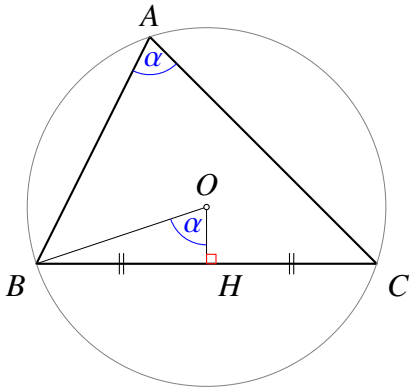
Théorème 1 (Loi des sinus)**.**
Soit ABC un triangle de surface S, dont le cercle circonscrit Γ est de rayon R.
On note $BC = a, CA = b, AB = c$. Alors

$$\frac{a}{\sin\widehat{A}} = \frac{b}{\sin\widehat{B}} = \frac{c}{\sin\widehat{C}} = 2R = \frac{abc}{2S}.$$

Démonstration. Introduisons O le centre de Γ, et H le projeté orthogonal de O sur (BC).
Alors par théorème de l'angle au centre, $\widehat{BOC} = 2\widehat{A}$, et puisque (OH) est la médiatrice de $[BC]$, $\widehat{BOH} = \frac{1}{2}\widehat{BOC} = \widehat{A}$. Dans le triangle rectangle BOH, la trigonométrie nous donne $\sin\widehat{A} = \frac{BH}{BO} = \frac{a/2}{R}$ ce qui donne effectivement $\frac{a}{\sin\widehat{A}} = 2R$. On montre les relations relatives aux autres côtés de façon similaire.
On veut désormais montrer la dernière relation. Pour cela, essayons de trouver une façon astucieuse de calculer l'aire du triangle ABC :

$$S = \frac{1}{2}\sin\widehat{A} \cdot bc = \frac{1}{2}\left(\frac{a}{2R}\right)bc = \frac{abc}{4R}$$

D'où la dernière relation.



□

Théorème 2 (Lemme magique)**.**
Soit ABC un triangle, P un point sur (BC). Alors

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{PAC}}.$$

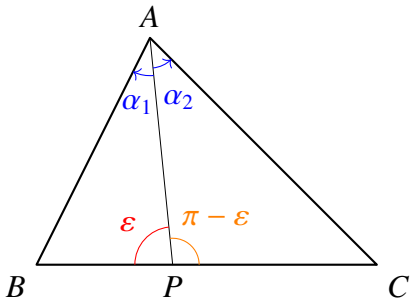
Démonstration. Appliquons la loi des sinus dans les triangles PAB et PAC :

$$\frac{PB}{\sin \widehat{PAB}} = \frac{AB}{\sin \widehat{APB}}, \qquad \frac{PC}{\sin \widehat{PAC}} = \frac{AC}{\sin \widehat{APC}}$$

Ainsi en constatant que $\sin \widehat{APC} = \sin(\pi - \widehat{APB}) = \sin \widehat{APB}$, on trouve

$$\frac{PB}{PC} = \frac{\frac{AB}{\sin \widehat{APB}} \cdot \sin \widehat{PAB}}{\frac{AC}{\sin \widehat{APC}} \cdot \sin \widehat{PAC}} = \frac{AB}{AC} \cdot \frac{\sin \widehat{PAB}}{\sin \widehat{PAC}}.$$

On passe aisément aux longueurs orientés en constatant que $\overline{PB}$ a le même signe que $\sin \widehat{PAB}$ (où l'angle est aussi orienté).



□

Théorème 3 (Théorème de la bissectrice)**.**
Soit ABC un triangle, D (resp. E) le pied de la bissectrice interne (resp. externe) issue de A. Alors

$$\frac{DB}{DC} = \frac{AB}{AC} = \frac{EB}{EC}.$$

Démonstration. Application immédiate du lemme magique. □

Sur les cours précédents

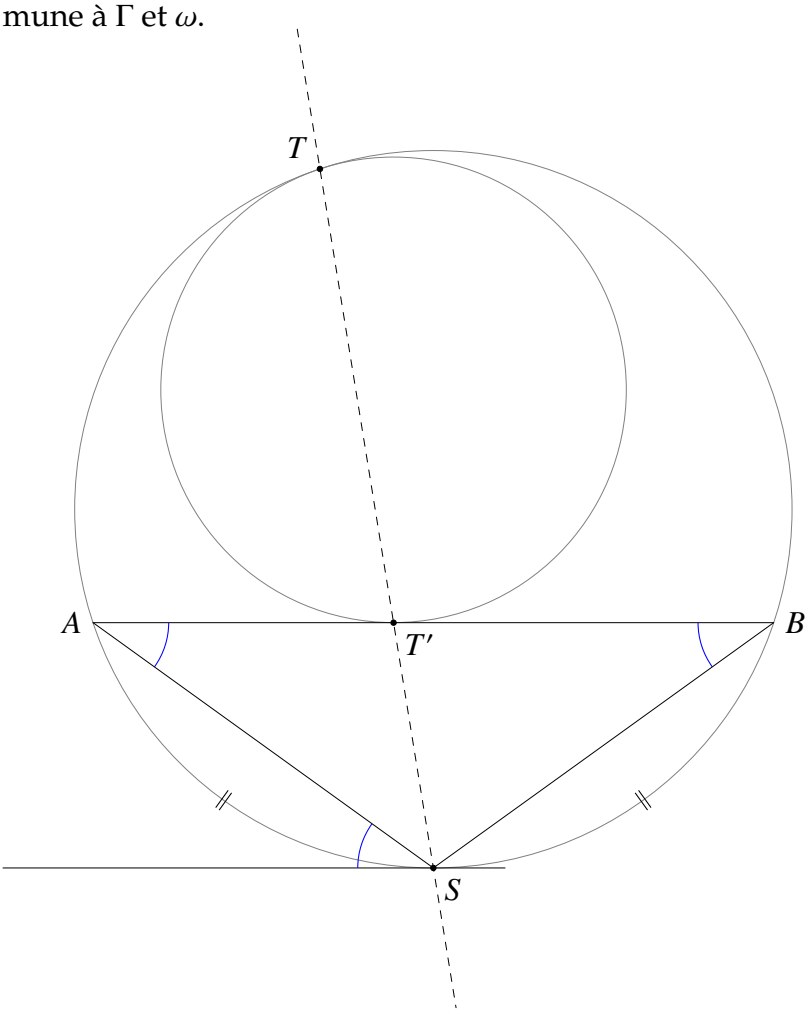
Exercice 1
Soit Γ un cercle, A, B deux points sur ce cercle. Soit ω un cercle tangent intérieurement à Γ en T, et tangent à (AB). Montrer que (TA) passe par le milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas T.

Solution de l'exercice 1
Appelons T' le point de tangence de Γ à (AB), et S la seconde intersection de (TT') et de Γ. Considérons l'homothétie de centre T envoyant ω sur Γ. Elle envoie (AB) sur (t), la tangente à Γ passant par S, et en particulier ces deux droites sont parallèles. Ainsi

$$\widehat{ABT} = \widehat{AS}t = \widehat{TAB}$$

Et nous en déduisons que S se trouve sur la médiatrice de $[AB]$, donc au milieu de l'arc $\overset{\frown}{AB}$ ne contenant pas T.

Il est aussi possible d'effectuer une chasse aux angles en introduisant la tangente commune à Γ et ω.

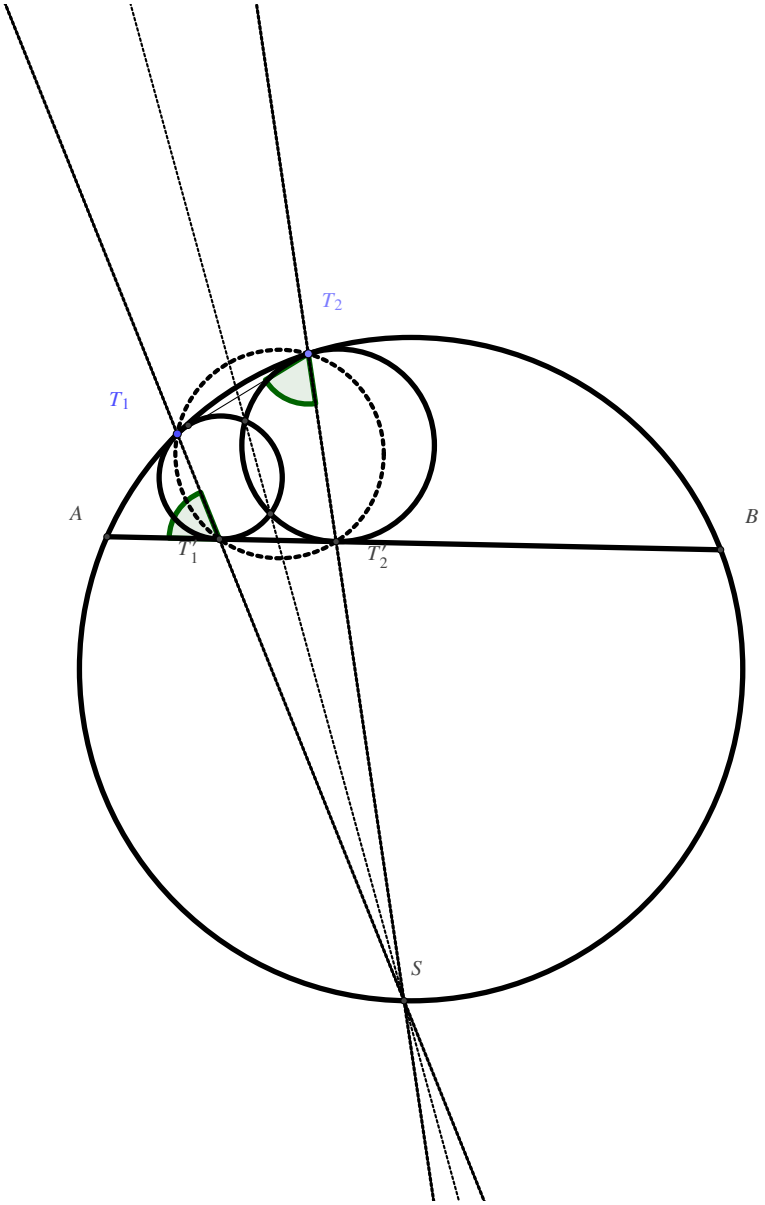


Exercice 2
Soit Γ un cercle, $[AB]$ une corde de ce cercle et ω_1, ω_2 deux cercles respectivement tangents

intérieurement à Γ en T_1 et T_2, et à (AB) en T_1' et T_2', tels que T_1 et T_2 soient du même côté de $[AB]$. Ces deux cercles sont sécants en C et D. Montrer que (CD) passe par le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas T_1.

Solution de l'exercice 2

En utilisant l'exercice précédent, et en introduisant S le milieu de l'arc $\widehat{AB}$ ne contenant pas T_1, on a que T_1, T_1', S sont alignés, et T_2, T_2', S aussi. Alors d'après propriété du pôle Sud, T_1, T_2, T_1', T_2' sont cocycliques. On peut s'en convaincre en calculant la valeur des arcs interceptés : .

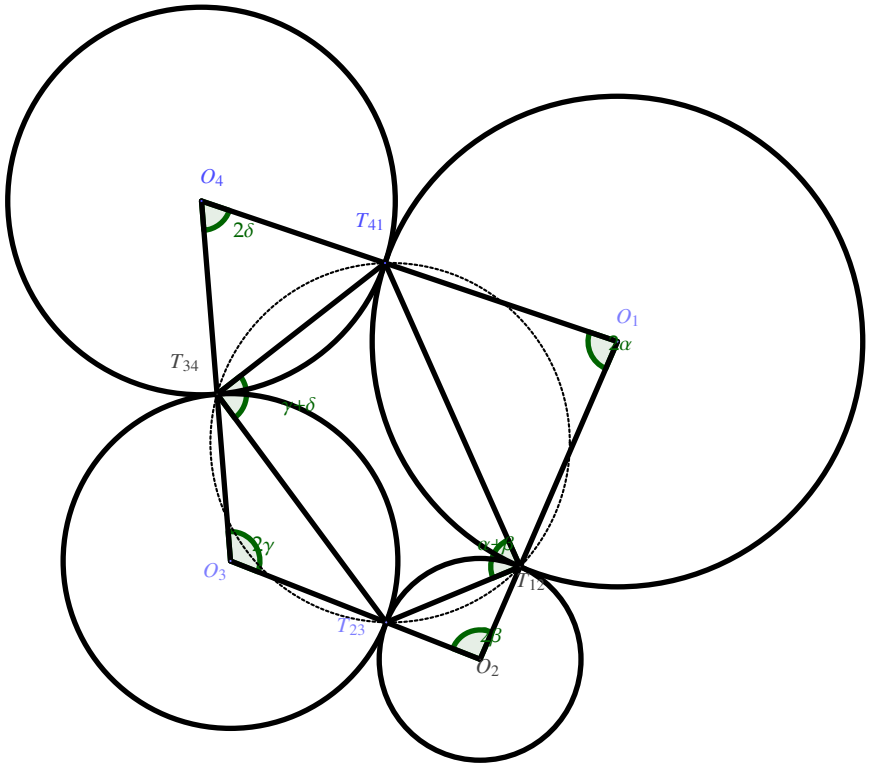


Exercice 3 (Lemme des quatre pièces de monnaie)
Soient quatre cercles $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ tangents extérieurement en quatre points $T_{12}, T_{23}, T_{34}, T_{41}$. Montrer que ces points sont cocycliques.

Solution de l'exercice 3

On introduit les centres O_1, O_2, O_3, O_4 des cercles. Notons que par propriété de tangence,

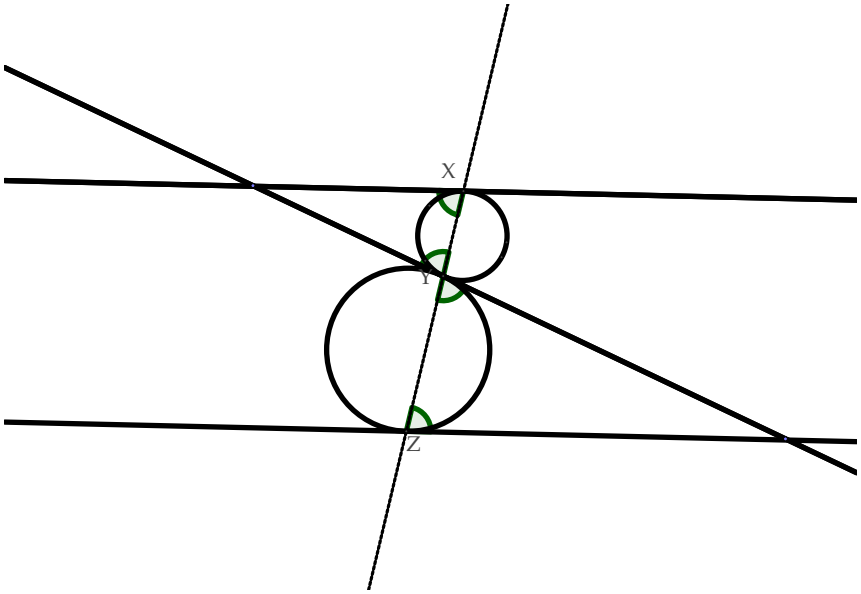
$O_iT_{i,i+1}O_{i+1}$ sont alignés. Notons $2\alpha_i = \widehat{O_{i-1}O_iO_{i+1}}$. Alors puisque $T_{i-1,i}O_iT_{i,i+1}$ sont des triangles isocèles en i, on trouve $\widehat{T_{41}T_{12}T_{23}} + \widehat{T_{23}T_{34}T_{41}} = (\alpha_1 + \alpha_2) + (\alpha_3 + \alpha_4) = 180°$.



Autre solution : Introduisons $t_{i,i+1}$ la tangente commune à Γ_i et Γ_{i+1} passant par $T_{i,i+1}$. Alors nous trouvons un multitude de triangles isocèles et une preuve similaire à la précédente permet de conclure.

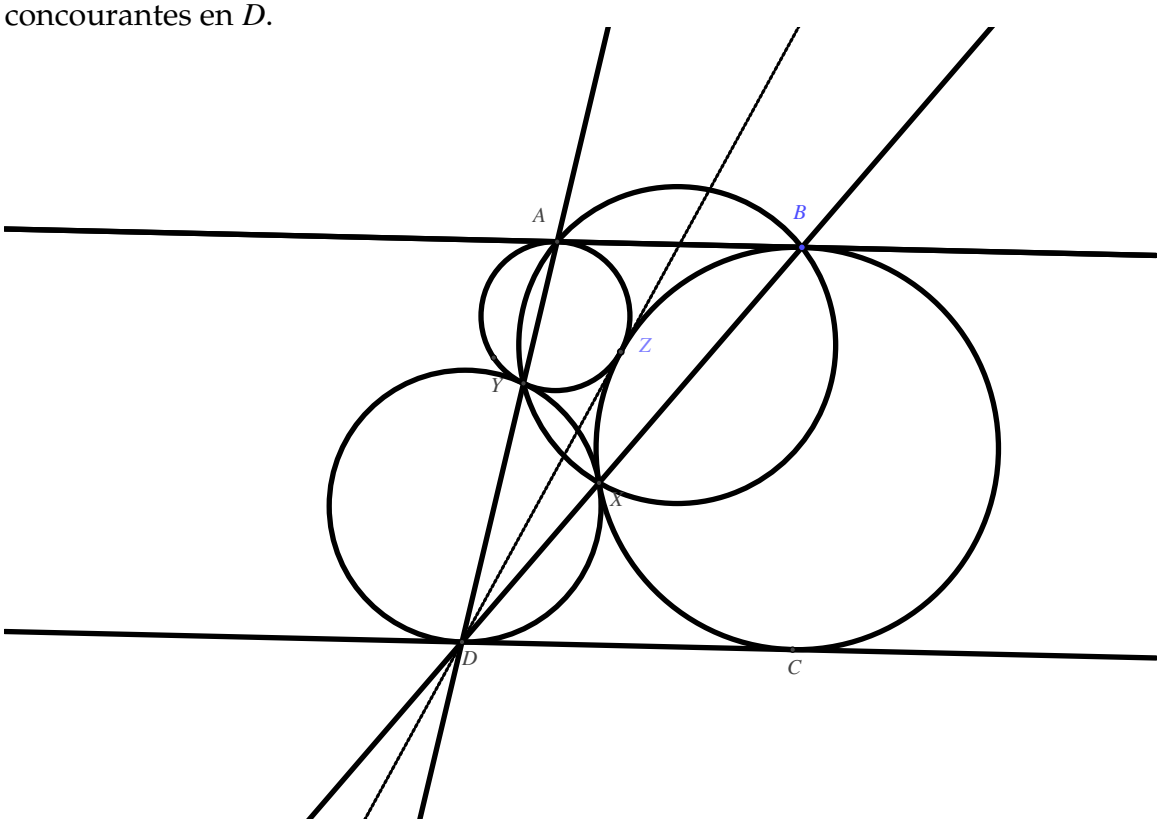
Exercice 4
Soient (d) et (d') deux droites parallèles. Soit Γ_1 un cercle tangent à (d) en X compris entre (d) et (d'), et Γ_2 un cercle tangent à (d') en Z et à Γ_1 en Y. Montrer que X, Y, Z sont alignés.

Solution de l'exercice 4
Introduisons la tangente commune aux deux cercles, (t) : alors par théorème de l'angle tangent, $\widehat{XYt} = \widehat{dXY} = \alpha$, et puisque (d) et (d') sont parallèles, $180 - 2\alpha = \widehat{t,d} = \widehat{t,d'}$. Enfin, dans le trilatère isocèle $t, d', (ZY)$, $\widehat{ZYt} = \alpha = \widehat{XYt}$ donc on en déduit que les points X, Y, Z sont alignés.



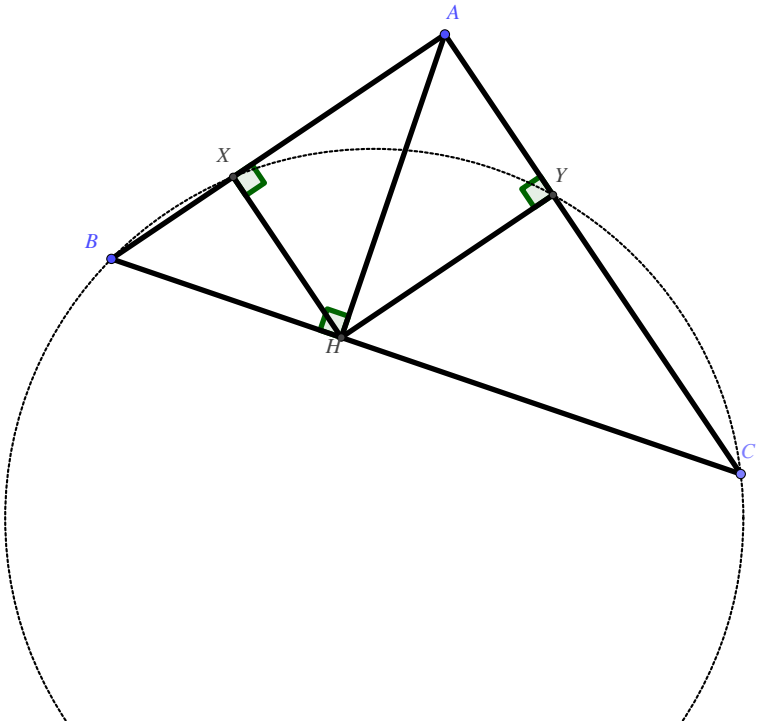
Exercice 5
Soient (d) et (d') deux droites parallèles. Soit Γ le cercle tangent à (d) et (d') en B, C, ω un cercle tangent à (d) et Γ en A, Z, et ω' le cercle tangent à Γ, ω et (d') en X, Y, D. Montrer que la tangente commune à Γ et ω passe par D.

Solution de l'exercice 5
En utilisant l'exercice précédent, B, X, D puis A, Y, D sont alignés. En utilisant le lemme des quatre pièces de monnaie aux cercles Γ, ω, ω' et (d) (cercle déformé), on trouve que les points A, B, X, Y sont cocycliques, et en appliquant le théorème des axes radicaux aux cercles Γ, ω et $(ABXY)$ on trouve que leurs axes $(BX), (AY)$ et la tangente commune passant par X sont concourantes en D.



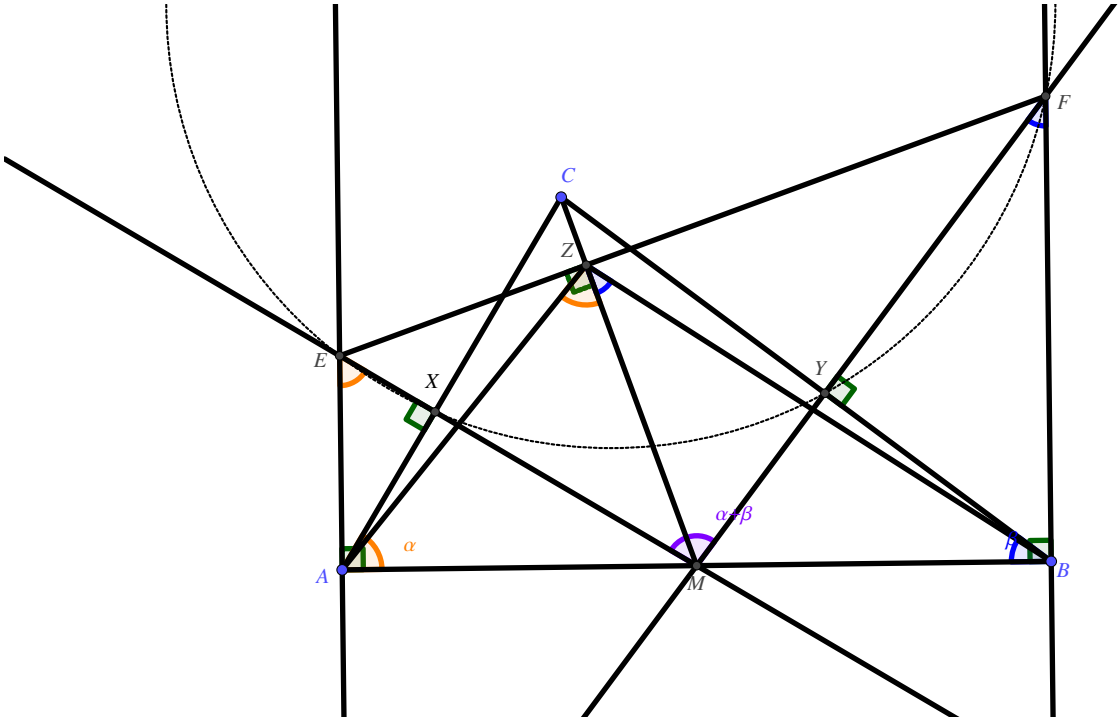
Exercice 6
Soit ABC un triangle, H le pied de la hauteur issue de A, et X, Y les projetés respectifs de H sur (AB) et (AC). Montrer que B, X, Y, C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6
On va essayer de démontrer que $PX \cdot PB = PY \cdot PC$. Par propriétés des longueurs dans un triangle rectangle, $PY \cdot PC = PH^2 = PX \cdot PB$.



Exercice 7
Soit ABC un triangle, M le milieu de $[AB]$, X (resp. Y le projeté orthogonal de M sur (AB) (resp. (BC)). Appelons (d) (resp. (d')) la droite perpendiculaire à (AB) passant par A (resp. B). On note E l'intersection de (MX) et (d), et F celle de (MY) et (d'). Enfin, soit Z l'intersection de (EF) et (CM). Montrer que $\widehat{AZB} = \widehat{FME}$.

Solution de l'exercice 7
On a $MX \cdot ME = MA^2 = MB^2 = MY \cdot MF$, donc E, X, Y, F sont cocycliques. Posons $\widehat{MAC} = \alpha$ et $\widehat{CBM} = \beta$. Alors $\widehat{YMX} = 180 - \widehat{YCX} = 180 - (180 - \alpha - \beta) = \alpha + \beta$.
D'autre part, $\widehat{XEF} = \widehat{XYM} = \widehat{XCM}$ par cocyclicité, et ainsi (CM) sera perpendiculaire à (EF). On en déduit la cocyclicité de A, E, Z, M et celle de M, Z, F, B. Ainsi $\widehat{AZM} = \widehat{AEM} = \widehat{CAM} = \alpha$, et de même on montre que $\widehat{MZB} = \beta$, et ainsi nous avons bien $\widehat{AZB} = \alpha + \beta = \widehat{FME}$.



Théorèmes de Ménélaüs et de Céva

Théorème 4 (Théorème de Ménélaüs)**.**
Soit A, B, C un triangle, et P, Q, R des points positionnés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB). Alors les points P, Q, R sont alignés si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = 1.$$

Démonstration.

Sens direct : on suppose que les points P, Q, R sont alignés. Introduisons la parallèle à (BC) passant par A., qui coupe (PQ) en A'.
D'après le théorème de Thalès, $\frac{QC}{QA} = \frac{AA'}{PC}$ et $\frac{RA}{RB} = \frac{AA'}{PB}$. Ainsi on a bien

$$\frac{PB}{PC} \cdot \frac{QC}{QA} \cdot \frac{RA}{RB} = 1$$

En ajoutant la partie "distance orientée", on se rend compte qu'il ne peut y avoir que deux cas : tous les points sont à l'extérieur du triangle (et donc tous les rapports relatifs sont positifs), ou deux des points sont à l'intérieur, et donc deux rapports sont négatifs. Dans tous les cas, le produit cyclique des rapports vaut 1 en distance orientée.

Sens indirect : on suppose l'égalité des rapports. Introduisons R' l'intersection de (AB) avec (PQ). Alors P, Q, R' sont alignés, donc nous pouvons utiliser le sens direct de Ménélaüs, et nous obtenons

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = 1,$$

Donc nous en déduisons $\frac{\overline{R'A}}{\overline{R'B}} = \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}}$, mais puisque la position d'un point sur la droite (BC) est uniquement déterminée par la valeur de son rapport relatif à B et C, donc $R = R'$, et nous avons bien P, Q, R alignés. □

Théorème 5 (Théorème de Céva)**.**
Soit A, B, C un triangle, et P, Q, R des points positionnés respectivement sur les droites (BC), (CA) et (AB). Alors les droites $(AP), (BQ)$ et (RC) sont concourantes si et seulement si

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} \cdot \frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} \cdot \frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = -1.$$

Démonstration.

Sens direct : supposons les droites concourantes en X. Nous allons appliquer le lemme magique pour les triangles ABX, BCX, CAX :

$$\frac{\overline{PB}}{\overline{PC}} = \frac{XB}{XC} \cdot \frac{\sin \widehat{PXB}}{\sin \widehat{PXC}},$$

$$\frac{\overline{QC}}{\overline{QA}} = \frac{XC}{XA} \cdot \frac{\sin \widehat{QXC}}{\sin \widehat{QXA}},$$

$$\frac{\overline{RA}}{\overline{RB}} = \frac{XA}{XB} \cdot \frac{\sin \widehat{RXA}}{\sin \widehat{RXB}}$$

Donc en constatant par alignement que $\widehat{PXB} = -\widehat{QXA}, \widehat{QXC} = -\widehat{RXB}$ et $\widehat{RXA} = -\widehat{PXC}$, on obtient effectivement la relation souhaitée.

Sens indirect : on suppose que le produits des rapports cycliques vaut -1. Soit X l'intersection de (BQ) et (CR). Alors notons P' l'intersection de (AX) et (BC). En appliquant le théorème de Céva, et en utilisant l'hypothèse, on obtient $\frac{\overline{P'B}}{\overline{P'C}} = \frac{\overline{PB}}{\overline{PC}}$, donc $P = P'$ et nous en déduisons la concourance de $(AP), (BQ)$ et (CR). □

Exercice 8
Soit ABC un triangle rectangle en A. On note H le pied de la hauteur issue de A et Y celui de la bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{CAH}$. La droite parallèle à (AD) passant par C coupe (AH) en Z. La droite (YZ) coupe (AB) en X. Émettre une conjecture sur la position de X et la démontrer.

Solution de l'exercice 8
La conjecture est que X est le milieu de $[AB]$. On va appliquer le théorème de Ménélaüs dans le triangle BAH pour déterminer le rapport $\frac{\overline{MA}}{\overline{MB}}$: commençons par une chasse aux angles en notant que $\widehat{BAY} = \widehat{YAH} = \widehat{CZA} = \alpha$. On en déduit la valeur des derniers angles restants : $\widehat{CBA} = 90 - 2\alpha, \widehat{HCZ} = 90 - \alpha$ et $\widehat{ACB} = 2\alpha$. On cherche à déterminer les rapports $\frac{YB}{YH}$ et $\frac{ZH}{ZA}$. Par théorème de la bissectrice, le premier vaut $\frac{AB}{AH} = \frac{1}{\cos(2\alpha)}$, par loi des sinus dans ZAC et trigonométrie dans ZHC, le second vaut

$$\frac{ZH}{ZA} = \frac{ZC \cdot \cos\alpha}{ZC \frac{\sin(90+\alpha)}{\sin(90-2\alpha)}} = \cos(2\alpha)$$

Or en ajoutant l'orientation des rapports, l'alignement de X, Y, Z est équivalent à

$$\frac{\overline{XA}}{\overline{XB}} = \frac{\overline{YB}}{\overline{YH}} \cdot \frac{\overline{ZH}}{\overline{ZA}} = -\frac{1}{\cos(2\alpha)} \cdot \cos(2\alpha) = -1$$

Ceci signifie bien que X est le milieu de $[AB]$.

Exercice 9
Soit ABC un triangle et P un point qui n'est pas sur le périmètre du triangle. Appelons A', B', C' les pieds des bissectrices internes des angles $\widehat{BPC}, \widehat{CPA}, \widehat{APB}$. Montrer que les droites $(AA'), (BB'), (CC')$ sont concourantes.

Solution de l'exercice 9
On souhaiterait utiliser le théorème de la bissectrice et Céva. En effet, nous obtenons pour chacun des angles bissectés les égalités de rapports suivants : $\frac{A'B}{A'C} = \frac{PB}{PC}$, $\frac{B'C}{B'A} = \frac{PC}{PA}$, $\frac{C'A}{C'B} = \frac{PA}{PB}$, soit en orientant,

$$\frac{\overline{A'B}}{\overline{A'C}} \cdot \frac{\overline{B'C}}{\overline{B'A}} \cdot \frac{\overline{C'A}}{\overline{C'B}} = -1.$$

Donc les droites étudiées sont bien concourantes.

Étude du cercle d'Apollonius

Exercice 10
Soit Γ un cercle, et deux tangentes à Γ en A et B. On prend un point C sur la tangente en A, et on appelle D le point de la tangente en B tel que $BD = AC$ et (CD) coupe $[AB]$ en E. Montrer que E est le milieu de $[CD]$.

Solution de l'exercice 10
Après une courte chasse aux angles, $\widehat{DBA} = 180 - \widehat{CAB}$. Ensuite, par loi des sinus,

$$\frac{CE}{\sin \widehat{CAE}} = \frac{AC}{\sin \widehat{AEC}}$$

$$\frac{DE}{\sin \widehat{DBE}} = \frac{BD}{\sin \widehat{BED}}$$

Or, les deux membres de droite sont égaux, donc on obtient $CE = DE$.

Exercice 11 (Cercle d'Apollonius)
Soit ABC un triangle.
Trouver le lieu des points M tels que $\frac{MB}{MC} = \frac{AB}{AC}$.

Solution de l'exercice 11
Notons tout d'abord que D et E les pieds des deux bissectrices issues de A appartiennent à ce lieu, ainsi que A. S'il y a un autre point A', alors par réciproque du théorème de la bissectrice, les pieds des bissectrices issues de A' dans $BA'C$ sont encore D et E. Ainsi $\widehat{DA'E} = 90 = \widehat{DAE}$ donc les points D, A, A', E sont cocycliques. Ainsi le lieu des points M est le cercle circonscrit à DAE. On appellera ce cercle le *A-cercle d'Apollonius*.

Exercice 12
Soit ABC un triangle. Trouver le lieu des points P tel que le triangle formé par les projetés orthogonaux A', B', C' de P sur les côtés $(BC), (CA), (AB)$ soit isocèle en A'.

Solution de l'exercice 12
Utilisons la loi des sinus dans le triangle $BA'C'$, en remarquant que son cercle circonscrit est le cercle de diamètre $[BP]$: $PB = \frac{A'C'}{\sin \widehat{B}}$. On trouve de même $PC = \frac{A'B'}{\sin \widehat{C}}$. Ainsi, le triangle $A'B'C'$ est isocèle en A' si et seulement si $\frac{PB}{PC} = \frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}}$, mais une loi des sinus dans ABC nous donne que $\frac{\sin \widehat{B}}{\sin \widehat{C}} = \frac{AB}{AC}$, donc cela n'arrive que si P appartient au A-cercle d'Apollonius de ABC.

4 Entraînement de fin de parcours

Exercice 1
Soit ABC un triangle, P le pied de la hauteur issue de A, M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[AC]$. Les cercles circonscrits à BMP et CNP se recoupent en un point X différent de P. Montrer que la droite (XP) passe par le milieu de $[MN]$.

Exercice 2
Gaspard a m boules dans un sac et n dans un autre sac, où $m \geq 1$ et $n \geq 1$. Il peut alors effectuer deux types d'opérations :

1. enlever un nombre égal de boules dans chaque sac, et
2. tripler le nombre de boules dans un sac.

À quelle condition sur m et n peut-il enchaîner des opérations de sorte à vider les deux sacs ?

Exercice 3
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, et soit I le centre du cercle inscrit dans ABC. Les droites (AI), (BI) et (CI) coupent Γ en $D \neq A$, $E \neq B$ et $F \neq C$ respectivement.

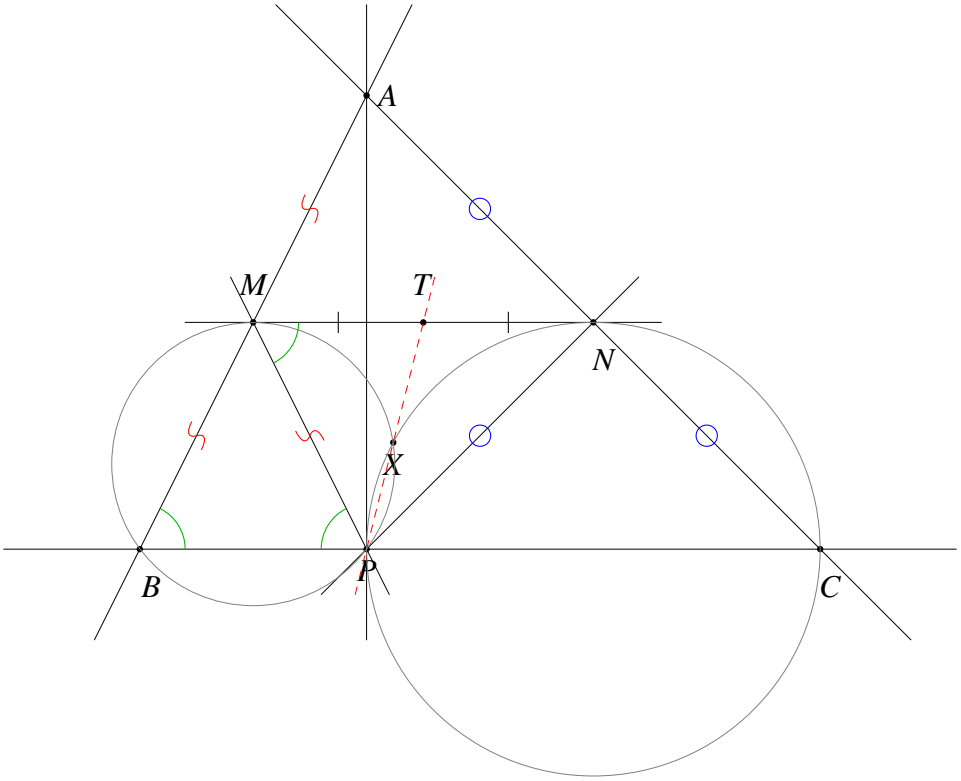
Les tangentes à Γ aux points F, D et E coupent les droites (AI), (BI) et (CI) en R, S et T respectivement. Prouver que

$$|AR| \cdot |BS| \cdot |CT| = |ID| \cdot |IE| \cdot |IF|.$$

Exercice 4
Soit A un ensemble de n-uplets $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ dont chaque coordonnée x_i appartient à l'ensemble $\{0, 1, 2\}$. On suppose que, pour tout choix de trois n-uplets x, y et z deux à deux distincts et appartenant à A, il existe un indice i pour lequel x_i, y_i, z_i valent $0, 1, 2$ dans un certain ordre. Démontrer que

$$|A| \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

Solution de l'exercice 1



Notons T le milieu de $[MN]$.
Puisque M est le milieu de $[AB]$ et que ABP est rectangle en P, on a que M est le centre du cercle circonscrit à ABP et donc on a MBP isocèle. En utilisant de plus $(MN)//(BC)$, on en déduit $\widehat{TMP} = \widehat{MPB} = \widehat{MBP}$ et donc par réciproque de l'angle tangentiel, (TM) est tangente au cercle circonscrit à MBP en M.
Cela nous donne que la puissance de T par rapport au cercle (MBP) est TM^2. De même, la puissance de T par rapport à (NCP) vaut TN^2. Puisque $TM = TN$, on en déduit que T est sur l'axe radical de (MBP) et (NCP). Ces cercles s'intersectent en P et X donc P et X sont également sur ce même axe radical.
Finalement, on a bien T, X, P alignés.

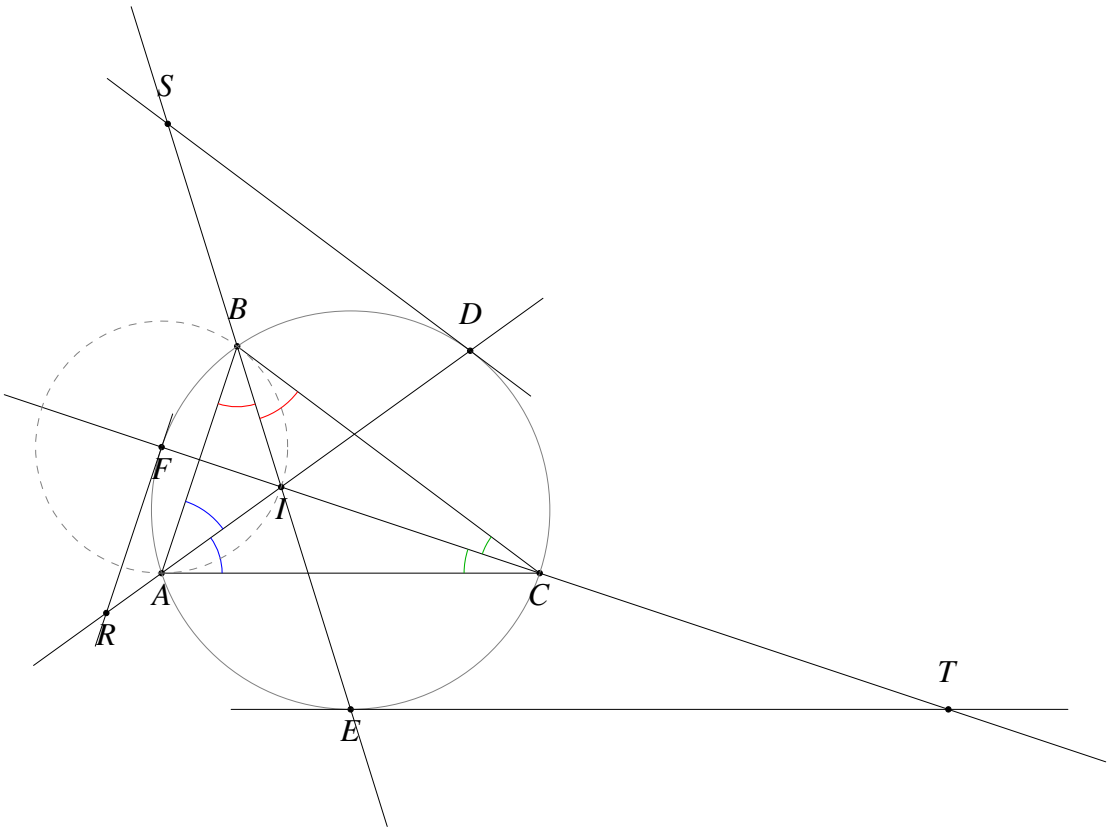
Solution de l'exercice 2

Montrons que Gaspard peut vider les deux sacs à condition que m et n soient de même parité, ou encore que le nombre total de boules $m + n$ soit pair. Supposons d'abord que ce ne soit pas le cas, c'est-à-dire que le nombre total de boules soit impair. Montrons que ceci est un invariant du problème. En effet, à chaque étape, Gaspard peut soit enlever un nombre égal de boules dans chaque sac, ce qui signifie que le nombre total de boules diminue d'un nombre pair, soit tripler le nombre de boules dans un des sac. Dans le deuxième cas, soit k le nombre de boules dans le sac avant l'étape de Gaspard, alors Gaspard transforme k en $3k$, c'est-à-dire qu'il rajoute $2k$ boules, donc un nombre pair. Dans tous les cas, le nombre total de boules ne change que par un nombre pair, donc ne change jamais de parité. Si au départ ce nombre était impair, il ne pourrai jamais atteindre 0 et Gaspard n'au aucun moyen de vider les deux sacs.

Supposons à présent que m et n soient de même parité. Alors montrons que Gaspard peut effectivement s'arranger pour vider les deux sacs. Supposons sans perte de généralité que $m \leq$

n. Alors Gaspard peut commencer par enlever $m-1$ boules dans chaque sac, afin qu'un sac ne se retrouve plus qu'avec une boule. Remarquons que par l'invariant trouvé précédemment, si un sac contient un nombre impair de boules, l'autre en contiendra forcément un nombre impair aussi. Alors si maintenant le deuxième sac ne contient qu'une seule boule, on peut enlever une boule dans chaque sac pour terminer. Sinon, on triple le nombre de boules dans le premier sac de 1 à 3, puis on enlève deux boules dans chaque sac. Si maintenant les deux sacs ont une boule chacun, Gaspard peut terminer en les enlevant. Sinon, on répète l'opération de tripler le nombre de boules dans le premier sac et d'en retirer deux dans chaque sac. Ainsi, le nombre de boules dans le deuxième sac diminue de 2 à chaque opération. Comme il était initialement impair, il atteindra nécessairement 1 à un moment. Alors Gaspard peut enlever une boule dans chaque sac pour terminer.

Solution de l'exercice 3



Première solution

On remarque que F, E, D sont les pôles sud du triangle ABC.
En particulier, F est le centre du cercle circonscrit de BIA. Par la puissance du point R par rapport à ce cercle :

$$RF^2 - FI^2 = RA \cdot RI$$

De plus, par la puissance du point R par rapport au cercle Γ, on a :

$$RF^2 = RA \cdot RD$$

Comme on a $RD = RI + ID$, on obtient : $RA(RI + ID) - FI^2 = RA \cdot RI$. Et finalement :

$$FI^2 = RA \cdot ID$$

De la même façon, $DI^2 = SB \cdot IE$ et $IE^2 = TC \cdot IF$. En multipliant tout, on obtient finalement :

$$AR \cdot BS \cdot CT = ID \cdot IE \cdot IF$$

Deuxième solution

Comme dans la première solution, on remarque que F, E, D sont les pôles sud du triangle ABC. En particulier, $FI = FA$, et de même, $EI = EC$ et $DI = DB$. Il reste donc à montrer que

$$\frac{AR}{AF} \cdot \frac{BS}{BD} \cdot \frac{CT}{CE} = 1.$$

Intéressons nous aux triangles RAF, SDB et TEC. L'angle $\widehat{RFA}$ est égal, par angle tangentiel, à $\widehat{ACF} = \widehat{ACI}$. De plus, comme F est le pôle sud de ABC correspondant à C, (RF) est parallèle à (AB), et donc $\widehat{FRA} = \widehat{BAI} = \widehat{IAC}$. On obtient donc que les triangles RAF et AIC sont semblables, et donc que

$$\frac{AR}{AF} = \frac{IA}{IC}.$$

De même, on trouve

$$\frac{BS}{BD} = \frac{IB}{IA}, \quad \frac{CT}{CE} = \frac{IC}{IB}.$$

En multipliant tous ces résultats entre eux, on trouve bien l'égalité voulue

$$\frac{AR}{AF} \cdot \frac{BS}{BD} \cdot \frac{CT}{CE} = 1.$$

Solution de l'exercice 4

Commençons par remarquer la chose suivante : si x, y, z sont trois n-uplets distincts dont chaque coordonnée vaut 0 ou 1, alors x, y, z ne peuvent pas tous appartenir à A. Mais il en est aussi de même si par exemple, la première coordonnée de chaque triplet vaut 0 ou 1, et toutes les autres valent 1 ou 2. Pour essayer de généraliser ce raisonnement, on pose, pour tout n-uplet t à coordonnées dans $\{0, 1, 2\}$, l'ensemble B_t des n-uplets dont aucune des coordonnée ne coincide avec celle de t, c'est-à-dire l'ensemble des n-uplets y tels que pour tout indice i, $y_i \neq t_i$. Alors dans chaque B_t, il ne peut y avoir que 2 éléments de A au maximum. En effet, si x, y, z sont trois triplets distincts de B_t, pour tout indice i, $\{x_i, y_i, z_i\}$ ne peut pas contenir la valeur t_i, et donc cet ensemble ne peut pas être égal à $\{0, 1, 2\}$.

Maintenant, on procède à un double comptage. Comptons le nombre N de couples (t, x) avec t un n-uplet quelconque avec des coordonnées dans $\{0, 1, 2\}$, et x un élément de A qui est aussi un élément de B_t (c'est-à-dire que t et x n'ont aucune coordonnée en commun). D'une part, si on fixe d'abord x, le nombre de t possibles est 2^n, car chaque coordonnée pour t ne peut prendre que deux valeurs. Comme il y a $|A|$ valeurs de x, on en déduit $N = 2^n|A|$.

Mais d'un autre côté, si l'on fixe t, on a vu précédemment qu'il ne pouvait y avoir que deux valeurs de x au maximum qui appartiennent bien à A et à B_t. Comme il y a 3^n valeurs distinctes de t, on en déduit que $N \leq 2 \cdot 3^n$. Alors on a

$$2^n|A| \leq N \leq 2 \cdot 3^n$$

donc

$$|A| \leq 2\left(\frac{3}{2}\right)^n.$$

VI. Groupe D

Contenu de cette partie

1 Première partie : Géométrie & Combinatoire 386
1 Similitudes (Henry) 386
2 Jeux (Emilhan & Aurélien) 389
3 Graphes (Aline & Elsa) 392
4 TD Idées simples (Raphael) 406
5 Axes radicaux (Antoine) 407
6 Invariants/monovariants (Félix) 409
7 Inversions (Quentin) 411
8 TD Petites SL (Baptiste) 423
2 Entraînement de mi-parcours 426
3 Deuxième partie : Algèbre & Arithmétique 434
1 Algèbre non classique (Xavier) 434
2 Rappels de théorie de l'ordre (Vincent) 437
3 Lemme chinois (Théo) 447
4 Inégalités (Martin) 455
5 LTE et Zsigmondy (Pierre-Marie) 470
6 Équations fonctionnelles (Benoît) 476
7 Polynômes (Jean) 478
8 TD petites SL (Rémi) 490
4 Entraînement de fin de parcours 493

1 Première partie : Géométrie & Combinatoire

1 Similitudes (Henry)

Échauffement : une rotation et une homothétie

Les similitudes directes sont des transformations du plan qui généralisent les concepts de rotation et d'homothétie. Avec ces deux premiers exercices on rappelle l'utilité de ces transformations pour la résolution de problèmes.

Ces exercices d'échauffement sont de bons exemples de cas où l'énoncé est simplement une transformation appliquée à une figure sur laquelle le résultat est très facile. Un bon élève sera capable de deviner cette transformation et de retrouver la figure où le résultat est plus facile en appliquant son inverse à des points bien choisis.

Exercice 1 (JBMO 2002)
Soit ABC un triangle isocèle en C. Soit P un point du cercle circonscrit à ABC sur l'arc entre A et B (et du côté opposé à C). Soit D le pied de la perpendiculaire à (PB) issue de C. Montrer que $PA + PB = 2 \cdot PD$.

Solution de l'exercice 1
On considère la rotation de centre A qui envoie A sur B. On remarque que P est envoyé sur un point P' de (PB), en effet on a l'égalité d'angles $\widehat{CAP} = 180 - \widehat{CBP}$ par cocyclicité de A, B, C, P. On sait aussi que PCP' est isocèle en C, ainsi D est le milieu de $[PP']$ et

$$PA + PB = P'B + PB = PP' = 2 \cdot PD.$$

Exercice 2 (Shortlist IMO 2006)
Soit $ABCD$ un trapèze de côtés parallèles $AB > CD$. Soient K et L des points des segments $[AB]$ et $[CD]$ respectivement, tels que

$$\frac{AK}{KB} = \frac{DL}{LC}.$$

Supposons qu'il existe des points P et Q sur le segment $[KL]$ tels que $\widehat{APB} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{CQD} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points P, Q, B, C sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2
On remarque une configuration à la Thalès. En effet si X est l'intersection des droites (AD) et (BC), il existe une homothétie de centre X qui envoie A sur D, B sur C, et aussi K sur L grâce au rapport de longueurs donné. Soit P' l'image de P par cette homothétie. Les angles $\widehat{BCD}$ et $\widehat{ABC}$ sont supplémentaires, ainsi comme $\widehat{DP'C} = \widehat{APB} = \widehat{BCD}$ et $\widehat{CQD} = \widehat{ABC}$, les points

P', C, Q, D sont cocycliques. Maintenant par chasse aux angles :

$$\begin{aligned}\widehat{CQP} &= \widehat{CQP'} \\ &= \widehat{CDP'} \\ &= \widehat{BAP} \\ &= 180 - \widehat{APB} - \widehat{PBA} \\ &= \widehat{ABC} - \widehat{PBA} \\ &= \widehat{CBP},\end{aligned}$$

d'où P, Q, B, C cocycliques.

Cours et TD de Similitudes

Le cours consistait en une introduction aux similitudes (directes) et à leur utilisation dans des exercices. Nous avons suivi l'approche de la section 4 du polycopié sur les transformations géométriques de Thomas Budzinski : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/geom_transfos.pdf.

Exercice 3 (Théorème de Miquel)
Soit ω_1, ω_2 et ω_3 des cercles concourants en un point Q. On note de plus A' (resp. B' et C') les intersections des cercles ω_2 et ω_3 (resp. ω_1 et ω_3 ; ω_1 et ω_2). Soit A un point du cercle ω_1, on note B et C les intersections respectives de (AC') avec ω_2 et de (AB') avec ω_3, alors les points B, C et A' sont alignés.

Exercice 4 (Shortlist IMO 2006)
Soit $ABCDE$ un pentagone convexe vérifiant les relations $\widehat{BAC} = \widehat{CAD} = \widehat{DAE}$ et $\widehat{CBA} = \widehat{DCA} = \widehat{EDA}$. Soit $P = (BD) \cap (CE)$. Montrer que la droite (AP) coupe le segment $[CD]$ en son milieu.

Exercice 5 (Chine 1992)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe inscrit dans un cercle de centre O, P le point d'intersection des diagonales et Q le deuxième point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles APD et BPC. Montrer que $\widehat{OQP} = 90°$.

Exercice 6
On construit trois triangles semblables ABF, BCD et CAE à l'extérieur du triangle ABC. Montrer que ABC et DEF ont le même centre de gravité.

Exercice 7 (États-unis 1998)
Soit $ABCDEF$ un hexagone inscriptible vérifiant $AB = CD = EF$. Soit $Z = (AC) \cap (BD)$, $X = (CE) \cap (DF)$ et $Y = (EA) \cap (FB)$. Montrer que XYZ et BDF sont semblables.

Exercice 8 (IMO 2005)
Soit $ABCD$ un quadrilatère avec $AD = BC$ et P l'intersection de ses diagonales. Soient F et E des points variables sur les segments $[AD]$ et $[BC]$ respectivement de manière à avoir $BE = DF$. On note R et Q les points d'intersections de (EF) avec (AC) et (BD) respectivement. Montrer que le cercle circonscrit à PQR a un deuxième point fixe quand E et F varient.

Exercice 9 (Shortlist IMO 2002)
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles s'intersectant en P et Q. Soient A_1 et B_1 deux points variables sur Γ_1 et A_2 et B_2 les deuxièmes points d'intersection de Γ_2 avec (A_1P) et (B_1P) respectivement. Soit $C = (A_1B_1) \cap (A_2B_2)$. Montrer que le centre O du cercle circonscrit au triangle CA_1A_2 reste sur un cercle fixe quand A_1 et A_2 varient.

Exercice 10
Soient Γ_1 et Γ_2 deux cercles se coupant en deux points A et B. Les tangentes à Γ_1 en A et B se coupent en K. Soit M un point variable sur Γ_1, distinct de A et B. On note P le second point d'intersection de (MA) et Γ_2, C le second point d'intersection de (MK) et Γ_1 et Q le second point d'intersection de (AC) avec Γ_2.

1. Montrer que (PQ) passe par un point fixe quand M varie.
2. Montrer que le milieu de $[PQ]$ est sur la droite (MK).

Exercice 11

1. Soit T une similitude directe. Montrer qu'il existe une similitude directe de même centre envoyant tout point M sur le milieu de M et $T(M)$.
2. Soit $ABCD$ un quadrilatère, M et N les milieux de ses diagonales et P leur intersection. Soient O_1 et O_2 les centres des cercles circonscrits de ABP et CDP. Montrer que le milieu du segment $[O_1O_2]$ est le centre du cercle circonscrit de PMN.

Solution de l'exercice 3
On considère les similitudes suivantes :

— s_2 de centre Q qui envoie le cercle ω_3 sur ω_1. s_2 envoie C sur A (en effet B' est le second point d'intersection des deux cercles, et C, B', A sont alignés.

— s_3 de centre Q qui envoie le cercle ω_1 sur ω_2. s_3 envoie A sur B (en effet C' est le second point d'intersection des deux cercles, et A, C', B sont alignés.

Ainsi, la composée $s_1 = s_3 \circ s_2$ est aussi une similitude de centre Q, qui envoie ω_3 sur ω_2 ainsi que C sur B. Par conséquent C et B sont alignés avec le second point d'intersection de ω_2 et ω_3, A'. Cela conclut.

Solution de l'exercice 4
Exercice 28 du polycopié sur les transformations géométriques.

Solution de l'exercice 5
Exercice 32 du polycopié sur les transformations géométriques.

Solution de l'exercice 6
On rappelle la propriété vectorielle du centre de gravité : G est le centre de gravité de ABC si et seulement si

$$\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC} = \overrightarrow{0}.$$

Soit G le centre de gravité de ABC, montrons que c'est aussi celui de DEF. Considérons la similitude s qui envoie $\overrightarrow{AB}$ sur $\overrightarrow{AF}$. Elle est d'angle $\widehat{FAB}$ et de rapport $\frac{AF}{AB}$. Puisque ABF, BCD

et CAE sont semblables, s envoie aussi $\overrightarrow{BC}$ sur $\overrightarrow{BD}$ et $\overrightarrow{CA}$ sur $\overrightarrow{CE}$. Ainsi par linéarité de la similitude ($s(\vec{a}+\vec{b}) = s(\vec{a}) + s(\vec{b})$),

$$\begin{aligned}\overrightarrow{GD} + \overrightarrow{GE} + \overrightarrow{GF} &= (\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} + \overrightarrow{GC}) + (\overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE}) \\ &= \overrightarrow{AF} + \overrightarrow{BD} + \overrightarrow{CE} \\ &= s(\overrightarrow{AB}) + s(\overrightarrow{BC}) + s(\overrightarrow{CA}) \\ &= s(\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CA}) = \vec{0}.\end{aligned}$$

La preuve peut aussi être réécrite en un peu moins de lignes en coordonnées complexes, en utilisant $a + b + c = 3g$ pour montrer $d + e + f = 3g$.

Solution de l'exercice 7
Exercice 36 du polycopié sur les transformations géométriques.

Solution de l'exercice 8
Exercice 29 du polycopié sur les transformations géométriques.

Solution de l'exercice 9
Exercice 31 du polycopié sur les transformations géométriques.

Solution de l'exercice 10
Exercice 35 du polycopié sur les transformations géométriques.

Solution de l'exercice 11
Exercice 33 du polycopié sur les transformations géométriques.

2 Jeux (Emilhan & Aurélien)

Conseils généraux

Avant de commencer les exercices, voici un bref rappel des différentes méthodes essentielles :
• La **stratégie miroir** est utile pour des jeux où il faut s'assurer d'avoir un coup légal. Elle consiste à s'assurer (souvent grâce à des paires) de pouvoir jouer quel que soit le coup de l'adversaire. On peut ainsi jouer un coup symétrique à celui de son adversaire, par exemple.
• Les **pavages** peuvent être utiles pour décrire des stratégies.
• Il est parfois possible d'étudier les **positions finales** et de remonter les coups qui donnent lieu à ces positions.
• Le **vol de stratégie** est un raisonnement par l'absurde qui consiste à montrer que si le deuxième joueur avait une stratégie gagnante, le premier joueur pourrait jouer un certain coup puis utiliser la stratégie du deuxième pour gagner.
• Traiter des **petits cas** permet de se forger une intuition et de conjecturer.

Exercices

Exercice 1
Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice commence par choisir un entier entre 1 et 11. Ensuite,

Bob ajoute n'importe quel entier entre 1 et 11, et le jeu continue ainsi à tour de rôle. Le premier joueur à atteindre 56 gagne. Qui à une stratégie gagnante ?

Exercice 2
Alice et Bob jouent à tour de rôle au jeu suivant. Le nombre 2 est écrit au tableau. Si l'entier n est écrit au tableau, le joueur dont c'est le tour l'efface et écrit un entier de la forme $n+p$, où p est un diviseur premier de n. Le premier joueur qui écrit un nombre plus grand que 2023^{2023} perd. Si Alice commence, déterminer quel joueur possède une stratégie gagnante.

Exercice 3
Alice et Bob ont devant eux un échiquier de taille 8×8. Initialement, toutes les cases sont blanches. À chaque tour, Alice choisit une case blanche et la colorie en noir. Bob choisit ensuite de colorier l'une des cases voisines (partageant une arête) en noir ou de ne rien faire. Alice peut arrêter le jeu quand elle le désire. Son but est de maximiser le nombre de composantes connexes noires, tandis que Bob veut minimiser ce nombre. Si les deux joueurs jouent optimalement, combien de composantes connexes y a-t-il à la fin du jeu ?

Exercice 4 (SL IMO C7 2019)
60 boîtes sont disposées en ligne sur une table. Pour un certain naturel $n > 0$, Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice commence par distribuer n billes entre les boîtes comme elle le désire. Ensuite, chaque tour se déroule en deux étapes :
(a) Bob choisit un entier $1 \leqslant k \leqslant 59$ et sépare les boîtes en les deux groupes $B_1, \ldots, B_k$ et $B_{k+1}, \ldots B_{60}$.
(b) Alice choisit l'un de ces deux groupes et ajoute une bille dans chacune des boîtes de ce dernier, puis retire une bille de chaque boîte de l'autre groupe.
Bob gagne si Alice ne sait plus jouer, c'est-à-dire si elle doit retirer une bille d'une boîte vide. Trouver le n minimal tel qu'Alice puisse empêcher Bob de gagner.

Exercice 5
Alice et Bob jouent au jeu suivant. Les diviseurs positifs d'un entier $N > 0$ sont inscrits au tableau. Alice commence par effacer N. Ensuite, lorsqu'un joueur a effacé un nombre, le suivant efface un multiple ou un diviseur de ce nombre. Le premier joueur qui ne peut plus jouer perd. Déterminer, en fonction de N, quel joueur possède une stratégie gagnante.

Exercice 6 (IMO P4 2018)
Alice et Bob jouent sur une grille 20×20. Initialement, toutes les cases sont vides. Alice commence puis les deux joueurs placent alternativement des pierres sur des cases non occupées. Lors de son tour, Alice place une pierre rouge sur une case libre qui n'est pas à distance $\sqrt{5}$ d'une autre case contenant une pierre rouge. À son tour, Bob place une pierre bleue sur une case inoccupée. Le jeu s'arrête lorsqu'un joueur ne peut plus placer de pierre. Déterminer le plus grand K tel qu'Alice puisse s'assurer de placer au moins K pierres rouges quel que soit la façon dont Bob places ses pierres.

Exercice 7 (RMM P1 2019)
Alice et Bob jouent au jeu suivant. Alice commence par écrire un entier strictement positif au tableau. Ensuite, les joueurs jouent à tour de rôle, en commençant par Bob. À son tour, Bob remplace le nombre n écrit au tableau par un nombre de la forme $n - a^2$, avec $a \in \mathbb{N}^*$. À son

tour, Alice remplace le nombre n écrit au tableau par un nombre de la forme n^k, avec $k \in \mathbb{N}^*$. Bob gagne si le numéro écrit au tableau est 0. Qui possède une stratégie gagnante ?

Exercice 8 (JBMO P3 2023)
Alice et Bob jouent à tour de rôle sur une grille de taille 100×100. Alice commence. Le joueur actif choisit un entier entre 1 et 100^2 qui n'est pas encore écrit sur la grille, puis l'écrit sur une case vide. Lorsque la grille est remplie, Alice calcule la somme des entiers inscrits sur chaque ligne, et son score est le maximum de ces 100 valeurs. Bob calcule de son côté la somme des entiers sur chaque colonne, et son score est le maximum de ces 100 valeurs. Le joueur ayant le plus grand score gagne, avec une possible égalité. Déterminer si l'un des joueurs possède une stratégie gagnante, et si oui lequel.

Exercice 9 (SL IMO C1 2009)
2023 cartes ayant toutes une face rouge et une face blanche sont disposées en ligne. Initialement, toutes les cartes ont leur face visible rouge. Alice et Bob effectuent un mouvement à tour de rôle. Ce mouvement consiste à choisir un bloc de 50 cartes consécutives dont la carte la plus à gauche est face rouge, et toutes les retourner. Alice commence, et le dernier joueur à pouvoir effectuer un mouvement gagne.
(a) Le jeu se termine-t-il nécessairement ?
(b) Alice possède-t-elle une stratégie gagnante ?

Solutions

Solution de l'exercice 1
Alice commence avec 8, puis à chaque fois que Bob ajoute x, Alice ajoute $12 - x$. Ainsi, après le deuxième coup d'Alice, 20 sera écrit, puis 32 après le troisième coup d'Alice, et ainsi de suite. Alice sera la première à écrire $56 = 8 + 4 \cdot 12$.

Solution de l'exercice 2
Les premiers coups sont forcés : Alice écrit 4 et Bob écrit 6. Ensuite, Alice peut choisir entre 8 et 9. Dans le premier cas, Bob doit écrire 10 et Alice peut écrire 12. Dans le second, Bob doit écrire 12. A partir de le position 12, comme le jeu se termine forcément, soit le joueur dont c'est le tour, soit l'autre joueur, a une stratégie gagnante. Or, Alice peut choisir quel joueur écrit 12, et donc atteindre 12 de manière à ce que soit son tour ou à l'autre joueur de jouer, et donc elle peut toujours gagner.

Solution de l'exercice 3
https://artofproblemsolving.com/community/c6h2650040p22939099

Solution de l'exercice 4
https://www.imo-official.org/problems/IMO2019SL.pdf

Solution de l'exercice 5
Montrons que Alice gagne ssi N est un carré parfait. Dans tous les cas, l'idée est de faire des paires (a, b) de diviseurs de N qui vérifient $a \mid b$ (on les appelera dans la suite des paires *gentilles*) afin de permettre des stratégies miroirs.
$\star$ Si N n'est pas un carré parfait, on dispose d'un diviseur premier p de N tel que la valuation p-adique de N soit impaire. Notons $v_p(N) = 2k + 1$ et $N = p^{2k+1} \cdot n$, avec $(n, p) = 1$. Pour tout diviseur d de n, on crée les paires gentilles $(d \cdot p^{2j}, d \cdot p^{2j+1})$ pour $0 \leqslant j \leqslant k$. On a alors partitionné

les diviseurs de N en paires gentilles, et Bob gagne en utilisant une stratégie miroir : lorsque Alice efface un élément d'une paire, Bob efface l'autre.
⋆ Si N est un carré parfait, on montre par récurrence sur le nombre de facteurs premiers que les diviseurs stricts de N (donc ceux qui sont $< N$) peuvent être partitionnés en paires gentilles. C'est le cas pour $N = 1$. Puis si $N = p^{2k} \cdot n$, avec $k > 0$ et $(n, p) = 1$, on dispose par hypothèse de récurrence d'une partition gentille des diviseurs stricts de n. On en déduit alors une partition gentille des diviseurs stricts de N dont la valuation p-adique vaut $2k$ en multipliant chaque élément par p^{2k}. Ensuite, on partitionne les diviseurs de N dont la valuation p-adique est $\leqslant 2k-1$ comme dans le premier cas. Cette fois-ci, Alice gagne car elle applique sa stratégie miroir après avoir effacé N.

Solution de l'exercice 6
https://artofproblemsolving.com/wiki/index.php/2018_IMO_Problems/Problem_4

Solution de l'exercice 7
https://rmms.lbi.ro/rmm2019/index.php?id=problems_math

Solution de l'exercice 8
On appelle (i, j) la case située sur la i-ème ligne et la j-ème colonne pour $1 \leqslant i, j \leqslant 100$. Bob crée les paires de cases suivantes : $((i, 2k+1), (i, 2k+2))$ pour $1 \leqslant i \leqslant 100$ et $0 \leqslant k \leqslant 49$ sauf pour $(i, k) = (100, 0)$ et $(100, 1)$, et les paires $((100, 1), (100, 3))$ et $((100, 2), (100, 4))$.
À chaque fois qu'Alice écrit le nombre j dans une case, Bob applique une stratégie miroir qui consiste à écrire le nombre $100^2 + 1 - j \neq j$ dans l'autre case de la paire. À la fin, chaque ligne a donc une somme de $(100^2 + 1) \cdot 50$.
Supposons par l'absurde qu'Alice puisse empêcher Bob de gagner lorsqu'il applique sa stratégie. En notant c_j la somme des nombres sur la j-ème colonne à la fin du jeu pour $1 \leqslant j \leqslant 100$, on doit alors avoir $c_j \leqslant 50 \cdot (100^2 + 1)$. Par suite,

$$100 \times 50(100^2+1) \geqslant c_1 + \cdots + c_{100} = 1 + \cdots + 100^2 = \frac{100^2(100^2+1)}{2} = 100 \times 50(100^2+1)$$

Il y a donc égalité dans l'inégalité précédente : $c_1 = \cdots = c_{100} = 50(100^2+1)$. Mais si a est le nombre écrit dans la case $(100, 1)$ et b est le nombre écrit dans la case $(100, 2)$, alors en sommant les autres paires des colonnes 1 et 2, $c_1 - a + c_2 - b = 99(100^2+1)$. Donc $a + b = 100(100^2+1) - 99(100^2+1) = 100^2 + 1$, ce qui est absurde car alors $b = 100^2 + 1 - a$ est également écrit dans la case $(100, 3)$.
Cela conclut.

Solution de l'exercice 9
https://www.imo-official.org/problems/IMO2009SL.pdf

3 Graphes (Aline & Elsa)

Introduction

La théorie des graphes est un domaine comparativement récent des mathématiques, qui s'est beaucoup développé avec l'informatique théorique. Il existe naturellement beaucoup de résultats intéressants et parfois surprenants. Pour un bon aperçu, nous recommandons le cours de Pierre Bornsztein. Des problèmes fameux sur les graphes sont entre autres les

problèmes de parcours, de coloriages, de topologie, de partition. Nous n'allons pas réintroduire les définitions essentielles mais rappeler quelques résultats utiles en mathématiques olympiques. L'essentiel du cours sera toutefois dédié à des exercices d'application.

Résultats utiles

Lemme 1 (Parité de la somme des degrés)**.**
Dans tout graphe non orienté, le nombre de sommets de degré impair est pair.

Démonstration. On remarque que chaque arête augmente de 1 le degré de chacune de ses extrémités. La somme des degrés est donc le double du nombre d'arêtes, donc c'est un nombre pair. Il s'ensuit que le nombre de termes impairs dans cette somme est pair. □

Théorème 2 (Formule d'Euler)**.**
Un graphe est *planaire* si en bougeant les sommets les uns par rapport aux autres, mais sans déconnecter les arêtes, on peut aboutir à une configuration dans laquelle il n'y a aucun croisement d'arêtes.

a Soit un graphe connexe planaire à S sommets, A arêtes et F faces (on compte la face extérieure). Alors
$$S - A + F = 2$$

b Plus généralement, si le graphe est planaire (à faces sans trous) sur une surface de genre g,
$$S - A + F = 2 - 2g$$
(pour en savoir plus, voir le cours de Gabriel Pallier)

Démonstration. Procéder par récurrence sur le nombre d'arêtes, en commençant avec un arbre (à une face donc). □

On rappelle la notion suivante :

Définition 3 (clique)**.**
Dans un graphe, on appelle **k-clique** un ensemble de $k \in \mathbb{N}^*$ sommets qui sont tous reliés les uns aux autres.

On utilisera aussi la notation

Définition 4 (Graphe complet et p-partite complet)**.**

1. Le **graphe complet** K_n est le graphe non-orienté à $n \in \mathbb{N}^*$ sommets qui sont tous reliés les uns aux autres.
2. Le *graphe p-partite complet* $K_{n_1,\dots,n_p}$ est le graphe à $n = n_1 + \cdots + n_p$ sommets, partitionné en p sous-ensembles (disjoints) $S_i 1, \dots S_p$ de cardinaux respectifs $n_1, \dots, n_p$, tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant p$, chaque sommet de A_i est relié à tous les sommets du graphe, sauf les autres sommets de A_i.

On a le premier sur les graphes planaires :

Théorème 5 (Théorème de Kuratowski)**.**
Un graphe est planaire si et seulement si il ne comporte pas de sous-graphe égal à K_5 ou à $K_{3,3}$.

Outre la planarité, les cliques sont utiles pour établir des contraintes sur les degrés ou le nombre d'arêtes.

Théorème 6 (Théorème de Turán)**.**
Soit G un graphe à n sommets, m arêtes et sans k-clique (pour un $k \in \mathbb{N}^*$), on a l'inégalité suivante :

$$m \leqslant \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$$

Exercice 1 (Preuve du théorème de Turán)

a Démontrer que tout graphe sans k-clique avec un nombre maximal d'arêtes est $(k-1)$-partite complet. Autrement dit, on peut partitionner le graphe en $k-1$ sous-ensembles de sommets tel que chaque sommet est relié à tous les autres, sauf ceux de son propre sous-ensemble.

b Démontrer le théorème de Turán dans le cas d'un graphe $(k-1)$-partite complet.

c Soit G un graphe à n sommets de degrés respectifs $d_1, \ldots, d_n$. Montrer que le cardinal maximal d'une clique de G est minoré par

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d_i}$$

En déduire une preuve du théorème 6.

Solution de l'exercice 1

a Soit G un graphe à n sommets sans k-cliques et avec un nombre maximal d'arêtes. Il s'agit de montrer que pour tout triplet de sommets distincts (u, v, w), si u est relié à v, alors w est relié soit à u soit à v. Supposons par l'absurde l'existence de (u, v, w) tel que u soit relié à v mais le triplet ne contient pas d'autre arête. Si $\deg(u) > \deg(w)$ (ou $\deg(v) > \deg(w)$ par symétrie), on supprime w et on duplique u en u_0 et $u_0 0$ sans les relier entre eux pour obtenir un graphe G_0 qui a plus d'arêtes et toujours pas de k-cliques. Contradiction. Si $\deg(w) > \deg(u)$ et $\deg(w) > \deg(v)$, on supprime u et v, et on triple w en $(w1, w2, w3)$, sans les relier entre eux. On a à nouveau un graphe sans k-cliques avec plus d'arêtes. Contradiction. D'où la conclusion.

b Un graphe $(k-1)$-partite complet à n sommets est composé de $(k-1)$ groupes de $n_1, \ldots, n_{k-1}$ sommets avec $n_1 + \cdots + n_{k-1} = n$, tel que chaque sommet soit relié à tous les autres sauf les membres de son propre groupe. Le nombre d'arêtes vaut donc :

$$\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i(n - n_i) \quad = \quad \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{k-1} n_i^2 \quad \leqslant \quad \frac{n^2}{2} - \frac{1}{2}\frac{1}{k-1}\left(\sum_{i=1}^{k-1} n_i\right)^2 \quad = \quad \frac{n^2}{2}\left(1 - \frac{1}{k-1}\right)$$

en utilisant l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

c On note $s_1, \dots, s_n$ les sommets du graphe et $T(G)$ la taille maximale d'une clique de G. Pour toute permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_n$, on crée une clique C_σ comme suit : pour i de 1 à n, si $s_{\sigma(i)}$ est relié à $s_{sigma(j)}$ pour tout $j < i$, $s_{\sigma(i)} \in C_\sigma$, sinon $s_{\sigma(i)} \notin C_\sigma$. Remarquons que :

$$|C_\sigma| = \sum_{i=1}^{n} f_{\sigma(i)}(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} f_j(\sigma)$$

où $f_i(\sigma)$ est l'indicatrice de "j apparait dans σ avant les indices de tous les sommets non-voisins de s_j". Or, comme s_j a exactement $n - d_j - 1$ non-voisins, j apparaît avant tous leurs indices dans 1 permutation sur $n - d_j$. Donc :

$$T(G) \geqslant \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} |C_\sigma| = \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} \sum_{j=1}^{n} f_j(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_n} f_j(\sigma) = \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{n - d_j}$$

d'après la remarque ci-dessus. Si on suppose que G n'a pas de k-clique, avec m son nombre d'arêtes, on a :

$$(k-1) \geqslant \sum_{i=1}^{n} \frac{1}{n - d_i} \geqslant \frac{n^2}{n^2 - \sum_{i=1} n d_i} = \frac{1}{1 - \frac{2m}{n^2}}$$

par l'inégalité de Cauchy-Schwarz, et donc

$$m \leqslant \left(1 - \frac{1}{k-1}\right) \frac{n^2}{2}$$

Corollaire 7 (Théorème de Mantel)**.**
Soit G un graphe sans triangle à n sommets et m arêtes. Alors

$$m \leqslant \frac{n^2}{4}$$

Démonstration. C'est exactement le théorème de Turán 6 pour $k = 3$. □

Plus facile à retenir, et à appliquer, on a le petit lemme suivant :

Lemme 8 (Lemme du petit degré)**.**
Tout graphe planaire possède un sommet de degré $d \leqslant 5$.

Démonstration. Chaque arête touche 2 faces et chaque face touche au moins 3 arêtes (sauf dans le graphe trivial comportant 2 sommets et 1 arête. On obtient donc l'inégalité $2A \geqslant 3F$. En remplaçant F par $A - N + 2$ grâce à la formule d'Euler 2 on trouve $A \leqslant 3N - 6 < 3N$. Il y a donc strictement moins de $6N$ "demi-arêtes", donc il y a au moins un sommet de degré $d < 6$. □

Ce lemme admet la généralisation suivante :

Lemme 9 (Lemme de Zarankiewicz)**.**
Dans tout graphe G qui ne comporte pas de k-clique, il existe un sommet de degré

$$d \leqslant \left\lfloor \frac{k-2}{k-1} n \right\rfloor$$

Les graphes bipartites sont également le sujet du célèbre théorème dit des “mariages de Hall". On donne ici l'énoncé informel, plus mnémotechnique :

Théorème 10 (Théorème des mariages de Hall)**.**
Soit G un graphe biparti et G_a, G_b sa partiton des sommets. À chaque partie $S \subset G_a$ on associe $V(S)$ l'ensemble des voisins de ses sommets (qui sont donc dans G_b). Les deux conditions suivantes sont alors équivalentes :

i G admet un couplage de cardinal $|G_a|$, autrement dit on peut associer à chaque élément de $a \in G_a$ un de ses voisins $b(a) \in G_b$, de sorte que pour $a, a' \in G_a$ distincts, $b(a) \neq b(a')$.

ii Pour toute partie $S \subset G_a$, $|S| \geqslant |V(S)|$.

Exercice 2 (Preuve du théorème des mariages de Hall)
Démontrer le théorème 10

Solution de l'exercice 2
$(i) \Rightarrow (ii)$ est clair. Supposons (ii) et démontrons (i) par récurrence sur $n = |G_a|$.

Initialisation $n = 1$ **:** c'est clair.

Hérédité : Supposons le résultat vrai si $|G_a| < n$ pour un $n \geqslant 2$ et on suppose que $|G_a| = n$. On distingue deux cas.

- Si tout sous-ensemble propre $S \subset G_a$ (c'est-à-dire que $S \subset G_a$, $S \neq \emptyset$ et $S \neq G_a$) vérifie $V(S) \geqslant |S| + 1$, alors on apparie au hasard un sommet $a \in G_a$ et un sommet $b \in B$ qui lui est relié et on décide que $b(a) = b$. Le graphe G' obtenu en retirant les sommets a et b de G satisfait la proposition (ii), donc l'hypothèse de récurrence indique qu'on peut apparier ses sommets sans encombre. Ce faisant, on a apparié l'ensemble des sommets de G.
- Si il existe un sous-ensemble propre $S \subset G_a$ tel que $|V(S)| = |S|$, considérons les graphes G' et G'' obtenus respectivement en ne gardant que les sommets $S \cup V(S)$ et toutes les arêtes entre eux, et en les retirant de G. On peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G' pour lui trouver un couplage. En outre, si $S' \subset G''_a = G_a \setminus S$, soit $T = V(S') \setminus V(S)$. Alors $V(S \cup S') = V(S) \cup T$, donc

$$|T| = |V(S \cup S')| - |V(S)| \geqslant |S \cup S'| - |S| = |S'|$$

ce qui montre que G'' vérifie également (ii) et que l'on peut lui appliquer l'hypothèse de récurrence également. On a ainsi construit un couplage de G en le partitionnant en deux.

Définition 11 (Graphe de flot (d'après Wikipédia))**.**
Un **graphe de flot** est un graphe orienté dont un sommet s s'appelle la source et un autre p le puits. à chaque arête (u, v) du graphe est associée une capacité $c(u, v)$ positive. Une fonction de flot associe à chaque arête un flot de valeur plus petite que la capacité et telle que le flot entrant dans chaque sommet est égal au flot sortant de ce sommet. On note valeur du flot la somme des flots qui sortent de la source.

Définition 12 (coupe $s - t$)**.**
On appelle **coupe** $s - t$ de G un couple de sous-ensembles de sommets (S, T) disjoints d'union G tels que $s \in S$ et $t \in T$. La capacité de la coupe (S, T), notée $c(S, T)$, est la somme des capacités respectives des arcs de S à T.

Le théorème qui suit est important en optimisation et en théorie des graphes. Il stipule qu'étant donné un graphe de flots, le flot maximum pouvant aller de la source au puits est égal à la capacité minimale devant être retirée du graphe afin d'empêcher qu'aucun flot ne puisse passer de la source au puits. Le problème de flot maximum est le problème de maximiser la quantité de flots allant de la source au puits. Cela se traduit par la maximisation de la valeur du flot $|f|$. Le problème de coupe minimum est la minimisation de la capacité $c(S,T)$, c'est-à-dire la recherche d'une coupe (S,T) qui minimise la capacité de la coupe $s-t$.

Théorème 13 (Théorème flot-max/coupe-min)**.**
Pour tout graphe orienté G , tout couple (s,t) de sommets, et pour tout vecteur de capacités positives, la valeur maximale du flot de s à t est égale à la capacité d'une coupe minimale séparant s de t.

Démonstration. On commence par se convaincre qu'un flot maximal existe bien. On se donne (V,E) le graphe. On se donne θ un flot de force maximale et π une coupure de $S \to T$. On note $\phi(x,e)$ l'orientation de l'arête e au point x (-1 si x est la source, 1 si c'est la cible et 0 sinon). On a que la force du flot à la coupure est :

$$\begin{aligned}\text{Force}(\theta) &= \sum_{x\in S}\sum_{e\in E}\theta(e)\phi(x,e)\\ &= \sum_{e\in E}\theta(e)\sum_{x\in S}\phi(x,e)\\ &= \sum_{e\in E'}\theta(e)\sum_{x\in S}\phi(x,e)\end{aligned}$$

où E' est l'ensemble des arêtes qui rejoignent directement S et T.
On en conclut :

$$\text{Force}(\theta) \leqslant \sum_{e\in E'}\theta(e) \leqslant \sum_{e\in E'}c(e)$$

Ceci est vrai pour toute coupure donc le flot max est plus petit que la coupe min. Montrons qu'il s'agit d'une égalité. On appelle chemin augmentable toute suite : $s = x_0 \to x_1 \to ... \to x_k$ telle que pour chaque arête $x_i \to x_{i+1}$ sur ce chemin, on peut augmenter le flot sur cette arête (ou bien elle est négative et le flot est positif, ou bien la capacité maximale n'est pas atteinte). On remarque que $x_k \neq t$ car sinon on pourrait augmenter le flot sur ce chemin. Notons B l'ensemble des sommets de V qui peuvent être atteints par un chemin augmentable. Définissons Π comme l'ensemble des arêtes dont la source est dans B mais pas la cible. (Correspond à la coupure entre B et son complémentaire). Estimons $\sum_{e\in\Pi}c(e)$ On a :

$\theta(e) = c(e)$ si $e \in \Pi$
$\theta(e) = 0$ si l'arête est orientée du complémentaire de B dans B

$$\text{Force}(\theta) = \sum_{x\in B}\sum_{e\in E}\theta(e)\phi(x,e) = \sum_{e\in E}\theta(e)\sum_{x\in B}\phi(x,e) = \sum_{e\in\Pi}c(e)$$

□

Corollaire 14 (Théorème de Menger)**.**
Soient G un graphe fini non-orienté, et s et t deux sommets distincts. Le nombre minimum d'arêtes à supprimer pour déconnecter s et t est égal au nombre maximum de chemins arête-disjoints de G reliant s et t.

Exercices d'Olympiades

En dépit de tous les résultats intéressants que l'on peut établir sur les graphes, ce qui sert le plus en pratique dans les exercices d'olympiades sont la récurrence, des considérations de minimalité, maximalité, monovariants ou invariants, et des constructions algorithmiques.

Exercice 3 (OMM 2009)
Soit une assemblée de n personnes telle que parmi n'importe quel groupe de 4 personnes, il y en a soit 3 qui se connaissent deux à deux, soit 3 qui ne se connaissent pas deux à deux. Montrer qu'on peut séparer l'assemblée en deux groupes, de sorte que tous les membres du premier groupe se connaissent entre eux, et qu'aucune paire de personnes dans le deuxième groupe ne se connaisse.

Solution de l'exercice 3
Soit G le graphe dont les sommets sont les personnes de l'assemblée et les arêtes les liens de connaissance. Soit A un ensemble de taille maximale tel que tous les sommets de A sont reliés entre eux (clique). Soient à présent x, y des sommets à l'extérieur de A. Montrons par l'absurde qu'ils ne sont pas reliés entre eux : supposons que (x, y) est une arête. Notons d'abord que A doit contenir des sommets non connectés à x. Dans le cas contraire, on pourrait ajouter x à A, ce qui contredirait la maximalité de A. Il en va de même pour y. Considérons B l'ensemble des sommets de A qui ne sont pas connectés en même temps à x et y. Si B ne contient qu'un seul sommet, nous pouvons le retirer de A et ajouter x et y à A à sa place, ce qui contredit la maximalité de A. Ainsi, il y a deux sommets $z, w \in B$ tels que w n'est pas relié à x et z n'est pas relié à y. Cela signifie que l'ensemble $\{x, y, z, w\}$ ne satisfait pas l'hypothèse du problème. C'est la contradiction que nous voulions.

Exercice 4 (P1 BMO 2002)
Soit $A_1, \ldots, A_n$ des points du plan ($n \geqslant 4$) tels que trois d'entre eux ne sont jamais alignés. Certaines paires de points sont reliées par un segment, de sorte que chaque point soit relié à au moins trois autres points différents. Montrer qu'il existe un entier $k > 1$ et des points $X_1, X_2, \ldots, X_{2k}$ dans l'ensemble $\{A_1, \ldots, A_n\}$, tel que pour tout $i \in \{1, \ldots, 2k-1\}$, le point X_i est relié avec X_{i+1} et X_{2k} est relié avec X_1.

Solution de l'exercice 4
Soit G le graphe de sommets $A_1, \ldots, A_n$, et dont les arêtes sont les segments entre les A_i. L'exercice consiste à montrer que G contient un cycle de cardinal pair. On raisonne par récurrence forte sur n.

Initialisation $n = 4$ **:** G est le graphe complet à 4 sommets K_4, et on peut prendre $k = 2$ et $X_i = A_i$ pour tout i.

Hérédité : soit $N > 4$. Supposons le résultat vrai pour tout $n < N$. Le graphe G à N sommets vérifiant les conditions de l'énoncé doit avoir un cycle C, sinon il s'agit d'une forêt et il contient un sommet de degré 1 (feuille). Si le cycle contient un nombre pair de sommets, on a gagné. Sinon, notons $C = (y_1, \ldots, y_{2m+1})$ avec $m \geqslant 1$. Si il existe un chemin C' reliant y_i à y_j ($i \neq j$) différent de ceux empruntés par C, on peut construire un cycle de cardinal pair : en effet, C est constitué de deux chemins entre y_i et y_j, l'un avec un nombre pair de sommets et l'autre avec un nombre impair de sommets. Selon la parité du nombre de sommets dans C', on peut recoller la moitié de C de la même parité avec C'. On suppose donc qu'il existe aucun tel chemin C' entre deux sommets de C. Soit alors $G' = G/C$ le graphe obtenu en remplaçant tous les y_i par un unique sommet y : la condition obtenue

signifie que tout cycle dans G' se retrouve dans G sans changer de nombre de sommets. Or, G' a $n < N$ sommets et vérifie les hypothèses de l'énoncé (tous les sommets sont de degré au moins 3 et $n \geqslant 4$, puisqu'il y a au moins un sommet extérieur à C pour chaque sommet de C). Par hypothèse de récurrence, G' contient un cycle pair, et donc G aussi.

Exercice 5 (P5 EGMO 2017)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ et $t_1 < \cdots < t_n$ des entiers strictement positifs. $t_n + 1$ personnes participent à un tournoi d'échecs. Deux participants jouent l'un contre l'autre au plus une fois. Montrer que les deux conditions suivantes peuvent être satisfaites simultanément :

i Le nombre de parties jouées par chaque participant est égale à un des t_i ($1 \leqslant i \leqslant n$).

ii Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, il existe un participant qui a joué exactement t_i parties.

Solution de l'exercice 5
Soit G le graphe dont les sommets sont les joueurs et les arêtes les parties jouées. Il s'agit de montrer que l'on peut construire G d'ordre $t_n + 1$ de sorte que tous les degrés des sommets soient dans $\{t_1, \ldots, t_n\}$ et qu'il y ait au moins un sommet de degré t_i pour tout i.

On raisonne par récurrence sur n.

Initialisation $n = 1$ **:** Pour $n = 1$, il suffit de prendre G le graphe complet à $t_1 + 1$ sommets K_{t_1+1}.

Hérédité : Supposons le résultat acquis au rang n et considérons une suite d'entiers $1 \leqslant t_1 < \cdots < t_{n+1}$. On commence par se donner $t_{n+1} + 1$ sommets (graphe vide G). On en choisit deux sous-ensembles disjoints S, T respectivement de t_1 et $t_{n+1} - t_n$ sommets. L'ensemble $G' = G \setminus (S \cup T)$ contient $t_n - t_1 + 1$ sommets, donc on peut appliquer l'hypothèse de récurrence à G' et la liste d'entiers $1 \leqslant t_2 - t_1 < \cdots < t_n - t_1$. Ensuite, on relie tous les sommets de S à tous les sommets de G, ce qui augmente le degré de chaque sommet de G de t_1. Les sommets de G' ont donc maintenant pour degrés des éléments de l'ensemble $\{t_2, \ldots, t_n\}$, et chacun apparaît au moins une fois. Les sommets de S ont à présent degré $t_{n+1} + 1$, et les sommets de T ont pour degré t_1. G ainsi construit vérifie donc bien (i) et (ii).

Exercice 6 (P3 BMO 2015)
3366 critiques de cinéma participent aux votes pour les Oscars. Chaque critique vote pour exactement un acteur et une actrice. À l'issue du vote, on constate que pour tout entier $1 \leqslant n \leqslant 100$, il existe un acteur ou une actrice qui a reçu exactement n voix. Prouver qu'il existe deux critiques qui ont voté pour le même acteur et la même actrice.

Solution de l'exercice 6
Soit a_n l'acteur ou l'actrice qui a reçu n votes, pour chaque $1 \leqslant n \leqslant 100$. On note $A = \{a_1, \ldots, a_{100}\}$. Ensemble, les membres de A ont donc reçu $100 \times 101/2 = 5050$ votes. Il y a donc $5050 - 3366 = 1684$ critiques dont les deux votes sont membres de A.

Raisonnons ensuite par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas deux critiques avec le même vote.

On considère le graphe G dont les a_n sont les sommets et les arêtes les paires de votes émis par un même critique (lorsque les deux votes sont dans A). G a donc 100 sommets et 1684 arêtes (hypothèse des votes distincts). Le graphe est bipartite, puisqu'il n'y a pas d'arêtes entre deux acteurs ou deux actrices.

Considérons $S = \{a_1, \ldots, a_{33}\}$. Il y a au plus $33 \times 34/2 = 561$ arêtes avec un sommet dans S. Comptons à présent les arêtes qui n'ont aucun sommet dans S. Comme le graphe est bipartite, on peut diviser $T = A \setminus S$ en deux groupes T_1 et t_2 tels qu'il n'y a aucune arête entre deux sommets du même groupe. De plus, au total T contient 67 sommets. Ainsi, le nombre maximal d'arêtes entre deux sommets de S est égal au produit $|T_1| \times |T_2|$, qui est au plus $33 \times 34 = 1122$. En regroupant les arêtes qui contiennent un sommet dans S et celles qui n'en contiennent pas, on trouve que le graphe G contient au plus $1122 + 561 = 1683$ arêtes, ce qui constitue la contradiction recherchée.

Exercice 7 (ICO 2022)
Soit un graphe G avec 99 sommets dont les degrés sont dans $\{81, \ldots, 90\}$. Montrer qu'il existe 10 sommets de même degré qui ont un voisin en commun.

Solution de l'exercice 7
On raisonne par l'absurde en supposant qu'il n'existe pas de tel ensemble de sommets. D'après 1, tous les sommets ne peuvent pas être de degré 81. Soit s un sommet de degré $\deg(s) \geqslant 82$ et $V(s)$ l'ensemble de ses voisins. Pour chaque $81 \leqslant k \leqslant 90$, au plus 9 sommets de degré k sont donc dans $V(s)$. Mais puisque $|V(s)| > 9 \times 9$, il existe au moins un sommet A de degré 90. Notons par ailleurs X_i l'ensemble des sommets de degré exactement i pour tout $\{81 \leqslant i \leqslant 90\}$. Si parmi les voisins de A il se trouve 10 sommets de même degré, on a terminé. Sinon, il y a au plus (et donc exactement) 9 représentants de chacun des 10 ensembles X_i. Ainsi, il y a dans le graphe 10 sommets de degré 90 (au moins). On propose deux versions pour terminer la preuve :

Version 1 : Par ailleurs, il existe un j tel que X_j contienne moins de 10 sommets (donc exactement 9). On a vu qu'alors tous les sommets de X_j sont voisins de A, et ils sont de la même façon voisins de tous les sommets de X_{90}.

Version 2 : (Camille Pawlowski) On va majorer le cardinal de N l'ensembles des sommets $s \in G$ pour lesquels il existe au moins un élément de X_{90} non relié à s. A tout élément de N on peut donc associer un élément de X_{90} qui ne lui est pas relié. On remarque que pour tout $s \in X_{90}$ il existe exactement $99 - 1 - 90 = 8$ sommets dans G qui ne sont pas reliés à s, donc on peut associer au plus 8 éléments de N à s. Le même raisonnement s'applique à tous les sommets de X_{90}. Ainsi, on peut associer au plus $|X_{90}| \times 8 = 80$ sommets de N à un élément de X_{90}, donc $|N| \leqslant 80$. Cela laisse $99 - |X_{90}| - |N| \geqslant 99 - 10 - 80 = 9$ sommets qui sont reliés à tous les éléments de X_{90}.

L'ensemble des voisins en commun des sommets de $|X_{90}|$ est donc de cardinal au moins 9 et en particulier non vide. Ceci contredit l'hypothèse de départ et termine la preuve par l'absurde.

Exercice 8 (ICO 2021 P4)
L'*indice de chemin* d'un graphe G est le nombre minimum de chemins nécessaires pour passer une et une seule fois par chaque sommet de G. Étant donné un graphe G connexe, quel est la valeur maximum possible pour son *indice de chemin*, sachant que le plus grand ensemble de sommets de G deux à deux non reliés est $n > 1$ (*nombre d'indépendance*) ?

Solution de l'exercice 8
Soit P le plus long chemin de G (ne passant jamais deux fois par le même sommet) et $p_1, \ldots, p_l$ ses sommets. On considère ensuite le graphe G_1 obtenu en retirant de G les sommets $p_1, \ldots, p_l$, et on recommence : on retire le plus long chemin P_1, etc. On réitère le processus jusqu'à ce que

G_k soit vide. Soit $s_1, \dots, s_k$ les premiers sommets de $P_1, \dots, P_k$. Montrons que $p_1, p_l, s_1, \dots, s_k$ n'ont aucune arête entre eux. Puisque P est le plus long graphe dans G, p_1 et p_l ne sont reliés à aucun sommet extérieur à P. Pour la même raison, pour tout $1 \leqslant i < j \leqslant k$, s_i et s_j ne peuvent pas être adjacents parce que P_i est le plus long chemin dans le sous-graphe G_i. Il reste enfin à prouver que v_1 et v_l ne peuvent pas être adjacents. Comme G est connexe, il existe un sommet t qui n'est pas dans P et n sommet p_i ($2 \leqslant i \leqslant l-1$) tel que p_i et t sont adjacents. Si p_1 et p_l sont aussi adjacents, alors on pourrait faire un chemin de longueur $l+1$ dans G avec $tp_ip_{i-1} \dots p_1p_lp_{l-1} \dots p_{i+1}$. On a donc prouvé que $p_1, p_l, s_1, \dots, s_k$ sont deux à deux non reliés entre eux. Or le nombre d'indépendance du graphe est n, donc $k+2 \leqslant n$ et on a retiré au total $k+1 \leqslant n-1$ chemins. L'indice de chemin est donc au plus $n-1$, on peut vérifier que le maximum est bien atteint pour un graphe constitué d'un sommet v relié à n autres sommets (et pas d'autres arêtes). Il faut alors retirer les arêtes une par une (on peut en retirer deux en même temps au premier coup seulement).

Exercice 9 (C4 Shortlist BMO 2019)
Dans la ville isolée de Sleepy Hollow, il y a $2n$ rond-points connectant chacun exactement 3 routes. Une série de ponts et de tunnels fait en sorte que les routes ne se croisent qu'aux rond-points. Chaque route est à double sens, et les rond-points sont orientés dans le sens des aiguilles d'une montre (on est en Angleterre). Headless Horseman vient de passer son permis et les rond-points lui donnent des sueurs froides. À chaque rond-point, il prend donc la première sortie venue. En sortant de chez lui, il parcourt ainsi toutes les routes de la ville, dans les deux sens, avant de revenir chez lui. Pour quelles valeurs de N est-ce possible ?

Solution de l'exercice 9
On distingue selon la parité de n et on considère G le graphe dont les sommets sont les rond-points (tous de degré 3) et les arêtes les routes. Déjà, pour que l'énoncé ait un sens, il faut que $n \geqslant 2$.

Pour n impair : On remarque d'abord que $n = 3$ et $n = 5$ fonctionnent (faire un dessin). Ensuite, on va montrer que si n_1 et n_2 sont solutions, alors $n_1 + n_2 + 1$ l'est aussi. Soit G_1, G_2 deux graphes avec $2n_1$ et $2n_2$ sommets qui vérifient l'énoncé. Soit u_1, v_1 deux sommets reliés dans G_1 et u_2, v_2 deux sommets reliés dans G_2. Ajoutons deux sommets supplémentaires u_3 et v_3. On procède de la façon suivante :

1. On efface les arêtes $u_1 - v_1$ et $u_2 - v_2$.
2. On relie u_1 et u_2 à u_3.
3. On relie v_1 et v_2 à v_3.
4. On relie u_3 à v_3.

On peut vérifier que le graphe G obtenu vérifie bien les conditions sur le degré des sommets, et que l'on peut recoller les chemins parcourus par Headless Horseman dans chacun des graphes pour obtenir un parcours qui convient. Ainsi, tout $n \geqslant 3$ impair fonctionne.

Pour n pair : montrons qu'il n'y a pas de solution dans ce cas. Le graphe n'est a priori pas planaire, mais on peut le dessiner sur une surface de genre g. D'après la formule d'Euler,

$$S - A + F = 2 - 2g$$

Avec $S = 2n$ le sombre de sommets, $A = 3n$ le nombre d'arêtes et $F = 1$ le nombre de faces. F doit donc être pair, mais l'existence d'un chemin tel que celui parcouru par Headless Horseman signifie que le graphe peut être dessiné avec une seule face.

Exercice 10 (C4 shortlist IMO 2021)
Le royaume d'Anisotropie est constitué de n villes. Pour chaque paire de villes il existe exactement un chemin direct entre elles. On appelle *chemin* de X à Y une séquence de routes telles que l'on peut aller de X à Y le long de cette séquence sans retourner à une ville déjà visitée. Une collection de chemins est appelée *diverse* si aucune routes n'appartient à 2 chemins ou plus dans la collection. Soit A et B deux villes distinctes en Anisotropie. Soit N_{AB} le nombre maximal de chemins dans une collection diversifiée de chemins allant de A à B. De même, soit N_{BA} le nombre maximal de chemins dans une collection diversifiée de chemins allant de B à A. Prouvez que l'égalité $N_{AB} = N_{BA}$ tient si et seulement si le nombre de routes sortant de A est le même que le nombre de routes sortant de B.

Solution de l'exercice 10
Solution1. Nous écrivons $X \to Y$ (ou $Y \leftarrow X$) si la route entre X et Y va de X à Y . Remarquez que, s'il existe une route C quelconque allant de X à Y (passant éventuellement par certaines villes plus d'une fois), alors il existe un chemin de X à Y constitué de certaines routes de C. En effet, tout cycle de l'itinéraire peut être supprimé de manière inoffensive ; après quelques suppressions, on obtient un chemin. On dit qu'un chemin est court s'il consiste en une ou deux routes. Répartissez toutes les villes différentes de A et B en quatre groupes, $\mathcal{I}$, $\mathcal{O}$, $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$, selon les règles suivantes : pour chaque ville C,

- $C \in \mathcal{I} \iff A \to C \leftarrow B$
- $C \in \mathcal{A} \iff A \to C \to B$
- $C \in \mathcal{O} \iff A \leftarrow C \to B$
- $C \in \mathcal{B} \iff A \leftarrow C \leftarrow B$

Lemme 15.
Soit P une collection diverse composée de p chemins de A à B. Alors il existe une collection diverse composée d'au moins p chemins de A à B et contenant tous les chemins courts de A à B.

Démonstration. Pour obtenir la collection désirée, on modifie P comme suit. S'il existe une route directe $A \to B$ et que le chemin constitué de cette seule route n'est pas dans P, il suffit de l'ajouter à P. Considérons maintenant toute ville $C \in A$ telle que le chemin $A \to C \to B$ n'est pas dans P. Si P contient au plus un chemin contenant une route $A \to C$ ou $C \to B$, enlever ce chemin et ajouter le chemin $A \to C \to B$ à la place. Sinon, P contient deux chemins de la forme $A \to C \dashrightarrow B$ et $A \dashrightarrow C \to B$, où $C \dashrightarrow B$ et $A \dashrightarrow C$ sont des chemins quelconques. Dans ce cas, nous recombinons les arêtes pour former deux nouveaux chemins $A \to C \to B$ et $A \dashrightarrow C \dashrightarrow B$ (en supprimant les cycles de ce dernier si nécessaire). Nous remplaçons maintenant les deux anciens chemins dans P par les deux nouveaux. Après toute opération décrite ci-dessus, le nombre de chemins dans la collection ne diminue pas et la collection reste diversifiée. En appliquant une telle opération à chaque $C \in A$, nous obtenons la collection souhaitée. □

Revenons au problème. Supposons, sans perte de généralité, qu'il existe une route $A \to B$, et que a et b désignent les nombres de routes partant de A et de B, respectivement. Choisissons une collection diverse P constituée de chemins N_{AB} de A à B. Nous la transformerons en une collection diverse Q constituée d'au moins $N_{AB} + (b - a)$ chemins de B à A. Cette construction donne : $N_{BA} \geqslant N_{AB} + (b - a)$; de même, nous obtenons $N_{AB} \geqslant N_{BA} + (b - a)$, d'où $N_{BA} - N_{AB} = b - a$. Cela donne l'équivalence désirée. Appliquons le lemme pour obtenir une collection diverse P' d'au moins N_{AB} chemins contenant tous les $|\mathcal{A}| + 1$ chemins courts de A à

B. Remarquons que les chemins dans P' ne contiennent aucune arête d'un chemin court de B à A. Chaque chemin non court dans P' a la forme $A \to C \dashrightarrow D \to B$, où $C \dashrightarrow D$ est un chemin de la ville de $C \in \mathcal{I}$ à la ville de $D \in \mathcal{O}$. Pour chaque chemin de ce type, on met dans Q le chemin $B \to C \dashrightarrow D \to A$; mettre aussi dans Q tous les chemins courts de B à A. Clairement, la collection Q est diverse. Maintenant, toutes les routes qui sortent de A terminent dans les villes de $\mathcal{I} \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{B}$, tandis que toutes les villes sortant de B terminent dans les villes de $\mathcal{I} \cup \mathcal{B}$. Ainsi,

$$a = |\mathcal{I}| + |\mathcal{A}| + 1, \qquad b = |\mathcal{I}| + |\mathcal{B}|$$

et donc $a - b = |\mathcal{A}| - |\mathcal{B}| + 1$. D'autre part, puisque'il y a $|\mathcal{A}| + 1$ chemins courts de A vers B (incluant $A \to B$) et $|\mathcal{B}|$ chemins courts de B vers A, on en déduit comme désiré :

$$|Q| = |P'| - (|\mathcal{A}| + 1) + |\mathcal{B}| \geqslant N_{AB} + (b - a)$$

Il existe une deuxième solution qui utilise le théorème de Menger.

Exercice 11 (C8 shortlist IMO 2019)
Alice possède une carte du Pays des Merveilles, un pays composé de $n \geqslant 2$ villes. Pour chaque paire de villes, il y a une route étroite qui va d'une ville à l'autre. Un jour, toutes les routes sont déclarées "à sens unique". Alice n'a aucune information sur la direction des routes, mais le Roi de Cœur lui propose de l'aider. Elle est autorisée à lui poser un certain nombre de questions. Pour chaque question, Alice choisit une paire de villes et le Roi de Cœur lui indique la direction de la route qui relie ces deux villes.
Alice veut savoir s'il y a au moins une ville au pays des merveilles avec au plus une route sortante. Prouver qu'elle peut toujours le savoir en posant au plus $4n$ questions.

Solution de l'exercice 11
Nous allons montrer qu'Alice doit poser au plus $4n - 7$ questions. Sa stratégie comporte les phases suivantes. Dans ce qui suit, S est l'ensemble des villes dont Alice, jusqu'à présent, ne sait pas qu'elles ont plus d'une route sortante (donc initialement $|S| = n$).

Phase 1. Alice choisit deux villes quelconques, disons A et B. Sans perte de généralité, supposons que la réponse du Roi de Cœur soit que la route va de A à B. À la fin de cette phase, Alice a posé 1 question.

Phase 2. Au cours de cette phase, il existe une seule ville (variable) T dont on sait qu'elle possède au moins une route entrante, mais dont on ne sait pas encore si elle possède des routes sortantes. Initialement, T est B. Alice fait $n - 2$ fois ce qui suit : elle choisit une ville X sur laquelle elle n'a pas posé de question auparavant, et demande la direction de la route entre T et X. Si c'est de X à T, T reste inchangé ; si c'est de T à X, X devient le nouveau choix de la ville T, puisque l'on sait maintenant que la ville précédente T a une route sortante. À la fin de cette phase, Alice a posé un total de $n - 1$ questions. La dernière ville T n'est pas encore connue pour avoir des routes sortantes, alors que toutes les autres villes ont exactement une route sortante connue. Le graphe non dirigé des routes dont les directions sont connues est un arbre.

Phase 3. Au cours de cette phase, Alice s'enquiert de la direction de toutes les routes entre T et une autre ville qu'elle n'a pas encore interrogée, et s'arrête si elle trouve deux routes sortantes de T. Cette phase comporte au plus $n - 2$ questions. Si elle ne trouve pas deux routes sortantes de T, elle a répondu à sa question initiale avec au plus $2n - 3 \leqslant 4n - 7$

questions, donc dans ce qui suit nous supposons qu'elle trouve deux routes sortantes, posant un total de k questions dans cette phase, où $2 \leqslant k \leqslant n-2$ (et donc $n \geqslant 4$ pour ce qui suit). Pour chaque question où la route va vers T, la ville à l'autre bout est retirée de S (car elle avait déjà une route sortante connue), tandis que la dernière question a entraîné le retrait de T de S. Ainsi, à la fin de cette phase, $|S| = n-k+1$, tandis qu'un total de $n-k+1$ questions ont été posées. De plus, le graphe non orienté des routes de S dont les directions sont connues ne contient aucun cycle (puisque T n'est plus un membre de S, toutes les questions posées dans cette phase concernaient T et le graphe était un arbre avant le début de cette phase). Chaque ville de S a exactement une route sortante connue (pas nécessairement vers une autre ville de S).

Phase 4. Au cours de cette phase, Alice choisit à plusieurs reprises n'importe quelle paire de villes dans S dont elle ne connaît pas la direction de la route qui les relie. Puisque chaque ville dans S a exactement une route sortante connue, cela résulte toujours en la suppression d'une de ces deux villes de S. Puisqu'il n'y a pas de cycles dans le graphe des routes de direction connue dans S, cela peut continuer jusqu'à ce qu'il y ait au plus 2 villes restantes dans S. S'il reste t villes, $n-k+1-t$ questions ont été posées dans cette phase, soit un total de $2n-t$ questions.

Phase 5. Au cours de cette phase, Alice pose des questions sur toutes les routes impliquant les villes restantes de S qu'elle n'a pas encore interrogées. Elle a certainement déjà posé des questions sur toutes les routes entre ces villes (si $t = 2$). Elle doit également avoir posé des questions au cours de l'une des deux premières phases sur au moins une autre route impliquant l'une de ces villes (puisque ces phases ont abouti à un arbre à $n > 2$ sommets). Elle pose donc au plus $t(n-t)-1$ questions dans cette phase. A la fin de cette phase, Alice sait si une ville possède au plus une route sortante. Si $t = 1$, au plus $3n-3 \leqslant 4n-7$ questions ont été nécessaires au total, tandis que si $t = 2$, au plus $4n-7$ questions ont été nécessaires au total.

Exercice 12 (IMO 2019 P3)
Un réseau social compte 2019 membres. Certains de ces membres sont amis l'un avec l'autre, la relation d'amitié étant réciproque. Des événements du type décrit ci-dessous surviennent successivement, l'un après l'autre : Soit A, B et C trois membres tels que A soit ami avec B et C, mais que B et C ne soient pas amis ; alors B et C deviennent amis, mais A n'est plus ami ni avec B, ni avec C. Les autres relations d'amitié entre membres ne changent pas durant cet événement. Initialement, 1010 membres ont 1009 amis chacun, et 1009 membres ont 1010 amis chacun. Démontrer qu'il existe une suite de tels événements à la suite desquels chaque membre aura au plus un ami.

Solution de l'exercice 12

Remarque 16.
Le problème a une reformulation évidente en termes de théorie des graphes. On donne un graphe G avec 2019 sommets, dont 1010 ont un degré 1009 et 1009 un degré 1010. On est autorisé à effectuer sur G des opérations du type suivant : Supposons que le sommet A soit adjacent à deux sommets distincts B et C qui ne sont pas adjacents l'un à l'autre. On peut alors supprimer les arêtes AB et AC de G et ajouter l'arête BC dans G. Une telle opération est appelée "refriending". Il s'agit de prouver que, par une séquence de tels recouvrements, on peut atteindre un graphe qui est une union disjointe d'arêtes et de sommets distincts.

Notons que le graphe donné est connexe, puisque le degré total de deux sommets quelconques est d'au moins 2018 et qu'ils sont donc soit adjacents, soit ont au moins un voisin en commun. Le graphe donné satisfait donc à la condition suivante :

Chaque composante connexe de G avec au moins trois sommets n'est pas complète et a un sommet de degré impair. $(\star)$

Nous allons montrer que si un graphe G satisfait la condition $(\star)$ et a un sommet de degré au moins 2, alors il y a un refriending sur G qui préserve la condition $(\star)$. Puisque les réaménagements diminuent le nombre total d'arêtes de G, en utilisant une séquence de tels réaménagements, nous devons atteindre un graphe G dont le degré maximal est au plus égal à 1, et nous avons donc terminé.

Choisissons un sommet A de degré au moins 2 dans une composante connexe G' de G. Comme aucune composante de G comportant au moins trois sommets n'est complète, nous pouvons supposer que tous les voisins de A ne sont pas adjacents les uns aux autres. (Par exemple, en choisissant un sous-graphe complet maximal K de G'. Un sommet A de K a un voisin en dehors de K, et ce voisin n'est pas adjacent à tous les sommets de K par maximalité). En retirant A de G, on divise G' en composantes connexes plus petites $G_1, ..., G_k$ (éventuellement avec $k = 1$), à chacune desquelles A est connecté par au moins une arête. Nous distinguons plusieurs cas.

Cas 1 : $k = 2$ et A est connecté à un certain G_i par au moins deux arêtes. Choisissons un sommet B de G_i adjacent à A, et un sommet C dans une autre composante G_j adjacente à A. Les sommets B et C ne sont pas adjacents, et donc enlever les arêtes AB et AC et ajouter l'arête BC ne déconnecte pas G'. Il est facile de voir que cela préserve la condition, puisque le remaniement ne change pas la parité des degrés des sommets.

Cas 2 : $k = 2$ et A est connecté à chaque G_i par exactement une arête. Considérons le sous-graphe induit sur tout G_i et le sommet A. Le sommet A a un degré 1 dans ce sous-graphe ; puisque le nombre de sommets de degré impair d'un graphe est toujours pair, nous voyons que G_i a un sommet de degré impair (dans G). Ainsi, si nous laissons B et C être des voisins distincts de A, l'élimination des arêtes AB et AC et l'ajout de l'arête BC préservent la condition ci-dessus : le remaniement crée deux nouvelles composantes, et si l'une de ces composantes a au moins trois sommets, alors elle ne peut pas être complète et doit contenir un sommet de degré impair (puisque c'est le cas de chaque G_i).

Cas 3 : $k = 1$ et A est connecté à G' par au moins trois arêtes. Par hypothèse, A a deux voisins B et C qui ne sont pas adjacents l'un à l'autre. Enlever les arêtes AB et AC et ajouter l'arête BC ne déconnecte pas G'. Nous sommes donc dans le même cas que dans le cas 1.

Cas 4 : $k = 1$ et A est connecté à G' par exactement deux arêtes. Soit B et C les deux voisins de A qui ne sont pas adjacents. En enlevant les arêtes AB et AC et en ajoutant l'arête BC, on obtient deux nouvelles composantes : l'une constituée d'un seul sommet et l'autre d'un sommet de degré impair. Nous avons terminé, à moins que cette deuxième composante ne soit un graphe complet d'au moins 3 sommets. Mais dans ce cas, G' serait un graphe complet moins l'unique arête BC, et aurait donc au moins 4 sommets puisque G' n'est pas un 4-cycle. Si nous laissons D être un troisième sommet de G', alors enlever les arêtes BA et BD et ajouter l'arête AD ne déconnecte pas G'. Nous sommes alors dans la même situation que dans le cas 1.

Exercice 13 (IMO 1991 P4)
Supposons que G est un graphe connexe avec k arêtes. Prouver qu'il est possible d'étiqueter les arêtes $1, 2, \ldots, k$ de telle sorte qu'à chaque sommet appartenant à deux arêtes ou plus, le plus grand diviseur commun des entiers étiquetant ces arêtes soit égal à 1.

Solution de l'exercice 13
Nous proposons une approche algorithmique pour étiqueter les arêtes. Nous commençons par nommer V l'ensemble de tous les sommets de G. Pour chaque étape du processus, nous retirons un certain nombre de sommets de l'ensemble V s'il existe une arête étiquetée autour d'eux. En outre, nous utiliserons les nombres $1, 2, ..., k$ dans l'ordre du plus petit au plus grand.

Voici comment procéder : Soit u le plus petit nombre non encore utilisé. Prenons le chemin le plus long qui utilise n'importe quel sommet une fois formé uniquement par des sommets de V et appelons ce chemin $P = (v_1, v_2, ..., v_n)$. Si v_1 a plus d'un bord, alors puisque P est maximal, il doit être connecté à un autre bord v_0 qui pourrait être l'un des sommets v_i ou l'un des sommets ne faisant pas partie de V. De même, si v_n a plus d'une arête, il doit être connecté à un sommet v_{n+1} qui est soit l'un des v_i, soit l'un des sommets ne faisant pas partie de V. Remarquons que puisque $v_1, v_n \in V$ l'arête reliant v_0 et v_1 et l'arête reliant v_n et v_{n+1} ne sont pas étiquetées.

Maintenant, si v_0 existe, nous allons étiqueter l'arête joignant v_i et v_{i+1} avec le nombre $u + i$. Si v_0 n'existe pas, nous étiquetons l'arête joignant v_i et v_{i+1} avec le nombre $u + i - 1$.
Grâce à la connexité de G, on peut s'arranger pour ne pas rencontrer le cas pathologique du cycle si u>1.

Si v_0 ou v_{n+1} n'existe pas, alors le sommet auquel ils auraient dû être connectés a un degré 1, et les étiquettes des arêtes qui l'entourent n'ont donc pas d'importance. Dans le cas contraire et dans le cas de tout autre sommet du chemin, notre processus garantit que le sommet sera entouré par deux arêtes étiquetées par 2 nombres consécutifs. Ainsi, ce sommet sera entouré par des arêtes dont le plus grand facteur commun est 1, quelle que soit l'étiquette des autres arêtes qui l'entourent. Remarquez que d'après notre définition de V, les arêtes $v_1, v_2, ..., v_n$ sont supprimées de V. Ainsi, il est clair que tous les sommets qui ne sont pas dans V, à tout moment, ont des arêtes qui les entourent et qui sont relativement premières.

Nous répétons le processus décrit jusqu'à ce que les seuls sommets de V soient ceux qui ne sont connectés à aucun autre sommet de V. Soit u le plus petit nombre que nous n'avons pas encore utilisé. Si l'un d'entre eux est de degré 1, nous ne nous en soucions pas. S'il y a un sommet v de degré au moins 2, alors nous étiquetons simplement 2 de ses arêtes u et $u + 1$ et maintenant ses arêtes sont premières entre elles, et nous pouvons l'enlever de V. Remarquez que cela ne supprime aucun autre sommet de V puisque v n'est connecté à aucun sommet de V. Nous continuons ainsi pour les autres sommets de V.

Maintenant, tous les sommets de V sont ceux dont les arêtes n'ont pas d'importance, tandis que tous les sommets qui ne sont pas dans V sont ceux dont les arêtes sont premières entre elles. Nous avons donc la configuration souhaitée, et il nous suffit de distribuer les nombres restants comme nous le souhaitons.

4 TD Idées simples (Raphael)

Reprise du cours de Baptiste groupe D, Poly de Valbonne 2022

5 Axes radicaux (Antoine)

Exercice 1
Soit ω et Ω deux cercles disjoints de centres respectifs O_1 et O_2. On choisit t une tangente commune extérieure à ω et Ω qui les touche respectivement en T_1 et T_2 et M est le milieu de $[T_1T_2]$. Le segment $[O_1O_2]$ coupe ω et Ω en X et Y respectivement. On note Z l'intersection de (T_1X) avec (T_2Y). Montrer que la droite (ZM) est perpendiculaire à la droite (O_1O_2).

Exercice 2
Soit ABC, un triangle, ω son cercle circonscrit. Soit S le milieu de l'arc BC ne contenant pas A. Soient $X \in [AB]$ et $Y \in [AC]$ tels que $(XY)//(BC)$. On prend P (resp. Q),la seconde intersection de SX (resp. SY) avec ω et $R = PQ \cap XY$. Montrer que AR est tangent à ω.

Exercice 3 (P1 IMO 2008)
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, et M_A le milieu de $[BC]$. On considère le cercle Γ_A de centre M_A passant par H, et A_1, A_2 ses deux intersections avec $[BC]$. On définit $B_1, B2, C_1, C_2$ de la même manière. Montrer que $A_1, A_2, B_1, B_2, C_1, C_2$ sont cocycliques.

Exercice 4
Soit ABC un triangle, on place les points A_1 et A_2 de telle sorte que $AA_1 = AA_2 = BC, A_1 \in (AB)$ et $A_2 \in (AC)$ du côté opposé de B et C par rapport à A, on définit B_1, B_2, C_1 et C_2 de manière similaire. Montrer que les points $A_1, A_2, B_1, B_2, C1$ et C_2 sont sur un même cercle.

Exercice 5 (USA TSTST 2011 P4)
Soit ABC un triangle acutangle, H et O l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit de ABC. Soient M et N les milieux de AB et AC respectivement. Les demi-droites $[MH)$ et $[NH)$ croisent (ABC) en P et Q respectivement, et (MN) et (PQ) se croisent en R. Montrer que $(RA)\perp(OA)$

Exercice 6 (P4 IMO 2013)
Soit ABC un triangle acutangle, et soient M, N les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. Soit W un point de $[BC]$, et on pose ω_1 le cercle circonscrit à BWN, et ω_2 le cercle circonscrit à CWM. On pose aussi X le point diamétralement opposé à W dans ω_1 et Y le point diamétralement opposé à W dans ω_2. Montrer que l'orthocentre H de ABC est sur (XY).

Exercice 7 (P3 entraînement groupe C 2022)
Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit et I le centre de son cercle inscrit. On note E et F les projetés orthogonaux de I sur (AB) et (AC). On note T le point d'intersection de (EI) avec (OC) et Z le point d'intersection de (FI) avec (OB). On définit également S comme le point d'intersection des tangentes en B et C au cercle circonscrit à ABC.
Montrer que (SI) est perpendiculaire à (ZT).

Solution de l'exercice 1
Soit X' l'autre intersection de (O_1O_2) avec ω_1, de même pour Y'. L'homothétie extérieure qui envoie ω sur Ω envoie également X' sur Y, et T_1 sur T_2, de sorte que $\widehat{T_1X'X} = \widehat{T_2Y'Y}$. De plus, par angle tangent, $\widehat{T_1X'X} = \widehat{XT_1T_2}$ et on a $\widehat{T_2YX} = 180 - \widehat{T_2YY'}$, d'où $\widehat{XT_1T_2} = 180 - \widehat{T_2Y'X}$, donc T_1T_2YX est cocyclique par angle inscrit. Donc Z est sur l'axe radical de ω et Ω. M est aussi sur cet axe car $MT_1 = MT_2$, donc cet axe est (MZ). Cela conclut car l'axe radical de deux cercles est perpendiculaire à la droite qui relie leurs centres.

Solution de l'exercice 2
Montrons que PQ, XY et la tangente en A à ω, sont les axes radicaux de trois cercles, le premier est ω, le deuxième le cercle circonscrit à AXY et le troisième celui à $PQYX$. Ce quadrilatère est bien cocyclique car par chasse aux angles comme $\widehat{BOS} = \widehat{CBS}$, on a

$$\widehat{PQY} = \widehat{PQB} + \widehat{QBS} = \widehat{PSB} + \widehat{BCS} = \widehat{PSB} + \widehat{CBS} = 180 - \widehat{PXY}.$$

Comme $\widehat{AYX} = \widehat{ACB}$, la tangente en A à ω est la même que celle au cercle circonscrit à AXY, donc celle-ci est l'axe radical. Finalement les trois axes radicaux s'intersectent en un point, donc on obtient le résultat voulu.

Solution de l'exercice 3
C est sur l'axe radical de Γ_A et Γ_B car H est dessus, et le symétrique de H par rapport à (M_AM_B) est aussi dessus, donc A_1, A_2, B_1, B_2 sont cocycliques. De plus, le centre de ce cercle est l'intersection des médiatrices de $[A_1A_2]$ et de $[B_1B_2]$, il s'agit donc de O.
En raisonnant de même, on obtient bien que les 6 points sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4
On va d'abord montrer que $A_1A_2B_2C_1, B_1B_2C_2A_1$ et $C_1C_2A_2B_1$ sont cocycliques. Posons $a = BC, b = CA$ et $c = AB$. On a $AA_1 \cdot AB_2 = a(c + b)$ et $AA_2 \cdot AC_1 = a(b + c)$,d'ou $AA_1 \cdot AB_2 = AA_2 \cdot AC_1$. Donc $A_1A_2B_2C_1$ est cocyclique. De même, $B_1B_2C_2A_1$ et $C_1C_2A_2B_1$ sont cocycliques. Il suffit de montrer que de les cercles circonscrits de ces quadrilatères sont confondus pour conclure.

Supposons alors que ces cercles sont deux à deux disjoints. Leurs axes radicaux sont alors $(A_1B_2), (B_1C_2)$ et (C_1A_2). Ce sont les cotés du triangle ABC. Ceci est une contradiction car ces axes radicaux doivent être concourants

Solution de l'exercice 5
Remarquons déjà que vu que (AMN) est l'image de (ABC) par l'homothétie de centre A et de rapport $\frac{1}{2}$, les deux cercles sont tangents en A. De plus, $MNPQ$ est cyclique.
En effet, soient B', C' les points diamétralement opposés à B et C dans (ABC). Il est connu (exercice) que les symétriques de H par rapport à M et N sont B' et C' respectivement. Ainsi, P, H, M, C' et Q, H, N, B' sont alignés. Comme de plus $(B'C')//(BC)//(MN)$, on obtient bien que $MNPQ$ est cyclique.

Supposons maintenant par l'absurde que (RA) n'est pas tangente à (ABC). Soit alors X la deuxième intersection de (RA) avec (ABC). Par puissance d'un point, on a que A, X, M, N sont cocycliques. Mais alors (AMN) et (ABC) ont deux points d'intersection différents : contradiction.

Solution de l'exercice 6
Soient O_1, O_2 les centres des cercles, et L le pied de la hauteur issue de A. Soit enfin $Z \neq W$ l'intersection des cercles ω_1 et ω_2.
Tout d'abord, X, Y, Z sont alignés. En effet, $\widehat{XZW} = \widehat{YZW} = 90$ par définition de X et Y. De plus, comme B, N, M, C sont cocycliques, A est le centre radical des trois cercles, et en particulier A est sur l'axe radical de ω_1 et ω_2, autrement dit A, Z, W sont alignés.
Ensuite, $(AW)\perp(XY)$. En effet, $(AW)\perp(O_1O_2)$ par axe radical, et (XY) est l'image de (O_1O_2) par l'homothétie de rapport 2 et de centre W, donc $(XY)//(O_1O_2)$ et $(AW)\perp(XY)$.

Enfin, par puissance d'un point,

$$AH \cdot AL = AN \cdot AB = AZ \cdot AW,$$

donc H, L, W, Z sont cocycliques. On en déduit $\widehat{HZW} = \widehat{HLW} = 90$, et H est effectivement sur (XY).

Solution de l'exercice 7

Notons $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BAC}$, $\beta = \frac{1}{2}\widehat{ABC}$ et $\gamma = \widehat{ICA} = \frac{1}{2}\widehat{ACB} = 90 - \alpha - \beta$ et commençons par une chasse aux angles sur la figure pour comprendre le rôle des points Z et T :

$$\begin{aligned}
\widehat{TIC} &= \widehat{TIE} - \widehat{CIE} = (180 - \widehat{FIE}) - (90 - \widehat{ECI}) \text{ car } \widehat{IEC} = 90 \\
&= \widehat{FAE} + \widehat{ACI} - 90 = 2\alpha + \gamma - 90 = \alpha - \beta \text{ car } \widehat{IEA} = \widehat{IFA} = 90 \\
\text{et } \widehat{TCI} &= \widehat{TCE} - \widehat{ICE} = \widehat{OCA} - \widehat{ICA} = \frac{1}{2}\left(180 - \widehat{AOC}\right) - \gamma \text{ car } OCA \text{ est isocèle en } O \\
&= 90 - \widehat{ABC} - \gamma = 90 - 2\beta - \gamma = \alpha - \beta \text{ par le théorème de l'angle au centre.}
\end{aligned}$$

Ainsi, le triangle TIC est isocèle en T. De même, on vérifie que ZIB est isocèle en B.

Montrons à présent que $(ZT) \perp (SI)$ en utilisant les propriétés des axes radicaux. Comme I appartient aux deux cercles C_Z et C_T de centres Z et T et de rayons respectifs ZB et TC, il est sur l'axe radicale de ces deux cercles. Pour conclure, il suffit donc de démontrer que S se situe sur l'axe radical de C_T et C_Z.

Pour cela, on remarque que $(SC) \perp (OC) = (TC)$ par définition donc (SC) est tangente à C_T en C. De même, (SB) est tangente à C_Z en B. Les droites (SB) et (SC) sont donc les axes radicaux du cercle circonscrit à ABC avec C_Z et C_T respectivement : S est donc le centre radical des trois cercle. En particulier, S appartient à l'axe radical de C_T et C_Z donc $(SI) \perp (ZT)$.

6 Invariants/monovariants (Félix)

Exercice 1

On a n cartes, dont certaines sont faces visibles et certaines face cachée. On effectue une opération consistant à prendre une carte visible qui n'est pas la carte la plus à droite et à retourner cette carte ainsi que celle située à sa droite. Montrer qu'on ne peut effectuer cette opération qu'un nombre fini de fois.

Exercice 2

Vincent a une liste $a_1, a_2, ..., a_n$ de n réels distincts qu'il souhaite trier. Pour ce faire, il choisit un i inférieur ou égal à $n-1$ tel que $a_i > a_{i+1}$ et échange les nombres a_i et a_{i+1} et recommence tant qu'il le peut. Montrer que quoi qu'il fasse, il finira par aboutir à une liste triée.

Exercice 3

Trois fourmis sont placées sur les points de coordonnées $(0,1)$, $(1,0)$ et $(2,2)$ du plan. Elles se déplacent à tour de rôle, une fourmi se déplaçant toujours parallèlement à la droite formée par les deux autres. Les fourmis peuvent-elles se retrouver en $(0,0)$, $(0,2)$ et $(2,1)$?

Exercice 4

64 entiers ont été placés sur les cases d'un échiquier. On s'autorise l'opération consistant à

ajouter ou enlever 1 à deux cases voisines quelconques. Donner une condition nécessaire et suffisante pour qu'il soit possible d'aboutir à une situation où toutes les cases contiennent le nombre 0.

Exercice 5
Un jeton a été placé sur la case en bas à gauche d'un échiquier. Tant qu'il y a un jeton avec une case libre un cran à sa droite et une un cran au-dessus, Emilhan peut enlever le jeton et le remplacer par deux jetons, un juste à droite et un juste au-dessus.
a) Peut-il rendre le carré de 3x3 cases en bas à gauche vide ?
b) Peut-il rendre les 6 cases les plus en bas à gauche (celles situées à une distance au plus 2 de la case en bas à gauche) vides ?

Exercice 6
Le nombre 1 est écrit 2^n fois sur un tableau. À $n2^{n-1}$ reprises, on choisit deux nombres a et b écrits sur le tableau, et on les remplace par deux exemplaires de $a + b$. Montrer que la somme des nombres obtenus à la fin est supérieure ou égale à 4^n.

Exercice 7
On se donne n points rouges et n points bleus dans le plan, tels que 3 d'entre eux ne sont jamais alignés. Montrer qu'il est possible de tracer n segments reliant chacun un point rouge à un point bleu, en utilisant chaque point une fois et sans que ces segments s'intersectent.

Exercice 8
On dispose d'une ligne infinie de cases avec des jetons sur certaines (une même case pouvant contenir autant de jetons qu'on veut. Quand il y a deux jetons sur une même case, on peut en avancer un d'une case et reculer l'autre de 2 cases. Montrer qu'on ne peut effectuer cette opération qu'un nombre fini de fois.

Exercice 9
Baptiste joue au solitaire : il a placé des pions sur certaines intersections d'une grille infinie, et effectue des actions consistant à faire sauter un pion par dessus un de ses voisins. Un pion ne peut sauter par dessus un de ses voisins que si la case opposée par rapport à ce voisin est vide. Le pion se retrouve alors sur la case opposée et le voisin sauté est retiré de la grille. Si tous les pions sont initialement situés sur des points d'abscisse négative (ou nulle), quel est la colonne de plus grande abscisse où Baptiste peut faire parvenir un pion ?

Exercice 10
On nomme tétrominos S et Z les blocs de 4 carrés suivants. On se donne une forme pavable en utilisant uniquement des tétrominos S, et on la pave en utilisant des tétrominos S et Z. Montrer qu'on a utilisé un nombre pair de tétrominos Z.

Exercice 11 (Bonus)
Montrer que tout entier peut s'écrire comme la somme de puissances distinctes du nombre d'or $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$

7 Inversions (Quentin)

Éléments de théorie

Définition 1.
Soit O un point du plan, $r > 0$. Une inversion de centre O et de rapport $k = r^2$ (autrement appelée inversion par rapport au cercle de centre O et de rayon r) est une transformation qui a chaque point M différent de O associe l'unique point M' de la demi-droite $[OM)$ vérifiant $OM \times OM' = r^2$.

Remarque 2.
On peut également définir les inversions de rapport négatif, l'inversion de centre O et de rapport $-k$ ($k > 0$) étant définie comme la composée de l'inversion de centre O de rapport k, et de la symétrie centrale de centre O.

Remarque 3.
A priori le point O n'a pas d'image ni d'antécédent par une inversion de centre O. Une inversion est donc une transformation du plan privé de O. Néanmoins, il peut être commode de "rajouter un point à l'infini" au plan, de sorte que l'inversion envoie O sur le point à l'infini, et le point à l'infini sur O.

Proposition 4.
Une inversion est une transformation involutive, c'est-à-dire que c'est sa propre réciproque : faire la même inversion deux fois de suite revient à ne rien faire.

Démonstration. C'est direct avec la relation $OM \times OM' = r^2$. □

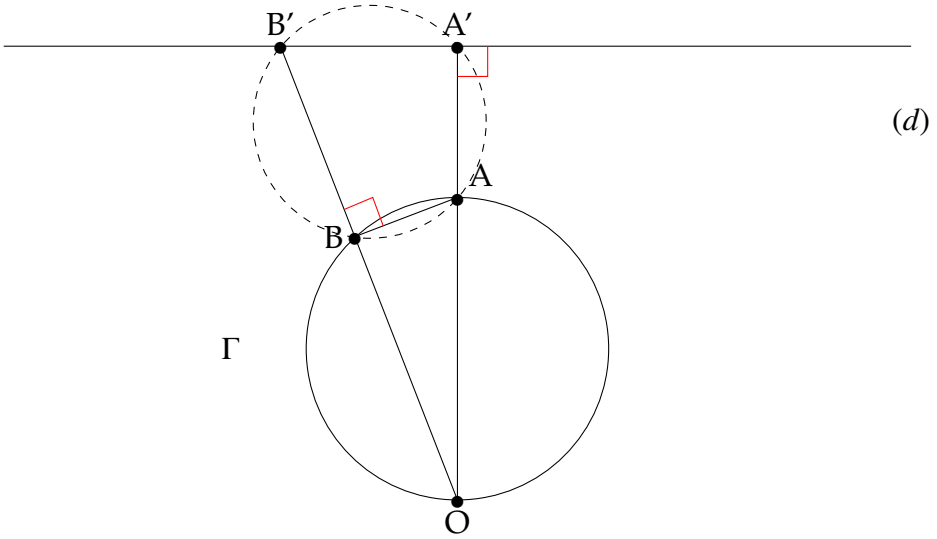
Proposition 5.
Si une inversion de centre O échange A et A', ainsi que B et B', alors les triangles OAB et $OB'A'$ sont (indirectement) semblables.
De plus, on a alors A, A', B, B' cocycliques.

Démonstration. En effet si R est le rayon de l'inversion, $OA \times OA' = R^2 = OB \times OB'$, donc $\dfrac{OA}{OB} = \dfrac{OB'}{OA'}$, et $\widehat{AOB} = \widehat{A'OB'}$, donc les triangles sont semblables.
De plus, $OA \times OA' = OB \times OB'$ donne A, A', B, B' cocycliques par réciproque de la puissance d'un point. □

Théorème 6.
Soit O point du plan, $R > 0$. L'inversion a de bonnes propriétés lorsqu'on s'intéresse à son effet sur les droites et les cercles. Une inversion envoie une droite ou un cercle sur une droite ou un cercle. Plus précisément, l'inversion de centre O et de rayon R entraîne les transformations suivantes :

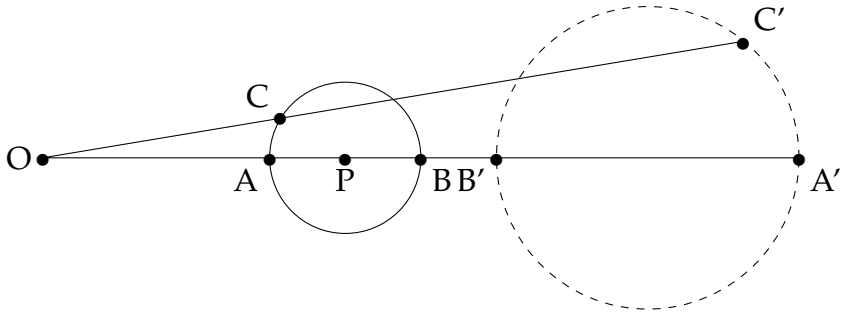
OBJET GÉOMÉTRIQUE	IMAGE PAR L'INVERSION
(1) Droite passant par O	Même droite
(2) Droite ne passant pas par O	Cercle passant par O
(3) Cercle passant par O	Droite ne passant pas par O
(4) Cercle ne passant pas par O	Cercle ne passant pas par O
(5) Cercle de centre O et de rayon r Cercle de centre O et de rayon R	Cercle de centre O et de rayon $\frac{R^2}{r}$ Même cercle
(6) Cercle ne passant pas par O renfermant O	Cercle ne passant pas par O renfermant O (pas forcément le même cercle)
(7) Cercle ne passant pas par O et ne renfermant pas O	Cercle ne passant pas par O et ne renfermant pas O (pas forcément le même)

Démonstration. La propriété (1) est évidente. La propriété (5) découle directement de la définition et de la relation $OM \times OM' = R^2$.
Les propriétés (2) et (3) sont équivalentes (puisqu'une inversion est involutive). Montrons la propriété 3.
Soit Γ passant par O, A le point diamétralement opposé à O sur Γ et A' son image par l'inversion. Soit (d) la perpendiculaire à (OA') passant par A', on va montrer que Γ est envoyé sur (d). Soit B un point du cercle, et B' l'intersection de (OB) avec (d). Alors $\widehat{AA'B} = 90°$ et $\widehat{B'BA} = \widehat{OBA} = 90°$. Donc A, A', B, B' sont cocycliques, et donc par puissance de O par rapport à leur cercle circonscrit, $OB \times OB' = OA \times OA' = R^2$. Donc B est bien envoyé sur B' (et réciproquement).



Les propriétés (6) et (7) entraînent la propriété (4).
Soit Γ un cercle ne passant pas par O et de centre P, A, B les intersections de (OP) avec Γ, et A', B' les images respectives de A et B par l'inversion. Il suffit de montrer que l'image de Γ est le cercle de diamètre $[A'B']$ (et ça nous donnera les propriétés 6 et 7, puisque O est sur le segment $[AB]$ si et seulement s'il est sur le segment $[A'B']$, vu la définition).
Soit C sur Γ et C' son image par l'inversion, il s'agit de montrer que C' est sur le cercle de diamètre $[A'B']$, ou de façon analogue que $\widehat{B'C'A'} = 90°$.

Or par la proposition 5, OAC et $OC'A'$ sont semblables, et OBC et $OC'B'$ sont semblables également. Dès lors, $\widehat{B'C'A'} = \widehat{OC'A'} - \widehat{OC'B'} = \widehat{CAO} - \widehat{CBO} = 180° - \widehat{BAC} - \widehat{CBA} = \widehat{ACB} = 90°$. Donc C' est bien sur le cercle de diamètre $[A'B']$, ce qui conclut.



□

Remarque 7.
En général il est plus commode de travailler avec des droites plutôt que des cercles. Ainsi, faire une inversion peut-être pertinent lorsqu'on a des propriétés à étudier sur des cercles, ou qu'il y a beaucoup de cercles. Par exemple :

- Si plusieurs cercles passent par un même point, faire une inversion centrée en ce point enverra ces cercles sur des droites.
- Si deux cercles sont tangents en un point, faire une inversion centrée en ce point enverra les cercles sur deux droites parallèles.

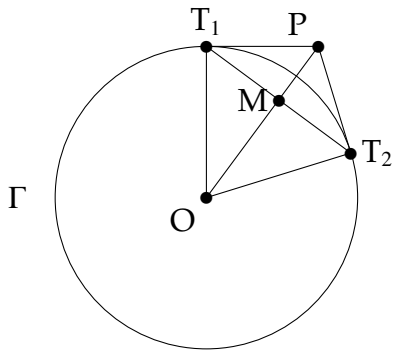
Remarque 8.
ATTENTION : Contrairement aux similitudes, une inversion ne conserve pas les rapports de longueurs. Plus précisément, si A, B sont échangés avec A', B' par l'inversion de centre O de rapport R^2, alors OAB est semblable à $OB'A'$, et donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{OB'}{OA} = \frac{OB' \times OB}{OA \times OB}$ donc $\frac{A'B'}{AB} = \frac{R^2}{OA \times OB}$, le rapport des longueurs dépend donc fortement de A et B.
ATTENTION également au centre du cercle : si deux cercles sont échangés par une inversion, il n'y a en revanche aucune raison pour que les centres de ces cercles le soient aussi, et en général ce n'est pas le cas.

Proposition 9.
Étant donné un cercle Γ et un point P à l'extérieur de ce cercle, il existe une unique inversion de centre P fixant ce cercle.
C'est l'inversion de rayon $\sqrt{\mathcal{P}_\Gamma(P)}$.

Démonstration. Cela découle simplement du fait que si une droite issue de P intersecte le cercle en A, A', alors $PA \times PA' = \mathcal{P}_\Gamma(P)$ et donc l'inversion échange A et A'. □

Proposition 10.
Soit Γ un cercle, T_1, T_2 deux points distincts du cercle qui ne sont pas diamétralement opposés. Les tangentes à Γ en T_1 et T_2 s'intersectent en un point P. Soit M le milieu de $[T_1T_2]$. Alors l'inversion par rapport à Γ échange P et M.

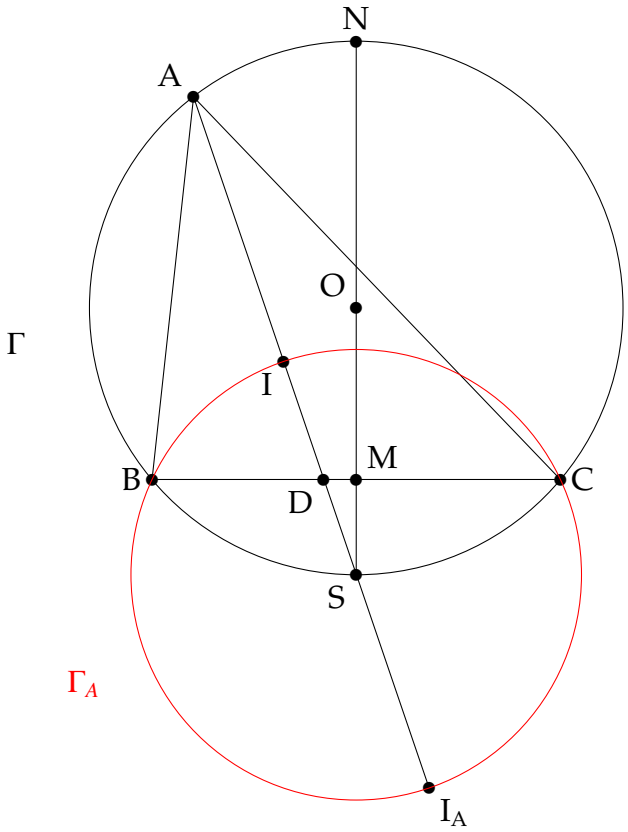
Démonstration.



On a $\widehat{OT_1P} + \widehat{PT_2O} = 90° + 90° = 180°$ donc O, T_1, T_2, P sont cocycliques. De plus, l'inversion fixe T_1, T_2. Elle échange donc le cercle circonscrit à T_1, P, T_2, O avec la droite (T_1T_2). En particulier, elle échange P avec l'intersection entre (OP) et (T_1T_2), c'est-à-dire M (par symétrie des tangentes les deux droites se coupent bien au milieu de $[T_1T_2]$) ; □

Une inversion classique

Rappel 11.
Soit ABC un triangle de cercle circonscrit Γ et de centre Γ, I le centre du cercle inscrit, I_A le centre du cercle A-exinscrit, M le milieu de $[BC]$, D le pied de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et S la deuxième intersection de cette bissectrice avec Γ.
Alors S (le pôle Sud) est le milieu de l'arc BC, et vérifie $SI = SI_A = SB = SC$. Notons Γ_A le cercle de centre S et de rayon SB.



Proposition 12.
L'inversion par rapport à Γ_A :

- fixe B, C, I, I_A
- échange (BC) et Γ
- échange A et D
- échange N et M

Démonstration. C'est une corollaire des propriétés d'une inversion. □

Remarque 13.
C'est une inversion importante car elle ne fait apparaître que des points très classiques du triangle, et peut donc apparaître régulièrement.
On notera qu'on peut faire la même chose avec le cercle de centre N passant par B, C, I_B, I_C.

Exercices

Exercice 1 (traité pendant la séance)
Soient Γ un cercle, C, D deux points sur le cercle et S le milieu d'un arc CD. Soient A, B deux points situés sur l'autre arc CD que S. La droite (AS) coupe la droite (CD) en P et la droite (BS) coupe la droite (CD) en Q. Montrer que les points A, P, B, Q sont cocycliques.

Exercice 2 (traité)
Soit ABC un triangle, soient Γ son cercle circonscrit et ω son cercle inscrit. Soient D, E, F les points de contact du cercle inscrit sur $[BC], [CA], [AB]$ respectivement. Montrer que l'inversion par rapport à ω échange Γ avec le cercle d'Euler de DEF.

Exercice 3 (Lemme du bocal, traité)
Soit Γ un cercle et soient A, B deux points du cercle. Un cercle ω est tangent intérieurement à Γ en un point P et à (AB) en un point Q. La droite (PQ) coupe Γ une deuxième fois en un point S.
Montrer que $SA = SB$.

Exercice 4 ("A Beautiful Journey Through Olympiad Geometry", Stefan Lozanovski, traité)
Soient Γ_1, Γ_2 deux cercles s'intersectant en A, B. La tangente à Γ_2 en A intersecte Γ_1 une deuxième fois en D. La tangente à Γ_1 en A intersecte Γ_2 une deuxième fois en C. Soit E le symétrique de A par rapport à B. Montrer que les points A, D, E, C sont cocycliques.

Exercice 5 (P2 USAMO 1993, non-traité)
Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que ses diagonales (AC) et (BD) sont perpendiculaires, d'intersection E. Montrer que les symétriques de E par rapport aux 4 côtés du quadrilatère sont cocycliques.

Exercice 6 (non-traité)
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ des cercles tangents consécutivement en A, B, C, D. Montrer que A, B, C, D sont cocycliques.

Exercice 7 (Lemme du cube, non-traité)
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3, \Gamma_4$ des cercles qui s'intersectent consécutivement en A, P, puis B, Q, puis C, R,

puis D, S. On suppose que A, B, C, D sont cocycliques. Montrer que P, Q, R, S sont cocycliques aussi.

Exercice 8 (non-traité)
Soient $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ trois cercles tangents extérieurement deux à deux : soit P point de tangence de Γ_2 et Γ_3, Q celui de Γ_3 et Γ_1, et R celui de Γ_1 et Γ_2. On suppose de plus que $\Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3$ sont tangents intérieurement à un même cercle Γ, en A, B, C respectivement. Montrer que les droites (AP), (BQ) et (CR) sont concourantes.

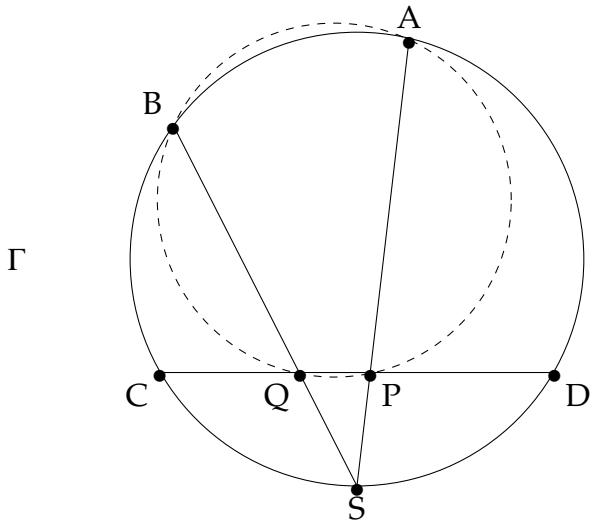
Exercice 9 (non-traité)
Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus), D et E les pieds des hauteurs issues de B et C respectivement. Les tangentes au cercle circonscrit en B et C s'intersectent en Y. Soit Γ_1 cercle tangent à (DE) en D passant par A, et Γ_2 cercle tangent à (DE) en E passant par A. Les cercles Γ_1 et Γ_2 s'intersectent en X. Montrer que A, X, Y sont alignés.

Exercice 10 (Test POFM Novembre 2020, P3, non-traité)
Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus), et soit D le pied de la hauteur issue du sommet A. Soient X et Y les deux points du cercle circonscrit à ABC tels que $AX = AY = AD$, et tels que B et X se trouvent du même côté de la droite (AD). Soit E le point d'intersection des droites (BX) et (CY). Enfin, soit F le point d'intersection, autre que E, entre la droite (DE) et le cercle circonscrit à EXY. Démontrer que les cercles circonscrits aux triangles EXY et BCF sont tangents.

Exercice 11 (Maroc 2015, non-traité)
Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit Γ. Soit ω le cercle passant par A, C et tangent à (AB), il intersecte Ω le cercle circonscrit à BOC une deuxième fois en P. On suppose que $P \neq O$: la droite (PO) intersecte (BC) en T.
Montrer que (TA) est tangente à Γ.

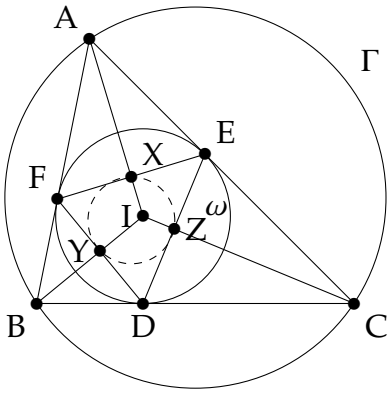
Solutions

Solution de l'exercice 1



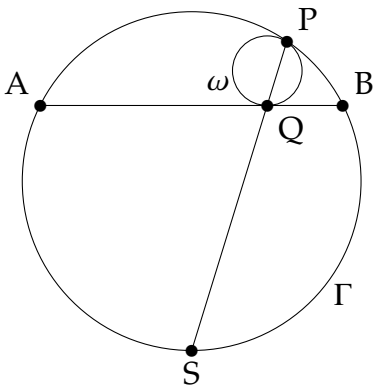
L'inversion par rapport au cercle de centre S et de rayon $SC = SD$ échange Γ et (CD). Par conséquent elle échange A, B avec P, Q respectivement. D'où $SQ \times SB = SP \times SA$.
Par réciproque de la puissance d'un point, A, B, Q, P sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2



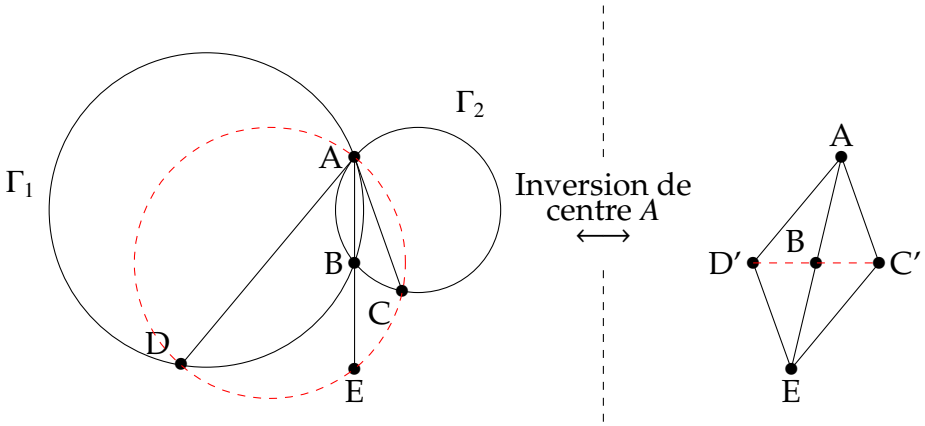
Soient X, Y, Z les milieux de $[EF], [FD], [DE]$ respectivement, qui sont donc sur $(AI), (BI), (CI)$ respectivement par tangence. D'après la proposition 10, l'inversion par rapport à ω échange A et X, B et Y, C et Z. Elle échange donc Γ avec le cercle circonscrit à XYZ. Comme X, Y, Z sont les milieux des côtés de DEF, le cercle circonscrit de XYZ est le cercle d'Euler de DEF, comme voulu.

Solution de l'exercice 3



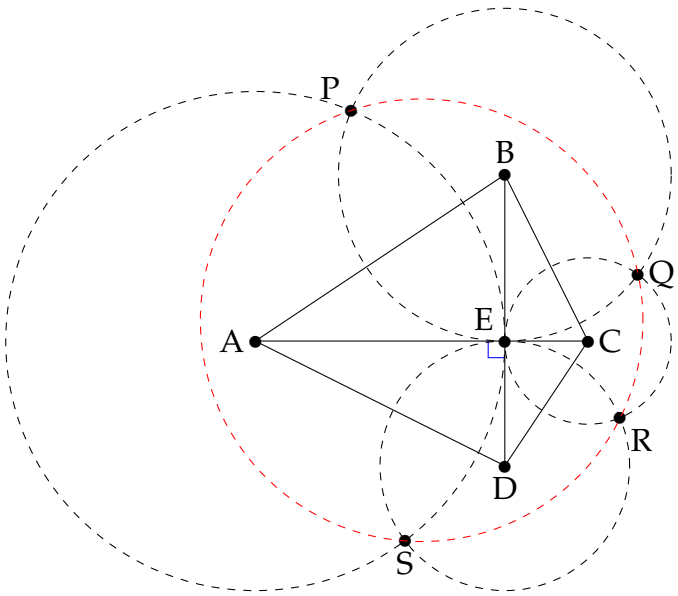
On considère l'inversion de centre S et de rapport $SP \times SQ$, elle échange P et Q donc elle fixe ω. Elle échange (AB) avec un cercle tangent à ω en P et passant par S, c'est-à-dire Γ. Donc elle fixe A, B. En particulier $SA^2 = SB^2$ donc $SA = SB$, comme voulu.
Notons qu'il est également possible de procéder par homothétie de centre P.

Solution de l'exercice 4



On effectue une inversion de centre A et de rapport $AE \times AB$. Elle échange E et B. Les tangentes sont fixés, Γ_1 est envoyé sur une parallèle à (AC), et Γ_2 est envoyé sur une parallèle à (AD), et ces deux droites passent par l'image de B, c'est-à-dire E. Donc $AD'EC'$ est un parallélogramme. De plus, A, D, E, C sont cocycliques si et seulement si D', B, C' sont alignés.
Comme les diagonales d'un parallélogramme se coupent en leurs milieux, B est aussi sur $[D'C']$ (et en est même le milieu), donc les points sont bien alignés, et ainsi A, D, E, C sont cocycliques.

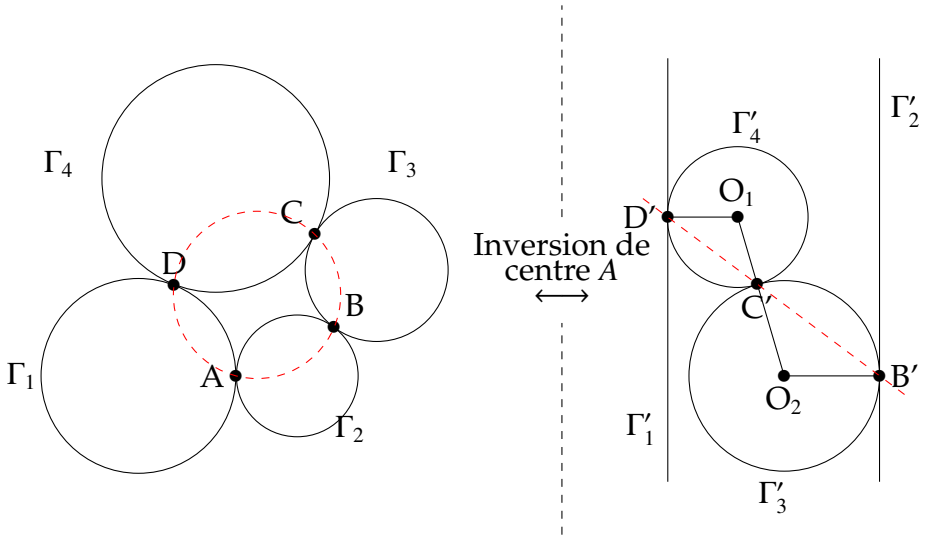
Solution de l'exercice 5



Soient P, Q, R, S les symétriques de E par rapport à $(AB), (BC), (CD), (DA)$ respectivement. Ce sont les intersections des cercles de centre A, B, C, D et de rayons respectifs AE, BE, CE, DE autres que E. Or comme les diagonales sont perpendiculaires, deux cercles de centres des sommets opposés
Une inversion de centre E (et de rapport quelconque) envoie deux cercles tangents à (BD) en E sur deux droites parallèles entre elles (et parallèles à (BD)). Ainsi, les images de ces 4 cercles sont deux paires de droites parallèles : ainsi les images P', Q', R', S' de P, Q, R, S par l'inversion sont les sommets d'un parallélogramme. Mais les directions du parallélogramme sont parallèles à (BD) et (AC). Ces droites étant perpendiculaires, alors le parallélogramme est

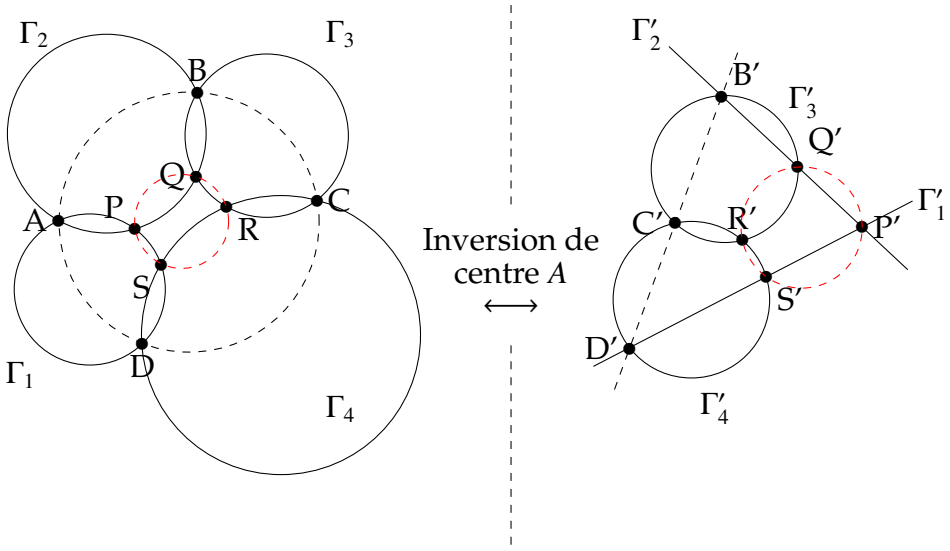
en fait un rectangle. En particulier P', Q', R', S' sont cocycliques. Alors P, Q, R, S sont alignés ou cocycliques (une inversion envoie un cercle sur un cercle ou une droite), mais ils ne sont clairement pas alignés, donc ils sont cocycliques.

Solution de l'exercice 6



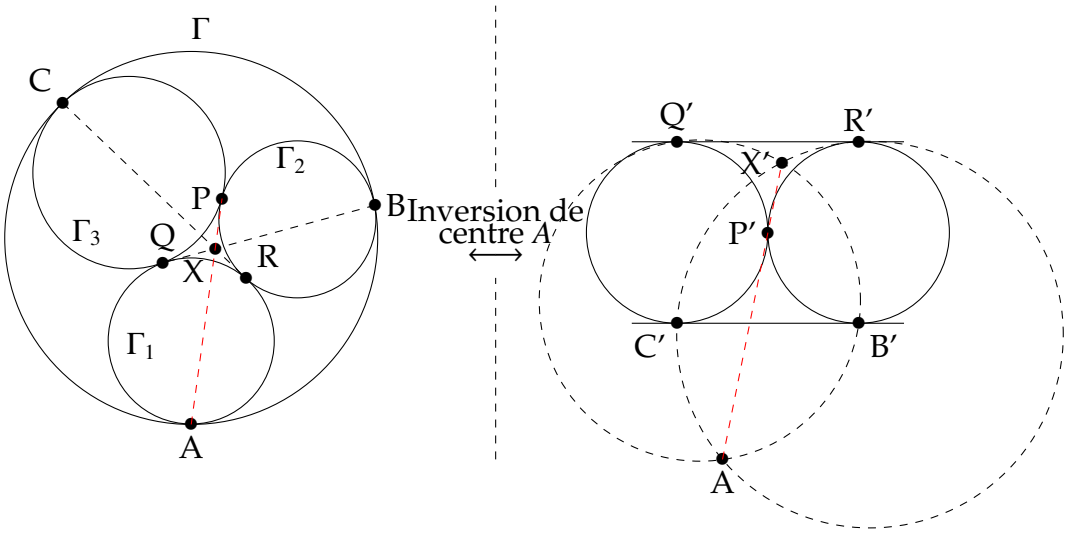
On effectue une inversion de centre A (et de rayon quelconque) : elle envoie les cercles Γ_1, Γ_2 sur deux droites parallèles Γ'_1, Γ'_2, et elle envoie les cercles Γ_3, Γ_4 sur deux cercles chacun tangent à une des deux droites, et tangents intérieurement en C'. A est envoyé à l'infini, B, C, D sont envoyés sur B', C', D'.
Alors A, B, C, D sont cocycliques si et seulement si B', C', D' sont alignés. Montrons ce dernier point.
Les points O_1, C', O_2 sont alignés par tangence des cercles. Les droites $(O_1D'), (O_2B')$ sont parallèles (perpendiculaires à des droites parallèles). Alors par angles alternes-internes, $\widehat{D'O_1C'} = \widehat{B'O_2C'}$. De plus, $O_1D' = O_1C'$ et $O_2C' = O_2B'$. On est en présence de deux triangles isocèles avec même angle au sommet, en particulier ils sont semblables, et donc $\widehat{O_1C'D'} = \widehat{B'C'O_2}$. Comme O_1, C', O_2 sont alignés, on en déduit que D', C', B' sont eux aussi alignés, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 7



On effectue une inversion de centre A (et de rayon quelconque) : elle envoie les cercles Γ_1, Γ_2 sur deux droites Γ_1', Γ_2' sécantes en P', et elle envoie les cercles Γ_3, Γ_4 sur deux cercles s'intersectant en C', R'. Les points B', C', D' sont alignés car A, B, C, D sont cocycliques. Et P, Q, R, S sont cocycliques si et seulement si P', Q', R', S' le sont. Or ce dernier point est bien vérifié, car après inversion on reconnait la configuration du théorème de Miquel (cela se prouve facilement par chasse aux angles, la preuve est laissée au lecteur). Ceci conclut.

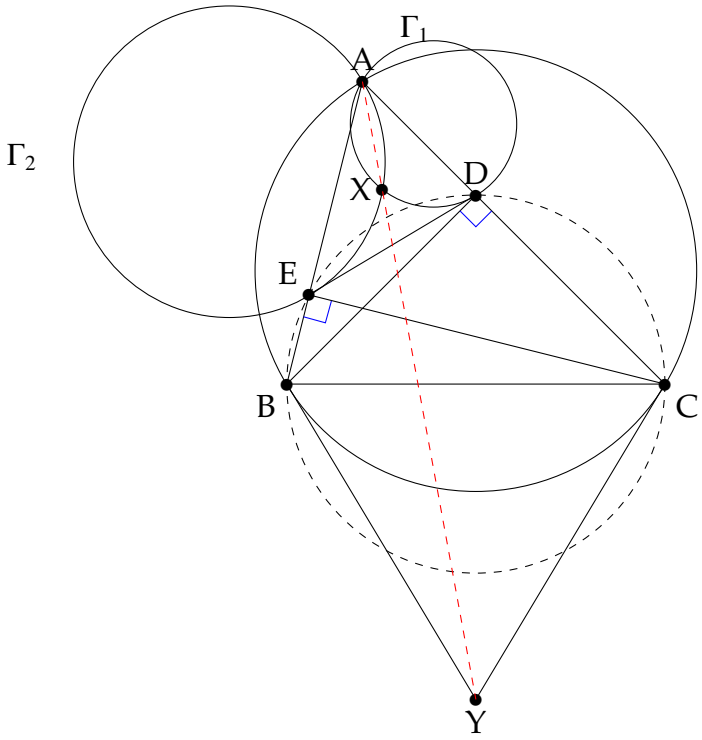
Solution de l'exercice 8



Soit X l'intersection de (CR) et (BQ) : il s'agit de montrer que P est sur (AX).
On effectue une inversion de centre A (et de rayon quelconque) : elle envoie les cercles Γ et Γ_1 sur deux droites parallèles, et elle envoie Γ_2 et Γ_3 sur deux cercles tangents extérieurement et tangents aux deux droites parallèles. En particulier ils ont même rayon.
(CR) est envoyé sur le cercle circonscrit à $AC'R'$ et (BQ) sur le cercle circonscrit à $AB'Q'$. X' est la deuxième intersection de ces deux cercles. Il s'agit alors de montrer que P' est sur (AX'), c'est-à-dire l'axe radical de ces deux cercles.
Or, Q', P', B' sont alignés, de même pour C', P', R' ($C'Q'R'B'$ est un carré et P' est le centre de

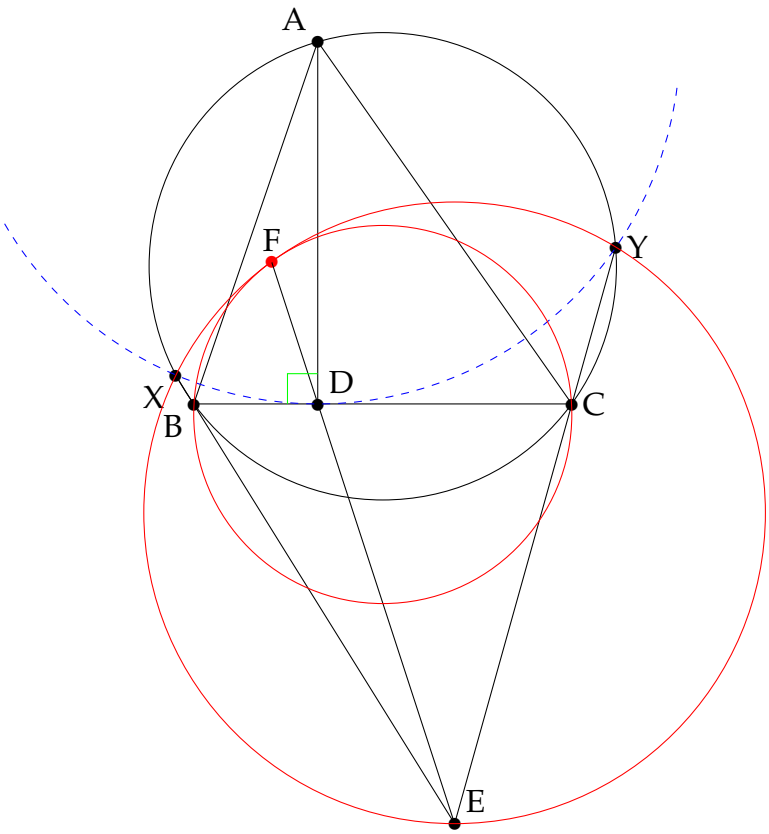
ce carré). De plus $P'Q' = P'B' = P'C' = P'R'$. Donc $P'Q' \times P'B' = P'C' \times P'R'$: P' a la même puissance par rapport aux deux cercles, et il est donc bien sur l'axe radical. Ceci conclut.

Solution de l'exercice 9



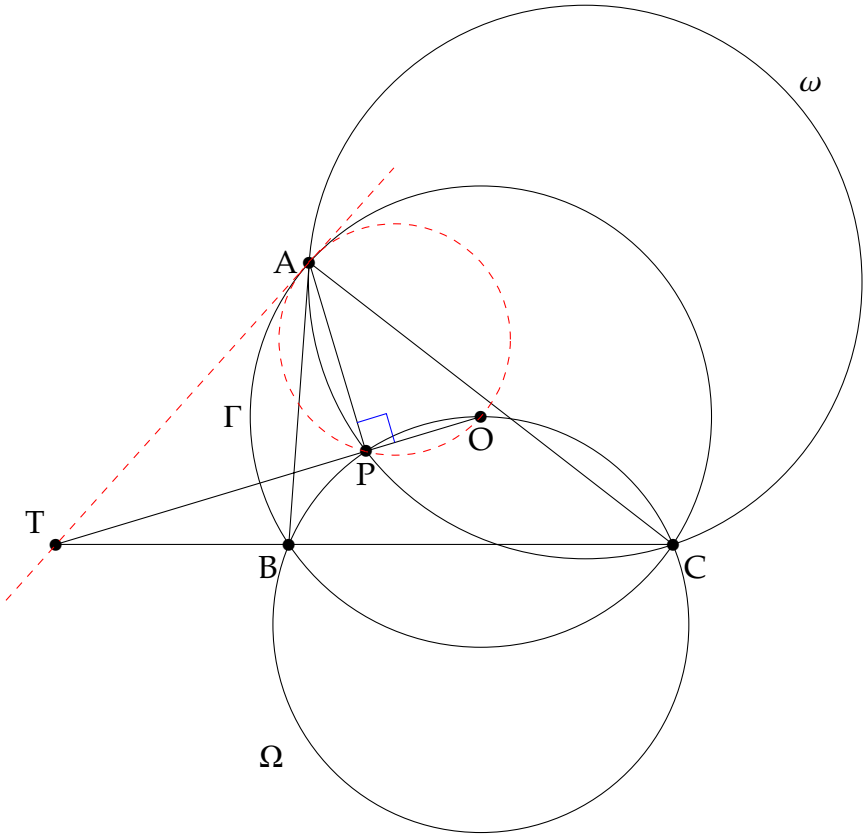
$\widehat{BEC} = 90° = \widehat{BDC}$ donc B, E, D, C sont cocycliques.
Soit l'inversion de centre A et de rayon $\sqrt{AD \times AC}$: elle fixe le cercle circonscrit à B, C, D, E. Elle échange B et E, C et D. Elle échange donc le cercle circonscrit de ABC avec (DE). Alors elle envoie Γ_2 sur la tangente au cercle (ABC) en B (c'est-à-dire (BY)) et de même elle envoie Γ_1 sur (CY). En particulier elle envoie X sur Y. Comme une inversion préserve les demi-droites, on en déduit que A, X, Y sont alignés.

Solution de l'exercice 10



X, B, Y, C sont cocycliques donc $EB \times EX = EC \times EY = R^2$ par puissance d'un point, pour un certain $R > 0$. Soit alors l'inversion i par rapport au cercle de centre E et de rayon R. Elle échange X et B, C et Y et laisse donc le cercle circonscrit à ABC fixe.
Elle échange aussi la droite (BC) avec le cercle circonscrit à (BXY), et donc elle échange F et D.
En particulier elle échange F, B, C avec D, X, Y respectivement, donc elle échange le cercle circonscrit à FBC avec le cerce circonscrit à DXY.
Si on récapitule, le cercle (FBC) est échangé avec (DXY), et le cercle (FXY) est échangé avec la droite (BC). Ainsi les deux cercles de l'énoncé sont tangents si et seulement si (BC) est tangente au cercle circonscrit à DXY.
Mais comme $AD = AX = AY$, ce dernier est le cercle de centre A et de rayon AD. Comme (AD) et (BC) sont perpendiculaires, on a bien la tangence recherché, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 11



Soit i l'inversion par rapport à Γ. On sait que $i(\Omega) = (BC)$, et donc comme $P \in \Omega$, P est envoyé sur (BC). Donc $i(P) = T$. Alors comme $i(A) = A$ et $i(\Gamma) = \Gamma$, (AT) est tangente à Γ si et seulement si le cercle circonscrit à AOP est tangent à Γ, si et seulement si son centre est sur (AO), si et seulement si $\widehat{OPA} = 90°$. Montrons donc que $\widehat{OPA} = 90°$.
On le prouve par chasse aux angles : comme B, P, O, C sont cocycliques, par angle inscrit et angle au centre, $\widehat{BPC} = \widehat{BOC} = 2\widehat{BAC}$. De plus, $\widehat{BAC} = \widehat{BAP} + \widehat{PAC}$. Comme (AP) est tangent à ω en A, $\widehat{BAP} = \widehat{ACP}$ par angle tangentiel.
Alors $\widehat{CPA} = 180° - \widehat{PAC} - \widehat{ACP} = 180° - \widehat{BAP} - \widehat{PAC} = 180° - \widehat{BAC}$. Comme $\widehat{BPC} = 2\widehat{BAC}$, il découle $\widehat{APB} = 180° - \widehat{BAC} = \widehat{CPA}$, donc PBA et PAC sont semblables (et $\widehat{PBA} = \widehat{PAC}$).
De plus, $\widehat{TPB} = 180° - \widehat{BPO} = \widehat{OCB} = \widehat{CBO} = \widehat{CPO}$ (car O, P, B, C sont cocycliques).
Finalement, $\widehat{OPA} = \widehat{CPA} - \widehat{CPO} = \widehat{APB} - \widehat{TPB} = \widehat{APT}$, et comme T, P, O sont alignés, il découle $\widehat{OPA} = 90°$, comme voulu.

8 TD Petites SL (Baptiste)

Dans ce TD on a choisi des exercices des listes courtes récentes qui paraissaient intéressant, instructif ou tout simplement joli. Les solutions des exercices peuvent être trouvées sur le site des olympiades internationales de mathématiques.

Exercice 1 (C1 2012)
Un certains nombre d'entiers strictement positifs sont écrit en ligne. De manière itérative, Aline choisit deux nombres adjacents $x > y$, x à la gauche de y, et elle remplace la paire (x, y)

par la paire $(y+1, x)$ ou bien la paire $(x-1, x)$. Montrer qu'elle ne peut effectuer qu'un nombre fini d'opérations.

Exercice 2 (C1 2017)
Un rectangle $\mathcal{R}$ dont les longueurs des côtés sont des entiers impairs est divisé en rectangles ayant des longueurs de côtés entières. Montrer qu'il existe au moins un des petits rectangles telle que les distances de ces quatre côtés au rectangle $\mathcal{R}$ sont toutes impaires ou paires.

Exercice 3 (C2 2017)
Soit n un entier positif. On définit un *chameleon* par une séquence de $3n$ lettres, avec exactement n occurences de chaque lettres a, b et c. On définit un *échange* comme une transposition de deux lettres adjacentes dans un chameleon. Montrer que pour chaque chameleon X, il existe un chameleon Y tel que X ne peut pas être transformé en Y en utilisant moins de $3n^2/2$ échanges.

Exercice 4 (C2 2021)
Soit $n \geqslant 3$ un entier. Un entier $m \geqslant n+1$ est dit *n-coloré* si, en ayant un nombre infini de billes de n couleurs $C_1, C_2, ..., C_n$, il est possible d'en placer m autour d'un cercle de telle sorte que dans n'importe quel groupe de $n+1$ billes consécutives il existe au moins une bille de chacune des couleurs C_i pour $i = 1, ..., n$. Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers non n-coloré et trouver le plus grand d'entre eux.

Exercice 5 (C4 2017)
Soit $N \geqslant 2$ un entier. $N(N+1)$ joueurs de basket, tous de tailles différentes, sont alignés en ligne dans un order quelconque. Le coach veut retirer $N(N-1)$ joueurs de la ligne de telle sorte que les $2N$ joueurs restants soient classés de la manière suivante :

(1) Le plus grand et le deuxième plus grand sont côtes-à-côte ;
(2) Le troisième plus grand et le quatrième plus grand sont côte-à-côte ;
⋮
(N) les deux plus petits sont côte-à-côte.

Montrer que cela est toujours possible.

Exercice 6 (C3 2018)
Soit n un entier positif. Bodo fait une suite d'opérations sur un tableau qui consiste en $n+1$ cases à la suite, numérotées de 0 à n et de gauche à droite. Au départ n pierres sont déposées sur la cases de gauche et les autres cases sont vides. A chaque tour, Bodo peut faire l'opération suivante, il choisit une cases non vide, disons avec k pierres dessus, prend celle en haut et la déplace vers la droite de au plus k cases (la pierre doit rester sur le tableau). L'objectif de Bodo est de déplacer les n pierres sur la case n. Montrer qu'il aura besoin de au moins

$$\left\lceil \frac{n}{1} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{2} \right\rceil + \cdots + \left\lceil \frac{n}{n} \right\rceil$$

tours pour réussir ce résultat.

Exercice 7 (C4 2019)
Dans le plan de Camelot, le Roi Arthur construit un labyrinthe $\mathcal{L}$ qui consiste en n murs,

chacun de ces murs est une droite infinie. Aucun mur n'est parallèle à un autre, et aucun triplet de murs ne soit concourant. Merlin peint alors un côté du mur complètement en rouge et l'autre complètement en bleu. Lorsque deux murs se coupent il y a quatre coins : deux coins diagonalement opposés où un côté bleu et un côté rouge se rencontrent, un coin où deux côtés rouges se rencontrent et un coin où deux côtés bleus se rencontrent. A chaque intersection, il y a une porte qui relie les deux côtés opposés où des couleurs différentes se rencontrent. Après que Merlin ait peint les murs, Morgane place des chevaliers dans le labyrinthe. Les chevaliers peuvent utiliser les portes mais ne peuvent pas traverser les murs.

On note $k(\mathcal{L})$, le plus grand nombre k, de telle sorte que quelque soit la manière dont Merlin peint le labyrinthe $\mathcal{L}$, Morgane peut toujours placer k chevaliers qui ne peuvent jamais se rencontrer. Pour chaque entier n, quelles sont les valeurs possibles pour $k(\mathcal{L})$, où $\mathcal{L}$ est un labyrinthe avec n murs ?

Exercice 8 (C4 2021)
Un royaume est constitué de n villes, entre deux villes il existe toujours une route à sens unique. Pour deux villes X et Y, un *chemin de X à Y* est une suite de trajet de villes en ville en suivant la direction des routes qui ne passe pas deux fois par la même route. Une collection de chemin est dite *éparpillée* si aucun des chemins la constituant ne partagent une route.

Soit A et B deux villes, on note N_{AB} le nombre maximal de chemins d'une collection de chemins allant de A vers B. Montrer que $N_{AB} = N_{BA}$ si et seulement si le nombre de routes partant de A est le même que le nombre de routes partant de B.

Exercice 9 (C6 2019)
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Supposons que l'on dispose de $2n$ points dans le plan de telle sorte qu'aucun triplet de points ne soit aligné. Les points seront nommés A_1, A_2..., A_{2n} dans un certain ordre. On considère alors les $2n$ angles $\angle A_1A_2A_2$, $\angle A_2A_3A_4$, $\ldots$, $\angle A_{2n-2}A_{2n-1}A_{2n}$, $\angle A_{2n-1}A_{2n}A_1$. La mesure de chaque angle est donnée par la plus petite valeur positive (c-à-d entre 0 et 180). Montrer qu'il existe un ordre de numérotation des $2n$ points de telle sorte que les $2n$ angles obtenus peuvent être séparés en deux groupes de telle sorte que la somme des angles d'un groupe soit égale à la somme des angles de l'autre groupe.

Exercice 10 (C8 2019)
On dispose d'une carte avec n villes, chaque paire de villes est reliée par une route étroite à double sens. Un jour chaque route devient à sens unique. La direction des routes est connue par Bob mais Alice n'a aucune information. Alice peut poser des questions à Bob. Pour chaque question, Alice choisit une paire de villes et demande à Bob la direction de la route entre les deux villes. Alice voudrait savoir si il existe au moins un ville ayant strictement moins de deux routes sortantes. Montrer qu'elle peut obtenir cette information en posant moins de $4n$ questions.

2 Entraînement de mi-parcours

Pour les exercices de géométrie, on attend de l'élève une figure propre, grande, où la propriété que l'on cherche à démontrer est apparente : s'il faut démontrer que des points sont alignés (ou cocycliques), il faut tracer la droite (ou le cercle) qui passe par ces points.

Exercice 1
Soit ABC un triangle et D, E, F les pieds des hauteurs issues de A, B, C respectivement. On note Γ le cercle circonscrit à AEF. Soit Γ_1 (resp. Γ_2) le cercle tangent à Γ en E (resp. F) passant par D. Démontrer que le second point d'intersection, que l'on notera X, de Γ_1 et Γ_2 est sur la droite (BC).

Exercice 2
Les nombres 1, 2, …, 2023 sont écrits au tableau. Aurélien et Benoît jouent à tour de rôle au jeu suivant : le joueur actif choisit deux entiers a, b écrits au tableau, les efface et les remplace au choix par un entier parmi $a \cdot b$, $a - b$ et $a + b$. Benoît gagne si le dernier nombre écrit au tableau est divisible par 2023, et Aurélien gagne dans le cas contraire. Aurélien commence. Quel joueur a une stratégie gagnante ?

Exercice 3
Soit $ABCD$ un quadrilatère circonscriptible (c'est-à-dire tel qu'il existe un cercle tangent intérieurement à ses quatre côtés). On note I le centre de son cercle inscrit. On note ω_1 et ω_2 les cercles circonscrits aux triangles AIC et BID respectivement. On note X le point d'intersection des tangentes à ω_1 en A et en C. De même, on note Y le point d'intersection des tangentes à ω_2 en B et en D. Démontrer que les points X, Y et I sont alignés.

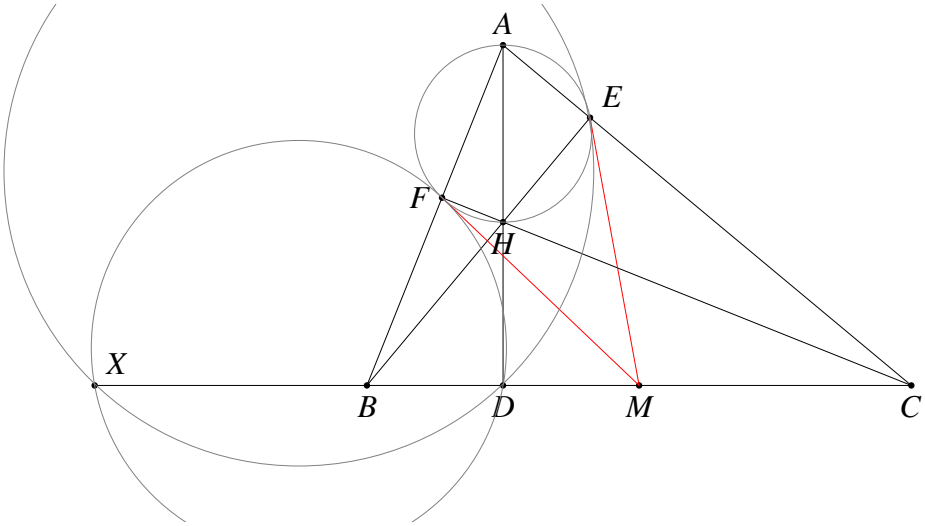
Exercice 4
On place 2023 cercles dans le plan de telle sorte que jamais trois cercles ne soient concourants et que deux cercles s'intersectent toujours en deux points distincts. Les cercles délimitent des *régions* du plan qui sont délimitées par des *arêtes* circulaires qui se rencontrent à des *sommets*. On remarque qu'il y a un nombre pair d'intersections sur chaque cercle. Sur chaque cercle on colorie alternativement les sommets en *bleu* et en *rouge*. Ainsi, chaque sommet est colorié deux fois. Si les deux couleurs coïncident le sommet garde la couleur commune, sinon les couleurs fusionnent pour donner une seule couleur *violette*. Démontrer que si un cercle contient au moins 2065 sommets violets, alors il existe une région dont tous les sommets sont violets.

Remarque pour l'exercice 4 : On rappelle la *formule d'Euler* : dans un graphe planaire on sait que $s - a + r = 2$, où s est le nombre de sommets, a le nombre d'arêtes et r le nombre total de régions intérieures et extérieures du graphe.

Solution de l'exercice 1

On va donnner en tout trois solutions de cet exercice, les deux premières auront le même début tandis que la troisième est fortement inspirée de la solution trouvée en test par un des élèves du groupe D.

Les deux premières preuves : Supposons que l'énoncé soit démontré un instant, dans ce cas les points d'intersection H et X de Γ_1 et Γ_2 sont sur la droite (BC). On peut ainsi se ramener à démontrer que (BC) est l'axe radical de Γ_1 et Γ_2. D'après la propriété du centre radical appliqué aux cercles Γ_1, Γ_2 et Γ, il suffit donc de montrer que le point d'intersection des tangentes à Γ en E et en F est sur (BC). On va en fait montrer que ce point est le milieu M de $[BC]$. Dans la suite on va donner deux preuves de ce fait.



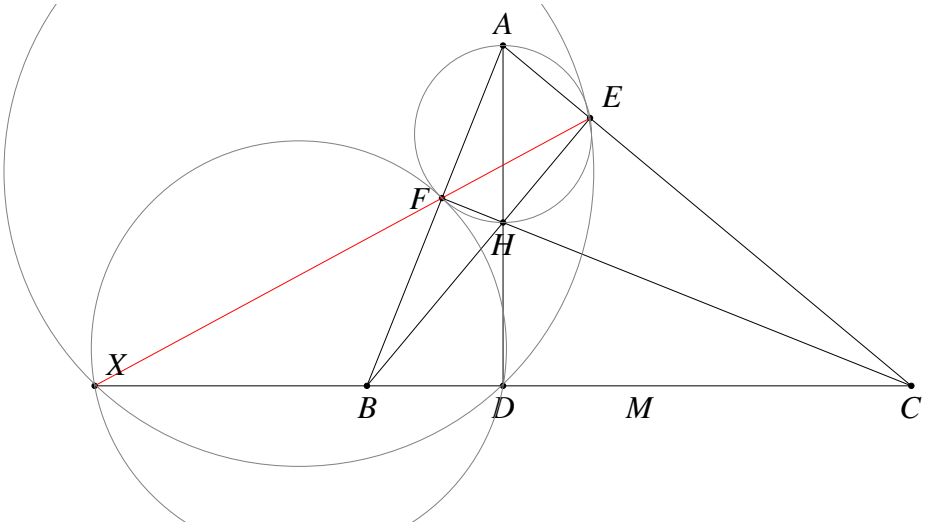
Première approche : On va montrer que la droite (MF) est tangente au cercle Γ. On a la suite d'égalités d'angles suivante :

$$\begin{aligned} \widehat{MFC} &= \widehat{MCF} && (MF = MC) \\ &= \widehat{FAD} && (AFDC \text{ est un quadrilatère cyclique}). \end{aligned}$$

On conclut alors que (MF) est bien une droite tangente au cercle Γ en F d'après le théorème de l'angle à la tangente. Un raisonnement symétrique montre également que la droite (ME) est tangente au cercle Γ en E.

Deuxième approche : Soit N le milieu de $[AH]$; c'est également le centre de Γ. Comme $\widehat{NDM} = 90$, $[MN]$ est un diamètre du cercle d'Euler. Cela montre que $\widehat{NFM} = \widehat{NEM} = 90$. M est ainsi le point d'intersection des tangentes à Γ en E et en F.

La troisième preuve : On remarque sur une figure bien dessinée que le point X est aligné avec les points E et F. On définit ainsi X comme le point d'intersection des droites (EF) et (BC) et on veut montrer que les cercles circonscrits à XFD et XDE sont tangents au cercle circonscrit de AEF en F et E respectivement.



On souhaite appliquer le Théorème de Miquel.

Théorème 1 (Théorème de Miquel)**.**
Soit ABC un triangle. On dispose de points A', B' et C' sur les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Alors les cercles circonscrits des triangles $AB'C'$, $A'BC'$ et $A'B'C$ sont concourants.

On applique alors le Théorème de Miquel au triangle XBE et les points F, H et D les points sur les côtés du triangle. Dans ce cas les cercles circonscrits aux triangles XFD, FHR et BHD sont concourants en F, comme les cercles circoncrits des triangles XFD et FEH se coupent déjà une fois en F alors ils sont donc tangents (il faut justifier cette affirmation proprement mais le lecteur peut s'en convaincre en effectuant une chasse aux angles). Cela conclut ainsi l'exercice.

Solution de l'exercice 2
On va montrer que Benoît possède une stratégie gagnante. Pour ce faire il va s'assurer qu'à la fin de son tour les nombres écrits au tableau puissent être répartis comme suit :

- il y a au moins un multiple de 2023, noté m ;
- les autres nombres peuvent être répartis en paires (a_i, b_i) de telle sorte que $a_i \equiv \pm b_i \pmod{2023}$.

On dira alors que les nombres du tableau vérifient la propriété $\mathcal{P}$.

On remarque que cette répartition est possible dans la configuration initiale ; 2023 est un nombre divisible par 2023 et on construit les paires $(i, 2023 - i)$ pour $1 \leqslant i \leqslant 1011$. On va maintenant montrer que dans tous les cas il peut répondre de manière adaptée pour que les nombres écrits au tableau vérifient toujours la propriétés $\mathcal{P}$. On suppose donc que avant le tour d'Aurélien les nombres écrits au tableau vérifient la propriété $\mathcal{P}$ et on fait la disjonction de cas suivante.

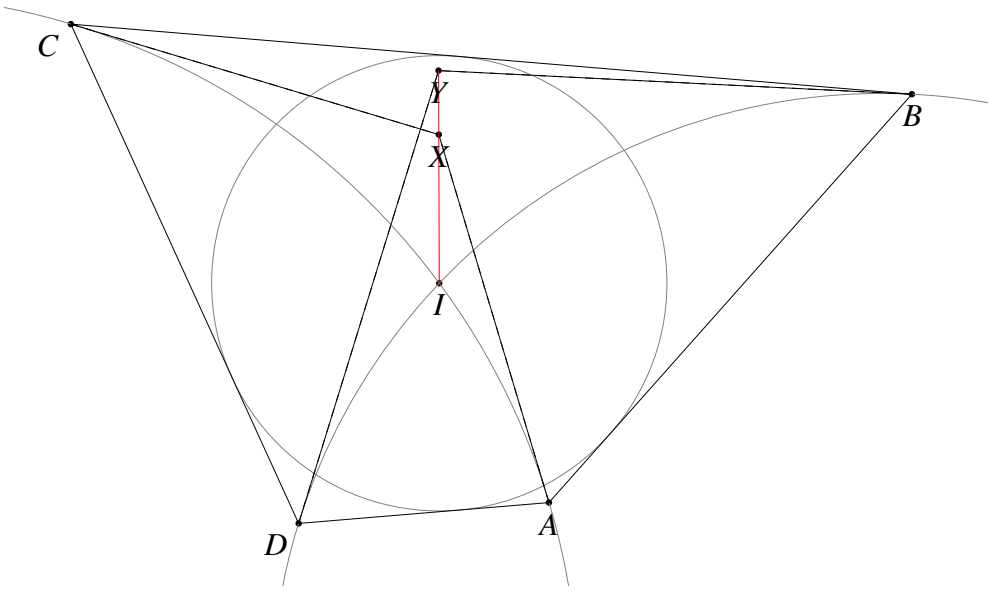
- On suppose que Aurélien effectue une opération quelconque entre deux éléments d'une même paire a_i et b_i. Benoît multiplie alors le résultat par m, et la propriété $\mathcal{P}$ est conservée.

- On suppose que Aurélien remplace un nombre m, divisible par 2023 et a_i, d'un paire (a_i, b_i), par $a_i \pm m$. Dans ce cas Benoît va effacer les nombres $a_i \pm m$ et b_i et les remplacer par $m \pm a_i \pm b_i$ avec le choix d'un signe approprié pour obtenir un multiple de 2023. La propriété $\mathcal{P}$ est alors conservée.
- On suppose que Aurélien remplace un nombre m, divisible par 2023, et a_i, d'une paire (a_i, b_i), par le nombre $a_i \cdot m$. Alors, Benoît multiplie le résutat par b_i et la propriété $\mathcal{P}$ sera conservée.
- On suppose que Aurélien remplace a_i et a_j, deux éléments de paires distincts (a_i, b_i) et (a_j, b_j), par $x = a_i \pm a_j$. Dans ce cas Benoît remplace b_i et b_j par $y = b_i \pm b_j$ pour que (x, y) forme une nouvelle paire avec $x \equiv \pm y \pmod{2023}$. Dans ce cas la propriété $\mathcal{P}$ est encore conservée.
- On suppose que Aurélien remplace a_i et a_j, deux éléments de paires distincts (a_i, b_i) et (a_j, b_j), par $x = a_i \cdot a_j$, Benoît remplace b_i et b_j par $y = b_i \cdot b_j$ pour que (x, y) forme une nouvelle paire avec $x \equiv \pm y \pmod{2023}$. Dans ce cas la propriété $\mathcal{P}$ est encore conservée.

Dans tous les cas la propriété $\mathcal{P}$ est conservée après le tour de Benoît. Comme le nombre de nombres au tableau décroit de 1 à chaque tour, il ne restera qu'un nombre au tableau à la fin. Ce nombre est alors nécessairement divisible par 2023.

Solution de l'exercice 3

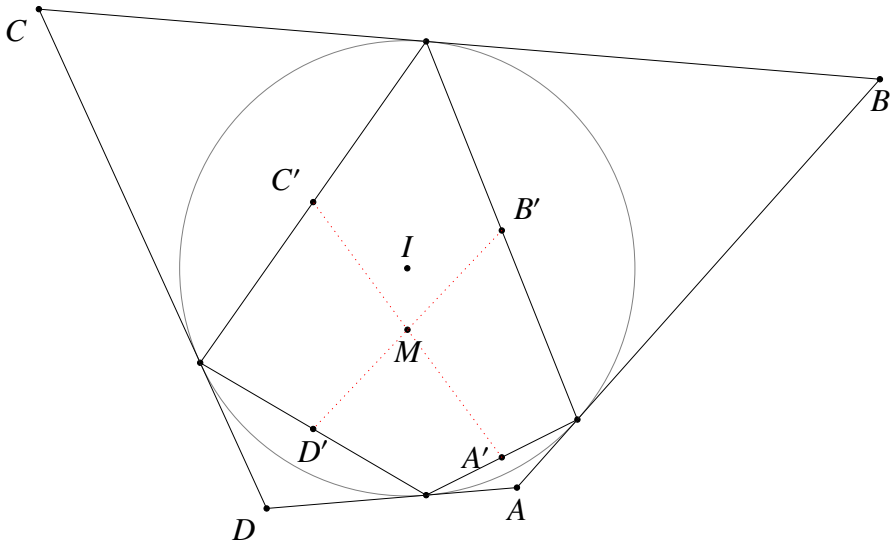
On est dans une situation avec deux cercles (les cercles circonscrits aux triangles AIC et BID) qui passent par un point en commun (le point I), il est donc raisonnable d'envisager une inversion de centre I. Le seul problème, a priori, est la présence de quatre droites qui ne passent pas par le centre de l'inversion.



On note $\mathcal{I}$ l'inversion par rapport à ω. Soient E, F, G et H les points de contact de ω avec les côtés $[AB]$, $[BC]$, $[CD]$ et $[DA]$ respectivement. L'inversion fixe les points E, F, G et H et est centrée en I. On note de plus $A' = \mathcal{I}(A), B' = \mathcal{I}(B), C' = \mathcal{I}(C), D' = \mathcal{I}(D)$. On reconnaît alors une situation classique : A est l'intersection des tangentes à ω en E et H, donc A' est le milieu de $[HE]$. De même B' est le milieu de $[EF]$, C' est le milieu de $[FG]$ et D' est le milieu de $[GH]$.

On remarque que par droite des milieux, les droites $(A'D')$, (EG) et $(B'C')$ sont parallèles. De même $(A'B')$ et $(C'D')$ sont parallèles, donc $A'B'C'D'$ est un parallélogramme. En particulier, $(A'C')$ et $(B'D')$ se coupent en leur milieu M.

On cherche maintenant à étudier l'image X' du point X par l'inversion $\mathcal{I}$. On remarque que le cercle circonscrit à AIC est envoyé sur la droite $(A'C')$ par l'inversion $\mathcal{I}$. Dès lors, la tangente (AX) (qui ne passe pas par I puisque I est sur le cercle) est envoyé sur le cercle ω_a passant par I et tangent à $(A'C')$ en A'. De même, la droite (CX) est envoyé sur le cercle ω_c passant par I et tangent à $(A'C')$ en C'. Alors, X' est le point d'intersection de ω_a et ω_c autre que I.



Par conséquent, $(X'I)$ est l'axe radical de ω_a et ω_c. Mais $(A'C')$ est une tangente commune à ces deux cercles, de points de contact A' et C'. On en déduit que la droite (IX') coupe le segment $[A'C']$ en son milieu, c'est-à-dire M. Ainsi, les points I,X' et M sont alignés.

Le même raisonnement montre que les points I, Y', M sont alignés et donc que I, X', Y' sont alignés. Comme l'inversion $\mathcal{I}$ fixe les droites passant par I, X' et Y' on en déduit que X, Y et I sont alignés, comme voulu.

Solution de l'exercice 4

On va résoudre cet exercice pour un nombre k de cercles et montrer que si un cercle contient au moins

$$k + \lfloor \sqrt{k-2} \rfloor - 2$$

points violets alors il existe une région violette. Dans la suite de la solution, on colorie en jaune les intersections doublement rouges ou doublement bleues. On commence par l'observation suivante :

Lemme 2. Le nombre de points jaunes autour d'une région est toujours pair.

Démonstration. On se donne une région R que l'on va parcourir dans le sens trigonométrique.

On définit deux types d'arêtes autour de la région :

(a) On dira qu'une arête est de type (a) si, quand on la parcourt on part d'un sommet colorié en rouge pour aller vers un sommet colorié en bleu.

(b) On dira qu'une arête est de type (b) si, quand on la parcourt on part d'un sommet colorié en bleu pour aller vers un sommet colorié en rouge.

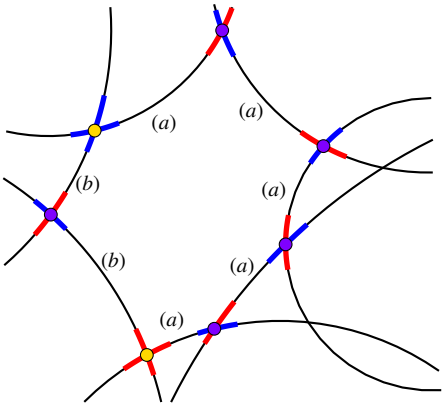


FIGURE 1 – Illustration du Lemme 2.

Ainsi chaque arête a un type. De plus si 2 arêtes consécutives de même type se rencontrent leur intersection sera un sommet violet, il sera jaune sinon. Comme on part d'une arête d'un certain type pour revenir à elle même le nombre de changement entre les types doit être pair. Cela montre bien qu'il y a un nombre pair de sommets jaunes. □

Lemme 3. Si aucune région n'a pour sommets que des sommets violets, alors il y a au moins $1 + \frac{k(k-1)}{2}$ sommets jaunes sur l'ensemble de la configuration.

Démonstration. On calcule dans un premier temps le nombre de régions de la figure. On peut pour cela utiliser la formule d'Euler. En effet, le nombre de sommets est $S = k(k-1)$ et le nombre d'arêtes est $A = 2k(k-1)$ (chaque arête à 2 sommets et chaque sommet à 4 arêtes). Ainsi le nombre de régions (faces) est $F = 2 + A - S = 2 + k(k-1)$. Si il y a au moins un sommet jaune par régions alors il y en a au moins 2 par parité de ce nombre, comme démontré dans le Lemme 2. Chaque sommet est partagé entre 4 régions, il y aura donc en tout au moins $\frac{2F}{4} = 1 + \frac{k(k-1)}{2}$ sommets jaunes. □

Lemme 4. Si deux cercles s'intersectent en un sommet jaune (resp. violet) alors la deuxième intersection est également jaune (resp. violette).

Démonstration. On suppose que les deux cercles se coupent en A et B, on choisit en plus deux arcs de cercle $\widehat{a_1}$ et $\widehat{a_2}$ reliant tous les deux A à B. On note i_1 et i_2 le nombre de sommets sur les arcs $\widehat{a_1}$ et $\widehat{a_2}$ respectivement.

On montre dans un premier temps que i_1 et i_2 sont égaux modulo 2, en effet, la somme $i_1 + i_2$ est le nombre d'intersections de cercles avec l'union des arcs $\widehat{a_1}$ et $\widehat{a_2}$, chaque cercle doit intersecter deux fois cette union (il doit rentrer puis sortir). Ainsi, $i_1 + i_2$ est pair et donc $i_1 - i_2$ également.

Les nombres i_1 et i_2 ayant la même parité, si les deux couleurs du sommet A sont d'accord, alors les deux couleurs du sommet B doivent s'accorder également. Cela conclut la preuve du Lemme 4. □

Lemme 5. Soit γ_1, γ_2 et γ_3 trois cercles et A, B C trois sommets tels que $A \in \gamma_2 \cap \gamma_3$, $B \in \gamma_3 \cap \gamma_1$ et $C \in \gamma_1 \cap \gamma_2$, alors le nombre de sommets jaunes est 0 ou 2.

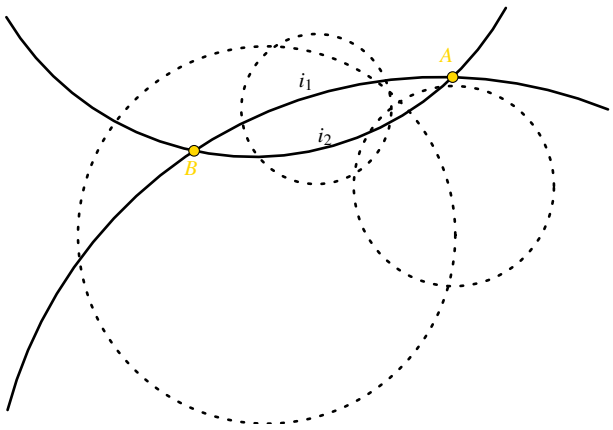


FIGURE 2 – Illustration du Lemme 4.

Démonstration. On note i_a, i_b et i_c le nombre de sommets sur les côtés du triangle ABC (on choisit pour cela des arcs reliant les sommets A, B et C), alors comme dans la preuve du Lemme 4, $i_1 + i_2 + i_3 \equiv 0 \pmod 2$. Une brève étude de cas permet maintenant de conclure. Les nombres i_1, i_2 et i_3 seront considérés modulo 2 dans ce qui suit. Comme un des trois nombres i_1, i_2 ou i_3 doit être nul modulo 2 on peut supposer sans perte de généralité que i_3 est pair.

Cas 1 : $i_1 \equiv i_2 \equiv i_3 \equiv 0 \pmod 2$. On retombe dans le cas du Lemme 2.

Cas 2 : $i_1 \equiv i_2 \equiv 1 \pmod 2$ On distingue deux cas :

— A est violet

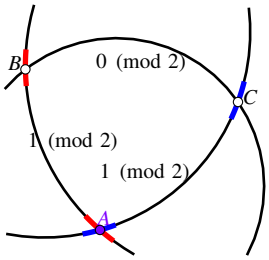


FIGURE 3 – On se retrouve sans perte de généralité dans cette situation.

La figure 3 représente le seul cas possible, à permutation des couleurs près, on observe alors qu'il n'y a aucun choix des couleurs sur le cercle γ_1 qui ne permette un seul point jaune sur la figure.

— A est jaune

On utilise le même argument que pour le cas précédent et on obtient que, à permutation de près, on se retrouve dans le cas de la figure 4

Dans tous les cas on observe la bonne conclusion.

□

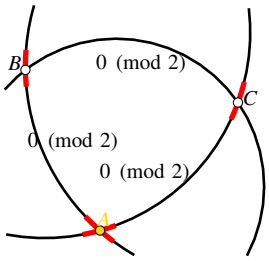


FIGURE 4 – L'autre configuration possible du **Cas 2**.

Lemme 6. On choisit un cercle γ, on note C l'ensemble des cercles qui intersectent γ en des sommets violets (bien défini par le Lemme 4) et D les autres. Alors, dans l'ensemble de la figure le nombre d'intersections violettes est $2|C| + 2\binom{|C|}{2} + 2\binom{|D|}{2}$ et le nombre d'intersections jaunes est $2|C| \cdot |D| + 2|D|$.

Démonstration. Si deux cercles intersectent γ en des points violets, alors leur intersection est violette également. En effet, dans un triangle formé par ces trois cercles il faudrait un nombre pair de sommets jaunes, d'après le Lemme 5.

Si deux cercles intersectent γ en des points jaunes, alors leur intersection est violette, l'argument est le même que ci-dessus.

De la même manière encore, si deux cercles intersectent γ en des points jaunes pour l'un et violets pour l'autre, alors leur intersection entre eux est jaune. Le résultat de l'énoncé suit après un comptage propre de chaque couleur de sommets. □

On peut maintenant finir la preuve. Supposons qu'il n'y ait aucune région dont les sommets sont tous violets. Et choisissons γ un cercle, avec les notations du Lemme 6 et la borne du Lemme 3 on obtient que $2|C| \cdot |D| + 2|D| \geqslant 1 + \frac{k(k-1)}{2}$ et comme $|C| = k - 1 - |D|$, après réarrangement, on obtient :

$$2|C| \leqslant k + \sqrt{k-2} - 2,$$

donc $2|C| \leqslant k + \lfloor \sqrt{k-2} \rfloor - 2$. Ce qui dans notre problème devient $2|C| \leqslant 2065$ et par un argument de parité $2|C| \leqslant 2064$ ce qui contredit ainsi l'hypothèse de départ.

3 Deuxième partie : Algèbre & Arithmétique

1 Algèbre non classique (Xavier)

Exercice 1 (EGMO P4 2022)
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Une suite de réels est dite *jolie* si $a_0 + a_1 = -\frac{1}{n}$ et, pour $k \geqslant 1$, $(a_{k-1} + a_k)(a_k + a_{k+1}) = a_{k-1} + a_{k+1}$. Déterminer le plus grand entier N tel qu'il existe une suite jolie $a_0, \dots, a_N$.

Solution de l'exercice 1
Posons $b_k = a_{k-1} + a_k$. On a alors $b_1 = -\frac{1}{n}$ et $b_k b_{k+1} = b_k - b_{k+1}$, soit $b_{k+1}(b_k + 1) = b_k$. Ainsi, si $b_k \neq -1$, on a $b_{k+1} = \frac{b_k}{b_k+1}$, d'où par récurrence immédiate $b_k = -\frac{1}{n+1-k}$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$. En particulier, $b_n = -1$, et donc si $N > n$ on devrait avoir $b_{n+1}(b_n + 1) = b_n$, soit $0 = -1$, ce qui est absurde. Donc $N \leqslant n$.

Réciproquement, avec $N = n$, si on pose $a_0 = 0$ et $a_k = -\frac{1}{n+1-k} - a_{k-1}$, la suite obtenue est clairement solution.

Exercice 2 (EGMO P4 2015)
Existe-t-il une suite infinie d'entiers strictement positifs $a_0, a_1, \dots$ telle que $a_{n+2} = a_{n+1} + \sqrt{a_{n+1} + a_n}$ pour tout $n \geqslant 0$?

Solution de l'exercice 2
Écrivons $a_{n+1} + a_n = b_n^2$. Alors $b_{n+1}^2 = 2a_{n+1} + b_n$, puis $b_{n+1}^2 - b_n^2 = a_{n+1} + b_n - a_n = b_n + b_{n-1}$. La suite (a_n) est strictement croissante (au moins pour $n \geqslant 1$), donc (b_n) aussi, donc $b_n + b_{n-1} < 2b_n + 1$. Donc $b_n^2 < b_{n+1}^2 < (b_n + 1)^2$, contradiction.

Exercice 3 (IMO A1 2021)
Soit $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $A \subset [\![0, 5^n]\!]$ tel que $|A| = 4n + 2$. Montrer qu'il existe $a < b < c$ dans A tels que $c + 2a > 3b$.

Solution de l'exercice 3
Il est clair qu'on peut supposer $c = \max A$. Notons ensuite $A = \{x_0 < x_1 < \cdots < x_{4n} < c\}$, et supposons par l'absurde qu'il n'existe pas de tels a, b. Autrement dit, pour tout choix de b, ie pour tout $1 \leqslant k \leqslant 4n$, on a pour tout $0 \leqslant l < k$ l'inégalité $c + 2x_l \leqslant 3x_k$. Autrement dit, pour tout $1 \leqslant k \leqslant 4n$, on a $c + 2x_{k-1} \leqslant 3x_k$, soit $x_k \geqslant \frac{1}{3}(c + 2x_{k-1})$.

Définissons par récurrence une suite $(y_k)_{k \geqslant 0}$ par $y_0 = x_0$ et $y_k = \frac{1}{3}(c + 2y_{k-1})$. On a par récurrence immédiate $y_k \leqslant x_k$ pour tout $0 \leqslant k \leqslant 4n$. D'autre part, $(y_k)_{k \geqslant 0}$ est une suite arithmético-géométrique, qui peut s'écrire $y_k = c + (\frac{2}{3})^k (y_0 - c)$. On a donc $y_{4n} = c + (\frac{2}{3})^{4n}(y_0 - c)$. Or $(\frac{2}{3})^{4n}(y_0 - c) \geqslant -(\frac{2}{3})^{4n} \cdot 5^n = -(\frac{80}{81})^n > -1$, donc $y_{4n} > c - 1$, donc $x_{4n} \geqslant c$, ce qui est absurde.

Exercice 4 (BXMO P1 2022)
Soient $n \geqslant 0$ et $a_0, \dots, a_n \in \mathbb{R}$. Montrer qu'il existe $k \in [\![0, n]\!]$ tel que pour tout $x \in [0, 1]$, on ait $\sum_{i=0}^{n} a_i x^i \leqslant \sum_{i=0}^{k} a_i$.

Solution de l'exercice 4
On procède par récurrence sur n, en utilisant le fait que, pour tout $a, b \in \mathbb{R}, x \in [0, 1]$, on a $a + bx \leqslant \max(a, a + b)$ (il suffit de distinguer les cas $b \geqslant 0, b \leqslant 0$). Pour $n = 0$, le résultat est clair. Puis, s'il est vrai pour $n - 1$, on a :

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^{n} a_i x^i &= a_0 + x\left(\sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} x^i\right) \\ &\leqslant \max\left(a_0, a_0 + \sum_{i=0}^{n-1} a_{i+1} x^i\right) \\ &\leqslant \max\left(a_0, a_0 + \sum_{i=0}^{k} a_{i+1}\right) \end{aligned}$$

pour un certain $0 \leqslant k \leqslant n-1$, et le résultat suit.

Exercice 5 (IMO A1 2022)
Soit $(a_n)_{n\geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs tels que $a_{n+1}^2 + a_n a_{n+2} \leqslant a_n + a_{n+2}$ pour tout $n \geqslant 1$. Montrer que $a_{2023} \leqslant 1$.

Solution de l'exercice 5
Réécrivons l'inégalité :

$$(a_n - 1)(a_{n+2} - 1) \leqslant 1 - a_{n+1}^2$$

En regardant les signes, on voit que si $a_k > 1$ pour un $k \geqslant 3$, alors nécessairement (via $k = n+1$) soit $a_{k-1} < 1 < a_{k+1}$, soit $a_{k-1} > 1 > a_{k+1}$. En répétant cette observation, on voit que, dans le premier cas, on a $a_{k-1}, a_{k+2} < 1$ et $a_k, a_{k+1} > 1$, tandis que dans le second on a $a_{k-2}, a_{k+1} < 1$ et $a_k, a_{k-1} > 1$. Posons $n = k-1$ dans le premier cas, $n = k-2$ dans le second ; on a alors :

$$\begin{aligned} 1 - a_{n+1}^2 &\geqslant (1 - a_n)(1 - a_{n+2}) \\ 1 - a_{n+2}^2 &\geqslant (1 - a_{n+3})(1 - a_{n+1}) \end{aligned}$$

Or $(1 - a_{n+3})(1 - a_{n+1}) = \frac{(1-a_{n+3})(1-a_{n+1}^2)}{1+a_{n+1}} \geqslant \frac{(1-a_{n+3})(1-a_n)(1-a_{n+2})}{1+a_{n+1}}$.
Donc $(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2})(1 - a_{n+2}) \geqslant (1 - a_{n+3})(1 - a_n)(1 - a_{n+2})$.
Mais $1 - a_{n+2} < 0$ et $1 - a_n, 1 - a_{n+3} \in]0, 1[$ donc $(1 + a_{n+1})(1 + a_{n+2}) < 1$, absurde.

Exercice 6 (IMO A3 2018)
Soit $S \subset \mathbb{N}^*$. Montrer qu'on est nécessairement dans l'une des deux situations suivantes :

— Il existe $F, G \subset S$ finis, $F \neq G$, tels que $\sum_{x\in F} \frac{1}{x} = \sum_{x\in G} \frac{1}{x}$

— Il existe r un rationnel dans $]0, 1[$ tel que pour tout $F \subset S$ fini, on ait $\sum_{x\in F} \frac{1}{x} \neq r$.

Solution de l'exercice 6
Sinon, pour tout $r \in]0, 1[$ rationnel, il existe une unique partie finie $S(r) \subset S$ telle que $r = \sum_{x\in S(r)} \frac{1}{x}$. S est alors clairement infini. Écrivons $S = \{u_0 < \dots\}$, et supposons qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $u_{k+1} < 2u_k$. Posons $r = \frac{1}{u_k} - \frac{1}{u_{k+1}}$. On a $r < \frac{1}{u_{k+1}}$, donc $u_{k+1} \notin S(r)$. Il est alors immédiat que $S(r + \frac{1}{u_{k+1}}) = S(r) \cup \{u_{k+1}\}$. Mais $r + \frac{1}{u_{k+1}} = \frac{1}{u_k}$, donc on devrait avoir $S(r + \frac{1}{u_{k+1}}) = \{u_k\}$, absurde. Donc $u_{k+1} \geqslant u_k$. En particulier $u_k \geqslant 2^k$.

Puis, pour tout $r \in]0, 1[$, on a $r = \sum_{x\in S(r)} \frac{1}{x} \leqslant \sum_{x\in S} \frac{1}{x}$, donc $\sum_{x\in S} \frac{1}{x} \geqslant 1$. Or $\sum_{k\geqslant 0} \frac{1}{2^k} = 1$. Donc $u_k = 2^k$ pour tout k. Mais alors le dénominateur de toute somme finie d'éléments de S est une puissance de 2 ; en particulier, on ne peut pas obtenir $\frac{1}{3}$.

Exercice 7 (BMO A4 2021)
Soient $f, g : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ des fonctions. Salomé part de $(x_0, y_0) = (0, 0)$ et se déplace sur la grille des entiers. Pour chaque $n \geqslant 1$, elle saute de $\pm f(n)$ sur un axe (celui qu'elle veut) et de $\pm g(n)$ sur l'autre. Peut-elle être sûre de repasser une infinité de fois par $(0, 0)$:

1. si f, g sont des polynômes de $\mathbb{Z}[X]$?
2. si f, g sont quelconques ?

Solution de l'exercice 7
La réponse à la deuxième question est clairement négative : si on prend f et g valant 1 en $n = 1$ et 2 partout ailleurs, pour $n \geqslant 1$, les coordonnées x_n et y_n sont impaires, donc non nulles.

Pour la première question, on raisonne par récurrence sur le degré maximal de f et g. Si f, g sont de degré inférieur ou égal à 0, c'est-à-dire constants, il suffit de se déplacer de $(f(n), g(n))$ aux temps pairs et de $(-f(n), -g(n))$ aux temps impairs, et on est en 0 à tous les temps pairs. Supposons à présent être capables de passer en $(0,0)$ une infinité de fois si f et g sont des polynômes de degré strictement inférieur à $k \geqslant 1$, et supposons que f et g sont des polynômes de degré inférieur ou égal à 1. Observons que les applications $\tilde{f} : n \in \mathbb{Z} \to f(2n) - f(2n-1)$ et $\tilde{g} : n \in \mathbb{Z} \to g(2n) - g(2n-1)$ sont des polynômes à coefficients entiers et de degré strictement inférieur à k. Or, si on décide de se déplacer systématiquement à l'opposé de l'instant précédent à chaque instant pair (par exemple, si en $2n-1$ on se déplace de $(f(2n-1), g(2n-1))$, alors en $2n$ on se déplace de $(-f(2n), -g(2n))$), on se retrouve (en ne regardant que les temps pair) à jouer au même jeu que précédemment, mais avec les fonctions $\tilde{f}, \tilde{g}$ au lieu de f, g. L'hypothèse de récurrence s'applique, et on peut donc passer une infinité de fois par l'origine (en fait, à tous les temps multiples de 2^{k+1}).

Exercice 8 (EGMO P3 2022)
Une suite d'entiers naturels non nuls $(a_n)_{n\geqslant 1}$ est *bonne* si a_1 est un carré parfait et si, pour tout $n \geqslant 2$, a_n est le plus petit entier naturel non nul tel que $na_1 + (n-1)a_2 + \cdots + 2a_{n-1} + a_n$ est un carré parfait.

Montrer qu'il existe $k \in \mathbb{N}^*$ tel que, pour tout $n \geqslant k$, on ait $a_n = a_k$.

Solution de l'exercice 8
Écrivons $b_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$, et $s_n = na_1 + \cdots + a_n = \sum_{k=1}^{n} b_k$. Écrivons également $s_n = c_n^2$. Il est clair que $(b_n), (s_n), (c_n)$ sont des suites d'entiers strictement croissantes. Montrons à présent que la suite des différences $d_n := c_n - c_{n-1}$ est décroissante. On a $b_n = s_n - s_{n-1} = c_n^2 - (c_n - d_n)^2 = 2d_nc_n - d_n^2$. Puis s_{n+1} est le plus petit carré strictement supérieur à $s_n + b_n$. Or $s_n + b_n = c_n^2 + 2d_nc_n - d_n^2 < (c_n + d_n)^2$. Donc $c_{n+1} \leqslant c_n + d_n$, ie $d_{n+1} \leqslant d_n$.

La suite (d_n) est alors une suite décroissante d'entiers naturels non nuls ; il existe donc un entier $k \geqslant 2$ tel que, pour $n \geqslant k$, on ait $d_n = d_k$. Notons $d = d_k$. Alors, pour $n \geqslant k$, $c_n = nd + f$, pour un certain $f \in \mathbb{Z}$. Puis $b_n = 2d(nd + f) - d^2$ est (pour $n \geqslant k$) une progression arithmétique de raison $2d^2$. Autrement dit, $a_n = 2d^2 = a_k$.

Exercice 9 (IMO A3 2021)
Soit $n \geqslant 1$ un entier. Déterminer la plus petite valeur possible de $\sum_{i=1}^{n} \lfloor \frac{a_i}{i} \rfloor$ où $(a_1, \ldots, a_n)$ est une permutation de $(1, \ldots, n)$.

Solution de l'exercice 9
Notons s_n cette valeur, et soit $(a_1, \ldots, a_n)$ réalisant ce minimum. Soit k tel que $a_k = n$ (ie le dénominateur de la fraction dont le numérateur est n). Supposons $k < n$. Alors $a_n < n$, donc on peut supposer que $a_n = n - 1$ (quitte à échanger les valeurs de a_n et de celui des a_i qui valait précédemment $n-1$; ceci n'augmente clairement pas la somme). On peut continuer ainsi, jusqu'à imposer $a_{k+1} = k$. On a alors que la permutation s'écrit comme une permutation $(a_1, \ldots, a_{k-1})$ de $(1, \ldots, k-1)$, suivie de $(n, k, k+1, \ldots, n-1)$. Ainsi, $s_n = \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + s_{k-1}$. On en déduit finalement que $s_n = \min_{k=1,\ldots,n}(\lfloor \frac{n}{k} \rfloor + s_{k-1})$, où $s_0 = 0$ par convention.

Intéressons-nous maintenant aux petits cas, afin de conjecturer la valeur de s_n. On voit très facilement $s_1 = 1, s_2 = s_3 = 2, s_4 = 3 \ldots$ On peut alors conjecturer que s_n est égal au nombre de chiffres de l'écriture en base 2 de n.

Pour le démontrer, commençons par observer que (s_n) est une suite croissante. En effet, soit k tel que $s_{n+1} = \lfloor \frac{n+1}{k} \rfloor + s_{k-1}$. Si $k = n+1$, clairement $s_{n+1} \geqslant s_n$. Sinon, alors $s_n \leqslant \lfloor \frac{n}{k} \rfloor + s_{k-1} \leqslant s_{n+1}$,

et (s_n) est bien croissante. Montrons ensuite que $s_{2^k-1} = k$, $s_{2^k} = k+1$. C'est clair pour $k = 1$ (et vrai par convention pour $k = 0$). Puis, si c'est vrai jusqu'au rang k, alors $s_{2^{k+1}-1} \geqslant s_{2^k} = k+1$, et $s_{2^{k+1}-1} \leqslant \lfloor \frac{2^{k+1}-1}{2^k} \rfloor + s_{2^k-1} = 1 + k$, d'où $s_{2^{k+1}-1} = k+1$. D'autre part, $s_{2^{k+1}} \leqslant \lfloor \frac{2^{k+1}}{2^{k+1}-1} \rfloor + s_{2^{k+1}-1} = 1 + (k+1) = k+2$. Et, pour $n \leqslant 2^{k+1}$, si on écrit $2^l \leqslant n-1 < 2^{l+1}$ (avec donc $l < k$), on a :

$$\lfloor \frac{2^{k+1}}{n} \rfloor + s_{n-1} = \lfloor \frac{2^{k+1}}{n} \rfloor + l + 1 \geqslant \lfloor \frac{2^{k+1}}{2^{l+1}} \rfloor + l + 1 = 2^{k-l} + l + 1 \geqslant (k-l+1) + l + 1 = k+2$$

d'où $s_{2^{k+1}} = k+2$, ce qui conclut la récurrence.

Exercice 10 (APMO 2020 P2)
Soit $r \geqslant 0$ un réel. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers telle que, pour tout $n \geqslant 0$, on ait $a_n \leqslant a_{n+2} \leqslant \sqrt{a_n^2 + r a_{n+1}}$. Montrer que si $r \leqslant 2$, alors nécessairement on a $a_{n+2} = a_n$ pour tout n assez grand, tandis que si $r > 2$, cela n'est pas forcément le cas.

Solution de l'exercice 10
Pour $r > 2$, on prend $a_0 > \frac{1}{r-2}$ et $a_n = a_0 + \lfloor \frac{n}{2} \rfloor$. La vérification est facile.

Pour $r = 2$, supposons que $a_n < a_{n+2}$ pour un certain n. Montrons qu'alors $a_{n+1} \geqslant a_{n+2}$. En effet, soit $c = \max(a_n, a_{n+1})$. Alors $a_{n+2}^2 \leqslant a_n^2 + 2a_{n+1} \leqslant c^2 + 2c < (c+1)^2$, donc $c \geqslant a_{n+2}$, donc $c = a_{n+1} \geqslant a_{n+2}$.

Soit à présent n tel que $a_n \leqslant a_{n+1}$ (qui existe clairement). Alors $a_{n+2} \leqslant a_{n+1}$ (si $a_{n+2} = a_n$, c'est évident ; sinon, on a $a_{n+2} > a_n$ et on applique l'observation précédente). Ensuite, on a $a_{n+3} = a_{n+1}$ d'après l'observation, et donc $a_{n+2} \leqslant a_{n+3}$. Le raisonnement peut se poursuivre. Les termes d'indice de même parité que $n+1$ sont donc tous égaux, tandis que ceux de même parité que n forment une suite croissante majorée d'entiers, et sont donc tous égaux à partir d'un certain rang, comme souhaité.

Exercice 11 (IMO A4 2019)
Soit $n \geqslant 2$ et soit $a_1, \ldots, a_n \in \mathbb{R}$ tels que $a_1 + \cdots + a_n = 0$. Soit $A = \{(i,j) : 1 \leqslant i < j \leqslant n, |a_i - a_j| \geqslant 1\}$. Montrer que, si $A \neq \emptyset$, alors $\sum_{(i,j)\in A} a_i a_j < 0$.

Solution de l'exercice 11
On a $(\sum_i a_i)^2 = 0$, donc il suffit de prouver que $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant n, |a_i-a_j|<1} a_i a_j > 0$. Si $|a_i| \geqslant 1$, il est clair que tous les termes où a_i appparaît sont strictement positifs ; de même pour j. Notons à présent b_i, $1 \leqslant i \leqslant k$ ceux des a_i qui sont compris dans $]-1,1[$, et montrons $\sum_{1\leqslant i,j\leqslant k, |b_i-b_j|<1} b_i b_j > 0$. Cette somme est égale à $(\sum_i b_i)^2 - \sum_{|b_i-b_j|\geqslant 1} b_i b_j$, qui est clairement positif. Si la somme est nulle, cela signifie pour commencer que $|a_i| < 1$ pour tout i. Mais alors, pour que la somme soit nulle, il faut clairement que A soit vide, et c'est ce qu'on voulait.

2 Rappels de théorie de l'ordre (Vincent)

Ordre et indicatrice d'Euler

Définition 1.
Soit X un ensemble fini et π une bijection de X dans lui-même. On dit que π est une *permutation* de X. En outre, pour tout élément x de X, on note $O_\pi(x)$ l'ensemble des éléments $x, \pi(x), \pi^2(x), \ldots$ de X ; cet ensemble est appelé *orbite* de π engendrée par x. Enfin, la taille de cette orbite est appelée l'*ordre* de x pour la permutation π, et notée $\omega_\pi(x)$.

Lemme 2.
Les orbites de π forment une permutation de X : deux orbites de π sont soit égales, soit disjointes. En outre, pour tout élément x de X et tout entier $k \geqslant 0$, on a $\pi^k(x) = x$ si et seulement si $\omega(x)$ divise k.

Démonstration. Par principe des tiroirs, il existe deux entiers k et ℓ tels que $0 \leqslant k < \ell \leqslant \omega(x)$ et $\pi^k(x) = \pi^\ell(x)$. Si $1 \leqslant k$, l'injectivité de π montre alors que $\pi^{k-1}(x) = \pi^{\ell-1}(x)$, et une récurrence immédiate indique dès lors que $x = \pi^{\ell-k}(x)$. On suppose donc sans perte de généralité que $k = 0$.

Une nouvelle récurrence indique cette fois que $\pi^i(x) = \pi^{i+\ell}(x)$ pour tout entier $i \geqslant 0$. Cela signifie déjà que $\mathcal{O}_\pi(x) = \{x, \pi(x), \pi^2(x), \dots, \pi^{\ell-1}(x)\}$, de sorte que $\omega(x) \leqslant \ell$ et donc que $\omega(x) = \ell$. On en déduit en outre que $\pi^k(x) = x$ si et seulement si $\omega(x) = \ell$ divise k.

Enfin, pour tout $y \in \mathcal{O}_\pi(x)$, si l'on pose $y = \pi^k(x)$, on sait que $x = \pi^{k\omega(x)}(x) \in \mathcal{O}_\pi(y)$, donc que $\mathcal{O}_\pi(x) \subseteq \mathcal{O}_\pi(y)$, et même que $\mathcal{O}_\pi(x) = \mathcal{O}_\pi(y)$. Par conséquent, pour tout $z \in X$, si les orbites $\mathcal{O}_\pi(x)$ et $\mathcal{O}_\pi(z)$ ont un élément y commun, on en conclut que $\mathcal{O}_\pi(x) = \mathcal{O}_\pi(y) = \mathcal{O}_\pi(z)$. □

Théorème 3 (Ordre multiplicatif)**.**
Soit n un entier naturel non nul. On note $\varphi(n)$ le nombre d'entiers k premiers avec n et tels que $1 \leqslant k \leqslant n$. Ce nombre est appelé *indicatrice d'Euler* de n. Pour tout entier a premier avec n, il existe un entier $\omega_n(a)$, appelé *ordre de a modulo n*, tel que :

1. $\omega_n(a)$ divise $\varphi(n)$;
2. les entiers k pour lesquels n divise $a^k - 1$ sont les multiples de $\omega_n(a)$.

Démonstration. Soit E l'ensemble des éléments de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ qui sont premiers avec n, et soit π la fonction qui envoie chaque élément k sur ak. Il s'agit bien d'une fonction de E dans E, car si a et k sont premiers avec n, le produit ak l'est aussi. En outre, lorsque k et ℓ sont deux éléments de E tels que $\pi(k) = \pi(\ell)$, l'entier n divise $a(k - \ell)$, donc il divise $k - \ell$, et $k = \ell$. Ainsi, π est une fonction injective, et il s'agit même d'une permutation de E.

Si l'on note $\omega_n(a)$ l'ordre de 1 pour la permutation π, on constate que toutes les orbites de π sont de taille $\omega_n(a)$. En effet, pour tous entiers $k \geqslant 0$ et $\ell \in E$, on constate que

$$\pi^k(\ell) = \ell \Leftrightarrow a^k\ell \equiv \ell \pmod{n} \Leftrightarrow a^k \equiv 1 \pmod{n},$$

une caractérisation qui ne dépend pas de ℓ.

Par conséquent, les entiers k pour lesquels $a^k \equiv 1 \pmod{n}$ sont bien les multiples de $\omega_n(a)$, et $\omega_n(a)$ étant égal au cardinal de chaque orbite de π, il divise le nombre d'éléments de G, c'est-à-dire $\varphi(n)$. □

Attention !

1. Ce théorème ne fonctionne que si a est premier avec n. Par exemple, si $n = 12$ et $a = 15$, il ne fonctionne évidemment pas.
2. Il n'y a aucune raison pour que $\omega_n(a)$ soit égal à $\varphi(n)$, ni pour que deux entiers a et b soient d'ordres égaux l'un à l'autre. Par exemple, si $a = 1$, $b = 7$ et $n = 8$, on a $\omega_n(a) = 1$, $\omega_n(b) = 2$ et $\varphi(n) = 4$.

Remarquons que, lorsque p est un nombre premier, l'ensemble E consiste simplement en les éléments non nuls de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$: il y en a $p - 1$. Cela signifie que $\varphi(p) = p - 1$, ce qui nous permet de retrouver le petit théorème de Fermat. Par ailleurs, il existe en fait une manière simple de calculer $\varphi(n)$ dans le cas où n est un entier quelconque.

Théorème 4 (Indicatrice d'Euler)**.**
Soit n un entier naturel non nul dont la décomposition en tant que produit de facteurs premiers est

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

L'indicatrice d'Euler de n est alors égale au produit

$$\varphi(n) = \prod_{i=1}^{k} (p_i - 1) p_i^{\alpha_i - 1}.$$

Démonstration. On procède par récurrence sur k. Le résultat est immédiat si $k = 0$ et, si $k = 1$, les éléments non inversibles de $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$ sont précisément les $p^{\alpha-1}$ éléments divisibles par p. Il reste donc $\varphi(p^\alpha) = p^\alpha - p^{\alpha-1}$ éléments inversibles dans $\mathbb{Z}/p^\alpha\mathbb{Z}$. Pour gérer l'hérédité, on démontre en fait que $\varphi(mn) = \varphi(m)\varphi(n)$ lorsque m et n sont deux entiers premiers entre eux.

En effet, un élément de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ est inversible si et seulement s'il est inversible modulo m et n. Or, deux éléments distincts k et ℓ de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$ ne sont jamais simultanément égaux modulo m et n, car sinon $k - \ell$ serait divisible par m et par n, donc par leur PPCM, égal à mn : il s'agit là d'une reformulation du théorème des restes chinois.

Par conséquent, quand on fixe une des $\varphi(m)$ classes modulo m susceptibles de contenir des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/mn\mathbb{Z}$, cette classe contient un élément de chaque classe modulo n ; parmi les n éléments ainsi obtenus, $\varphi(n)$ sont inversibles modulo n. Cela nous fait donc bien $\varphi(m)\varphi(n)$ éléments inversibles en tout. □

Élément d'ordre maximal

Cette partie du cours est centrée sur la notion de racine primitive et la démonstration du résultat suivant.

Théorème 5.
Pour toute puissance de nombre premier p^α, on pose

$$\varphi^*(p^\alpha) = \begin{cases} \varphi(p^\alpha)/2 & \text{si } p = 2 \text{ et } \alpha \geqslant 3 \\ \varphi(p^\alpha) & \text{sinon.} \end{cases}$$

Soit maintenant n un entier naturel non nul dont la décomposition en tant que produit de facteurs premiers est

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}.$$

Les ordres modulo n des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ sont les diviseurs de l'entier

$$\varphi^*(n) = \mathsf{PPCM}\left(\varphi^*(p_1^{\alpha_1}), \varphi^*(p_2^{\alpha_2}), \ldots, \varphi^*(p_k^{\alpha_k})\right).$$

On divise la démonstration de ce résultat en plusieurs lemmes.

Lemme 6.
Il existe un entier ω dont les diviseurs sont les ordres modulo n des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$.

Démonstration. Pour tout entier k d'ordre $\omega_n(k)$ et tout diviseur d de $\omega_n(k)$, l'entier $k^{\omega_n(k)/d}$ est d'ordre d modulo n. Il suffit donc de démontrer qu'il existe un entier dont l'ordre modulo n est divisible par l'ordre de tous les autres entiers. Pour ce faire, et pour tous les entiers k et ℓ, on va simplement construire un entier dont l'ordre est un multiple de $\mathsf{PPCM}(\omega_n(k), \omega_n(\ell))$ modulo n.

Soit u et v deux diviseurs respectifs de $\omega_n(k)$ et $\omega_n(\ell)$, premiers l'un avec l'autre, et tels que $uv = \mathsf{PPCM}(\omega_n(k), \omega_n(\ell))$. On peut construire u en éliminant, dans la décomposition de $\omega_n(k)$ en produit de facteurs premiers, toute puissance p^α qui divise également $\omega_n(\ell)$. On construit alors v en éliminant, dans la décomposition de $\omega_n(\ell)$ en facteurs premiers, toute puissance p^α qui divise également $\omega_n(k)/p$. Dès lors, $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ contient des éléments d'ordres u et v ; on note x et y de tels éléments, et w l'ordre du produit xy.

La relation $1 \equiv (xy)^{uw} \equiv x^{uw}y^{uw} \equiv y^{uw} \pmod{n}$ nous indique que v divise uw. Puisque u est premier avec v, cela signifie que v divise w. On montre de même que u divise w, et on en conclut comme souhaité que uv divise w. □

Lemme 7.
Pour tout nombre premier p, il existe un entier dont l'ordre modulo p vaut $p-1$.

Démonstration. Soit p un nombre premier et a un élément inversible de $\mathbb{Z}p\mathbb{Z}$ d'ordre ω maximal. Le lemme 6 indique que tout élément inversible de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ est d'ordre un diviseur de ω. Autrement dit, le polynôme $X^\omega - 1$ possède $p-1$ racines distinctes dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$.

Ce polynôme étant de degré ω, il possède au plus ω racines distinctes. On en conclut que $\omega \geqslant p-1 = \varphi(p)$: puisque ω divise $\varphi(p)$, cela signifie précisément que $\omega = \varphi(p)$. □

Lemme 8.
Soit p un nombre premier, α un entier naturel non nul, et k un entier inversible modulo p. L'ordre multiplicatif $\omega_{p^{\alpha+1}}(k)$ est égal à $\omega_{p^\alpha}(k)$ ou bien à $p\,\omega_{p^\alpha}(k)$.

De plus, si $\omega_{p^{\alpha+1}}(k) = p\,\omega_{p^\alpha}(k)$ et si $p^\alpha \geqslant 3$, alors $\omega_{p^{\alpha+2}}(k) = p\,\omega_{p^{\alpha+1}}(k)$.

Démonstration. Soit u, v et w les ordres multiplicatifs de k modulo p^α, $p^{\alpha+1}$ et $p^{\alpha+2}$. Puisque $k^v \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, on sait déjà que u divise v.

Réciproquement, comme $k^u \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$, il existe un entier t tel que $k^u = tp^\alpha + 1$. Par conséquent, et puisque $p^{\alpha+1}$ divise $p^{2\alpha}$, on constate que

$$k^{pu} \equiv (tp^\alpha + 1)^p \equiv \sum_{i=0}^{p} \binom{p}{i} t^i p^{i\alpha} \equiv \binom{p}{0} + \binom{p}{1} tp^\alpha \equiv 1 \pmod{p^{\alpha+1}}.$$

Cela signifie que v divise pu, et donc que v est égal à u ou à pu.

Plus précisément, si $v = pu$, c'est que $t \not\equiv 0 \pmod{p}$. Mais alors, si p est impair, et puisque $p^{\alpha+2}$ divise $p^{2\alpha+1}$ et $p^{3\alpha}$,

$$k^{pu} \equiv (tp^\alpha + 1)^p \equiv \binom{p}{0} + \binom{p}{1} tp^\alpha + \binom{p}{2} tp^{2\alpha} \equiv 1 + tp^{\alpha+1} \pmod{p^{\alpha+2}}.$$

De même, si p est pair et $p^\alpha \geqslant 3$, c'est que $\alpha \geqslant 2$, auquel cas $p^{\alpha+2}$ divise $p^{2\alpha}$, donc

$$k^{pu} \equiv (tp^\alpha + 1)^p \equiv \binom{p}{0} + \binom{p}{1} tp^\alpha \equiv 1 + tp^{\alpha+1} \pmod{p^{\alpha+2}}$$

dans ce cas également. Dans tous les cas, on conclut que $pu = v \neq w$, et donc que $w = pv$. □

Lemme 9.
Pour tout nombre premier p impair et tout entier $\alpha \geqslant O$, il existe un entier dont l'ordre modulo p^α vaut $\varphi(p^\alpha)$.

Démonstration. Procédons par récurrence sur α. Le cas $\alpha = 0$ est évident, et le lemme 7 nous donne le résultat désiré lorsque $\alpha = 1$.

On traite donc le cas $\alpha = 2$. Soit k un entier inversible modulo p pour lequel $\omega_p(k) = p - 1$. Au vu du lemme 8, k est d'ordre $p-1$ ou $p(p-1)$ modulo p^2. Dans le premier cas, on constate que

$$(k+p)^{p-1} \equiv \binom{p-1}{0} k^{p-1} + \binom{p-1}{1} k^{p-2} p \equiv 1 - pk^{p-2} \not\equiv 1 \pmod{p^2},$$

de sorte que $k + p$ est d'ordre $p(p-1)$ modulo p^2. Ceci conclut la preuve du corollaire lorsque $\alpha = 2$.

Enfin, si $\alpha \geqslant 3$, on dispose déjà d'un entier k pour lequel

$$\omega_{p^{\alpha-1}}(k) = \varphi(p^{\alpha-1}) > \varphi(p^{\alpha-2}) \geqslant \omega_{p^{\alpha-2}}(k).$$

On est donc dans le cas où $\omega_{p^{\alpha-1}}(k) = p\,\omega_{p^{\alpha-2}}(k)$, de sorte que $\omega_{p^\alpha}(k) = p\,\omega_{p^{\alpha-1}}(k) = \varphi(p^\alpha)$. Ceci achève l'hérédité et donc la récurrence. □

Lemme 10.
Pour tout entier $\alpha \geqslant 1$, les ordres multiplicatifs des éléments inversibles de $\mathbb{Z}/2^\alpha\mathbb{Z}$ sont les diviseurs de $\varphi^*(2^\alpha)$.

Démonstration. On procède là encore par récurrence sur α. On traite d'abord à la main les cas où $\alpha \leqslant 4$:

- les cas $\alpha = 0$ et $\alpha = 1$ sont évidents ;
- le cas $\alpha = 2$ découle du fait que 1 et 3 sont d'ordres 1 et 2 modulo 4 ;
- le cas $\alpha = 3$ découle du fait que 1, 3, 5 et 7 sont d'ordres 1, 2, 2 et 2 modulo 8 ;
- le cas $\alpha = 4$ découle du fait que les entiers impairs de 1 à 15 sont d'ordres 1, 4, 4, 2, 2, 4, 4 et 2 modulo 16.

Le lemme 8 nous informe alors que, pour tout entier ℓ impair et tout entier $\alpha \geqslant 5$, l'entier $\omega_{2^\alpha}(\ell)$ divise $2^{\alpha-3}\omega_{2^3}(\ell)$, donc divise $2^{\alpha-2} = \varphi^*(2^\alpha)$. Réciproquement, lorsque $\alpha \geqslant 5$, on dispose déjà d'un entier k pour lequel

$$\omega_{2^{\alpha-1}}(k) = \varphi^*(2^{\alpha-1}) > \varphi^*(2^{\alpha-2}) \geqslant \omega_{2^{\alpha-2}}(k).$$

On est donc dans le cas où $\omega_{2^{\alpha-1}}(k) = 2\,\omega_{2^{\alpha-2}}(k)$, de sorte que $\omega_{2^\alpha}(k) = 2\,\omega_{2^{\alpha-1}}(k) = \varphi^*(2^\alpha)$. Ceci achève l'hérédité et donc la récurrence. □

Démonstration (du Théorème 5). Le lemme 10 traite le cas particulier du théorème 5 où n est est une puissance de nombre premier. Plus généralement, la relation $k^u \equiv 1 \pmod{n}$ est satisfaite si et seulement si chacune des relations $k^u \equiv 1 \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ est satisfaite, c'est-à-dire si u est divisible par chacun des entiers $\omega_{p_i^{\alpha_i}}(k)$, ou encore par leur PPCM. On en déduit immédiatement le théorème 5. □

Un cas particulièrement intéressant est celui où il existe un entier d'ordre $\varphi(n)$.

Définition 11.
Soit n un entier et a un élément inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$. On dit que a est une *racine primitive* modulo n si a tout élément inversible de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$ peut s'exprimer comme une puissance de a.

Autrement dit, a est une racine primitive modulo n si et seulement si $\omega_n(a) = \varphi(n)$. Le théorème 5 nous permet alors immédiatement d'obtenir le résultat suivant.

Corollaire 12.
Soit n un entier naturel non nul. Il existe une racine primitive modulo n si et seulement si n est une puissance de nombre premier impair, le double d'une telle puissance, ou bien l'un des entiers 1, 2 ou 4.

Démonstration. Il s'agit d'identifier les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels $\varphi^*(n) = \varphi(n)$. Soit

$$n = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i}$$

la décomposition de n en produit de facteurs premiers. L'égalité $\varphi^*(n) = \varphi(n)$ tient et seulement si les entiers $\varphi^*(p_i^{\alpha_i})$ sont deux à deux premiers entre eux, et si chacun est égal à l'entier $\varphi(p_i^{\alpha_i})$.

Ce second critère est satisfait si et seulement si n n'est pas divisible par 8. Quant au premier critère, il est satisfait dès lors qu'un seul des nombres $\varphi(p_i^{\alpha_i})$ est différent de 1, c'est-à-dire si n est une puissance de nombre premier ou le double d'une telle puissance. En revanche, dès que n admet deux diviseurs parmi l'ensemble des nombres premiers impairs et l'entier 4, les entiers $\varphi(p_i^{\alpha_i})$ associés seront nécessairement pairs, ce qui invalidera le premier critère. □

Facteurs premiers extrémaux

Concluons ces éléments de cours par une remarque un peu moins formelle : dans un problème d'arithmétique, il est souvent pertinent de regarder les facteurs premiers (ou les diviseurs) minimaux et maximaux des entiers que l'on considère.

Par exemple, si p est le facteur premier maximal d'un entier n, on sait que $p^{v_p(n)}$ divise n mais pas $\varphi(n)$, que l'on aura écrit comme un produit de nombres tous plus petit que p, sauf $v_p(n) - 1$ d'entre eux qui sont égaux à p. Par contraste, si p est le facteur premier minimal de n, l'entier $p - 1$ divise $\varphi(n)$ mais est premier avec n.

Exercices

Exercice 1
Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 0$, que 7 divise $3^{12n^2+1} + 2^{6n+2}$.

Exercice 2
Démontrer que l'entier $11^{60} - 17^{24}$ possède au moins 120 diviseurs positifs.

Exercice 3
Trouver les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels n divise $2^n - 1$.

Exercice 4
Soit n un entier naturel. Démontrer que $n!$ divise $2^{2n!} - 2^{n!}$.

Exercice 5
Soit a un entier naturel non nul, et soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{k+1} = a^{u_k}$ pour tout $k \geqslant 0$. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $n!$ divise $u_{n+1} - u_n$.

Exercice 6
Soit p un nombre premier et n un entier. Démontrer que tout diviseur de $(n+1)^p - n^p$ est congru à 1 modulo p.

Exercice 7
Trouver les couples de nombres premiers (p, q) tels que pq divise $3^p + 3^q$.

Exercice 8
Soit $a_1, a_2, \ldots, a_k$ des entiers naturels non nuls tels que $a_1 a_2 \cdots a_k$ divise le produit

$$(2^{a_1-1} + 1)(2^{a_2-1} + 1) \cdots (2^{a_k-1} + 1).$$

Démontrer que l'un des entiers a_i vaut 1.

Exercice 9
Soit $n \geqslant 2$ un entier. Démontrer que n est premier si et seulement si n divise $(n-1)! + 1$.

Exercice 10
Soit p un nombre premier. Trouver les entiers $k \geqslant 0$ pour lesquels p divise $1^k + 2^k + \cdots + p^k$.

Exercice 11
Soit p un nombre premier tel que $p \geqslant 5$, et soit a et b deux entiers tels que

$$\frac{a}{b} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \cdots + \frac{1}{p-1}.$$

Démontrer que p divise a^2.

Exercice 12
Trouver les entiers $n \geqslant 1$ tels que, lorsque l'on ordonne les diviseurs positifs de n pour former une liste $d_1, d_2, \ldots, d_k$ telle que $1 = d_1 < d_2 < \cdots < d_k$, chaque entier d_i obtenu quand $1 \leqslant i \leqslant k-2$ divise la somme $d_{i+1} + d_{i+2}$.

Exercice 13
Soit $k \geqslant 1$ un entier premier avec 6. Démontrer qu'il existe un entier $n \geqslant 0$ pour lequel k divise $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Le petit théorème de Fermat indique directement que

$$3^{12n^2+1} + 2^{6n+2} \equiv 3 \times (3^6)^{2n^2} + 4 \times (2^6)^n \equiv 3 \times 1^{2n^2} + 4 \times 1^n \equiv 3 + 4 \equiv 0 \pmod 7.$$

Solution de l'exercice 2
Puisque 12 divise 60 et 24, le théorème 5 indique que $11^{60} \equiv 17^{24} \equiv 1 \pmod{2^4, 3^2, 5, 7, 13}$. Par

conséquent, $11^{60} - 17^{24}$ est divisible par $2^4 \times 3^2 \times 5 \times 7 \times 13$, qui possède lui-même $5 \times 3 \times 2^3 = 120$ diviseurs positifs.

Solution de l'exercice 3

Tout d'abord, $n = 1$ est une solution. On recherche désormais une éventuelle solution $n \geqslant 2$.

Soit p le plus petit facteur premier d'un tel entier n. Puisque $2^n \equiv 1 \pmod{p}$, on sait que p est impair et que $\omega_p(2)$ divise n. Or, $\omega_p(2)$ divise également $p - 1$. Mais, par minimalité de p, les entiers $p - 1$ et n sont premiers entre eux. Cela signifie que $\omega_p(2) = 1$, c'est-à-dire que p divise $2 - 1 = 1$. Devant une telle absurdité, on conclut que nul entier $n \geqslant 2$ n'est solution, et donc que $n = 1$ est l'unique solution du problème.

Solution de l'exercice 4

Soit p un nombre premier, et α la valuation p-adique de $n!$. Il s'agit de démontrer que $2^{2n!} \equiv 2^{n!} \pmod{p^\alpha}$. On distingue donc deux cas.

Tout d'abord, si $p = 2$, et puisque $n!$ possède $\alpha + 1$ puissances de 2 parmi ses diviseurs, on sait que $n! \geqslant \alpha + 1$. On en déduit que 2^α divise $2^{n!}$ et $2^{2n!}$.

On suppose désormais que p impair et que $\alpha \geqslant 1$. Cette fois-ci, $p \leqslant n$, donc $p - 1$ divise $n!$ et est premier avec p, de sorte que $\varphi(p^\alpha) = (p-1)p^{\alpha-1}$ divise également $n!$ et $2n!$. Par conséquent, $2^{2n!} \equiv 2^{n!} \equiv 1 \pmod{p^\alpha}$.

En conclusion $2^{2n!} - 2^{n!}$ est divisible simultanément par chaque puissance p^α. Elle est donc également divisible par leur produit, c'est-à-dire par $n!$.

Solution de l'exercice 5

Une idée raisonnable serait de procéder comme à l'exercice précédent : considérer un nombre premier p, noter α la valuation p-adique de $n!$, puis démontrer que p^α divise $u_{n+1} - u_n$, par exemple à l'aide d'une récurrence sur n. Cependant, cette approche ne fonctionnera pas directement. En effet, lorsque p est premier avec α, elle revient à démontrer que l'ordre de a modulo p^α divise $u_n - u_{n-1}$. Mais cet ordre pourrait très bien valoir $\varphi(p^\alpha) = (p-1)p^{\alpha-1}$, un entier qui ne divise pas $n!$ quand p^2 divise n.

On adapte donc notre raisonnement pour éviter de tomber dans l'écueil que l'on vient de découvrir. À cette fin, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\psi(n) = \prod_p p^{\lfloor (n-1)/(p-1) \rfloor},$$

le produit étant effectué sur tous les nombres premiers ; seuls les nombres premiers $p \leqslant n$ contribuent à ce produit avec un facteur différent de 1. Or, la formule de Legendre indique que

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1} \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor,$$

où $s_p(n)$ est la somme des chiffres de n en base p. On en conclut que $n!$ divise $\psi(n)$, et on entreprend donc de démontrer, toujours par récurrence sur n, que $\psi(n)$ divise $u_{n+1} - u_n$.

Tout d'abord, si $a = 1$, chacun des entiers u_k est égal à 1, donc $\psi(n)$ divise manifestement $u_{n+1} - u_n$. De même, l'entier $\psi(1) = 1$ divise $u_2 - u_1$. On suppose donc désormais que $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Notons au passage que la suite (u_k) est alors strictement croissante, de sorte que $u_k \geqslant k + 1$ pour tout $k \geqslant 0$.

Soit p un nombre premier majoré par n, et soit $\alpha = \lfloor (n-1)/(p-1) \rfloor$. Puisque $a \geqslant 2$, la suite (u_k) est strictement croissante, donc $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant n - 1 \geqslant \alpha$. Par conséquent, si p divise a, on observe déjà que p^α divise $u_n = a^{u_{n-1}}$ et $u_{n+1} = a^{u_n}$.

Si, au contraire, p est premier avec α, l'hypothèse de récurrence nous informe que $u_n - u_{n-1}$ est divisible par $\psi(n-1)$, donc par $(n-1)!$ et par $p-1$, mais également par $p^{\lfloor (n-2)/(p-1)\rfloor}$. Or,

$$\left\lfloor \frac{n-2}{p-1} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor - 1 = \alpha - 1.$$

Par conséquent, $u_n - u_{n-1}$ est divisible par $p-1$ et par $p^{\alpha-1}$, donc par leur PPCM, c'est-à-dire $(p-1)p^{\alpha-1} = \varphi(p^\alpha)$. On en conclut comme souhaité que p^α divise $a^{u_n} - a^{u_{n-1}} = u_{n+1} - u_n$, ce qui achève la récurrence.

Solution de l'exercice 6

Il s'agit de démontrer que tout facteur premier q de $(n+1)^p - n^p$ est congru à 1 modulo p. On remarque tout d'abord que, si q divise n, il divise aussi $n+1$, et réciproquement. Par conséquent, q est premier avec n et avec $n+1$.

On note donc ω l'ordre du résidu $x = (n+1)/n$ modulo q. Puisque $x^p \equiv 1 \pmod q$, on sait que ω divise p, donc vaut 1 ou p. Or, si $\omega = 1$, cela signifie que $x = 1$, c'est-à-dire que $n+1 \equiv n \pmod q$. Cette absurdité nous permet de confirmer que $\omega = p$.

Comme ω divise $\varphi(q) = q-1$, on en conclut comme souhaité que $q \equiv 1 \pmod p$.

Solution de l'exercice 7

Soit (p,q) une solution éventuelle Si $p \geqslant 5$, alors $0 \equiv 3^p + 3^q \equiv 3 + 3^q \equiv 3(3^{q-1}+1) \pmod p$, donc $3^{q-1} \equiv -1 \not\equiv 1 \equiv 3^{2(q-1)} \pmod p$. On en déduit que $\omega_p(3)$ divise $2(q-1)$ mais pas $q-1$, donc que $v_2(\omega_p(3)) > v_2(q-1)$. Comme $\omega_p(3)$ divise $\varphi(p) = p-1$, cela signifie que $v_2(p-1) > v_2(q-1)$. Il nous est donc impossible d'avoir à la fois $p \geqslant 5$ et $q \geqslant 5$.

Dès lors, on distingue plusieurs cas, quitte à supposer que $p \geqslant q$:

- si $p \leqslant 3$ et $q \leqslant 3$, on vérifie à la main que $(3,2)$ et $(3,3)$ sont solutions, tandis que $(2,2)$ n'en est pas une ;
- si $q = 2$ et $p \geqslant 5$, alors $3^p + 3^q \equiv 3 + 3^2 \equiv 12 \pmod p$, donc p ne divise pas $3^p + 3^q$;
- si $q = 3$ et $p \geqslant 5$, alors $3^p + 3^q \equiv 3 + 3^3 \equiv 30 \pmod p$, donc $(p,q) = (5,3)$ est la seule solution.

En conclusion, les solutions sont les couples $(2,3)$, $(3,2)$, $(3,3)$, $(3,5)$ et $(5,3)$.

Solution de l'exercice 8

Supposons que nul entier a_i ne soit égal à 1. Chaque facteur $2^{a_i-1}+1$ est alors impair, donc chaque a_i l'est également. Quitte à échanger les nombres a_i, on suppose maintenant que $v_2(a_1-1)$ est la plus petite valuation 2-adique parmi les entiers $v_2(a_i-1)$.

On pose alors $\alpha = v_2(a_1-1)$, puis on considère un facteur premier p de a_1, ainsi qu'un entier a_i pour lequel p divise $2^{a_i-1}+1$. Puisque p est impair, on sait que

$$2^{a_i-1} \equiv -1 \not\equiv 1 \equiv 2^{2(a_i-1)} \pmod p.$$

Ainsi, $\omega_p(2)$ divise $2(a_i-1)$ mais pas $a_i - 1$, de sorte que

$$v_2(p-1) \geqslant v_2(\omega_p(2)) = 1 + v_2(a_i-1) \geqslant 1+\alpha.$$

En conclusion, tout facteur premier de a_1 est congru à 1 modulo $2^{1+\alpha}$, donc a_1 aussi, en contradiction avec la définition de α. Notre supposition initiale était donc invalide.

Solution de l'exercice 9

Si n est composé, soit p un facteur premier de n. Puisque $p \leqslant n-1$, on sait que p divise $(n-1)!$, donc ne divise pas $(n-1)!+1$, de sorte que n ne divise pas $(n-1)!+1$ non plus.

Réciproquement, si p est premier, soit E l'ensemble des entiers $1, 2, \ldots, p-1$. On regroupe chaque élément x de E avec son inverse $\overline{x}$ modulo p, c'est-à-dire avec le reste de la division de x^{p-2} par p. Pour tout x, on a bien $x\overline{x} \equiv x^{p-1} \equiv 1 \pmod{p}$, donc $x = \overline{\overline{x}}$, et notre regroupement constitue une partition de E en ensemble de taille 1 ou 2. En outre, $x = \overline{x}$ si et seulement si $x^2 \equiv 1 \pmod{p}$, c'est-à-dire si p divise $x^2 - 1 = (x+1)(x-1)$.

Ainsi, $x = 1$ et $x = p-1$ se retrouvent dans des parties de E de taille 1, et tous les autres éléments de E se retrouvent dans des parties de E de taille 2. Si l'on note F l'ensemble des entiers $x \in E$ tels que $x < \overline{x}$, on en conclut que

$$(p-1)! \equiv 1 \times (p-1) \times \prod_{x \in F} (x \times \overline{x}) \equiv 1 \times (-1) \times \prod_{x \in F} 1 \equiv -1 \pmod{p},$$

ce qui conclut.

Solution de l'exercice 10

Lorsque $k = 0$, notre somme est égale à p. L'entier $k = 0$ est donc une solution, et on s'intéresse désormais aux cas où $k \geqslant 1$.

Soit x un élément de $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ d'ordre $p-1$. Les $p-1$ premières puissances de x coïncident avec les inversibles modulo p, de sorte que

$$1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k + p^k \equiv 1^k + 2^k + \cdots + (p-1)^k \equiv x^{0k} + x^k + x^{2k} + \cdots + x^{(p-2)k}.$$

Il s'agit là de la somme d'une suite géométrique de raison x^k. Si $x^k \equiv 1 \pmod{p}$, c'est-à-dire si $p-1$ divise k, cette somme vaut $p-1$. Sinon, elle vaut

$$\frac{x^{(p-1)k} - 1}{x - 1} \equiv 0 \pmod{p}.$$

En conclusion, les entiers k recherchés sont $k = 0$ et les entiers non nuls que ne divise pas $p-1$.

Solution de l'exercice 11

Il suffit de traiter le cas où a/b est une fraction irréducible. Puisque la fraction a/b est une somme d'inverses d'inversibles modulo p^2, et donc que b est inversible modulo p^2, le plus simple est de considérer cette fraction directement modulo p^2. Ainsi,

$$2a/b \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \left(\frac{1}{k} + \frac{1}{p-k} \right) \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{p}{k(p-k)} \equiv pS_{-2} \pmod{p^2},$$

où l'on a posé

$$S_{-2} \equiv \sum_{k=1}^{p-1} \frac{1}{k(p-k)} \equiv -\sum_{k=1}^{p-1} k^{-2} \pmod{p}.$$

Or, puisque $\varphi(p)$ ne divise pas -2, on a vu à l'exercice 10 que p divise S_{-2}. On en conclut que $2a/b \equiv 0 \pmod{p^2}$, et donc que p^2 divise a.

Solution de l'exercice 12

Si $n = 1$ ou n est premier, il compte au plus 2 diviseurs, donc aucune relation de divisibilité n'est requise, et n est solution. On suppose donc désormais que n possède $k \geqslant 3$ diviseurs positifs.

Puisque d_{k-2} divise $d_{k-1} + d_k$ et $n = d_k$, il divise également d_{k-1}. Or, remplacer chaque diviseur d_i par n/d_i revient à inverser l'ordre des diviseurs de n, de sorte que $d_i d_{k+1-i} = n$. Ainsi, n/d_3 divise n/d_2, ce qui signifie que d_2 divise d_3.

On montre alors par récurrence forte sur $i \geqslant 2$ que d_2 divise chacun des entiers $d_2, d_3, \ldots, d_i$. En effet, c'est le cas pour $i = 2$ et $i = 3$. Puis, étant donné un entier $i \geqslant 4$ pour lequel d_2 divise d_{i-2} et d_{i-1}, il divise également la somme $d_{i-1} + d_i$, donc d_i. Par conséquent, d_2 divise tous les diviseurs de n autres que 1, donc tous les facteurs premiers de n. Ainsi, d_2 est le seul facteur premier de n, qui est donc une puissance de nombre premier.

Réciproquement, si n est une puissance de nombre premier de la forme $n = p^{k-1}$, chaque diviseur d_i est égal à p^{i-1}, donc divise $d_{i+1} + d_{i+2} = p(p+1)d_i$.

En conclusion, les entiers recherchés sont les puissances de nombres premiers.

Solution de l'exercice 13

L'idée est de remarquer que $1/6+1/3+1/2 = 1$. Idéalement, on souhaiterait donc choisir $n = -1$, mais on ne peut pas procéder brutalement ainsi. À la place, on va simplement considérer l'entier $n = \varphi(k) - 1$ puis agir proprement. En effet, on constate alors que

$$6(2^n + 3^n + 6^n - 1) \equiv 3 \times 2^{\varphi(k)} + 2 \times 3^{\varphi(k)} + 6^{\varphi(k)} - 6 \equiv 3 + 2 + 1 - 6 \equiv 0 \pmod{n},$$

et puisque k est premier avec 6, on en conclut que k divise bien $2^n + 3^n + 6^n - 1$.

3 Lemme chinois (Théo)

L'objectif de ce TD était de revoir le lemme chinois, et voir son utilisation dans des exercices assez abstraits.

Exercice 1
Soit $n \geqslant 2$. Dénombrer le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x^2 = x \pmod{n}$.

Exercice 2
Dénombrer le nombre de x dans $[\![1, n]\!]$ tels que $x^2 = 1 \bmod n$.

Exercice 3
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$ il existe $(a, b) \in \mathbb{Z}^2$ tels que n divise $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Exercice 4
Montrer que pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ il existe k entiers positifs consécutifs qui ne sont pas des puissances de nombre premiers.

Exercice 5
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, il existe $a_1 \ldots a_n$ des entiers supérieurs ou égaux à 2 premiers entre eux deux à deux tels que $a_1 \ldots a_n - 1$ soit le produit de deux entiers consécutifs.

Exercice 6
Déterminer les entiers n strictement positifs tels que $x \mapsto x^x$ est surjectif de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$

Exercice 7
Anatole et Théo jouent au jeu suivant : Anatole choisit un nombre premier $p > 2$ et Théo écrit un entier strictement positif a au tableau. Au départ $S = 0$ Chacun leur tour, commençant par

Anatole, ils effacent le nombre qu'ils avaient écrit au tour précédent (sauf Anatole au premier tour), et écrivent un nouvel entier strictement plus grand que celui écrit au tableau. Ensuite le joueur dont c'est le tour calcule $a^b + b^a$: le résultat est noté s_l où l est le numéro du tour. Si p divise $s_l(s_1 + 2s_2 + \cdots + ls_l)$, le joueur dont c'est le tour gagne, sinon c'est au tour du joueur suivant.

Déterminer lequel des deux joueurs a une stratégie gagnante.

Exercice 8

On dit qu'un point (a, b) de $\mathbb{Z}^2$ est invisible de l'origine s'il n'existe pas de point (c, d) de $\mathbb{Z}^2$ tel que le point (c, d) appartient au segment formé par l'origine et (a, b).

Montrer qu'il existe un carré de n^2 points de $\mathbb{Z}^2$ tous invisibles de l'origine.

Exercice 9

Montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est une puissance parfaite.

Exercice 10

Déterminer s'il existe une suite infinie d'entiers (a_n) d'entiers strictement positifs vérifiant les deux propriétés suivantes :

— Tout entier strictement positif apparaît exactement une fois dans la suite (a_n).

— Pour tout entier $n \geqslant 1$, $\prod_{i=1}^{n} a_i$ s'écrit comme une puissance n−ème d'un entier.

Exercice 11

Soit f une fonction de $\mathbb{N}^*$ dans $\mathbb{N}^*$ tels que si n et m sont premiers entre eux, $f(n)$ et $f(m)$ le sont aussi, et que pour tout n, $n \leqslant f(n) \leqslant n + 2023$. Montrer que si p divise $f(n)$, alors p divise n.

Exercice 12

Existe-t-il deux entiers a, b tels qu'aucun nombre parmi $a, a+1, \ldots, a+2023, b, b+1, \ldots, b+2023$ n'en divise un des 4047 autres, mais que $a(a + 1) \ldots (a + 2023)$ divise $b(b + 1) \ldots (b + 2023)$?

Exercice 13

Soit n un entier strictement positif, p un nombre premier, a un entier. Démontrer que si l'équation $P(y) \equiv a \pmod{p}$ admet une solution telle que $P'(y) \not\equiv 0 \pmod{p}$, alors l'équation $P(x) \equiv a \pmod{p^n}$ admet une solution.

Exercice 14

Déterminer les entiers n strictement positifs tels que pour tout entier k, il existe un entier a tel que n divise $a^3 + a - k$.

Solution de l'exercice 1

Déjà le premier réflexe à avoir est de factoriser : on cherche le nombre de x dans $[\![1,n]\!]$ tels que $x(x-1) = 0 \pmod{n}$. Traitons d'abord le cas où n est une puissance d'un nombre premier différente de 1. Comme x et $x-1$ sont premiers entre eux (car $x-(x-1)=1$), n divise $x(x-1)$ si et seulement si n divise x ou $x-1$. Ainsi l'équation est équivalente comme x est dans $[\![1,n]\!]$ à $x = n$ ou $x = 1$: il y a deux solutions.

Maintenant il faut traiter le cas général. Déjà on peut remarquer que le nombre de solutions est en fait le nombre de classes de congruence modulo n telles que $x(x-1) = 0 \pmod{n}$. Pour se ramener au cas précédent, on utilise le théorème des restes chinois. Posons $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ avec les p_i des nombres premiers et les a_i des nombres entiers strictement positifs. L'équation est équivalente à pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $p_i^{a_i}$ divise $x(x-1)$ ce qui est équivalent à pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $x \equiv 0 \pmod{p_i^{a_i}}$ ou $x = 1 \pmod{p_i^{a_i}}$. L'équation est donc équivalente à l'existence de $(e_1,\dots,e_k)$ dans $\{0,1\}^k$ tels que pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $x \equiv e_i \pmod{p_i^{a_i}}$. Les $p_i^{a_i}$ étant deux à deux premiers entre eux, si on fixe $(e_1,\dots,e_k)$ dans $\{0,1\}^k$ le système pour tout $i \in [\![1,k]\!]$, $x = e_i \pmod{p_i^{a_i}}$ admet une unique solution modulo n. Aussi chaque classe de solution est distincte : si on se donne $(e_1,\dots,e_k) \neq (e'_1,\dots,e'_k)$ dans $\{0,1\}^k$ et qu'on note a la solution modulo n de $x \equiv e_i \pmod{p_i^{a_i}}$, b celle de $x \equiv e'_i \pmod{p_i^{a_i}}$, supposons par l'absurde $a = b$, dans ce cas pour tout i $e_i \equiv a \equiv b \equiv e'_i \pmod{p_i^{a_i}}$ et comme les e_i et e'_i sont dans $\{0,1\}$, on obtient $e_i = e'_i$ ce qui est contradictoire. En particulier il y a autant de classe de solution que de $(e_1,\dots,e_k)$ dans $\{0,1\}^k$ c'est à dire 2^k, avec k le nombre de diviseur premier distinct de n.

En fait le lemme chinois nous donne que le nombre de solution ici modulo n est le même que le produit pour tout i du nombre de solutions modulo $p_i^{a_i}$

Solution de l'exercice 2

Comme dans l'exercice précédent on factorise : on cherche les x tels que n divise $x-1$ et $x+1$. Cette fois-ci $x-1$ et $x+1$ ne sont pas forcément premiers entre eux, mais leur pgcd divise $x+1-(x-1) = 2$. En particulier si n est une puissance d'un nombre premier impair, comme le pgcd de $x-1$ et $x+1$ divise 2 qui est premier avec tout nombre premier impair, alors n divise $x-1$ ou n divise $x+1$ donc $x = 1$ ou $x = n-1$. Si n est une puissance de 2, par contre c'est plus compliqué. Pour $n = 2$ il n'y a qu'une solution : $x = 1$. Mais pour $n = 4$ on a deux solutions : $x = 1$ ou 3 et pour $n = 8$, $1, 3, 5, 7$ sont solutions. Si n est une puissance de 2 supérieure ou égale à 4, alors si n divise $(x-1)(x+1)$, x est impair, et parmi $x-1$ et $x+1$ un est divisible par 2 et pas par 4. En particulier si on pose $n = 2^k$ avec $k \geqslant 2$, 2^{k-1} divise $x-1$ ou $x+1$, donc $x = 1$ ou $x = 1+2^{k-1}$ ou $x = 2^k-1$ ou $x = 2^{k-1}-1$. Si $k \geqslant 3$, toutes ces quantités sont différents car $1 < 2^{k-1}-1 < 2^{k-1}+1 < 2^k-1$. En particulier l'équation a quatre solutions si $k \geqslant 3$, 2 si $k = 2$, 1 sinon.

Ensuite pour le cas général, il suffit de refaire le même raisonnement que dans l'exercice précédent. Posons $n = p_1^{a_1} \dots p_k^{a_k}$ avec les p_i des nombres premiers et les a_i des nombres entiers strictement positifs, le lemme chinois nous donne que le nombre de solution ici modulo n est le lemme que le produit pour tout i du nombre de solution modulo $p_i^{a_i}$. En particulier si on note N le nombre de diviseur premier impair distinct de n, alors si 8 divise n il y a $4N$ solutions, si 4 divise N mais pas 8 il y a $2N$ solutions, sinon il y a N solutions.

Solution de l'exercice 3

Commençons par tricher et regarder notre équation dans $\mathbb{Q}$: on cherche a et b tel que $4a^2 + 9b^2 - 1 = 0$. On peut poser $b = 0$, dans ce cas $a = \frac{1}{2}$ convient. Pour $a = 0$, $b = \frac{1}{3}$ convient. Maintenant soit $n \in \mathbb{N}^*$ il faut réussir à généraliser ça modulo n.

La fraction $\frac{1}{2}$ n'a pas de sens si n est divisible par 2, par contre si n est premier avec 2, 2 est inversible modulo n : posons $b = 0$, et a un inverse de 2 modulo n, alors $4a^2 + 9b^2 - 1 = (2a)^2 - 1 = 1 - 1 = 0 \pmod{n}$. De même si n est premier avec 3, $a = 0$ et b un inverse de 3 modulo n convient.

On sait donc résoudre le problème si 3 ne divise pas n, si 2 ne divise pas n, il reste alors le cas général. Pour cela, on va utiliser le lemme chinois : posons $n = 2^k m$ avec $k \in \mathbb{N}$ et m impair. Comme 2^k et m sont premiers entre eux, on cherche à trouver a et b tels que 2^k et m divisent $4a^2 + 9b^2 - 1$. Mais 2^k est premier avec 3, et m est premier avec 2 : prenons a tel que $a \equiv 0 \pmod{2^k}$ et $a \equiv 2^{-1} \pmod{m}$ et b tel que $b \equiv 3^{-1} \pmod{2^k}$ et $b \equiv 0 \pmod{m}$. On a bien $4a^2 + 9b^2 - 1 \equiv 0$ modulo m et modulo 2^k, donc n divise $4a^2 + 9b^2 - 1$.

Solution de l'exercice 4

En fait cet exercice ressemble à "Montrer que pour tout $k > 0$ il existe k entiers consécutifs qui ne sont pas des nombres premiers" qui est plus connu et pour lequel on peut trouver une solution en considérant $(k+1)! + 2, (k+1)! + 3, \ldots, (k+1)! + (k+1)$. En effet on a k nombres consécutifs, et si $i \in [\![2, k+1]\!]$, i divise $(k+1)! + i$ qui est pourtant strictement plus grand que i, donc qui ne peut être premier.

En fait on peut adapter l'exemple en considérant $(k+1)!^2+2, (k+1)!^2+3, \ldots, (k+1)!^2+(k+1)$. En effet on a k nombres consécutifs, et si $i \in [\![2, k+1]\!]$, i divise $(k+1)!^2 + i$. Si i n'est pas une puissance de nombre premier alors $(k+1)!^2 + i$ non plus car il est divisible par i. Si i est une puissance de nombre premier, posons $i = p^\ell$ avec $k \geqslant 2$, alors p^ℓ divise $(k+1)!^2 + i$, et comme $i \leqslant (k+1)$, $p^{\ell+1}$ divise i^2 qui divise $(k+1)!^2$. En particulier $p^{\ell+1}$ ne divise pas i donc ne divise pas $(k+1)!^2 + i$, on obtient donc $(k+1)!^2 + i = p^\ell = i$ ce qui est absurde.

Mais on peut également utiliser le lemme chinois : on veut trouver N tel que N soit divisible par deux nombres premiers, $N+1$ idem et même chose jusqu'à $N + k - 1$. Pour cela donnons nous $p_1, \ldots p_{2k}$ des nombres premiers distincts. On aimerait que p_1 et p_2 divise N soit $N = 0 \pmod{p_1}$ et $N = 0 \pmod{p_2}$. On aimerait que p_3 et p_4 divisent $N+1$ donc que $N = -1 \pmod{p_3}$ et $N = -1 \pmod{p_4}$. On obtient en continuant un système que pourrait vérifier un N pour convenir. Soit N une solution du système suivant : pour tout $i \in [\![0, k-1]\!]$, $N = -i \pmod{p_{2i+1}}$ et $N = -i \pmod{p_{2i+2}}$, N existe par le lemme chinois les p_i étant deux à deux premiers entre eux. Quitte à ajouter un multiple de $p_1 \ldots p_{2k}$ on peut supposer N positif. Pour tout $i \in [\![0k-1]\!]$, $N + i$ est divisible par p_{2i+2} et p_{2i+1} donc ne peut être une puissance d'un nombre premier. En particulier la séquence $N, \ldots, N + k - 1$ est une suite de k nombres consécutifs n'étant pas des nombres premiers. Une telle technique peut se généraliser pour beaucoup d'énoncés similaires : par exemple montrer qu'on peut trouver pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ k nombres consécutifs divisibles par au moins 42 nombres premiers distincts.

Solution de l'exercice 5

Déjà on va réécrire le problème : on cherche $a_1, \ldots, a_n$ deux à deux premiers entre eux tels que $a_1 \ldots a_n = k(k+1) + 1 = k^2 + k + 1$. En fait cela revient à chercher $k \in \mathbb{N}$ tel que $k^2 + k + 1$ admette au moins n diviseurs premiers distincts (car chaque a_i apporte un facteur premier distinct des autres, et car si $k^2 + k + 1$ s'écrit sous la forme $p_1^{b_1} \ldots p_m^{b_m}$ avec les p_i premiers les b_i dans $\mathbb{N}^*$ et $m \geqslant n$, on peut prendre $a_i = p_i^{b_i}$ si $i \leqslant n-1$ et $a_n = p_n^{b_n} \ldots p_m^{b_m}$). Désormais on cherche à prouver qu'il existe $k \in \mathbb{N}$ tel que $k^2 + k + 1$ admette au moins n diviseurs premiers distincts.

Tout d'abord, on va montrer que l'ensemble des p qui divise $k^2 + k + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$ est infini. En effet si on suppose qu'il est fini, notons $p_1, \ldots p_i$ les diviseurs premiers de $k^2 + k + 1$ lorsque k parcourt $\mathbb{N}^*$, pour $k = p_1 \ldots p_i$, $k^2 + k + 1 > 1$ donc admet un diviseur premier,

valant nécessairement p_j pour i entre 1 et i. Comme p_j divise k, il divise $k^2 + k$ donc il divise $k^2 + k + 1 - k^2 - k = 1$ ce qui est absurde. En particulier l'ensemble des p premiers qui divise $k^2 + k + 1$ pour $k \in \mathbb{N}$ est infini.

Maintenant, on cherche un résultat plus fort : on veut que $k^2 + k + 1$ soit divisible par n nombres premiers en même temps. Pour cela remarquons que si p divise $k^2 + k + 1$ pour un certain k, alors p divise $a^2 + a + 1$ si $a \equiv k \pmod{p}$. On va donc se ramener à un système de congruence. Soit $p_1, \dots, p_n$ des nombres premiers distincts tels qu'il existe $k_1, \dots, k_n$ tels que p_i divise $k_i^2 + k_i + 1$. Soit x tel que pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, $x \equiv k_i \pmod{p_i}$, un tel x existe par le lemme chinois les p_i étant deux à deux premiers entre eux. Quitte à rajouter un multiple de $p_1 \dots p_n$ à x on peut supposer x positif. D'après la remarque faite précédemment, pour tout $i \in [\![1, n]\!]$, p_i divise $x^2 + x + 1$. En particulier on a bien prouvé le résultat voulu.

Solution de l'exercice 6

Essayons de trouver des conditions simples permettant d'avoir $x \mapsto x^x$ surjectif (ou empêchant clairement cette fonction d'être surjective.

Déjà s'il existe un nombre premier p tel que p^2 divise n, alors on ne peut pas avoir $x^x \equiv p \pmod{n}$. En effet, cela impliquerait que p divise x, donc que p^2 divise x^x, ce qui est contradictoire. Ainsi tout n solution est squarefree.

Soit n un entier strictement positif squarefree, et a un entier. Pour avoir $x^x \equiv a \pmod{n}$, on aimerait avoir $x \equiv a \pmod{n}$ et $x \equiv 1 \pmod{\phi(n)}$. Supposons n et $\phi(n)$ premier entre eux (ce qui implique n squarefree), alors un tel x existe. Pour tout premier p divisant n, si a est premier avec p, p est aussi premier avec x, donc $x^x \equiv x \equiv a \pmod{p}$ (par Petit Fermat car $p - 1$ divise $x - 1$). Sinon, a est divisible par p, donc x aussi, donc $x^x \equiv a \pmod{p}$. Dans tous les cas par le lemme chinois, $x^x \equiv a \pmod{p}$. Ceci montre que si n est premier avec $\phi(n)$, n vérifie l'énoncé.

Essayons de montrer la réciproque. Supposons que n vérifie l'énoncé, et que n n'est pas premier avec $\phi(n)$. On sait déjà que n est squarefree, donc il existe deux nombres premiers p et q divisant n tels que p divise $q-1$ (en particulier $p \neq q$). Donnnons nous b une racine primitive modulo q. Si $x \mapsto x^x$ est surjective, alors il existe un entier strictement positif x tel que $x^x \equiv 0 \pmod{p}$ et $x^x \equiv b \pmod{q}$. La première équation implique que p divise x, et la seconde que x est premier avec q. On a alors $(x^x)^{(q-1)/p} \equiv x^{(q-1)x/p} \equiv 1 \pmod{q}$, donc $b^{(q-1)/p} \equiv \pmod{q}$ ce qui contredit la définition de b. Ainsi on a une contradiction.

On obtient donc que la propriété de l'énoncé est vraie si et seulement si n et $\phi(n)$ sont premiers entre eux.

Solution de l'exercice 7

Tout d'abord, essayons de bien comprendre ce que peut valoir $a^b + b^a$ en fonction de a et b modulo p. Par Petit Fermat, cette quantité ne dépend que de la congruence modulo p et $p - 1$ de a et b car ceux-ci sont strictement positifs (le cas où a ou b est divisible par p ne pose pas problème).

La valeur de b qui semble donner le moins de possibilités pour cette quantité est $b \equiv 0 \pmod{p-1}$ et $b \equiv 1 \pmod{p}$: notons que ce système a une solution comme $p - (p - 1) = 1$, donc p et $p - 1$ sont premiers entre eux. Dans ce cas $a^b + b^a$ vaut 2 modulo p si a est premier avec p, 1 sinon.

Notons également que si un des deux joueurs écrit un nombre c divisible par p, et ne gagne pas à ce tour, le joueur suivant peut écrire un multiple de p noté d plus grand que c, et gagner car p divisera $c^d + d^c$.

Ainsi, il semble que n'importe quel joueur peut forcer la main pour que s_j vale toujours 2 modulo p. Dans ce cas, $s_1 + 2s_2 + \cdots + ls_l = l(l+1)$ deviendra divisible par p au bout de $p-1$ tours, il semble donc que si Anatole choisit p impair, Théo gagne. Essayons donc de formaliser cette idée.

Théo va employer la stratégie suivante : si Anatole écrit un nombre divisible par p et ne gagne pas, Théo écrit un nombre divisible par p plus grand et gagne immédiatement. Si Anatole écrit un nombre non divisible par p, Théo écrit un nombre plus grand divisible par $p-1$ et valant 1 modulo p, qui existe par théorème des restes chinois.

Supposons qu'Anatole peut gagner lorsque Théo emploie cette stratégie. Il y a alors deux possibilités :

— Anatole n'écrit jamais d'entier divisible par p. Au k-ième tour, on a $s_k(s_1+2s_2+\cdots+ks_k) \equiv 2k(k+1) \pmod{p}$. Ainsi, cette quantité est divisible par p si et seulement si k ou $k+1$ l'est. Le premier k pour lequel la quantité est divisible par p est $p-1$ qui est pair. C'est donc après un tour de Théo, donc Théo gagne, contradiction.

— Anatole écrit un entier divisible par p au tour l. Comme Théo gagne au tour suivant si Anatole n'a pas gagné, cela veut dire qu'Anatole a gagné. Ainsi p divise $s_l(s_1+\cdots+ls_l) = (l-1)l + l = l^2$, donc $l \geqslant p$. Or via l'argument précédent, Théo aura déjà gagné au tour $p-1$, vu que $s_{p-1}(s_1 + 2s_2 + (p-1)s_{p-1}) \equiv 0 \pmod{p}$, ce qui est absurde.

Ainsi Théo gagne à tous les coups, c'est donc lui qui a une stratégie gagnante.

Solution de l'exercice 8

Montrons déjà la chose suivante : si a et b sont deux entiers entre eux non premiers entre eux, alors (a,b) est invisible de l'origine. En effet, en posant $d = PGCD(a,b)$, $(a/d, b/d)$ est sur le segment entre $(0,0)$ et (a,b), et différent de ces deux points. Notons que la réciproque est vraie si $(a,b) \neq (0,0)$, mais pas utile ici. Si (a,b) est invisible de l'origine, il existe $t \in]0,1[$ tel que ta et tb sont entiers. Quitte à échanger a et b, $a \neq 0$, donc t est rationnel : il est de la forme c/d avec c et d premiers entre eux. Or ca/d est entier, donc d divise a. Idem d divise b. De plus, $d \neq 1$, sinon c/d n'est pas dans $]0,1[$. Donc a et b ne sont pas premiers entre eux.

On souhaite donc que les points d'un carré de la forme $[\![M, \ldots, M+n-1]\!] \times [\![M', \ldots, M'+n-1]\!]$ soient invisibles de l'origine. Il faut donc pour chaque $(i,j) \in \{0,\ldots,n-1\}^2$, que $M+i$ et $M'+j$ soient divisibles par un même nombre premier. On se donne donc $(p_{i,j})_{0 \leqslant i,j \leqslant n-1}$ n^2 nombres premiers deux à deux distincts, et on considère M, M' vérifiant $M \equiv -i \pmod{p_{i,j}}$ et $M' \equiv -j \pmod{p_{i,j}}$ pour tout $(i,j) \in \{0,\ldots,n-1\}^2$ qui existe par lemme chinois. Ainsi, pour chaque $(i,j) \in \{0,\ldots,n-1\}^2$, $M+i$ et $M'+j$ sont divisibles par $p_{i,j}$, donc non premiers entre eux. Le carré est donc bien constitués de n^2 points tous invisibles de l'orgine.

Solution de l'exercice 9

On commence par montrer qu'il existe un sous-ensemble A de $\mathbb{N}^\star$ de cardinal 2022 tel que pour tout sous-ensemble B de A, la moyenne arithmétique des éléments de B est entière.

Pour cela, on prend 2022 entiers $\{a_1, \ldots, a_{2022}\}$. Pour tout sous-ensemble B, on note $m(B)$ la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B. Alors $|B| \mid m(B)$ est entier pour tout B, avec $|B| \leqslant 2022$, de sorte que l'ensemble $\{2022!a_1, 2022!a_2, \ldots, 2022!a_{2022}\}$ convient. On note $A' = \{b_1, \ldots, b_{2022}\}$ les entiers obtenus.

Maintenant, on veut multiplier chaque entier par une nouvelle constante de sorte que les $m(B)$ (où $m(B)$ désigne la moyenne arithmétique des éléments du sous-ensemble B de

A') soient des puissances parfaites. Notons que seul un nombre fini de nombres premiers apparaissent dans $m(B)$: on les note $p_1, \dots, p_k$.

Pour cela, pour tout B on écrit $m(B) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i(B)}$. On veut multiplier tous les entiers par un nombre $K = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\beta_i}$, de sorte que la moyenne devienne $Km(B) = \prod_{i=1}^{k} p_i^{\alpha_i(B)+\beta_i}$.

On va utiliser les restes chinois pour cela, et le plus simple est que $Km(B)$ soit de la forme $a^{p(B)}$ avec $p(B)$ un nombre premier, différent pour chaque B. On se donne donc $2^{2022} - 1$ nombres premiers tous supérieux ou égaux aux $\alpha_i(B)$, et pour tout i dans $\{1, \dots, k\}$, on choisit β_i vérifiant pour tout B :

$$\beta_i \equiv -\alpha_i(B) \mod p(B)$$

L'ensemble $\{Kb_1, \dots, Kb_{2022}\}$ vérifie alors la propriété voulue.

Solution de l'exercice 10

On montre que oui, on utilise l'algorithme glouton.

On commence avec $a_1 = 1$. On suppose construits les k premiers termes et on note x le plus petit entier qui n'apparaît pas dans la suite. On construit a_{k+1} de sorte à pouvoir faire apparaître $a_{k+2} = x$.

Etablissons le cahier des charges en posant $\prod_{i=1}^{k} a_i = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{kb_i}$ et $x = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{c_i}$ (en prenant ℓ assez grand). Donc on veut $a_{k+1} = \prod_{i=1}^{\ell} p_i^{d_i}$ de sorte que pour tout i, on a

$$\begin{aligned} d_i + kb_i &\equiv 0 \mod k+1 \\ d_i + kb_i + c_i &\equiv 0 \mod k+2 \end{aligned}$$

Encore une fois, ce système admet une solution suffisamment grande avec le théorème des restes chinois (de sorte à ce que $d_1 > V_{p_1}(a_u)$ pour $1 \leqslant u \leqslant k$.

On peut donc caser x, ce qui achève la récurrence et conclut.

Solution de l'exercice 11

Soit n un entier strictement positif et p un facteur premier de $f(n)$. On suppose que p ne divise pas n. Essayons de construire un entier N tel que $f(N) = N$, p divise N et $N \equiv 1 \pmod{n}$. Autant il est facile de s'assurer que les deux dernière conditions sont vraies car p et n sont premiers entre eux, autant la première est plus délicate.

Pour cela on va aussi construire M premier avec N, et essayer de forcer via la condition $f(N) = N$. Ainsi on se donne $(p_{i,j})_{0 \leqslant i \leqslant 2023; 1 \leqslant j \leqslant 2023}$ des nombres premiers deux à deux distincts plus grands strictement que 2022 que p et que n. On prend $N \equiv -j \pmod{p_{i,j}}$ pour tout i, j et $N \equiv 1 \pmod{n}$ et $N \equiv 0 \pmod{p}$ ce qui est possible par lemme chinois. En particulier, pour tout i, j $p_{i,j}$ divise $N + j$, donc est premier avec N. On prend M tel que $M \equiv -i \pmod{p_{i,j}}$ pour tout i, j et $M \equiv 1 \pmod{N}$ ce qui existe par lemme chinois.

Si $f(N) \neq N$, il existe j tel que $1 \leqslant j \leqslant 2023$ tel que $f(N) = N + j$. Or il existe i tel que $0 \leqslant i \leqslant 2023$ tel que $f(M) = M + i$, donc $p_{i,j}$ divise $f(M)$ et $f(N)$. Or $M \equiv 1 \pmod{N}$, donc M et N sont premiers entre eux, mais $f(M)$ et $f(N)$ ne le sont pas contradicition. Ainsi $f(N) = N$.

Notons que p divise $f(n)$ et $f(N) = N$, donc ils ne sont pas premiers entre eux. Or N et n le sont, on aboutit bel et bien à une contradiction.

Ainsi l'énoncé est prouvé.

Solution de l'exercice 12

Déjà notons que pour évite que $a+i$ divise $a+j$ si $i \neq j$ sont deux entiers dans $\{0,\dots,2023\}$, il suffit de prendre $a > 2023$: en effet, si $i < j$, $a+i < a+j < 2a < 2(a+i)$. Quitte à prendre a et b grands dans nos constructions, on supposera ceci vérifié. Et quitte à prendre b plus grand que $a+2024$ dans nos constructions, il reste à construire a, b tels que $a+i$ ne divise jamais $b+j$ si $0 \leqslant i, j \leqslant 2023$.

Pour cela, donnons nous $(p_{i,j})_{0\leqslant i\leqslant 2023; 0\leqslant j\leqslant 2}$ une famille de nombres premiers supérieurs à 2024. On prend a grand tel que $a \equiv -i \pmod{p_{i,j}}$ pour tout (i,j).

On pose alors $a(a+1)\dots(a+2023) = A \prod_{0\leqslant i\leqslant 2022, 0\leqslant i\leqslant 1} p_{i,j}^{a_{i,j}}$, où A est premier avec chaque $p_{i,j}$.

Afin d'avoir la divisibilité, prenons b grand tel que $b \equiv 0 \pmod{A}$, $b \equiv 0 \pmod{p_{i,0}^{a_{i,0}}}$ et $b \equiv -1 \pmod{p_{i,1}^{a_{i,1}}}$ pour tout i.

On a alors que $a(a+1)\dots(a+2023) = A \prod_{0\leqslant i\leqslant 2022, 0\leqslant i\leqslant 1} p_{i,j}^{a_{i,j}}$ divise $b(b+1)$, donc on a bien la condition de divisibilité de l'énoncé.

Il reste juste à vérifier qu'on ne peut pas avoir $a+i$ divise $b+k$ pour $0 \leqslant i,k \leqslant 2023$. Supposons qu'il existe i,k tel que $a+i$ divise $b+k$. Alors comme $p_{i,0}$ divise $a+i$, il divise $b+k$. Or il divise b, donc il divise k. Comme $p_{i,0}$ vaut au moins 2024, $k=0$, donc $a+i$ divise b. En particulier, comme $p_{i,1}$ divise $a+i$, il divise b. Or il divise aussi $b+1$, donc il divise 1 ce qui est absurde. On a aboutit à une contradiction, ainsi toutes les conditions de l'énoncés sont vérifiées : il existe de tels a, b.

Solution de l'exercice 13

Supposons que l'équation $P(y) \equiv a \pmod{p}$ admet une solution, qu'on note b, telle que $P'(b) \not\equiv 0 \pmod{p}$. Montrons par récurrence sur $n \in \mathbb{N}$ qu'il existe un entier y_n tel que $y_n \equiv b \pmod{p}$ et $P(y_n) \equiv a \pmod{p^{n+1}}$.

Pour l'initialisation à $n=0$, il suffit de poser $y_0 = b$. Supposons l'hypothèse de récurrence vraie au rang n. On va poser $y_{n+1} = y_n + \alpha p^{n+1}$, et trouver une condition sur α pour que $P(y_{n+2}) \equiv a \pmod{p^{n+2}}$.

Pour cela, on va utiliser le fait suivant. Soit P un polynôme à coefficient entier et y et x deux entiers. Si $y = x + p^k\alpha$ avec $k \geqslant 1$ et α un entier, alors $P(y) \equiv P(x) + p^k\alpha P'(x) \pmod{p^{k+1}}$.

En effet posons $P = \sum_{j=0}^{d} a_j X^j$, on a :

$$\begin{aligned} P(y) &= \sum_{k=0}^{d} a_j (x+p^k\alpha)^j \\ &\equiv \sum_{k=0}^{d} a_j (x^j + j x^{j-1} p^k \alpha) \pmod{p^{k+1}} \\ &\equiv \sum_{k=0}^{d} a_j x^j + \alpha p^k \sum_{k=0}^{d} j x^{j-1} \pmod{p^{k+1}} \\ &\equiv P(x) + p^k \alpha P'(x) \pmod{p^{k+1}} \end{aligned}$$

En particulier, en appliquant cela pour $x = y_n$, $k = n+1$ et $y = y_{n+1}$, on a que $P(y_{n+1}) \equiv P(y_n) + p^{n+1}\alpha P'(y_n) \pmod{p^{n+2}}$. Comme $P(y_n) \equiv a \pmod{p^{n+1}}$, il existe un entier K tel que $P(y_n) = a + Kp^{n+1}$. Comme $y_n \equiv b \pmod{p}$, $P'(y_n) \equiv P'(b) \not\equiv 0 \pmod{p}$.

Ainsi $P(y_{n+1}) \equiv a + Kpn + 1 + p^{n+1}\alpha P'(b) \pmod{p^{n+2}}$. Il suffit de prendre α tel que $\alpha \equiv -KP'(b)^{-1} \pmod{p}$, pour avoir

$$P(y_{n+1}) \equiv P(y_n) + p^{n+1}(\alpha P'(b) + K) \equiv 0 \pmod{p^{n+2}}.$$

On a également $y_{n+2} \equiv y_{n+1} \equiv b \pmod{p}$, ce qui conclut la récurrence, et prouve le résultat voulu.

Solution de l'exercice 14

Soit p un diviseur premier de n, on obtient que le polynôme $X^3 + X - k$ a une racine quelque soit p. En particulier, modulo p l'application qui à x associe $x^3 + x$ est surjective, donc aussi injective par cardinal : c'est une bijection modulo p. Ainsi, comme $0^3 + 0 \equiv 0 \pmod{p}$, on sait que $\{x^3 + x \mid x \in \{1, \dots, p-1\}\}$ vu modulo p est $\{1, \dots, p-1\}$. Notons que cela est faux si $p = 2$, donc on supposera $p \geqslant 3$

En faisant le produit, $(p-1)! \equiv \prod_{x=1}^{p-1} x(x^2+1) \pmod{p}$, donc $\prod_{x=1}^{p-1}(x^2+1) \equiv 1 \pmod{p}$.

Or il est connu que $\prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}(X - a^2) = X^{\frac{p-1}{2}} - 1$. En effet, il y a $\dfrac{p-1}{2}$ résidus quadratiques modulo p, qui sont tous racines de $X^{\frac{p-1}{2}} - 1$ qui est unitaire, donc celui-ci se factorise en $\prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}(X - a^2)$ (car les a^2 modulo p sont distincts lorsque a varie entre 1 et $\frac{p-1}{2}$).

Or modulo p, $\prod_{a=1}^{\frac{p-1}{2}}(X-a^2) = \prod_{a=\frac{p+1}{2}}^{p-1}(X-a^2)$, donc modulo p, $\prod_{a=1}^{p-1}(X-a^2) = \left(X^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^2$. En évaluant en -1, $\prod_{a=1}^{p-1}(-1-a^2) \equiv \left((-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^2 \pmod{p}$, donc

$$1 \equiv \prod_{x=1}^{p-1}(x^2+1) \equiv (-1)^{p-1}\left((-1)^{\frac{p-1}{2}} - 1\right)^2 \pmod{p}$$

Or le terme de droite vaut 0 ou 4 modulo p, donc p divise -1 ou 3. Ainsi $p = 3$. On obtient alors que tout facteur premier de n vaut 3, donc n est une puissance de 3.

Réciproquement si $n = 1$ le résultat est clair, si $n = 3$, le polynôme $P(X) = X^3 + X$ est bien surjectif modulo 3 car $P(0) = 0, P(1) = 2$ et $P(2) = 1$ modulo 3. Ainsi, pour tout entier k, l'équation $P(a) \equiv k \pmod{3}$ a une solution, et celle-ci vérifie $P'(a) \equiv 3a^2 + 1 \equiv 1 \not\equiv 0 \pmod{3}$, donc par le lemme de Hensel, l'équation $P(x) \equiv k$ a une solution modulo 3^j pour tout $j \geqslant 1$: ainsi toute puissance de 3 est bien solution.

Les n solution sont donc exactement les puissances de 3.

4 Inégalités (Martin)

Un des enjeux majeurs des problèmes d'algèbre rencontrés aux Olympiades est d'être capable d'estimer des quantités et de comparer des quantités entre elles. Cela peut être explicité dans l'énoncé ("démontrer l'inégalité suivante") ou implicite, c'est-à-dire que la recherche de la solution amène à comparer des quantités. Les outils à notre disposition sont les suivants.

- Les inégalités classiques : inégalité des moyennes, Cauchy-Schwarz, réordonnement, convexité.

- l'inégalité triangulaire : $|x-y| \leqslant |x-z| + |z-y|$.
- $x - 1 < \lfloor x \rfloor \leqslant x$.
- Manipulations algébriques : télescopage, ajout/retrait d'une quantité, dans le cas d'une somme regroupe certains termes bien choisis de la somme entre eux.

Dans les problèmes d'Olympiades, la seule connaissance de ces inégalités ne suffit pas. La réussite d'un problème dépend souvent de la capacité à estimer une expression sans être "trop gourmand". Illustrons ce propos par un exemple :

Prenons $x \in [0,1]$. Pour estimer x^2, il y a plusieurs possibilités. On peut par exemple majorer x^2 par 1, mais on peut aussi majorer x^2 par x, ce qui est plus fin et permet de conserver de "l'information" (par exemple si les variables sont reliées par une hypothèse). Ainsi, en plus des inégalités classiques, il faut apprendre à détecter quelle majoration/minoration va être la plus précise pour le problème qui nous intéresse.

Un bon indicateur pour savoir si l'on est trop gourmand est le cas d'égalité de l'inégalité que vous chercher à estimer. Une fois que vous avez le cas d'égalité en tête, demandez-vous si l'inégalité que vous êtes en train d'appliquer conserve bien ce cas d'égalité. Si ce n'est pas le cas, c'est que vous êtes trop gourmand. Ainsi, inutile de minorer $x + 1/x$ par 2 si le cas d'égalité ne correspond pas à $x = 1$.

De plus, de nombreux problèmes demandant de déterminer les réels vérifiant une égalité sont en fait des inégalités cachées ! Dans ce cas, il faut appliquer des inégalités à nos réels et montrer que les réels vérifient en fait le cas d'égalité de l'inégalité que vous avez appliquée.

Enfin, il n'est pas rare qu'un argument combinatoire ou arithmétique soit nécessaire dans le problème. Il faut y être sensible.

Ces conseils abstraits trouvent leur illustration dans les exercices qui suivent (qui ne sont pas classés par ordre de difficulté).

Exercices

Exercice 1
(BXMO 2014) Soient a, b, c et d des entiers strictement positifs. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression :

$$S = \left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+d}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+c+d}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor$$

Exercice 2
(BXMO 2019) Soit $0 \leqslant a, b, c, d \leqslant 1$ des réels.

1) Montrer que

$$ab(a-b) + bc(b-c) + cd(c-d) + da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Exercice 3
(IMO 2023 P4) Soient $x_1, \ldots, x_{2023}$ des réels deux à deux distincts. On suppose que pour tout $1 \leqslant n \leqslant 2023$, le nombre

$$a_n = \sqrt{(x_1 + \ldots + x_n)\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right)}$$

est un entier. Montrer que $a_{2023} \geqslant 3034$.

Exercice 4
(British MO) Déterminer la plus grande valeur que peut prendre l'expression

$$x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2$$

pour $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

Exercice 5
(BXMO 2022) Soit n un nombre naturel, et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tel que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \leqslant a_0 + a_1 + \ldots + a_k$$

pour tout nombre réel $x \in [0, 1]$.

Exercice 6
(IMO SL 2019 A2)
Soient $u_1, \ldots, u_{2019}$ des réels satisfaisant

$$u_1 + \ldots + u_{2019} = 0 \quad \text{et} \quad u_1^2 + \ldots + u_{2019}^2 = 1$$

On note $a = \max(u_1, \ldots, u_{2019})$ et $b = \min(u_1, \ldots, u_{2019})$. Montrer que

$$ab \leqslant -\frac{1}{2019}$$

Exercice 7
(IMO 2007 P1) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$d_i = \max\{a_j, 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j, i \leqslant j \leqslant n\}$$

On pose $d = \max\{d_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
1) Montrer que pour tous $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ réels, on a

$$\max\{|x_i - a_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}$$

2) Montrer qu'existent des réels $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ tels qu'on ait égalité dans l'inégalité précédente.

Exercice 8
(TST belge 2010) Soient $a_1, a_2, \ldots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n ia_i\right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Exercice 9
(IMO SL 2017 A1) Soient $a_1, \ldots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs. On suppose que

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \ldots a_n = M$$

On suppose que $M > 1$. Montrer que le polynôme $M(1+X)^k - (X+a_1)\ldots(X+a_n)$ ne possède pas de racine strictement positive.

Exercice 10
(IMO SL 2015 A1) Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs telle que pour tout entier k :

$$a_{k+1} \geqslant \frac{k a_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$.

Exercice 11
(BXMO 2012) Déterminer tous les quadruplets (a, b, c, d) de réels strictement positifs vérifiant $abcd = 1$ et :

$$a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012} \quad \text{et} \quad 2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$$

Exercice 12
(IMO SL 2020 A3) Soient a, b, c, d des réels strictement positifs vérifiant $(a+c)(b+d) = ac + bd$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

Exercice 13
(IMO SL 2010 A3) Soient $x_1, \ldots, x_{100}$ des réels positifs vérifiant que $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leqslant 1$ pour tout $i \leqslant 100$ (avec la convention $x_{101} = x_1$ et $x_{102} = x_2$). Déterminer la valeur maximale que peut prendre

$$S = \sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}$$

Solutions

Exercice 1
(BXMO 2014) Soient a, b, c et d des entiers strictement positifs. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre l'expression :

$$S = \left\lfloor \frac{a+b+c}{d} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+b+d}{c} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{a+c+d}{b} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{b+c+d}{a} \right\rfloor$$

Solution de l'exercice 1
Avec des parties entières, il n'y a pas grand chose à faire : on applique l'inégalité $\lfloor x \rfloor > x - 1$ pour trouver, en réarrangeant les termes

$$S > \left(\frac{a}{b}+\frac{b}{a}\right)+\left(\frac{a}{c}+\frac{c}{a}\right)+\left(\frac{a}{d}+\frac{d}{a}\right)+\left(\frac{c}{b}+\frac{b}{c}\right)+\left(\frac{d}{b}+\frac{b}{d}\right)+\left(\frac{c}{d}+\frac{d}{c}\right)-4$$

et chaque terme entre parenthèse est minoré par 2 par IAG. On a donc $S > 8$, soit $S \geqslant 9$. En tatonnant, on trouve la construction $(5,5,5,4)$.

Exercice 2

(BXMO 2019) Soit $0 \leqslant a,b,c,d \leqslant 1$ des réels.

1) Montrer que

$$ab(a-b)+bc(b-c)+cd(c-d)+da(d-a) \leqslant \frac{8}{27}$$

2) Déterminer les cas d'égalité.

Solution de l'exercice 2

Il s'agit d'un exercice de factorisation.

1) L'idée est de rassembler ensemble les termes en a et c. Si on appelle S le membre de gauche de l'inégalité :

$$\begin{aligned} S &= a[b(a-b)+d(d-a)]+c[b(b-c)+d(c-d)] \\ &= a(b-d)(a-b-d)+c(d-b)(c-b-d) \\ &= (b-d)(c-a)(b+d-a-c) \end{aligned}$$

Sans perte de généralité, on peut supposer que $b+d \geqslant a+c, b \geqslant d$ et $c \geqslant a$. Alors par IAG

$$S \leqslant \left(\frac{b-d+c-a+b+d-c-a}{3}\right)^3 = \frac{8}{27}(b-a)^3 \leqslant \frac{8}{27}$$

2) On regarde le cas dégalité du raisonnement précédent. Il faut notamment que $b=1$ et $a=0$. Il faut ensuite pour l'IAG que $c-a=b-d$, soit $c+d=1$ et il faut $b+d-a-c=c-a$ soit $b+d=2c$. On déduit que le cas d'égalité est réalisé pour $(0,1,2/3,1/3)$ et ses variantes.

Exercice 3

(IMO 2023 P4) Soient $x_1,\ldots,x_{2023}$ des réels deux à deux distincts. On suppose que pour tout $1 \leqslant n \leqslant 2023$, le nombre

$$a_n = \sqrt{(x_1+\ldots+x_n)\left(\frac{1}{x_1}+\ldots+\frac{1}{x_n}\right)}$$

est un entier. Montrer que $a_{2023} \geqslant 3034$.

Solution de l'exercice 3

On intuite que l'on va prouver par récurrence que $a_{2n+1} \geqslant 3n+1$ pour tout n. Pour cela, il suffit de montrer que $a_{2n+1} \geqslant a_{2n-1}+3$ pour tout entier $n \geqslant 1$. On propose deux façons de procéder. Dans tous les cas, l'idée importante est de traduire l'hypothèse "les a_n sont entiers" par "si $a_{n+1} > a_n+1$ alors $a_{n+1} \geqslant 2$".

Méthode 1 : on montre directement l'inégalité, solution de Rémi :

On exprime a_{2n+1} en fonction de a_{2n-1} et on utilise l'IAG/Cauchy-Schwarz pour minorer les termes parasites.

$$\begin{aligned}
a_{2n+1}^2 &= (x_1 + \ldots + x_{2n-1} + x_{2n} + x_{2n+1})\left(\tfrac{1}{x_1} + \ldots + \tfrac{1}{x_{2n-1}} + \tfrac{1}{x_{2n}} + \tfrac{1}{x_{2n+1}}\right) \\
&= a_{2n-1}^2 + (x_{2n} + x_{2n+1})\left(\tfrac{1}{x_1} + \ldots + \tfrac{1}{x_{2n-1}}\right) \\
&\quad + \left(\tfrac{1}{x_{2n}} + \tfrac{1}{x_{2n+1}}\right)(x_1 + \ldots + x_{2n-1}) + \underbrace{(x_{2n} + x_{2n+1})\left(\frac{1}{x_{2n}} + \frac{1}{x_{2n+1}}\right)}_{>4 \text{ par CS}} \\
&> a_{2n-1}^2 + 4 + 2\sqrt{\underbrace{(x_{2n} + x_{2n+1})\left(\frac{1}{x_{2n}} + \frac{1}{x_{2n+1}}\right)}_{>4 \text{ par CS}}\underbrace{\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_{2n-1}}\right)(x_1 + \ldots + x_{2n-1})}_{=a_{2n-1}^2}} \\
&> a_{2n-1}^2 + 4a_{2n-1} + 4
\end{aligned}$$

si bien que $a_{2n+1}^2 > (a_{2n-1} + 2)^2$ et $a_{2n+1} \geqslant a_{2n-1} + 3$ ce qui est l'inégalité voulue.

On notera que l'on inégalité stricte dans les inégalités de Cauchy-Schwarz car le cas d'égalité ne se produit que si $x_{2n} = x_{2n+1}$, ce qui est exclus par l'hypothèse.

Méthode 2 : on montre qu'on ne peut pas avoir $a_{n+1} = a_n + 1$ et $a_{n+2} = a_{n+1} + 1$ sans violer l'hypothèse que les réels sont deux à deux distincts

Commençons par comparer a_{n+1} et a_n (avec les mêmes intentions que dans la première méthode). On utilise pour cela l'inégalité des moyennes :

$$\begin{aligned}
a_{n+1}^2 &= (x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})\left(\tfrac{1}{x_1} + \ldots + \tfrac{1}{x_n} + \tfrac{1}{x_{n+1}}\right) \\
&= (x_1 + \ldots + x_n)\left(\tfrac{1}{x_1} + \ldots + \tfrac{1}{x_n}\right) + x_{n+1}\left(\tfrac{1}{x_1} + \ldots + \tfrac{1}{x_n}\right) + \tfrac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n) + 1 \\
&\geqslant a_n^2 + 2\sqrt{x_{n+1}\tfrac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n)\left(\tfrac{1}{x_1} + \ldots + \tfrac{1}{x_n}\right)} + 1 \\
&= (a_n + 1)^2
\end{aligned}$$

On déduit que $a_{n+1} \geqslant a_n + 1$. Il y a égalité ssi

$$x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n)$$

On souhaite montrer que $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$. Comme les a_i sont entiers, il suffit de montrer que $a_{n+2} > a_{n+1} + 1$ ou $a_{n+1} > a_n + 1$. Supposons donc par l'absurde que l'on a les deux égalités

$$x_{n+1}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}\right) = \frac{1}{x_{n+1}}(x_1 + \ldots + x_n)$$

$$x_{n+2}\left(\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} + \frac{1}{x_{n+1}}\right) = \frac{1}{x_{n+2}}(x_1 + \ldots + x_n + x_{n+1})$$

Posons $A_n = \frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n}$ et $B_n = x_1 + \ldots + x_n$. On a alors

$$x_{n+1} = \sqrt{\frac{B_n}{A_n}}$$

En injectant dans l'équation suivante, on trouve

$$x_{n+2}^2 = \frac{B_n + x_{n+1}}{A_n + \frac{1}{x_{n+1}}} = \frac{B_n}{A_n}\frac{\sqrt{A_nB_n}+1}{\sqrt{A_nB_n}+1} = x_{n+1}^2$$

ce qui amène $x_{n+2} = x_{n+1}$ ce qui est exclus par hypothèse.
On déduit que $a_{n+2} \geqslant a_n + 3$ pour tout n et on conclut par récurrence.

Exercice 4
(British MO) Déterminer la plus grande valeur que peut prendre l'expression

$$x^2y + y^2z + z^2x - xy^2 - yz^2 - zx^2$$

pour $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$.

Solution de l'exercice 4

Soit $S(x, y, z)$ l'expression à maximiser.
Notons que l'expression est homogène et le maximum est positif. Ainsi, si $x, y, z < 1$ tel que $S(x, y, z) > 0$, alors pour $k > 1$ tel que $kx, ky, kz \leqslant 1$, on a $S(kx, ky, kz) > S(x, y, z)$. On déduit que la valeur maximale de S est atteinte lorsque l'une des variables vaut 1 (sinon on a montré qu'on pouvait trouver un autre triplet atteignant une plus grande valeur). Quitte à permuter cycliquement, on peut donc supposer que $x = 1$. On doit alors maximiser

$$y + y^2z + z^2 - y^2 - yz^2 - z = (1 - y)(1 - z)(y - z)$$

D'après l'inégalité des moyennes, cette expression est inférieure à

$$(1 - z)\left(\frac{y - z + 1 - z}{2}\right)^2 = \frac{(1 - z)^3}{4} \leqslant \frac{1}{4}$$

On a égalité pour $y = 1/2$ et $z = 0$.

Exercice 5
(BXMO 2022) Soit n un nombre naturel, et soient $a_0, a_1, \ldots, a_n$ des nombres réels. Montrer qu'il existe $k \in \{0, 1, 2, \ldots, n\}$ tel que

$$a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n \leqslant a_0 + a_1 + \ldots + a_k$$

pour tout nombre réel $x \in [0, 1]$.

Solution de l'exercice 5
On procède par récurrence sur n.
Si $n = 0$, on a peut prendre $k = 0$. Traitons le cas $n = 1$ pour mieux voir ce qui se joue.
Pour $n = 1$, si $a_1 \leqslant 0$, alors $a_0 + xa_1 \leqslant a_0$ pour tout $x \in [0, 1]$. Si $a_1 \geqslant 0$, alors $a_0 + a_1x \leqslant a_0 + a_1$ pour tout $x \in [0, 1]$.

C'est en traitant le cas $n = 2$ que l'on peut formaliser la récurrence qui suit :

Soit $\mathcal{P}_n$: pour tous réels $a_0, \ldots, a_n$, il existe $k \in \{0, \ldots, n\}$ tel que pour tout x dans $[0, 1]$:

$$a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n \leqslant a_0 + a_1 + \ldots + a_k$$

Initialisation : $\mathcal{P}_0$ et $\mathcal{P}_1$ sont vraies.
Hérédité : On suppose que $\mathcal{P}_n$ est vraie pour $n \geqslant 2$ fixé.
Soient $a_0, \ldots, a_{n+1}$ des réels.
Par HR appliquée à $a_1, \ldots, a_{n+1}$, il existe $k \in \{1, \ldots, n+1\}$ tel que

$$a_1 + a_2 x + \ldots + a_{n+1} x^n \leqslant a_1 + \ldots + a_k \quad \forall\, x \in [0, 1]$$

Si $a_1 + \ldots + a_k \leqslant 0$,

$$a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} = a_0 + x(\underbrace{a_1 + \ldots + a_{n+1} x^n}_{\leqslant 0}) \leqslant a_0$$

Si $a_1 + \ldots + a_k > 0$,

$$\begin{aligned} a_0 + a_1 x + \ldots + a_{n+1} x^{n+1} &= a_0 + x(a_1 + \ldots + a_{n+1} x^n) \\ &\leqslant a_0 + x(a_1 + \ldots + a_k) \\ &\leqslant a_0 + a_1 + \ldots + a_k \end{aligned}$$

Ceci achève la récurrence !

Exercice 6
(IMO SL 2019 A2)
Soient $u_1, \ldots, u_{2019}$ des réels satisfaisant

$$u_1 + \ldots + u_{2019} = 0 \quad \text{et} \quad u_1^2 + \ldots + u_{2019}^2 = 1$$

On note $a = \max(u_1, \ldots, u_{2019})$ et $b = \min(u_1, \ldots, u_{2019})$. Montrer que

$$ab \leqslant -\frac{1}{2019}$$

Solution de l'exercice 6
Encore un exercice où il est une bonne idée de séparer les positifs des négatifs ! On peut d'ailleurs remarquer que $b < 0 < a$ puisqu'il y a au moins un réel non nul par la deuxième égalité, et donc un réel strictement positif (resp négaitf) parmi les u_i.

Quitte à renuméroter les u_i, on peut donc supposer que $u_1 \leqslant, u_k \leqslant 0$ et $0 < u_{k+1} \leqslant \ldots \leqslant u_{2019}$, avec $1 \leqslant k \leqslant 2019$. On s'attend donc à devoir raisonner avec les réels positifs d'un côté, dont notera $\sum_P u_i$ la somme, et les négatifs de l'autre, dont on note $\sum_N u_i$ la somme. On obtient par la première égalité que $\sum_P u_i = -\sum_N u_i$.

La deuxième chose est qu'il faut, dans le calcul, faire apparaître d'une façon ou d'une autre les nombres a et b. On n'a pas encore utilisé la deuxième égalité sur la somme des carrés. Majorer brutalement chaque terme par a^2 ou b^2 ne fonctionne pas, il faut donc être plus fin :

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_P u_i^2 + \sum_N u_i^2 \\ &\leqslant \sum_P u_i a + \sum_N (-u_i)(-b) \\ &= a(-\sum_N u_i) + (-b)\sum_P u_i \\ &\leqslant -abk + (-b)a(2019-k) \\ &= -2019ab \end{aligned}$$

ce qui est le résultat voulu.

Exercice 7
(IMO 2007 P1) Soient $a_1, \ldots, a_n$ des réels. Pour tout $1 \leqslant i \leqslant n$, on pose

$$d_i = \max\{a_j, 1 \leqslant j \leqslant i\} - \min\{a_j, i \leqslant j \leqslant n\}$$

On pose $d = \max\{d_i, 1 \leqslant i \leqslant n\}$.
1) Montrer que pour tous $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ réels, on a

$$\max\{|x_i - a_i|, 1 \leqslant i \leqslant n\} \geqslant \frac{d}{2}$$

2) Montrer qu'existent des réels $x_1 \leqslant \ldots \leqslant x_n$ tels qu'on ait égalité dans l'inégalité précédente.

Solution de l'exercice 7
1) Soit $1 \leqslant i \leqslant n$, il suffit de montrer que $d_i \leqslant 2\max\{|x_j - a_j|, 1 \leqslant j \leqslant n\}$.
Soit $p \leqslant i$ tel que $a_p = \max\{a_j, j \leqslant i\}$ et $r \geqslant i$ tel que $a_r = \min\{a_j, j \geqslant i\}$. Alors

$$d_i = a_p - a_r = a_p - x_p + \underbrace{x_p - x_r}_{\leqslant 0} + x_r - a_r \leqslant |a_p - x_r| + |a_r - x_r| \leqslant 2\max\{|x_j - a_j|\}$$

ce qui donne l'égalité.

2) On regarde le cas d'égalité de notre inégalité ci-dessus. Si $d_i = d$, il faudrait que la suite (x_i) satisfasse $a_p \geqslant x_p$ (pour que $a_p - x_p = |a_p - x_p|$), $x_p = x_r$ et $x_r \geqslant a_r$. De plus pour que $|a_p - x_p| = |a_r - x_r| = \max\{|a_j - x_j|\}$, il faut déjà que $|a_p - x_p| = |a_r - x_r|$, soit $x_p = x_r = \frac{a_p + a_r}{2}$.

Soit donc $M_i = \max\{a_j, j \leqslant i\}$ et $m_i = \min\{a_j, j \geqslant i\}$. Le raisonnement ci-dessus nous invite à poser $x_i = \frac{M_i + m_i}{2}$.

Montrons que ça marche. Tout d'abord, la suite (M_i) est croissante (le max est pris sur un ensemble plus grand), de même que la suite (m_i) (le min est pris sur un ensemble plus petit). On déduit que (x_i) est également croissante. De plus, si $1 \leqslant i \leqslant n$:

$$x_i - a_i \leqslant \frac{M_i + m_i}{2} - m_i = \frac{M_i - m_i}{2} = \frac{d_i}{2} \leqslant \frac{d}{2}$$

et

$$x_i - a_i \geqslant \frac{M_i + m_i}{2} - M_i = -\frac{d_i}{2} \geqslant \frac{d}{2}$$

de sorte que $|x_i - a_i| \leqslant \frac{d}{2}$. L'inégalité étant satisfaite pour tout i, on déduit que $\max\{|a_j - x_j|\} \leqslant d/2$. Comme la 1) garantit l'inégalité inverse, on a bien égalité.

Exercice 8
(TST belge 2010) Soient $a_1, a_2, \dots a_n$ des réels vérifiant $\sum_{i=1}^n a_i = 0$ et $\sum_{i=1}^n |a_i| = 1$. Montrer que

$$\left|\sum_{i=1}^n i a_i\right| \leqslant \frac{n-1}{2}$$

Solution de l'exercice 8
On peut imaginer au moins deux manières de résoudre cet exercice. À vous de choisir laquelle vous trouvez la plus naturelle ou la plus élégante.

Solution n°1 : échanger les signes somme

Si on utilise l'inégalité triangulaire à tours de bras, cela ne va pas donner quelque chose de concluant. En revanche, la forme de la somme donne envie de séparer les termes comme suit, puis d'échanger l'ordre des signe somme (on a le droit de le faire car le résultat ne dépend pas de l'ordre de sommation) :

$$\sum_{i=1}^n i a_i = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^i a_i = \sum_{j=1}^n \sum_{i=j}^n a_i$$

Par inégalité triangulaire on a donc :

$$\left|\sum_{i=1}^n i a_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=j}^n a_i\right|$$

Pour rajouter un peu de symétrie, on est tenté d'introduire un terme de la forme $|\sum (n-i)a_i|$. Cela est d'ailleurs bien commode puisque

$$|\sum (n-i)a_i| = |n\sum a_i - \sum i a_i| = |\sum i a_i|$$

Or ce terme vérifie de même que plus haut :

$$\left|\sum_{i=1}^n (n-i) a_i\right| \leqslant \sum_{j=1}^n \left|\sum_{i=1}^j a_i\right|$$

En résumé :

$$\begin{aligned}
2\left|\sum_{i=1}^{n} ia_i\right| &= \left|\sum_{i=1}^{n}(n-i)a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{n} ia_i\right| \\
&\leqslant \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=j}^{n} a_i\right| + \sum_{j=1}^{n}\left|\sum_{i=1}^{j} a_i\right| \\
&= \sum_{j=1}^{n}\left(\left|\sum_{i=j}^{n} a_i\right| + \left|\sum_{i=1}^{j} a_i\right|\right) \\
&\leqslant \sum_{j=2}^{n}\sum_{i=1}^{n}|a_i| \\
&= n-1
\end{aligned}$$

ce qui est l'inégalité voulue.

Solution n°2 : Séparer les positifs des négatifs

On peut utiliser une technique souvent utile quand on a affaire à des réels de signe quelconque qui est de les séparer en deux équipes : les positifs et les négatifs. Notez que ceux qui sont nuls peuvent rejoindre l'équipe qu'ils veulent, cela ne change rien. Ainsi, on note P et N deux ensemble d'indices (i.e. $P \subset \{1, ..., n\}$ et $N \subset \{1, .., n\}$) disjoints (i.e. $P \cap N = \emptyset$) et tels que tout indice est soit dans P soit dans N (i.e. $P \cup N = \{1, ..., n\}$), tels que

$$\forall i \in P, \quad a_i \geqslant 0,$$

et

$$\forall i \in N, \quad a_i \leqslant 0.$$

Maintenant, qu'on a séparé les réels selon leur signe, la seule information qui nous intéresse sur chacun d'entre eux est leur valeur absolue. C'est pour cela qu'il est commode d'introduire de nouvelles variables qui nous donnent la valeur ansolue de chaque réel qui nous intéresse. On pose, pour tout $i \in \{1, ..., n\}$,

$$b_i := |a_i|.$$

Nous pouvons donc réécrire les deux hypothèses de l'énoncé avec les nouvelles variables. Le fait que la somme des réels est nulle veut dire la même chose que la somme des positifs est égale à la somme des négatifs. Ainsi, la première hypothèse s'écrit comme :

$$\sum_{i\in P} b_i = \sum_{i\in N} b_i.$$

La deuxième hypothèse peut se réécrire comme :

$$\sum_{i\in P} b_i + \sum_{i\in N} b_i = 1.$$

Finalement, on peut résumer les deux hypothèses en une seule :

$$\sum_{i\in P} b_i = \sum_{i\in N} b_i = \frac{1}{2}.$$

On peut en particulier en déduire que P et N sont non vides.

Enfin, ce qu'on nous demande de démontrer peut se réécrire comme :

$$-\frac{n-1}{2} \leqslant \sum_{i\in P} ib_i - \sum_{i\in N} ib_i \leqslant \frac{n-1}{2}.$$

Démontrons l'inégalité à droite, il est clair que l'inégalité de gauche se démontre de la même manière.

Observons pour cela que

$$\sum_{i\in P} 2b_i = 1.$$

Ainsi, on peut voir les $2b_i$, pour $i \in P$ comme des poids d'une moyenne (ils sont tous positifs et leur somme fait 1). Ainsi, $2\sum_{i\in P} ib_i$ est une moyenne pondérée de $\{i, i \in P\}$. En particulier, elle est majorée par le plus grand des $i \in P$. Chose qu'on peut résumer par la ligne suivante :

$$2\sum_{i\in P} ib_i \leqslant \max P.$$

Autrement dit,

$$\sum_{i\in P} ib_i \leqslant \frac{\max P}{2} \leqslant \frac{n}{2},$$

car $\max P$ est évidemment majoré par n.

De même, $2\sum_{i\in N} ib_i$ est une moyenne pondérée de $\{i, i \in N\}$. En particulier, elle est minorée par le plus petit des $i \in N$, ce qu'on peut écrire comme suit :

$$2\sum_{i\in N} ib_i \geqslant \min N.$$

Autrement dit,

$$\sum_{i\in N} ib_i \geqslant \frac{\min N}{2} \geqslant \frac{1}{2},$$

car $\min N$ est évidemment majoré par 1.

On est maintenant à deux pas de conclure :

$$\sum_{i\in P} ib_i - \sum_{i\in N} ib_i \leqslant \frac{n}{2} - \frac{1}{2} = \frac{n-1}{2}.$$

Exercice 9

(IMO SL 2017 A1) Soient $a_1, \ldots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs. On suppose que

$$\tfrac{1}{a_1} + \ldots + \tfrac{1}{a_n} = k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \ldots a_n = M$$

On suppose que $M > 1$. Montrer que le polynôme $M(1+X)^k - (X+a_1)\ldots(X+a_n)$ ne possède pas de racine strictement positive.

Solution de l'exercice 9

Première solution : Il suffit de montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\dots(x+a_n)$. Or, d'après l'inégalité de Bernouilli : $(1+y)^a > 1+ya$ si $y > 0$:

$$(x+a_1)\dots(x+a_n) < a_1(x+1)^{1/a_1}a_2(1+x)^{1/a_2}\dots a_n(1+x)^{1/a_n} = M(1+x)^k$$

ce qui donne le résultat voulu.

Deuxième solution : La première solution est peut-être trop astucieuse, mais cet exercice peut être vu comme un deuxième exemple de l'application de l'IAG au niveau olympique.

Commençons par remarquer que 0 est bien une racine du polynôme. Nous allons donc montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\dots(x+a_n)$, ou ce qui revient au même qu'on a $a_1(1+x)^{1/a_1}\cdot a_2(1+x)^{1/a_2}\cdots a_n(1+x)^{1/a_n} > (x+a_1)\dots(x+a_n)$.

Il suffit donc de montrer que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_j(1+x)^{1/a_j} > (x+a_j)$ pour tout $x > 0$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique pondérée, on a

$$x + a_j = (x+1) + (a_j - 1) = a_j\left[\frac{1}{a_j}(x+1) + \frac{a_j-1}{a_j}1\right] \geqslant a_j(x+1)^{1/a_j},$$

avec égalité si et seulement si $x+1 = 1$, i.e. $x = 0$, ce qui est exclus. D'où, l'inégalité stricte.

Exercice 10

(IMO SL 2015 A1) Soit (a_k) une suite de réels strictement positifs telle que pour tout entier k :

$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$

Montrer que pour tout entier $n \geqslant 2$, $a_1 + a_2 + \dots + a_n \geqslant n$.

Solution de l'exercice 10

Un exercice plus difficile qu'il n'y paraît. Il faut bien entendu commencer par regarder l'énoncé pour des petites valeurs.

Pour $n = 2$, on a $a_2 \geqslant \dfrac{1}{a_1}$, si bien que par IAG la somme est bien $\geqslant 2$.

Pour $n = 3$, cela se complique. Une observation facile est que si $a_3 \geqslant 1$, alors $a_1 + a_2 + a_3 \geqslant 2 + a_3 \geqslant 3$ comme voulu. Cette remarque nous encourage à procéder par récurrence.

Ainsi, pour l'hérédité, si $a_n \geqslant 1$, on a déjà gagné. Dans le cas contraire, il est désormais nécessaire de mettre se salir les mains. En passant la relation à l'inverse, on a

$$\frac{k}{a_{k+1}} - \frac{k-1}{a_k} \leqslant a_k$$

En sommant et en télescopant (c'est magnifique !) et en utilisant que $\frac{1}{a_n} \geqslant 1$. :

$$a_1 + \dots + a_n \geqslant \frac{n-1}{a_n} + a_n \geqslant n - 2 + \frac{1}{a_n} + a_n \geqslant n$$

ce qui achève la récurrence.

Exercice 11

(BXMO 2012) Déterminer tous les quadruplets (a,b,c,d) de réels strictement positifs vérifiant $abcd = 1$ et :

$$a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012} \quad \text{et} \quad 2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$$

Solution de l'exercice 11

Face à un tel exercice, la stratégie est la suivante :

1. Déterminer des solutions simples et se douter qu'il n'y en a pas d'autres.
2. Réinterpréter le problème comme un problème d'inégalité, et imaginer que les réels vérifiant les hypothèses sont en fait des réels vérifiant le cas d'égalité d'une certaine inégalité.
3. Démontrer une inégalité dans le cas général et conclure.

Ici, on voit que les quadruplets vérifiant $a = d$ et $b = c$, couplé avec $abcd = 1$, c'est-à-dire les quadruplets de la forme $(t, 1/t, 1/t, t)$, sont bien solutions. On devine qu'il n'y en a pas d'autres.

On réinterprète le problème comme un problème d'inégalité : on suppose que le quadruplet (a, b, c, d) vérifie $a^{2012} + 2012b = 2012c + d^{2012}$ et $2012a + b^{2012} = c^{2012} + 2012d$ et on souhaite comparer $abcd$ avec 1.

Dans la suite, on suppose que $a \neq d$ et $b \neq c$. On réécrit les deux égalités comme $a^{2012} - d^{2012} = 2012(c - b)$ et $b^{2012} - c^{2012} = 2012(d - a)$.

En multipliant les deux égalités, on trouve

$$(a^{2012} - d^{2012})(b^{2012} - c^{2012}) = 2012^2(d - a)(c - b)$$

que l'on réécrit :

$$1 = \frac{a^{2011} + a^{2010}d + \ldots + ad^{2010} + d^{2011}}{2012} \cdot \frac{b^{2011} + b^{2010}c + \ldots + bc^{2010} + c^{2011}}{2012}$$

L'inégalité des moyennes donne alors,

$$\frac{a^{2011} + a^{2010}d + \ldots + ad^{2010} + d^{2011}}{2012} > (ad)^{2011/2}$$

L'inégalité est stricte car les variables ne sont pas égales. De même

$$\frac{b^{2011} + b^{2010}c + \ldots + bc^{2010} + c^{2011}}{2012} > (bc)^{2011/2}$$

Le produit est donc strictement plus grand que 1, contredisant l'égalité établie plus haut. Les solutions sotn donc bien celles annoncées.

Exercice 12

(IMO SL 2020 A3) Soient a, b, c, d des réels strictement positifs vérifiant $(a + c)(b + d) = ac + bd$. Déterminer la plus petite valeur que peut prendre

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a}$$

Solution de l'exercice 12

L'hypothèse suggère de mettre ensemble les termes en a et c d'une part, et les termes en b et d

d'autre part. On peut donc regrouper comme suit (et cela conserve une certaine symétrie en a et c et en b et d) :

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right)$$

Pour faire apparaître des facteurs ac et bd, on utilise l'IAG :

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)+\left(\frac{b}{c}+\frac{d}{a}\right)\geqslant 2\sqrt{\frac{ac}{bd}}+2\sqrt{\frac{bd}{ac}}$$

On voudrait alors utiliser l'IAG à nouveau en reconnaissant un terme de la forme $x+1/x$. Mais cela est très gourmand : on n'a pas encore utilisé l'hypothèse de l'énoncé et un petit raisonnement montre qu'il n'existe pas de réels a,b,c,d vérifiant $ac=bd$ et $(a+c)(b+d)=ac+bd$. En revanche, on peut tout de même poser $x=\sqrt{ac/bd}$ et déterminer la plus petite valeur que peut prendre $x+1/x$. La fonction en x étant convexe, il suffit de déterminer l'ensemble des valeurs que peut prendre x pour pouvoir minorer f.

Or d'après IAG et l'hypothèse

$$ac+bd=(a+c)(b+d)\geqslant 2\sqrt{ac}\cdot 2\sqrt{bd}\geqslant 4\sqrt{acbd}$$

En divisant des deux côtés par $\sqrt{acbd}$, on obtient que $x+\dfrac{1}{x}\geqslant 4$. Ainsi, la somme est toujours supérieure ou égale à 8.

Pour vérifier que la valeur est bien atteignable, on utilise les cas d'égalité établis précédemment. On voit donc qu'il faut $a=c$ et $b=d$. Injecté dans l'hypothèse, cela donne $4ab=a^2+b^2$. On déduit une équation quadratique en a/b, qui donne pour solution $a/b=2\pm\sqrt{3}$. La valeur 8 est donc atteinte par exemple pour $b=d=1$ et $a=c=2+\sqrt{3}$.

Exercice 13

(IMO SL 2010 A3) Soient $x_1,\dots,x_{100}$ des réels positifs vérifiant que $x_i+x_{i+1}+x_{i+2}\leqslant 1$ pour tout $i\leqslant 100$ (avec la convention $x_{101}=x_1$ et $x_{102}=x_2$). Déterminer la valeur maximale que peut prendre

$$S=\sum_{i=1}^{100}x_ix_{i+2}$$

Solution de l'exercice 13

L'idée ici est de regarder deux termes consécutifs de cette somme et d'essayer de les connecter à l'aide de l'hypothèse :

$$x_ix_{i+2}+x_{i+1}x_{i+3}\leqslant(1-x_{i+1}-x_{i+2})x_{i+2}+x_{i+1}(1-x_{i+1}-x_{i+2})=(x_{i+1}+x_{i+2})(1-(x_{i+1}+x_{i+2}))\leqslant\frac{1}{4}$$

en utilisant l'inégalité $x(1-x)\leqslant 1/4$ pour tout $x\in[0,1]$, ce qui est le cas pour $x_{i+1}+x_{i+2}$. Il reste à découper la somme en paquet de quatre :

$$S=\sum_{k=1}^{50}(x_{2k-1}x_{2k+1}+x_{2k}x_{2k+2})\leqslant\sum_{k=1}^{50}\frac{1}{4}=\frac{25}{2}$$

Il reste à montrer que cette valeur peut être atteinte. Pour cela, on regarde le cas d'égalité des inégalités que l'on a utilisées. Notamment, pour que les inégalités utilisées soient des égalités, il faut $x_{2k} + x_{2k+1} = \frac{1}{2}$. D'autre part, au moins l'un des deux termes x_{2k-1} et x_{2k+2} doit valoir $1/2$ pour vérifier $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} = 1$. On aboutit alors à la construction $x_{2k} = 0$ et $x_{2k+1} = 1/2$ pour tout k, dont on vérifie qu'elle permet d'atteindre la valeur maximale.

5 LTE et Zsigmondy (Pierre-Marie)

Éléments de cours

On trouvera les démonstrations de ces élements de cours à l'adresse suivante : https://maths-olympiques.fr/wp-content/uploads/2017/09/arith_lte.pdf.

Théorème 1 (Lemme d'extraction d'exposant, dit LTE)**.**

Soit p un nombre premier, x et y des entiers premiers avec p.

A) Cas $p \neq 2$:
   (i) Si $p \mid x - y$ alors $v_p(x^n - y^n) = v_p(x - y) + v_p(n)$
   (ii) Si $p \mid x + y$ et n est impair alors $v_p(x^n + y^n) = v_p(x + y) + v_p(n)$

B) Cas $p = 2$:
   (i) Si $2 \mid x - y$ et n est pair alors $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(x + y) + v_2(n) - 1$.
   (ii) Si $2 \mid x - y$ et n est impair alors $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y)$.
   (iii) Si $4 \mid x - y$ alors $v_2(x^n - y^n) = v_2(x - y) + v_2(n)$.

Théorème 2 (Théorème de Zsigmondy)**.**

Soient $x > y > 0$ des entiers premiers entre eux. Soit $u_k = x^k - y^k$ et $v_k = x^k + y^k$ pour $k \geqslant 1$.
On appelle facteur premier primitif d'un terme s_n un nombre premier p qui divise s_n mais aucun terme précédent de la suite s.

A) À l'exception des cas
   — $n = 2$ et $x + y$ est une puissance de 2,
   — $n = 6, x = 2, y = 1$,

   tout u_n admet un facteur premier primitif.

B) À l'exception du cas $n = 3, x = 2, y = 1$, tout v_n admet un facteur premier primitif.

Exercices

Exercice 1
Trouver la valuation...

(i) 3-adique de $A = 2^{27} + 1$.

(ii) 7-adique de $B = 161^{14} - 112^{14}$.

(iii) 2-adique de $C = 7^{20} + 1$.

(iv) 2-adique de $D = 17^{48} - 5^{48}$

Solution de l'exercice 1

(i) On peut appliquer directement le LTE : $v_3(A) = v_3(2+1) + v_3(27) = 4$.

(ii) Attention, $161 = 7 \cdot 23$ et $112 = 7 \cdot 16$, donc on doit tout d'abord extraire les facteurs 7 avant d'appliquer LTE : $v_7(B) = v_7(7^{14}) + v_7(23^14 - 16^14) = 14 + v_7(23 - 16) + v_7(14) = 16$.

(iii) Argh, LTE ne couvre pas ce cas. Mais en fait, on constate que $C \equiv 2$ modulo 4 donc la valuation vaut 1.

(iv) On applique LTE : $v_2(D) = v_2(17-5) + v_2(17+5) + v_2(48) - 1 = 2 + 1 + 4 - 1 = 6$.

Exercice 2
Trouver le plus grand k tel que 1991^k divise $A = 1990^{1991^{1992}} + 1991^{1990^{1992}} + 1992^{1991^{1990}}$.

Solution de l'exercice 2
On souhaiterait utiliser le LTE, mais le problème est que $1991 = 11 \cdot 181$. On va donc devoir évaluer les valuations 11 et 181-adiques de A. Ensuite, on imagine que le terme $1991^{1990^{1992}}$ ne va pas être limitant dans l'affaire, donc on va évaluer ces valuations pour $B = 1990^{1991^{1992}} + 1992^{1991^{1990}} = \left(1990^{1991^2}\right)^{1991^{1990}} + 1992^{1991^{1990}}$. Ainsi on doit vérifier que $1990^{1991^2} + 1992$ est divisible par 1991, ce qui est le cas modulo 1991 donc on peut appliquer le LTE à 11 et 181.

$$v_p(B) = v_p(1990^{1991^2} + 1992) + v_p(1991^{1990})$$

Reste à évaluer la valuation de $C = 1990^{1991^2} + 1992 = 1990^{1991^2} + 1 + 1991$, donc puisque $v_p(1990^{1991^2} + 1) = v_p(1990+1) + v_p(1991^2) = 3$, on en déduit que $v_p(C) = 1$, et $v_p(B) = 1991$, d'où pour finir les deux valuations $v_{11}(B) = V_{181}(B) = 1991$, et effectivement le terme de A en 1991 ne nous posera aucun problème, et nous en déduisons que le k maximal recherché sera 1991.

Exercice 3
Trouver tous les entiers positifs m, n tels que $3^m - 2^n = 1$.

Solution de l'exercice 3
Si $n = 0, 1$ on trouve la solution $(1, 1)$. Maintenant $n \geqslant 2$ et modulo 4 nous en déduisons que m est pair. Ainsi

$$(3^{m'} - 1)(3^{m'} + 1) = 3^{2m'} - 1 = 2^n$$

Donc $3^{m'} - 1 \mid 3^{m'} + 1$ et ainsi $3^{m'} - 1 \mid 2$. On en déduit que $m' = 1$ et on trouve la solution $(2, 3)$.
Autre solution avec Zsigmondy : on réécrit l'équation comme $2^n + 1 = 3^m$, et on élimine le cas $n = 1$ qui donne la solution $(1, 1)$. Or le terme de gauche admet toujours un facteur primitif différent de $3 = 2 + 1$, à l'exception du cas $n = 3$ qui donnera la solution $(2, 3)$.

Exercice 4
Trouver toutes les paires d'entiers naturels a, b tels que $b^a \mid a^b - 1$.

Solution de l'exercice 4
Prenons p un diviseur minimal premier de b. Alors on a $a^b \equiv 1$ modulo p donc l'ordre de a

divise b et $p-1$, ce qui impose qu'il vaut 1. Ainsi $p \mid a-1$. Dans le cas où p est impair, le LTE nous donne $av_p(b) = v_p(b^a) = v_p(a^b-1) = v_p(a-1) + v_p(b)$ donc $(a-1)v_p(b) = v_p(a-1)$ ce qui est absurde en ordre de grandeur. Ainsi reste le cas $p = 2$ ce qui signifie que b est pair et

$$av_2(b) = v_2(b^a) = v_2(a^b-1) = v_2(a-1) + v_2(a+1) + v_2(b) - 1$$

Si $v_2(a+1) = 1$ c'est absurde, sinon $v_2(a-1) = 1$ et on a un problème d'estimation qui nous donne que $a = 3$ et ça ne marche pas non plus.

Exercice 5
Trouver tous les $m, n \in \mathbb{N}$ tels que $3^m - 2^n \in \{-1, 5, 7\}$.

Solution de l'exercice 5

i) Cas $3^m - 2^n = -1$: on réécrit cela sous la forme $3^m = 2^n - 1$, ce qui nous permettra d'utiliser Zsigmondy. Le cas $n = 1$ nous donne la solution $(0, 1)$. Ensuite on sait que $2^2 - 1$ est divisible par 3 (on y trouve la solution $(1, 2)$ d'ailleurs), donc pour $n \geqslant 3$ et à l'exception éventuelle de $n = 6$, $2^n - 1$ admettra un facteur premier différent de 3, absurde. On vérifie que le cas $n = 6$ ne donne pas de solutions.

ii) Cas $3^m - 2^n = 5$: on réécrit cela sous la forme $3^m - 1 = 2^n + 4$ et on utilise Zsigmondy. On regarde $n = 0, 1, 2$ et on trouve la solution $(2, 2)$. Pour $n \geqslant 3$, en regardant modulo 4 on trouve que m est pair. On utilise alors le LTE dans le cas $p = 2$ et m pair, et $v_2(3^m - 1) = v_2(3-1) + v_2(3+1) + v_2(m) - 1 \geqslant 3$, absurde !

iii) Cas $3^m - 2^n = 7$: on réécrit cela sous la forme $3^m - 1 = 2^n + 8$. Les cas $m = 0, 1, 2$ nous donnent $(2, 1)$ comme solution. Pour $n \geqslant 3$, modulo 8 on obtient une contradiction.

En conclusion, les solutions sont $(0, 1), (1, 2), (2, 2)$ et $(2, 1)$

Exercice 6
Montrer que 2^n ne divise jamais $n!$, mais que pour une infinité d'entiers n, $2^{n-1} \mid n!$.

Solution de l'exercice 6
Évaluons la valuation 2-adique de $n!$: posons a l'entier vérifiant $2^a \leqslant n < 2^{a+1}$.

$$v_2(n!) = \sum_{k=1}^{a} \left\lceil \frac{n}{2^k} \right\rceil = \sum_{k=0}^{a} 2^{a-k} = 2^a - 1 < n$$

Ainsi 2^n ne divise jamais $n!$. En revanche, en choisissant $n = 2^m$ on a $v_2(n!) = 2^m - 1 = n - 1$, donc une infinité de n vérifiant $2^{n-1} \mid n!$.

Exercice 7
Montrer qu'il n'existe pas de solutions $x, y \in \mathbb{N}^*$ telles que $x(x+1) = 4y(y+1)$.

Solution de l'exercice 7
Avec quelques manipulations, on a $(x+1)^2 - x = (2y+1)^2$. Mais alors $x^2 < (2y+1)^2 < (x+1)^2$, absurde.

Exercice 8
Trouver tous les entiers positifs m, n tels que $7^m - 3 \cdot 2^n = 1$.

Solution de l'exercice 8
On regarde les cas $n = 0, 1$ qui donnent la solution $(1, 1)$. Ensuite modulo 4 on trouve que m est pair, donc on peut écrire

$$7^{2m'} - 1 = (7^{m'} - 1)(7^{m'} + 1) = 3 \cdot 2^n$$

On note que $m' \geqslant 1$ et on remarque alors que $6 \mid 7^{m'} - 1$ par factorisation. Ainsi avec $a \geqslant 1$, on a $\begin{cases} 7^{m'} - 1 &= 3 \cdot 2^a = 2^{a+2} - 2^a \\ 7^{m'} + 1 &= 2^b = 7^{m'} - 1 + 2 = 2^{a+2} - 2^a + 2 \end{cases}$ On en déduit que si $a \geqslant 2$ on a une contradiction car le terme de droite de la deuxième équation sera deux fois un nombre impair. Donc $a = 1$ et on obtient la solution $(2, 4)$.
Autre solution avec Zsigmondy : on réécrit cela sous la forme $7^m - 1 = 3 \cdot 2^n$, et on utilise Zsigmondy. Cependant, soyons prudents, car le cas d'exception est concerné ! Donc pour $m \geqslant 3$, $7^m - 1$ possède un facteur premier qui ne divise pas $7 - 1 = 6$, donc on se restreint au cas $n = 1$, qui nous donne la solution $(1, 1)$, et le cas $n = 2$ qui nous donne $(2, 4)$.

Exercice 9
Trouver tous les nombres premiers p et tous les entiers x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2p$ et x^{p-1} divise $(p-1)^x + 1$

Solution de l'exercice 9
(IMO 1999, P4) Si $p = 2$, $x = 1$ ou $x = 2$ conviennent. Si $p = 3$, $x = 1$ ou $x = 3$ conviennent. On suppose désormais que $p \geqslant 5$. Il est clair que $x = 1$ est solution pour tout p. Si $x > 1$, soit q le plus petit diviseur premier de x. Comme $(p-1)^x + 1$ est impair, q est impair. Ainsi, $(p-1)^x \equiv -1[q]$ et donc $(p-1)^{2x} \equiv 1[q]$. L'ordre de $p - 1$ modulo q divise $2x$ mais pas x, donc il est pair. D'après le petit théorème de Fermat, il divise également $q - 1$. Or les seuls diviseurs de $2x$ inférieurs à $q - 1$ sont 1 et 2, donc l'ordre vaut 2. On en déduit que $p - 1 \equiv -1[q]$ donc $p = q$. Ainsi, $p \mid x$. D'après le lemme LTE, on obtient finalement

$$0 < (p-1)v_p(x) \leqslant v_p(x) + 1$$

Il ne peut y avoir égalité que pour $p = 3$ et $v_p(x) = 1$, soit $x = 3$, ce qui convient bien $(3^2 \mid 2^3 + 1)$. Finalement, les solutions sont $(2, 2)$, $(3, 3)$ et $(p, 1)$ pour tout nombre premier p.

Exercice 10
Trouver tous les $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $2^a \cdot 3^b = 7^c - 1$.

Solution de l'exercice 10
D'après le théorème de Zsigmondy, comme $7^1 - 1 = 2 \cdot 3$, pour $c \geqslant 3$ (attention, $c = 2$ est un cas d'exception de Zsigmondy car $7 + 1 = 8 = 2^3$), $7^c - 1$ admet un diviseur premier différent de 2 et 3. Donc nécessairement, $c \leqslant 2$ et les solutions sont $(1, 1, 1)$ et $(4, 1, 2)$.

Exercice 11
Trouver les $a, b, c \in \mathbb{N}$ tels que $11^a + 3^b = c^2$.

Solution de l'exercice 11
En regardant modulo 3, on trouve que a est pair. Ensuite, en posant $a = 2a'$ et avec des manipulations algébriques,

$$3^b = (c - 11^{a'})(c + 11^{a'})$$

Ainsi par utilisation de la décomposition en facteurs premiers $c - 11^{a'} \mid c + 11^{a'}$ soit $c - 11^{a'} \mid 2 \cdot 11^{a'}$.
Mais comme $c - 11^{a'} = 3^{\beta}$, on obtient $\beta = 0$, donc $c - 11^{a'} = 1$ et $c + 11^{a'} = 3^{b}$.
On soustrait et on trouve alors $3^{b} - 1 = 2 \cdot 11^{a'}$. On regarde l'ordre de 3 modulo 11 et on trouve qu'il divise b et vaut 5, donc $3^{5b'} - 1 = 2 \cdot 11^{a'}$. Là nous pouvons utiliser Zsigmondy, car $3^{5} - 1 = 2 \cdot 11^{2}$. Si nous prenons un $b' \geqslant 2$, nous aurons un facteur premier dans le terme de gauche qui ne sera ni 2 ni 11, donc il n'y a pas d'autres solutions que $(4, 5, 122)$.

Exercice 12
Soient $b, m, n \in \mathbb{N}$ avec $b \neq 1$ et $m \neq n$. Montrer que si $b^{m} - 1$ et $b^{n} - 1$ ont les mêmes facteurs premiers, alors $b + 1$ est une puissance de 2.

Solution de l'exercice 12
Les conditions ne peuvent être réalisées que dans un cas particulier de Zsigmondy.

Exercice 13
Trouver les paires d'entiers naturels non nuls m, n tels que $mn \mid 3^{m} + 1$ et $mn \mid 3^{n} + 1$.

Solution de l'exercice 13
On suppose $m \geqslant n$ sans perte de généralité, et on commence par soustraire les deux quantités : on a

$$mn \mid 3^{n}(3^{m-n} - 1)$$

Or on a $mn \wedge 3 = 1$ donc

$$mn \mid 3^{m-n} - 1$$

En ajoutant la divisibilité avec $3^{n} + 1$ on trouve $mn \mid 3^{|m-2n|} + 1$.
En poursuivant ce procédé de division euclidienne, on aboutit sur

$$mn \mid 3^{d} \pm 1$$

où $d = pgcd(m, n)$ (le signe dépend du nombre de soustractions effectuées dans l'algorithme d'Euclide), donc si nous prenons p un diviseur premier minimal de d, nous avons $3^{2d} \equiv 1$ modulo p, donc l'ordre de 3 divise $p - 1$ et $2d$. Par choix de p, ceci impose que l'ordre vaut 1 ou 2, donc que $3 \equiv 1$ ou $9 \equiv 1$, ce qui n'est possible que si $p = 2$. Reste enfin à regarder nos divisibilités initiales modulo 4 et on aboutit à une contradiction : en effet, mn est divisible par 4 mais $3^{m} + 1 \equiv 2$ car m serait pair.

Exercice 14
Soient $a, b > 1$ impairs tels que $a + b = 2^{l}$. Trouver les $k \in \mathbb{N}^{*}$ tels que $k^{2} \mid a^{k} + b^{k}$.

Solution de l'exercice 14
Commençons par éliminer le cas $k = 1$ qui fonctionne. Déjà k est impair. Ensuite prenons p diviseur premier minimal de k (possible car on a éliminé le cas $k = 1$). Puisqu'il est nécessaire que a et b soient premiers entre eux, nous avons

$$\left(\frac{a}{b}\right)^{2k} \equiv 1$$

donc en posant ω l'ordre de $\frac{a}{b}$ modulo p, $\omega \mid 2k$ et $\omega \mid p - 1$ d'où $\omega = 1$ ou 2. On étudie chacun des cas et on aboutit à chaque fois à une contradiction.
Le seul k qui marche est 1.

Exercice 15
Montrer que pour tout $m, n \in \mathbb{N}$, $m!n!(m+n)!$ divise $(2m)!(2n)!$.

Solution de l'exercice 15
Utilisons la formule de Legendre : pour un nombre premier p,

$$v_p(m!n!(m+n)!) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\lceil \frac{m}{p^k} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{p^k} \right\rceil + \left\lceil \frac{m+n}{p^k} \right\rceil$$

$$v_p\Big((2m)!(2n)!\Big) = \sum_{k=0}^{+\infty} \left\lceil \frac{2m}{p^k} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n}{p^k} \right\rceil$$

Or en posant $m = qp^k + r$ et $n = sp^k + t$ on a

$$\left\lceil \frac{m}{p^k} \right\rceil + \left\lceil \frac{n}{p^k} \right\rceil + \left\lceil \frac{m+n}{p^k} \right\rceil = q + s + q + s + \left\lceil \frac{r+t}{p^k} \right\rceil$$

$$\left\lceil \frac{2m}{p^k} \right\rceil + \left\lceil \frac{2n}{p^k} \right\rceil = 2q + \left\lceil \frac{2r}{p^k} \right\rceil + 2s + \left\lceil \frac{2t}{p^k} \right\rceil$$

Mais puisque

$$\left\lceil \frac{r+t}{p^k} \right\rceil \leqslant \left\lceil \frac{2\max(r,t)}{p^k} \right\rceil \geqslant \left\lceil \frac{2r}{p^k} \right\rceil + \left\lceil \frac{2t}{p^k} \right\rceil$$

Donc on en déduit que $v_p(m!n!(m+n)!) \leqslant v_p\Big((2m)!(2n)!\Big)$ pour tout nombre premier p, donc que $m!n!(m+n)!$ divise $(2m)!(2n)!$.

Exercice 16
Montrer qu'il existe une infinité d'entiers a tels que $a^2 \mid 2^a + 3^a$.

Solution de l'exercice 16
On aurait envie d'utiliser le LTE... Et pour commencer, avec $a = 5$: on a effectivement $v_5(2^5 + 3^5) = 2$, donc $a_1 = 5$ marche.
Procédons par récurrence à partir de là : supposons avoir trouvé $a_1, ..., a_n$ des entiers vérifiant $a_k^2 \mid 2^{a_k} + 3^{a_k}$. Alors d'après Zsigmondy, il existe un diviseur premier (impair) de $2^{a_n} + 3^{a_n}$ qui ne divise aucun des termes précédents (donc en particulier premier avec tous les a_k), noté p. Nous avons

$$v_p(2^{pa_n} + 3^{pa_n}) = v_p(2^{a_n} + 3^{a_n}) + v_p(p) \geqslant 2$$

Donc $p^2 \mid 2^{pa_n} + 3^{pa_n}$, et par hypothèse de récurrence,

$$a_n^2 \mid 2^{a_n} + 3^{a_n} \mid (2^{a_n} + 3^{a_n})\left(2^{(p-1)a_n} - \cdots + 3^{(p-1)a_n}\right) = 2^{pa_n} + 3^{pa_n}$$

Ainsi $a_{n+1} = pa_n$ convient, et il existe donc par récurrence une infinité de a vérifiant notre propriété.

Exercice 17
Trouver tous les $n > 1$ tels que $n^2 \mid 2^n + 1$.

Solution de l'exercice 17 (P3 IMO 1990)
Déjà, n doit être impair, donc $2^n + 1$ doit être divisible par 3, d'où n doit être multiple de 3. Cherchons la valuation 3-adique de $2^n + 1$: $v_3(2^n + 1) = v_3(2 + 1) + v_3(n)$. D'autre part,

$v_3(n^2) = 2v_3(n)$ et par divisibilité nous devrions avoir $2v_3(n) \leqslant 1 + v_3(n)$, ce qui impose $v_3(n) = 1$ donc $n = 3m$ où m n'est pas multiple de 3.
Le problème devient alors équivalent à $m^2 \mid 8^m + 1$. Supposons $m \geqslant 2$, et soit p le plus petit diviseur premier de m (donc impair). Il vérifie $8^{2m} \equiv 1$ modulo p, donc l'ordre de 8 divise $p-1$ et $2m$. Mais m et $p-1$ n'ont aucun facteur commun vu les propriétés de p, et ainsi $p \mid 2$, donc $p = 2$, et p divise $8^2 - 1 = 63$, donc $p = 7$ (car $p \neq 3$). Cependant, $2^n + 1$ n'est jamais divisible par 7 d'après une étude des puissances modulo 7, donc $m = 1$, et nous en déduisons que le seul n qui nous convient est $n = 3$, qui est bien solution.

6 Équations fonctionnelles (Benoît)

Exercice 1
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tout $n \in \mathbb{N}$:

$$f^{(n)}(n) = n + 1$$

Solution de l'exercice 1
On a par récurrence $f^{\frac{n(n-1)}{2}}(1) = n$. On étudie alors la suite $x_k = f^{(k)}(1)$.
On suppose qu'il existe $x_k = x_l$ avec $k \neq l$. Alors $f(x_k) = f(x_l)$ et donc $x_{k+1} = x_{l+1}$. Par récurrence, $x_{k+n} = x_{l+n}$ et donc la suite est périodique à partir d'un certain rang de période $|k-l|$. La suite ne prend donc qu'un nombre fini de valeur. C'est absurde puisque $x_{\frac{n(n-1)}{2}} = n$.
On note $c = x_2$, on a également $x_{\frac{c(c-1)}{2}} = c$ avec $2 \neq \frac{c(c-1)}{2}$. Par ce qui précède c'est impossible.
Donc il n'existe pas de f solution.

Exercice 2
On se donne a et b, trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \to \mathbb{Q}$ telles que :

$$f(x + a + f(y)) = f(x + b) + y$$

Solution de l'exercice 2
On fixe x, on a la bijectivité de f.
On prend $x = -b$, ce qui donne $f(a - b + f(y)) = f(0) + y$. On pose d'autre part $y = f(0)$, on a :

$$f(x + a + f(f(0))) = f(x + b) + f(0) = f(a - b + f(f(x + b))$$

Alors par injectivité,

$$f(f(x)) = f(f(0)) + x$$

On peut maintenant poser $x = f(w) - b$ et on obtient

$$f(f(w) + f(y) + a - b) = w + y + f(f(0)) = f(f(w + y))$$

Par injectivité, on obtient :

$$f(w) + f(y) + a - b = f(w - y)$$

En posant, $g = f + (a - b)$, on obtient l'équation de Cauchy sur g dans $\mathbb{Q}$. Donc g est linéaire, en faisant la synthèse, on obtient : $f(x) = x + b - a$ ou $f(x) = -x + b - a$

Exercice 3
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y :

$$f(f(x)^2 + f(y)) = xf(x) + y$$

Solution de l'exercice 3
On considère $x = 0$, on a alors $f(f(0)^2 + f(y)) = y$ donc f est bijective.
Soit a l'antécédant de 0, on considère $x = a$, on a $f(f(y)) = y$, f est involutive !
En évaluant en $f(x)$ au lieu de x l'équation, le membre de droite ne change pas mais le membre de gauche si. Ainsi :

$$f(f(x)^2 + f(y)) = f(x^2 + f(y))$$

par injectivité : $x^2 = f(x)^2$. Cela signifie que pour tout x, on a $f(x) = x$ ou $f(x) = -x$. (Attention cela ne vaut pas dire que $f : x \longmapsto x$ ou $f : x \longmapsto -x$)
On suppose qu'il existe b et c deux réels tels que $f(b) = b$ et $f(c) = -c$, on a alors en prenant $x = b$ et $y = c$:

$$f(b^2 - c) = b^2 + c$$

on a alors $b^2 - c = b^2 + c$ ou $b^2 - c = -b^2 - c$, dans les deux cas, b ou c est nul. Ainsi on a $f : x \longmapsto x$ ou $f : x \longmapsto -x$. Ces fonctions conviennent à l'énoncé, ce sont donc les solutions.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(f(x) + x + y) = f(x + y) + yf(y)$$

Solution de l'exercice 4
On remarque que l'on a $f(f(x)+x+y)$ d'un côté et $f(x+y)$ de l'autre, donc on aimerait trouver un x pour lequel $f(x) = 0$. On cherche donc naturellement des valeurs de x et y pour lesquelles $f(x + y) + yf(y) = 0$. C'est le cas pour $x = 0$ et $y = -1$, cela donne précisément $f(f(0) - 1) = 0$.
On choisit donc ensuite $x = f(0) - 1$ pour obtenir $yf(y) = 0$ pour tout y, donc f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$.
Reste à montrer que $f(0) = 0$, en prenant $x = y = 0$, on a $f(f(0)) = f(0)$. Par l'absurde, si $f(0) \neq 0$, cela donne $f(0) = 0$, donc $f(0) = 0$.
Finalement, la fonction nulle est la seule solution possible, et on vérifie réciproquement qu'elle convient bien.

Exercice 5 (P1 BMO 2019)
Trouver toutes les fonctions définies sur les nombres premiers $f : \mathbb{P} \to \mathbb{P}$ telles que pour tous premiers p, q :

$$f(p)^{f(q)} + q^p = f(q)^{f(p)} + p^q$$

Solution de l'exercice 5
Si $f(p) = f(q)$, on a $q^p = p^q$ donc $q = p$, ainsi f est injective.
Soit p un premier impair tel que $f(p)$ est impair. En prenant $q = 2$, on a $f(p)^{f(2)} + 2^p = f(2)^{f(p)} + p^2$. Ainsi, $f(2)$ est pair et $f(2) = 2$.
En prenant $q = 2$, on a $f(p)^2 + 2^p = 2^{f(p)} + p^2$. Ainsi, $f(p)$ et p ont même valeur pour la fonction $g : x \to 2^x - x^2$. Or g strictement croissante pour $x > 4$ donc injective et $f(p) = p$ qui convient.

Exercice 6 (P1 IMO 2010)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour $x, y \in \mathbb{R}$, on a :

$$f(\lfloor x \rfloor y) = f(x)\lfloor f(y) \rfloor$$

Solution de l'exercice 6
Pour $x = y = 0$, on a :

$$f(0) = f(0)\lfloor f(0) \rfloor$$

Donc $f(0) = 0$ ou $\lfloor f(0) \rfloor = 1$.

On suppose $\lfloor f(0) \rfloor = 1$. Avec $y = 0$, on obtient $f(x) = f(0)$, donc f est constante. Comme $\lfloor f(0) \rfloor = 1$, on a $f = c$ avec $c \in [1, 2[$. L'équation initiale est alors bien vérifiée.

On suppose maintenant, $f(0) = 0$, en prenant $x = y = 1$, on a de même

$$f(1) = f(1)\lfloor f(1) \rfloor$$

et donc $f(1) = 0$ ou $\lfloor f(1) \rfloor = 1$.
Si $\lfloor f(1) \rfloor = 1$, avec $y = 1$ et $0 \leqslant x < 1$, on a :

$$f(0) = f(x)\lfloor f(1) \rfloor$$

d'où $f(x) = 0$. En prenant maintenant $x = 2$ et $y = \dfrac{1}{2}$, on obtient $f(1) = 0$. C'est absurde.
Donc $f(1) = 0$ et avec $x = 1$, on a $f = 0$ et l'équation initiale est bien vérifiée.

Les solutions sont donc les fonctions constantes $f = c$ avec $c = 0$ ou $c \in [1, 2[$.

7 Polynômes (Jean)

Exercice 1
Pour chacune des égalités suivantes la montrer en utilisant une méthode polynômiale.

1. Soit $n \in \mathbb{N}$. Montrer que
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
2. Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Montrer la formule de la capitaine
$$\forall k \in [\![1, n]\!], \quad k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}.$$
3. Soient $p, q \in \mathbb{N}$ et $n \in \mathbb{N}$ Montrer la formule de Vandermonde
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{p}{k}\binom{q}{n-k} = \binom{p+q}{n}.$$

4. Soient $n \in \mathbb{N}^*$ et $r \in [\![0, n]\!]$. Montrer la formule des capitaines généralisée

$$\forall k \in [\![r, n]\!], \quad \binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

Exercice 2
Soit p un nombre premier.

À l'aide du petit théorème de Fermat montrer que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$,

$$(X+1)^p = X^p + 1$$

En déduire que pour tout $k \in [\![1, p-1]\!]$, $p \mid \binom{p}{k}$.

Exercice 3
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. On dit que P est pair ssi $P(-X) = P(X)$, et on dit que P est impair ssi $P(-X) = -P(X)$.

1. Soit $P \in \mathbb{K}[X]$. Montrer que les prositions suivantes sont équivalentes
   (i) $P(-X) = P(X)$
   (ii) tous les coefficients d'ordre impair de P sont nuls
   (iii) il existe un polynôme Q tel que $P(X) = Q(X^2)$.

   Énoncer et démontrer un résultat similaire pour les polynômes impairs.
2. Montrer que tout polynôme s'écrit de manière unique comme somme d'un polynôme pair et d'un polynôme impair.

Exercice 4

— Montrer qu'un polynôme de degré 2 est irréductible ssi il n'admet pas de racine.
— Montrer qu'un polynôme de degré 3 est irréductible ssi il n'admet pas de racine.
— Donner un exemple de polynôme de $\mathbb{R}[X]$ de degré 4 n'admettant pas de racine et n'étant pas irréductible.

Exercice 5
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Montrer que pour tous entiers a et b, $a - b$ divise $P(a) - P(b)$ (pour la division dans $\mathbb{Z}$).

Exercice 6
Soit $P = \alpha \prod_{k=1}^{r} (X - \lambda_k)^{m_k} \in \mathbb{K}[X]$ un polynôme scindé.

Montrer que pour tout $z \in \mathbb{K}$ tel que $P(z) \neq 0$ on a

$$\frac{P'(z)}{P(z)} = \sum_{k=1}^{r} \frac{m_k}{z - \lambda_k}.$$

Exercice 7
Soient $Q_1, Q_2 \in \mathbb{K}[X]$ et $P \in \mathbb{K}[X]$ **non constant**.

Montrer que

$$Q_1(P) = Q_2(P) \Rightarrow Q_1 = Q_2.$$

Exercice 8
Pour chaque équation suivante déterminer l'ensemble des polynômes $P \in \mathbb{K}[X]$ satisfaisant la condition.

1. $P \circ P = P$
2. $P(X^2) = (X^2+1)P(X)$
3. $P(2X) = P(X) - 1$
4. $16P(X^2) = P(2X)^2$

Exercice 9
On définit l'application Δ par

$$\Delta : \begin{array}{c} \mathbb{K}[X] \to \mathbb{K}[X] \\ P \mapsto P(X+1) - P(X) \end{array}.$$

Déterminer pour tout entier n l'ensemble des polynômes P tels que $\Delta^n(P) = 0$.

Exercice 10
Soient $(n, m) \in \mathbb{N}^2$. Montrer que

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = X^{n \wedge m} - 1.$$

Exercice 11
Soit $n \in \mathbb{N}$ et $P \in \mathbb{R}[X]$ de degré inférieur ou égal à n tel que pour tout $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x) \geqslant 0$.
On pose $Q = P + P' + P'' + \cdots P^{(n)}$.
Montrer que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $Q(x) \geqslant 0$.

Exercice 12
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$.
Montrer que

$$(\forall x \in \mathbb{R},\ P(x) \geqslant 0) \Leftrightarrow \left(\exists (A, B) \in (\mathbb{R}[X])^2,\ P = A^2 + B^2\right).$$

Exercice 13
Soit $P \in \mathbb{K}[X]$.
Montrer que pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, $P - X$ divise $\underbrace{P \circ P \circ \cdots \circ P}_{n \text{ fois}} - X$.

Exercice 14
Existe-t-il un polynôme $P \in \mathbb{Z}[X]$ à coefficients entiers et $r \geqslant 3$ entiers $a_1, \ldots, a_r$ deux à deux distincts tels que $P(a_1) = a_2$, $P(a_2) = a_3$, …, $P(a_{r-1}) = a_r$ et $P(a_r) = a_1$?

Exercice 15
Soit $N \in \mathbb{N}$.
Discriminant le chat vous propose le jeu suivant :

— Vous choisissez une suite finie (de longueur de votre choix et secrète) **d'entiers naturels** $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

— À chaque tour du jeu, Discriminant vous donne un **entier** $\beta \in \mathbb{N}$ et vous lui répondez par la valeur de $\sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k$.

— Le jeu continue tant que Discriminant n'a pas deviné la suite d'entiers et tant que moins de N tours ont eu lieu.

— Si à la fin du jeu Discriminant a deviné la suite d'entiers il gagne, sinon il perd.

Si Discriminant gagne vous lui devez une boîte de paté pour chat.
Pour quelle valeurs de N acceptez-vous de jouer à ce jeu ?

Exercice 16
Soit $N \in \mathbb{N}$.

Discriminant le chat vous propose le jeu suivant :

— Vous choisissez une suite finie (de longueur de votre choix et secrète) **d'entiers relatifs** $(a_0, \dots, a_n) \in \mathbb{N}^{n+1}$.

— À chaque tour du jeu, Discriminant vous donne un **réel** $\beta \in \mathbb{N}$ et vous lui répondez par la valeur de $\sum_{k=0}^{n} a_k \beta^k$.

— Le jeu continue tant que Discriminant n'a pas deviné la suite d'entiers et tant que moins de N tours ont eu lieu.

— Si à la fin du jeu Discriminant a deviné la suite d'entiers il gagne, sinon il perd.

Si Discriminant gagne vous lui devez une boîte de paté pour chat.
Pour quelle valeurs de N acceptez-vous de jouer à ce jeu ?

Exercice 17
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ scindé.

Montrer que

$$\forall t \in \mathbb{R},\ P(t)P''(t) \leqslant (P'(t))^2.$$

Exercice 18
Soit $P \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(\mathbb{Q}) \subset \mathbb{Q}$. Montrer que $P \in \mathbb{Q}[X]$.

Exercice 19
Soient $n \in \mathbb{N}$ et P et Q deux polynômes distincts de réels de degrés n.

Montrer que

$$\deg(P^3 - Q^3) \geqslant 2n$$

et donner un exemple où l'égalité est atteinte.

Le résultat reste-t-il vrai si on considère des polynômes complexes ?

Exercice 20
Soit $P \in \mathbb{Z}[X]$ un polynôme à coefficients entiers.

Montrer que pour tout entier n il existe un entier K_n tel que

$$n \mid \sum_{k=0}^{N_n} P(k).$$

Exercice 21
Soient P et Q deux polynômes unitaires de degrés 2024 tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$, $P(x) \neq Q(x)$.
Montrer que pour tout $\alpha \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, il existe $x \in \mathbb{R}$ tel que $P(x-\alpha) = Q(x+\alpha)$.

Exercice 22
Soient P et Q deux polynômes à coefficients entiers, unitaires et non constants.
On suppose qu'il existe une infinité d'entiers n tels que $P(n)$ divise $Q(n)$ (dans $\mathbb{Z}$).
Montrer que P divise Q (dans $\mathbb{Z}[X]$).

Exercice 23
Déterminer tous les polynômes P tels que

$$P(X)^2 + 1 = P(X^2+1).$$

Solution de l'exercice 1
On a l'égalité polynômiale (formule du binôme)

$$(1+X)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k.$$

1. En évaluant en 1 on obtient
$$(1+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} 1^k$$
c'est à dire
$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = 2^n.$$
2. En dérivant on obtient
$$n(1+X)^{n-1} = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$
c'est à dire par la formule du binôme de nouveau
$$n\sum_{k=0}^{n-1} \binom{n-1}{k} X^k = \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} kX^{k-1}$$
c'est à dire après une renumérotation
$$\sum_{k=1}^{n} n\binom{n-1}{k-1} X^{k-1} = \sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} kX^{k-1}.$$
Par égalité des coefficients on obtient donc que pour tout k
$$\boxed{k\binom{n}{k} = n\binom{n-1}{k-1}}.$$

3. En effectuant le produit $(1+X)^p(1+X)^q$ puis en utilisant la formule du binôme on a d'un coté
$$\begin{aligned}(1+X)^p(1+X)^q &= (1+X)^{p+q}\\ &= \sum_{k=0}^{p+q}\binom{p+q}{k}X^k\end{aligned}$$
et de l'autre coté par la formule du binôme puis la définition du produit polynômial
$$\begin{aligned}(1+X)^p(1+X)^q &= \left(\sum_{i=0}^{p}\binom{p}{i}X^i\right)\left(\sum_{j=0}^{q}\binom{q}{j}X^j\right)\\ &= \sum_{k=0}^{p+q}\left(\sum_{i+j=k}\binom{p}{i}\binom{q}{j}\right)X^k.\end{aligned}$$
Par conséquent (par égalité) on a pour tout k,
$$\sum_{i+j=k}\binom{p}{i}\binom{q}{j} = \binom{p+q}{k}$$
ce qui est bien le résultat recherché.
4. On a pour tout entier r, par récurrence immédiate
$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= n(n-1)\cdots(n-r+1)(1+X)^{n-r}\\ &= r!\binom{n}{r}(1+X)^{n-r}\end{aligned}$$
et donc d'un coté par dérivation puis par formule du binôme (et changement d'indice)
$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= r!\binom{n}{r}\sum_{k=0}^{n-r}\binom{n-r}{k}X^k\\ &= r!\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}X^{k-r}\end{aligned}.$$
De l'autre coté par formule du binôme puis par dérivation
$$\begin{aligned}((1+X)^n)^{(r)} &= \left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k\right)^{(r)}\\ &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(X^k\right)^{(r)}\\ &= \sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}r!\binom{k}{r}X^{k-r}\\ &= r!\sum_{k=r}^{n}\binom{n}{k}\binom{k}{r}X^{k-r}\end{aligned}.$$

Par égalité on a donc bien pour tout k,

$$\binom{k}{r}\binom{n}{k} = \binom{n}{r}\binom{n-r}{k-r}.$$

Solution de l'exercice 2
On effectue tous les calculs dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}[X]$.

D'après le petit théorème de Fermat les polynômes $(X+1)^p$ et X^p+1 coïncident sur tout $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (car pour tout a, $(a+1)^p = a+1 = a^p+1$).

Donc le polynôme $Q = (X+1)^p - (X^p+1)$ admet au moins p racines. Or il est de degré inférieur ou égal à $p-1$.

Par rigidité il est donc nul et

$$(X+1)^p = X^p + 1$$

Par le binôme, comme $(X+1)^p = 1 + \sum_{k=1}^{p-1}\binom{n}{k}X^k + X^p$ on en déduit que dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, pour tout k entre 1 et $p-1$, $\binom{n}{k} = 0$ ce qui est le résultat recherché.

Solution de l'exercice 3

Solution de l'exercice 4

— Un sens est immédiat.

Dans l'autre sens, si un polynôme de degré 2 n'est pas irréductible alors il s'écrit comme le produit non trivial de deux polyômes.

Mais en regardant alors le degré (comme la seule façon d'écrire 2 comme somme de deux entiers non nuls est $2 = 1+1$) les deux polynômes sont de degrés et admettent donc une racine.

— Par le même raisonnement, comme la seule façon d'écrire 3 comme somme de deux entiers non nuls est $3 = 1+2$ (ou $3 = 2+1$) si un polynôme de degré 3 est produit non trivial de deux polynômes l'un des deux est de degré 1 donc admet une racine.

— Par exemple X^4+1 n'a pas de racine dans $\mathbb{R}$ et $X^4+1 = (X^2+\sqrt{2}X+1)(X^4-\sqrt{2}X+1)$.

Solution de l'exercice 5
Pour tout $k \in \mathbb{N}$ on a $a-b$ divise a^k-b^k (formule de Bernoulli). D'où avec $P = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k X^k$ où pour tout k, $\alpha_k \in \mathbb{Z}$ on a

$$P(a) - P(b) = \sum_{k=0}^{n}\alpha_k(a^k - b^k)$$

est divisible par $a-b$.

Solution de l'exercice 6
On a (règle de calcul de dérivées)

$$P' = \alpha\sum_{k=1}^{r} m_k(X-\lambda_k)^{m_k-1}\prod_{j\neq k}(X-\lambda_j)^{m_j}$$

d'où le résultat en divisant par P.

Solution de l'exercice 7
Si $\mathbb{K}$ est infini, alors tout polynôme non constant admet une image infinie (par principe des tiroirs et rigidité) d'où le résultat par rigidité.

Alternativement, et plus généralement, comme P est non constant on peut montrer que Q_1 et Q_2 ont même degré et coefficient dominant puis procéder par récurrence.

Solution de l'exercice 8
À chaque fois procéder par analyse-synthèse en considérant le degré et coefficient dominant. De plus toujours rechercher des solutions évidentes pour guider le raisonnement.

Enfin toutes les méthodes classiques d'équations fonctionnelles sont bien entendu pertinentes.

1. Les polynômes constants sont solutions.
   Si P est solution non constante alors $\deg(P)^2 = \deg(P)$ d'où $\deg(P) = 1$.
   De plus $P = aX + b$ est solution ssi $a(aX + b) + b = aX + b$ c'est à dire $a^2 = a$ et $ab + b = b$.
   Les solutions sont donc les polynômes constants et X.

2. Si P est une solution alors $2\deg(P) = 2 + \deg(P)$ d'où $\deg(P) = -\infty$ ou $\deg(P) = 2$.
   On peut alors continuer l'analyse, par exemple en remarquant que $P(1) = 2P(1)$ d'où $P(1) = 0$ et $2P(-1) = P(1)$ d'où $P(-1) = 0$, d'où $X^2 - 1 \mid P$, etc. ou tout simplement résoudre le système 3×3 sans réfléchir.
   Un polynôme $P = aX^2 + bX + c$ est solution ssi $aX^4 + bX^2 + c = aX^4 + bX^3 + (a+c)X^2 + bX + c$ c'est à dire ssi
   $$\begin{cases} a = a \\ b = 0 \\ a + c = 0 \\ b = 0 \\ c = c \end{cases}$$
   ou encore ssi $a = -c$ et $b = 0$.
   On obtient donc (après synthèse) que les solutions sont les
   $$\lambda(X^2 - 1)\,, \quad \lambda \in \mathbb{K}.$$

3. Aucun polynôme non constant n'est solution.
   De plus si P de degré $n \geqslant 1$ et de coefficient dominant $a_n \neq 0$ est solution alors $2^n a_n = a_n$.
   Il n'y a donc pas de solution.

4. Le polynôme nul est solution.
   De plus si P de degré $n \geqslant 0$ et de coefficient dominant $a_n \neq 0$ est solution alors $16a_n = (2^n a_n)^2$ d'où $n = 2$ et $a_n = 1$.
   Avec $P = aX^2 + bX + c$, on a P solution ssi
   $$16aX^4 + 16bX^2 + 16c = (4aX^2 + 2bX + c)^2$$

c'est à dire en développant

$$\begin{cases} 16a = 16a^2 \\ 0 = 16ab \\ 16b = 8ac + 4b^2 \\ 0 = 4bc \\ c = c^2 \end{cases}$$

c'est à dire $a = 1$, $b = 0$, $c = 0$. Donc (après synthèse) la seule solution non nulle est X^2.

Solution de l'exercice 9

Montrons que si P est non constant alors $\deg(\Delta(P)) = \deg(P) - 1$.

On en déduit par récurrence immédiate que $\Delta^n(P) = 0$ ssi P est de degré inférieur ou égal à $n - 1$.

Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$, $a_n \neq 0$ un polynôme non constant de degré $n \geqslant 1$.

Par la formule du binôme et somme double on a

$$\begin{aligned} \Delta(P) &= \sum_{k=0}^{n} a_k \sum_{j=0}^{k} \binom{k}{j} X^k - \sum_{j=0}^{n} a_j X^j \\ &= \sum_{j=0}^{n} \left(\sum_{k=j}^{n} \binom{k}{j} a_k - a_j \right) X^j \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \left(\sum_{k=j+1}^{n} \binom{n}{k} a_k \right) X^j \end{aligned}$$

d'où $\Delta(P)$ est de degré $n - 1$ et de coefficient dominant na_n.

Solution de l'exercice 10

On observe que si $n = qm + r$ on a alors

$$\begin{aligned} X^n - 1 &= X^{qm+r} - 1 \\ &= X^{qm+r} - X^r + X^r - 1 \\ &= X^r \left((X^m)^q - 1 \right) + X^r - 1 \end{aligned}$$

et comme $X^m - 1$ divise $(X^m)^q - 1$ (formule de Bernoulli) on en déduit que

$$(X^n - 1) \wedge (X^m - 1) = (X^m - 1) \wedge (X^r - 1).$$

Un algorithme d'Euclide simultané sur (n, m) et $((X^n - 1), (X^m - 1))$ permet de conclure.

Solution de l'exercice 11

Tout d'abord comme P est positif, il est de degré pair et de coefficient dominant positif.

Donc Q est aussi de degré pair et de coefficient dominant positif.

Il admet donc un minimum local, soit $x_0 \in \mathbb{R}$ tel que Q admet un minimum local en x_0. Alors $Q'(x_0) = 0$ (condition nécessaire d'extremum local).

De plus remarque que $Q' = Q - P$, donc $Q(x_0) = P(x_0) \geqslant 0$ et donc Q est positif.

Solution de l'exercice 12

Une somme de deux carrés étant toujours positive le sens réciproque est immédiat.

Pour le sens réciproque on procède de la manière suivante

— On montre que tout polynôme positif s'écrit comme produit de polynômes de degré 2 et de carrés de polynômes de degré 1.

— On montre que l'ensemble des polynômes s'écrivant comme somme de deux carrés est stable par produit

— On montre que les polynômes de degré 2 sans racine et les carrés de polynômes de degré 1 sont somme de deux carrés.

Ces trois points permettent alors de conclure.

Plus en détails

— Soit P un polynôme positif, par le premier point, par la caractérisation des polynômes irréductibles dans $\mathbb{R}[X]$, on peut écrire

$$P = \alpha \prod_{j=1}^{r} (X - \lambda_j)^{m_j} \prod_{k=1}^{d} (X^2 + b_k X + c_k)^{n_k}$$

où pour tout k, $(b_k)^2 - 4c_k < 0$, et les λ_j distincts.

Si par l'absurde il existe un j tel que m_j est impair alors au voisinage de λ_j, P change de signe ce qui est absurde.

Donc pour tout j, m_j est pair.

— Pour le deuxième point il s'agit de la remarque habituelle (cf nombre complexes)

$$(A^2 + B^2)(C^2 + D^2) = (AC - BD)^2 + (AD + BC)^2.$$

— Pour $\lambda \in \mathbb{R}$ on a

$$(X - \lambda)^2 = (X - \lambda)^2 + 0$$

et pour $b, c \in \mathbb{R}$ tels que $b^2 - 4c < 0$, or a la forme canonique

$$X^2 + bX + c = (X - (-b/2))^2 + \left(\sqrt{c - b^2/4}\right)^2.$$

Solution de l'exercice 13

On travaille modulo $P - X$.

Alors $P \equiv X[P - X]$ et donc pour tout k, $P^k \equiv X^k[P - X]$.

Pour tout polynôme $Q = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ on a $Q \circ P = \sum_{k=0}^{n} a_k P^k$ d'où

$$Q \circ P \equiv Q[P - X].$$

On conclut alors par récurrence sur n.

Solution de l'exercice 14

Il n'existe pas de telle configuration.

En effet pour tout $i \in [\![1, r]\!]$ comme $a_{i+1} - a_i \mid P(a_{i+1}) - P(a_i)$ (avec la notation $a_{r+1} = a_1$), on a en particulier $a_{i+1} - a_i | a_{i+2} - a_{i+1}$.

Donc en particulier, pour tout i, $|a_{i+1} - a_i| = |a_{i+2} - a_{i+1}|$. De plus si $a_{i+1} - a_i = -(i + 1 - a_{i+2})$ alors $a_i = a_{i+2}$, ce qui contredit le caractère distinct.

Donc on a que pour tout i, $a_{i+2} - a_{i+1} = a_{i+1} - a_i$.

Mais donc $a_r - a_1 = a_2 - a_1$ et $a_r - a_1 = (r - 1)(a_r - a_1)$ ce qui est absurde.

Solution de l'exercice 15
Discriminant peut toujours gagner en deux tours.

En effet avec M tel que tous les coefficients sont plus strictement petits que 10^M, la valeur en 10^M permet de conclure.

Pour estimer M il suffit de connaître l'évaluation en un point quelconque, par exemple en 1.

Solution de l'exercice 16
Discriminant peut toujours gagner en 1 tour.

Il suffit d'évaluer en un nombre algébrique.

Par exemple, pour être explicite, en le nombre de Liouville

$$\sum_{k=1}^{+\infty} \frac{1}{10^{k!}}$$

(méditer le lien avec l'exercice précédent).

Solution de l'exercice 17
Avec $P = \alpha \prod_{k=1}^{r}(X - \lambda_k)$ où les λ_k deux à deux distincts on a

$$\frac{P'}{P} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{X - \lambda_k}$$

d'où en dérivant

$$\frac{P''P - (P')^2}{P^2} = \sum_{k=1}^{r} \frac{1}{(X - \lambda_k)}$$

d'où le résultat (un carré est toujours positif).

Solution de l'exercice 18
Immédiat par interpolation de Lagrange.

Solution de l'exercice 19
On a

$$P^3 - Q^3 = (P - Q)(P^2 + PQ + Q^2)$$

et de plus le coefficient d'ordre n de $P^2 + PQ + Q^2$ est $a_n^2 + a_n b_n + b_n^2$ (où a_n et b_n les coefficients dominants respectifs de P et Q).

Dans $\mathbb{R}$ ce coefficient est non nul, par exemple car positif.

Dans $\mathbb{C}$ ce n'est plus forcément le cas, par exemple avec $P = X^n$ et $Q = e^{\frac{2i\pi}{3}} X^n$.

Solution de l'exercice 20
On remarque que pour tout entier k, $P(n + k) \equiv P(k)[n]$.

Donc, en regroupant les termes on a

$$\sum_{k=0}^{n^2-1} P(k) = \sum_{r=0}^{n-1} \sum_{q=0}^{n-1} P(qn + r)$$

qui est divisible par n.

Solution de l'exercice 21
Cela revient à montrer que $R = P(X-\alpha) - Q(X+\alpha)$ admet une racine. Posons $P = \sum a_k X^k$, $Q = \sum b_k X^k$.

Le coefficient de R de degré 2024 est 0, celui de degré 2023 est $a_{2023} - b_{2023} - 2 \times 2024\alpha$.

De plus si $a_{2023} \neq b_{2023}$ alors $P - Q$ a des racines.

D'où l'imparité de R.

Solution de l'exercice 22
Comme il s'agit de polynômes unitaires, on peut effectuer une division euclidienne dans $\mathbb{Z}[X]$, soient A et B dans $\mathbb{Z}[X]$ tels que

$$Q = AP + B$$

et $\deg(B) < \deg(P)$.

Alors il existe une inifinité d'entiers n tels que $P(n)$ divise $B(n) = A(n)P(n) - Q(n)$.

Comme $\deg(P) > \deg(B)$, à partir d'un certain rang on a de plus $|P(n)| > |B(n)|$.

Donc (comme l'intersection d'un ensemble infini et du complémentaire d'un ensemble borné est infini), il existe une infinité d'entiers n tels que $B(n) = 0$.

Et donc $B = 0$.

Solution de l'exercice 23
Posons $Q = X^2 + 1$.

On cherche alors tous les polynômes P tels que

$$P \circ Q = Q \circ P.$$

On remarque tout d'abord que l'ensemble des polynômes convenant est stable par composition et que pour tout $r \in \mathbb{N}$, $\underbrace{Q \circ \cdots \circ Q}_{r \text{ fois}}$ convient.

Montrons que ce sont les seuls.

De plus tout polynôme constant égal à c où $c = c^2 + 1$ convient.

Montrons que ce sont les seuls.

Tout d'abord on a $P(-X)^2 = P(X)^2$ donc $(P(X) - P(-X))(P(X) + P(-X)) = 0$.

Par intégrité P est pair ou P est impair.

— Si P est impair en particulier $P(0) = 0$.

En considérant la suite $u_{n+1} = Q(u_n)$ on obtient une infnité de points où P coïncide avec X.

— Si P est pair on peut écrire $P = R(X^2)$ et donc à décalage près $P = S(X^2 + 1)$ où $S(X) = R(X^2 - 1)$. Donc $P = S \circ Q$.

Alors $S \circ Q \circ Q = Q \circ S \circ Q$. Comme Q non constant $S \circ Q = Q \circ S$.

De plus si S non constant le degré est strictement plus petit d'où le résultat par descente infinie.

8 TD petites SL (Rémi)

L'objectif de ce TD est de passer en revue ce qui se fait de plus de plus récent en termes d'exercices "faciles" des shortlists d'IMO (exos 1, 2, 8), tout en révisant les notions abordées pendant les 3 premiers cours : ordre (exos 3, 5, 6), lemme chinois/exercices de construction (exos 4, 8), et LTE/Zsigmondy (exos 5, 6). Les exercices 1 à 5 ont été traités et corrigés en cours.

Exercices

Exercice 1 (IMO 2023, P1)
Trouver tous les nombres composés n ayant la propriété suivante : lorsque tous les diviseurs positifs de n ont été ordonnés pour former une liste $d_1, d_2, \ldots, d_k$ telle que : $1 = d_1 < d_2 < \ < d_k = n$, l'entier d_i divise la somme $d_{i+1} + d_{i+2}$ pour tout i tel que $1 \leqslant i \leqslant k-2$.

Exercice 2 (N1 2021)
Trouver tous les entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels il existe un couple (a, b) d'entiers strictement positifs tels que le cube d'aucun nombre premier ne divise $a^2 + b + 3$ et

$$\frac{ab + 3b + 8}{a^2 + b + 3} = n.$$

Exercice 3 (N1 2002)
Trouver le plus petit entier t tel qu'il existe des entiers strictement postifs $x_1, \ldots, x_t$, vérifiant $x_1^3 + \ldots + x_t^3 = 2002^{2002}$.

Exercice 4 (N2 2007)
Soient $n, b > 1$ des entiers. On suppose que pout tout entier $k > 1$, il existe un entier a_k tel que $k \mid b - a_k^n$. Montrer qu'il existe un entier A tel que $b = A^n$.

Exercice 5 (IMO 1999, P4)
Trouver tous les nombres premiers p et tous les entiers x tels que $1 \leqslant x \leqslant 2p$ et x^{p-1} divise $(p-1)^x + 1$

Exercice 6 (BxMO 2010, P4)
Trouver tous les quadruplets (a, b, p, n) d'entiers strictement positifs avec p premier tels que $a^3 + b^3 = p^n$

Exercice 7 (N2 2010)
Trouver tous les couples (n, m) d'entiers naturels vérifiant $m^2 + 2 \cdot 3^n = m(2^{n+1} - 1)$.

Exercice 8 (N1 2020)
Soit k un entier strictement positif. Montrer qu'il existe un nombre premier p tel que l'on puisse choisir des entiers distincts $a_1, \ldots, a_{k+3} \in [\![1, p-1]\!]$ de sorte que p divise $a_i a_{i+1} a_{i+2} a_{i+3} - i$ pour tout $i \in [\![1, k]\!]$

Solutions

Solution de l'exercice 1
Soient $p < q$ les deux plus petits diviseurs premiers de n (s'ils existent). On a donc $d_2 = p$, puis $d_3 = p^2$ ou $d_3 = q$. Si $d_3 = p^2$, alors comme $d_2 \mid d_3 + d_4$, $p \mid d_4$, mais si d_4 avait un diviseur premier autre que p celui-ci apparaîtrait dans les diviseurs de n avant d_4, absurde. Ainsi, $d_4 = p^3$ et par récurrence on montre ainsi que les diviseurs de n ne sont que des puissances de p, autrement dit $n = p^k$. Sinon on a $d_3 = q$, auquel cas $d_{k-1} = \frac{n}{p}$ et $d_{k-2} = \frac{n}{q}$, donc $\frac{n}{q} \mid \frac{n}{p} + n$, donc $\frac{n}{q} \mid \frac{n}{p}$, or $v_p\left(\frac{n}{q}\right) > v_p\left(\frac{n}{p}\right)$, d'où la contradiction.

Solution de l'exercice 2
L'idée est de travailler avec l'hypothèse inhabituelle de l'énoncé, à savoir que $a^2 + b + 3$ n'est pas divisible par un cube. Cela nous donne envie de faire apparaître des cubes divisibles par cette quantité, et cela tombe bien car on peut faire des combinaisons linéaires à partir de $a^2 + b + 3$ et $ab + 3b + 8$. Ici, on va plutôt présenter une approche différente, pour varier les techniques utilisées : on va travailler modulo $a^2 + b + 3$. On sait que $b \equiv -(a^2 + 3)$, donc on peut remplacer dans la relation de l'énoncé, ce qui donne $ab + 3b + 8 \equiv -a(a^2 + 3) - 3(a^2 + 3) + 8 \equiv -(a^3 + 3a^2 + 3a + 1) \equiv -(a + 1)^3[a^2 + b + 3]$.
On sait donc que $a^2 + b + 3 \mid (a + 1)^3$, ce qui implique que chaque diviseur premier p de $a^2 + b + 3$ divise $a + 1$, donc apparaît avec valuation au moins 2 dans $(a + 1)^2$. Mais $v_p(a^2 + b + 3) \leqslant 2$ par hypothèse, donc $a^2 + b + 3 \mid (a + 1)^2$.
On remarque alors que $0 < (a+1)^2 < 2(a^2+b+3)$, donc $(a+1)^2 = a^2+b+3$, ou encore $b = 2(a-2)$

Solution de l'exercice 3
Montrons que $t \geq 4$. On cherche un entier n pour lequel $3 \mid \varphi(n)$, pour que les cubes ne prennent que peu de valeurs modulo n. C'est le cas de 9, pour lequel les cubes ne peuvent valoir que $0, 1$ ou -1. Or on constate que $2002^{2002} \equiv 4[9]$, donc on a bien $t \geq 4$. Il suffit de trouver x_1, x_2, x_3, x_4 qui conviennent pour conclure. On a $2002 = 3 \cdot 667 + 1$, donc $2002^{2002} = 2002 \cdot \left(2002^{667}\right)^3$. Il suffit donc de montrer que 2002 peut s'écrire comme somme de 4 cubes, or ceci est facile à remarquer : $2002 = 1000 + 1000 + 1 + 1$.

Solution de l'exercice 4
On écrit la décomposition en facteurs premiers : $b = p_1^{\alpha_1} \cdots p_n^{\alpha_n}$. On veut donc montrer que tous les α_i sont des multiples de n. On applique la propriété donnée pour $k = b^2$. On dispose de a tel que $b^2 \mid b - a^n$. Ainsi pour tout $i \in [\![1, s]\!]$, $p_i^{2\alpha_i} \mid b - a^n$. On en déduit que $a^n \equiv b \equiv 0[p_i^{\alpha_i}]$ mais que $a^n \equiv b \not\equiv 0[p_i^{\alpha_i+1}]$, et donc que $v_{p_i}(a^n) = \alpha_i$. Mais $n \mid v_{p_i}(a^n)$ donc $n \mid \alpha_i$, comme atendu.

Solution de l'exercice 5
Si $p = 2$, $x = 1$ ou $x = 2$ conviennent. Si $p = 3$, $x = 1$ ou $x = 3$ conviennent. On suppose désormais que $p \geqslant 5$. Il est clair que $x = 1$ est solution pour tout p. Si $x > 1$, soit q le plus petit diviseur premier de x. Comme $(p - 1)^x + 1$ est impair, q est impair. Ainsi, $(p - 1)^x \equiv -1[q]$ et donc $(p - 1)^{2x} \equiv 1[q]$. L'ordre de $p - 1$ modulo q divise $2x$ mais pas x, donc il est pair. D'après le petit théorème de Fermat, il divise également $q - 1$. Or les seuls diviseurs de $2x$ inférieurs à $q - 1$ sont 1 et 2, donc l'ordre vaut 2. On en déduit que $p - 1 \equiv -1[q]$ donc $p = q$. Ainsi, $p \mid x$. D'après le lemme LTE, on obtient finalement

$$0 < (p - 1)v_p(x) \leqslant v_p(x) + 1$$

Il ne peut y avoir égalité que pour $p = 3$ et $v_p(x) = 1$, soit $x = 3$, ce qui convient bien ($3^2 \mid 2^3 + 1$). Finalement, les solutions sont $(2, 2)$, $(3, 3)$ et $(p, 1)$ pour tout nombre premier p.

Solution de l'exercice 6

La solution présentée ci-dessous est volontairement rédigée exclusivement avec des idées simples. Après en avoir constaté le caractère fastidieux, je vous recommande de chercher la solution avec Zsigmondy.

On réécrit $(a+b)(a^2-ab+b^2) = p^n$. Comme $a+b \geq 2$, on sait que $p \mid a+b$. On a $a^2-ab+b^2 = (a-b)^2+ab$, donc $a=b=1$ ou $a^2-ab+b^2 \geq 2$ et donc $p \mid a^2-ab+b^2$. Plaçons nous dans le second cas. Alors p divise également $(a+b)^2-(a^2-ab+b^2) = 3ab$. On se rappelle que $p \mid a+b$, donc $p \mid a$ si et seulement si $p \mid b$. Ainsi, soit $p=3$, soit $p \mid a$ et $p \mid b$. Dans ce cas, on réécrit $a = pa'$ et $b = pb'$, et on retrouve $a'^3+b'^3 = p^{n-3}$, en constatant que $n-3>0$ car $a' \geq 1$ et $b' \geq 1$. On poursuit ce processus jusqu'à une solution (a_0, b_0, p, n_0) pour laquelle p ne divise pas a_0. D'après ce qui se précède, on se retrouve dans un des cas particuliers $a_0 = b_0 = 1$, qui donne la solution $(1,1,2,1)$, ou $p=3$. Si $p=3$, alors $3 \mid a_0+b_0$, donc $9 \mid (a_0+b_0)^2$. Si $9 \mid a_0^2-a_0b_0+b_0^2$, alors $9 \mid 3a_0b_0$, contradiction. Ainsi, $a_0^2-a_0b_0+b_0^2 = 3$, donc $(a_0-b_0)^2+a_0b_0 = 3$, d'où $a_0=1$ et $b_0=2$ ou inversement.

Ainsi on a 3 solutions possibles quand p ne divise pas a, qui sont $(1,1,2,1),(1,2,3,1),(2,1,3,1)$. Finalement, il existe 3 familles de solutions à l'équation initiale : $(2^k, 2^k, 2, 3k+1)$, $(3^k, 2\cdot 3^k, 3, 3k+2)$, et $(2\cdot 3^k, 3^k, 3, 3k+2)$ avec $k \in \mathbb{N}$, dont on vérifie facilement qu'elles conviennent.

Solution de l'exercice 7

On traite les petits cas pour n en remarquant que l'on se ramène à une équation du second degré en m. On trouve les solutions $(3,6)$, $(3,9)$ et $(6,9)$, $(6,54)$. Montrons que ce sont les seules. On suppose désormais $n \geq 6$.

On remarque que $m \mid 2\cdot 3^n$. Ainsi, il existe un entier $p \leq n$ tel que $m = 3^p$ ou $m = 2\cdot 3^p$. Posons $q = n-p$. Dans le premier cas, on obtient $2^{n+1}-1 = m + \frac{2\cdot 3^n}{m} = 3^p + 2\cdot 3^q$, et dans le second $2^{n+1}-1 = 2\cdot 3^p + 3^q$. Ces deux équations sont donc équivalentes, quitte à changer p en $n-p$, inutile de traiter deux cas. On ne s'intéresse donc qu'à la première.

Cherchons à encadrer p. On a $3^p < 2^{n+1} = 8^{\frac{n+1}{3}} < 9^{\frac{n+1}{3}} = 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$, et de même $2\cdot 3^{n-p} < 2\cdot 3^{\frac{2(n+1)}{3}}$. Donc $\frac{n-2}{3} < p,q < \frac{2(n+1)}{3}$. Soit $h = \min(p,q)$. Alors $9 \mid 3^h \mid 3^p + 2\cdot 3^q$, donc $9 \mid 2^{n+1}-1$. Comme l'ordre de 2 modulo 9 vaut 6, on a $6 \mid n+1$, donc $n+1 = 6r$. Mais alors on a $2^{n+1}-1 = 4^{3r}-1 = (4^{2r}+4^r+1)(2^r+1)(2^r-1)$. On constate que $4^{2r}+4^r+1$ est toujours divisible par 3 mais jamais par 9, et 2^r-1 et 2^r+1 sont premiers entre eux, donc 3^{h-1} divise l'un des deux nombres 2^r-1 ou 2^r+1.

On revient alors à nos inégalités : $3^{h-1} \leq 2^r+1 \leq 3^r$. Ainsi, $\frac{n-2}{3}-1 < h-1 \leq \frac{n+1}{6}$, soit $2(n-2)-6 < n+1$ ou encore $n<11$, or on a supposé $n \geq 6$ et on a montré $n \equiv -1[6]$, donc $n \geq 11$, absurde. Il n'y a donc pas d'autres solutions que celles mentionnées au début.

4 Entraînement de fin de parcours

Énoncés

Exercice 1
Montrer qu'il existe une suite d'éléments de $\mathbb{N}^*$ $a_1, a_2, \ldots, a_n, \ldots$ telle que chaque entier strictement positif apparaît une et une seule fois dans la suite et, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on a $n \mid a_1 + a_2 + \cdots + a_n$.

Exercice 2
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait :

$$f(x + f(y)) + f(y + f(x)) = 2f(xf(y))$$

Exercice 3
Soit $n \geqslant 3$ et $a_1, \ldots, a_n$ des réels tels que $\sum a_i^2 = 1$. Donner la valeur maximale que peut prendre

$$\sum_{i=2}^{n+1} |a_i - a_{i-1}|$$

Exercice 4
Soit a un entier naturel non nul, et soit $(u_k)_{k\geqslant 0}$ la suite définie par $u_0 = 1$ et $u_{k+1} = a^{u_k}$ pour tout $k \geqslant 0$. Démontrer, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $n!$ divise $u_{n+1} - u_n$.

Solutions

Solution de l'exercice 1

On va montrer qu'on peut construire une suite d'entiers $a_1, \dots, a_n, \dots$ de telle sorte que chaque entier apparaisse au plus une fois et que, pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, a_{2n} soit le plus petit entier distinct de $a_1, a_2, \dots, a_{2(n-1)}$. Ceci assure que tout entier va bien apparaître dans la suite, et ceci de manière unique. On procède par récurrence, en initialisant à $n = 0$ (pour lequel l'hypothèse est claire).

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Supposons $a_1, a_2, \dots, a_{2(n-1)}$ construits, et soit k le plus petit entier distinct de $a_1, a_2, \dots, a_{2(n-1)}$. Soit $x \in \mathbb{Z}$ tel que x soit congru à $-a_1 - a_2 - \cdots - a_{2(n-1)}$ modulo $2n-1$ et à $-a_1 - a_2 - \cdots - a_{2(n-1)} - k$ modulo $2n$ (ceci existe, d'après le lemme chinois car $2n-1$ et $2n$ étant consécutifs, ils sont premiers entre eux). Choisissons a_{2n-1} de sorte que $a_{2n-1} \equiv x[n(n-1)]$, ce qui est possible (il y a une infinité d'entiers satisfaisant cette condition, et seul un nombre fini est dans la liste $a_1, \dots, a_{2(n-1)}$), et posons $a_{2n} = k$. Nos hypothèses assurent alors que $2n-1 \mid a_1 + \cdots + a_{2n-1}$ et $2n \mid a_1 + \cdots + a_{2n}$, comme voulu.

Solution de l'exercice 2

On commence par remarquer que le membre de gauche est symétrique (échanger x et y ne le change pas), tandis que celui de droite ne l'est pas. Ceci entraîne notamment $f(xf(y)) = f(yf(x))$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$.

En $x = 0$, cette dernière équation devient $f(0) = f(yf(0))$. Si $f(0) \neq 0$, alors $yf(0)$ parcourt $\mathbb{R}$ donc f est constante. Supposons donc $f(0) = 0$.

En injectant à présent $x = 0$ dans l'équation d'origine, on trouve $f(f(y)) + f(y) = 0$, donc pour tout point x de l'image de f on a $f(x) = -x$ (et donc aussi $f(-x) = x$).

Prenons à présent $x = 1$, puis $x = -1$. On obtient $-f(y) = f(f(y)) = f(yf(1))$ et $f(y) = f(-f(y)) = f(yf(-1))$. En $y = -1$, on trouve $-f(-1) = f(-f(1)) = f(1)$, donc $f(-1) = -f(1)$. Puis, en revenant à y quelconque et en appliquant l'identité à $-y$ et y, on trouve $-f(-y) = f(-yf(1)) = f(yf(-1)) = f(y)$, donc f est impaire. Finalement, on remarque que le membre de droite de l'équation d'origine est invariant par substitution de (x, y) par $(-x, -y)$, tandis que celui de gauche passe à l'opposé via cette opération. Donc $f(xf(y)) = 0$ pour tous $x, y \in \mathbb{R}$. S'il existe y tel que $f(y) \neq 0$, alors pour tout $x \in \mathbb{R}$ on a $f(x) = 0$, et donc f est nécessairement identiquement nulle.

Donc les fonctions solutions sont les fonctions constantes.

Autre solution :

On repart du moment où on avait écrit $f(f(x)) + f(x) = 0$. Ceci implique en particulier $f^3(x) = -f^2(x) = f(x)$. En posant $y = f(f(x))$, on obtient $f(y + f(x)) = 0$ et donc $f(x + f(y)) = 2f(xf(y))$, soit $f(x+f(x)) = 2f(xf(x))$. Mais en prenant $x = y$, on obtient $2f(x+f(x)) = 2f(xf(x))$, et donc $f(x + f(x)) = f(xf(x)) = 0$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

En $x = 1$, on obtient $f(f(1)) = 0$, soit $-f(1) = 0$, donc $f(1) = 0$. Puis en appliquant $f(yf(x)) = f(xf(y))$ à $y = 1$, on trouve $-f(x) = f(f(x)) = f(xf(1)) = f(0) = 0$, donc $f(x) = 0$.

Solution de l'exercice 3

Réponse : $2\sqrt{n}$ si n est pair et $2\sqrt{n-1}$ si n est impair.

On commence par le cas où n est pair. D'après l'inégalité triangulaire puis l'inégalité arithmético-quadratique :

$$\sum_{i=2}^{n+1} |a_i - a_{i-1}| \leqslant 2 \sum |a_i| \leqslant 2\sqrt{n}\sqrt{\sum a_i^2} = 2\sqrt{n}$$

D'autre part, il y a égalité pour $a_{2k+1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{n}}$: on a $\sum_{i=2}^{n+1} |a_i - a_{i-1}| = n\frac{2}{\sqrt{n}} = 2\sqrt{n}$, et $\sum a_i^2 = \frac{n}{n} = 1$.

Supposons à présent n impair, on prend les indices de la suite mod n, ce qui définit a_i pour tout entier i. Prouvons qu'il existe i tel que $a_{i-1} \leqslant a_i \leqslant a_{i+1}$ ou $a_{i-1} \geqslant a_i \geqslant a_{i+1}$. Supposons par l'absurde que ce n'est pas le cas, on a toujours $a_{i-1} \neq a_i$, et donc soit $a_{i-1} > a_i$ (et dans ce cas, $a_i < a_{i+1}$), soit $a_{i-1} < a_i$ (et dans ce cas, $a_i > a_{i+1}$). En particulier si $a_1 < a_2$, on montre par récurrence que $a_{2k+1} < a_{2k+2}$ et $a_{2k+2} > a_{2k+3}$, ce qui pose un problème pour le k tel que $n = 2k + 1$, puisque $a_{2k+2} > a_{2k+3}$ devient $a_1 > a_2$ ce qui est contradictoire. Si $a_1 > a_2$, on montre par récurrence que $a_{2k+1} > a_{2k+2}$ et $a_{2k+2} < a_{2k+3}$, ce qui pose un problème pour le k tel que $n = 2k + 1$, puisque $a_{2k+2} < a_{2k+3}$ devient $a_1 < a_2$, ce qui est contradictoire.

On peut alors regrouper les termes $|a_{i-1} - a_i|$ et $a_i - a_{i+1}|$ en $|a_{i-1} - a_{i+1}|$. On s'est alors ramené à la même inégalité qu'au départ, mais pour $n - 1$. Le cas précédent assure que $\sum_{i=2}^{n+1} |a_{i-1} - a_i| \leqslant 2\sqrt{n-1}$. Réciproquement, on obtient l'égalité en posant $a_{2k-1} = -\frac{1}{\sqrt{n}}$ et $a_{2k} = \frac{1}{\sqrt{n}}$, pour $1 \leqslant k \leqslant \frac{n-1}{2}$, et $a_n = 0$.

Solution de l'exercice 4

Une idée raisonnable serait de procéder comme suit : considérer un nombre premier p, noter α la valuation p-adique de $n!$, puis démontrer que p^α divise $u_{n+1} - u_n$, par exemple à l'aide d'une récurrence sur n. Cependant, cette approche ne fonctionnera pas directement. En effet, lorsque p est premier avec α, elle revient à démontrer que l'ordre de a modulo p^α divise $u_n - u_{n-1}$. Mais cet ordre pourrait très bien valoir $\varphi(p^\alpha) = (p-1)p^{\alpha-1}$, un entier qui ne divise pas $n!$ quand p^2 divise n.

On adapte donc notre raisonnement pour éviter de tomber dans l'écueil que l'on vient de découvrir. À cette fin, pour tout entier $n \geqslant 1$, on pose

$$\psi(n) = \prod_p p^{\lfloor (n-1)/(p-1) \rfloor},$$

le produit étant effectué sur tous les nombres premiers ; seuls les nombres premiers $p \leqslant n$ contribuent à ce produit avec un facteur différent de 1. Or, la formule de Legendre indique que

$$v_p(n!) = \frac{n - s_p(n)}{p-1} \leqslant \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor,$$

où $s_p(n)$ est la somme des chiffres de n en base p. On en conclut que $n!$ divise $\psi(n)$, et on entreprend donc de démontrer, toujours par récurrence sur n, que $\psi(n)$ divise $u_{n+1} - u_n$.

Tout d'abord, si $a = 1$, chacun des entiers u_k est égal à 1, donc $\psi(n)$ divise manifestement $u_{n+1} - u_n$. De même, l'entier $\psi(1) = 1$ divise $u_2 - u_1$. On suppose donc désormais que $a \geqslant 2$ et $n \geqslant 2$. Notons au passage que la suite (u_k) est alors strictement croissante, de sorte que $u_k \geqslant k + 1$ pour tout $k \geqslant 0$.

Soit p un nombre premier majoré par n, et soit $\alpha = \lfloor (n-1)/(p-1) \rfloor$. Puisque $a \geqslant 2$, la suite (u_k) est strictement croissante, donc $u_{n+1} \geqslant u_n \geqslant u_{n-1} \geqslant n - 1 \geqslant \alpha$. Par conséquent, si p divise a, on observe déjà que p^α divise $u_n = a^{u_{n-1}}$ et $u_{n+1} = a^{u_n}$.

Si, au contraire, p est premier avec α, l'hypothèse de récurrence nous informe que $u_n - u_{n-1}$ est divisible par $\psi(n-1)$, donc par $(n-1)!$ et par $p-1$, mais également par $p^{\lfloor (n-2)/(p-1) \rfloor}$. Or,

$$\left\lfloor \frac{n-2}{p-1} \right\rfloor \geqslant \left\lfloor \frac{n-1}{p-1} \right\rfloor - 1 = \alpha - 1.$$

Par conséquent, $u_n - u_{n-1}$ est divisible par $p-1$ et par $p^{\alpha-1}$, donc par leur PPCM, c'est-à-dire $(p-1)p^{\alpha-1} = \varphi(p^\alpha)$. On en conclut comme souhaité que p^α divise $a^{u_n} - a^{u_{n-1}} = u_{n+1} - u_n$, ce qui achève la récurrence.

VII. Groupe E

Contenu de cette partie

1 Première partie : Géométrie, Combinatoire et Algèbre 498
1 Séries génératrices (Théo) 498
2 Géométrie analytique (Martin) 498
3 Géométrie projective réelle (Baptiste) 505
4 Algèbre combinatoire (Félix) 510
5 Géométrie projective dynamique (Aurélien) 511
6 Suites et inégalités non classiques (Henry) 512
7 Géométrie combinatoire (Vincent) 516
8 TD Petites idées simples (Aurélien) 519
2 Entraînement de mi-parcours 520
3 Deuxième partie : Arithmétique, Algèbre et Combinatoire 526
1 Équations fonctionnelles sur Z (Rémi) 526
2 Pot pourri algèbre (Émile) 529
3 Techniques asymptotiques en arithmétique (Antoine) 537
4 Équations fonctionnelles (Émile) 545
5 Polynômes (Martin) 553
6 TD Shortlists d'arithmétique (Vincent) 561
7 Suites d'entiers (Théo) 567
8 Graphes (Xavier) 575
4 Entraînement de fin de parcours 581

1 Première partie : Géométrie, Combinatoire et Algèbre

1 Séries génératrices (Théo)

Coming soon...

2 Géométrie analytique (Martin)

La géométrie barycentrique fait partie des méthodes analytiques les plus efficaces pour résoudre un problème de géométrie par le calcul. Une large catégorie de problèmes d'Olympiades, même récents, peut se résoudre en un temps relativement court par cette méthode.

Pour en voir les avantages, voici un peu de réthorique. La géométrie cartésienne permet de repérer les points du plan par rapport à 2 axes. Beaucoup de choses se calculent avec une théorie relativement simples. En revanche, on y perd souvent les symétries du problème. La géométrie complexe, elle, permet de repérer les points du plan par rapport à un point, l'origine du plan. Les symétrie du problème sont alors concentrée, en revanche les calculs deviennent rapidement compliqué pour les points qui ne sont pas sur le cercle unité.

La géométrie barycentrique repère chaque point par rapport aux trois sommets d'un triangle. C'est donc particulièrement adaptés aux problèmes concernant un triangle. On dispose d'outils pour calculer les équations de cercles mais surtout les céviennes issues des sommets. Ainsi la géométrie barycentrique est la géométrie des droites.

Dans ce cours, on examine toute la théorie présente dans le polycopié de géométrie analytique disponible sur le site de la POFM (avec présentation naïve de la notion de déterminant). On a également traité l'exemple donné dans le polycopié. Les élèves se sont vus distribués, en plus des exercices d'application du poly, les exercices suivants, qui ne sont pas dans le polycopié disponible sur le site.

Exercices

Exercice 1
(Balkan MO SL 2021 G6)

Soit ABC un triangle et M le milieu du segment $[BC]$. La tangente au cercle (ABC) en A coupe (BC) en D. Le cercle Γ de centre D et de rayon AD recoupe le cercle ABC en E. La droite (BE) recoupe Γ en X. La droite (CX) recoupe Γ en Y. Montrer que A, Y et M sont alignés.

Exercice 2
(EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Exercice 3
(IMO 2023 P6) Soit ABC un triangle équilatéral. Soit A_1, B_1 et C_1 trois points situés à l'intérieur du triangle ABC et vérifiant $A_1B = A_1C, B_1A = B_1C, C_1A = C_1B$ et

$$\widehat{BA_1C} + \widehat{AB_1C} + \widehat{AC_1B} = 480^\circ$$

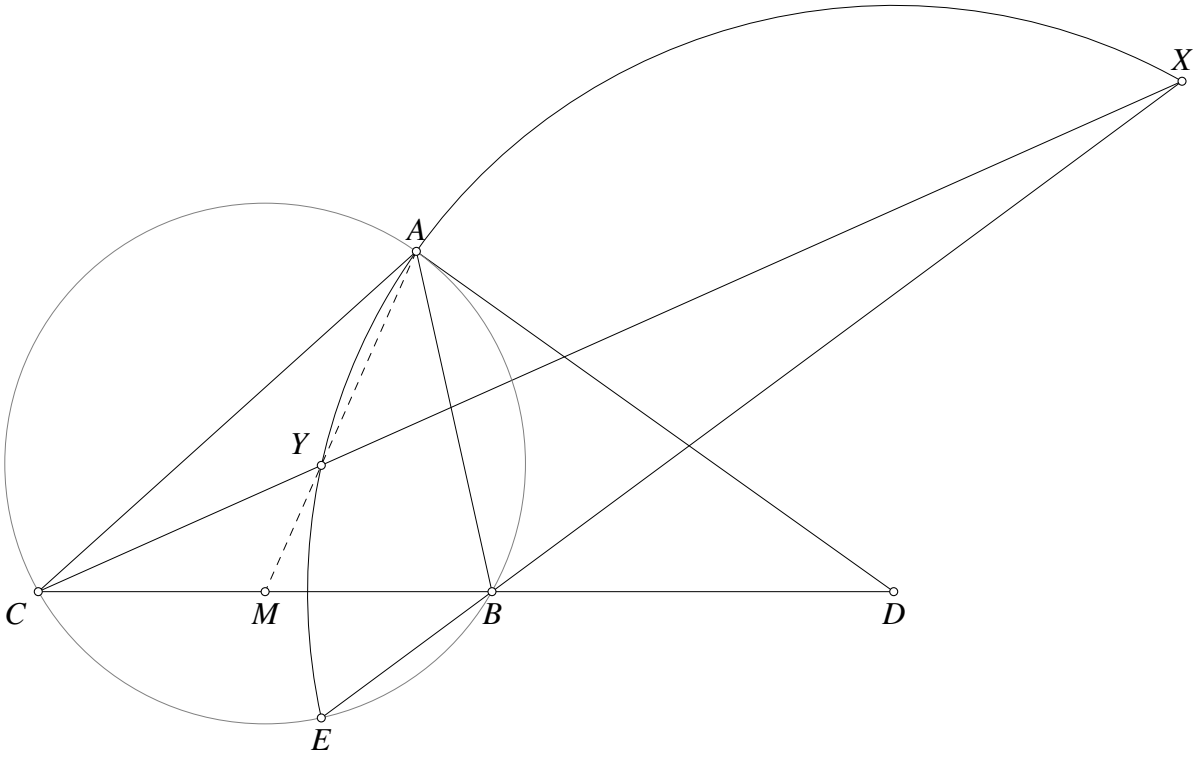
Soit A_2 le point d'intersection des droites (B_1C) et (BC_1). On définit de la même façon B_2 et C_2. MOntrer que si $A_1B_1C_1$ est scalène, il existe deux points par lesquels passent les cercles circonscrits aux triangles AA_1A_2, BB_1B_2 et CC_1C_2.

Solutions

Exercice 4
(Balkan MO SL 2021 G6)

Soit ABC un triangle et M le milieu du segment $[BC]$. La tangente au cercle (ABC) en A coupe (BC) en D. Le cercle Γ de centre D et de rayon AD recoupe le cercle ABC en E. La droite (BE) recoupe Γ en X. La droite (CX) recoupe Γ en Y. Montrer que A, Y et M sont alignés.

Solution de l'exercice 1



On reconnaît en Γ le cercle d'Appolonius associé à A. E est alors sur la symédiane issue de A, ce qui donne $E : (-a^2, b^2, c^2)$. Pour avoir l'équation de Γ, on rajoute le pied de la bissectrice issue de A, à savoir $R : (0, b, c)$. Soient alors u, v et w les paramètres du cercle Γ. Puisque $A \in \Gamma$, on a $u = 0$. En injectant les coordonnées de E (noubliez pas que comme E appartient à (ABC), on a automatiquement $-a^2y_Ez_E - b^2z_Ex_E - c^2x_Ey_E = 0$) et de R dans l'équation, on obtient les deux équations

$$\begin{aligned} vb^2 + wc^2 &= 0 \\ vb + wc &= \frac{a^2bc}{b+c} \end{aligned}$$

On déduit que $v = a^2\frac{c^2}{c^2-b^2}$ et $w = a^2\frac{b^2}{b^2-c^2}$.

On calcule les coordonnées de X. Celles-ci sont de la forme $(-a^2/2, t, c^2)$ car $X \in (BE)$. En injectant les coordonnées de X dans l'équation de Γ, on a

$$(t - b^2)(t - \frac{a^2}{2} + b^2/2 + c^2/2) = 0$$

Puisque X est distinct de E, on déduit que $t = \frac{a^2}{2} - b^2/2 - c^2/2$.

On détermine les coordonnées de Y', point d'intersection de (AM) et de (CX). Celles-ci sont de la forme $(-a^2/2, t, s)$ car Y' est sur (CX), et de la forme (r, t, t) car Y' est sur (AM). On déduit que $Y' : (-a^2/2, t, t)$. Il reste à vérifier que $Y' \in \Gamma$. Pour cela on vérifie que

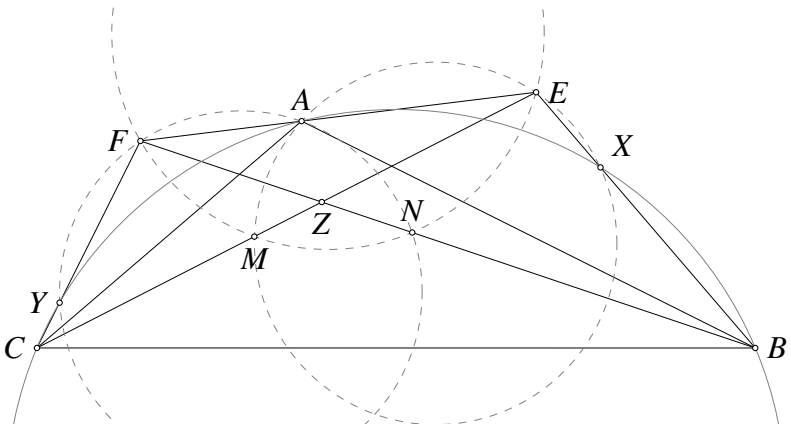
$$a^2t(-t + b^2/2 + c^2/2 + (2t - a^2/2)\left(\frac{c^2}{c^2 - b^2} + \frac{b^2}{b^2 - c^2}\right) = 0$$

ce qui conclut.

Exercice 5

(EGMO 2021 P3) Soit ABC un triangle dont l'angel en A est obtus. Soient E et F les points d'intersection respectifs de la bissectrice extérieur de l'angle $\widehat{BAC}$ avec les hauteurs issues des sommets B et C. Soit M un point du segment $[EC]$ tel que $\widehat{EMA} = \widehat{ACB}$. Soit N un point du segment $[FB]$ tel que $\widehat{ANF} = \widehat{ABC}$. Montrer que les points E, M, N et F sont cocycliques.

Solution de l'exercice 2



Pour tracer le point M, on introduit un point intermédiaire.

Penser point intermédiaire ! Un point intermédiaire intéressant est le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles dont l'un des angles est concerné par l'égalité d'angle

Ici, on considère donc le point X, second point d'intersection des cercles (ABC) et (AEM). En pratique, on choisit X comme le second point d'intersection de la droite (EB) et du cercle (ABC). Alors on a bien par théorème de l'angle inscrit $\widehat{AXE} = \widehat{ACB}$. On choisit alors le point M comme le point d'intersection de la droite (CE) et du cercle (AXE).

On construit de même le point N à l'aide du point intermédiaire Y défini comme le second point d'intersection du cercle (ABC) avec la droite (CF).

Cette construction nous a apporté deux points et deux cercles. On constate que démontrer que les points E, M, N et F sont cocycliques revient à montrer que le point Z d'intersection des droites (BF) et (CE) appartient à l'axe radical des cercle (AME) et (ANF). En effet, on aura alors $ZM \cdot ZE = ZN \cdot ZF$.

Cette caractérisation est facile à exprimer en coordonnées barycentriques. Puisqu'il y a peu de points, on peut s'essayer au calcul.

On choisit ABC comme repère et a, b et c désignent les longueurs usuelles. On adopte également les notations de Conway pour les quantités S_A, S_B et S_C.

On calcule les coordonnées du point E. Si I_C est le centre du cercle $C-$exinscrit au triangle ABC, le point E est sur la droite (AI_C) donc ses coordonnées sont de la forme $(t, b, -c)$. Le point E appartient à la hauteur issue du sommet B donc ses coordonnées s'écrivent également de la forme (S_C, s, S_A). On en déduit que le point E a pour coordonnées $(cS_C, -bS_A, cS_A)$. De même, le point F a pour coordonnées $(bS_B, bS_A, -cS_A)$.

Le point Z a donc ses coordonnées de la forme $(bS_B, s, -cS_A)$ d'une part et $(cS_C, -bS_A, t)$ d'autre part. Ses coordonnées sont donc $(-bcS_BS_C, b^2S_AS_B, c^2S_AS_C)$.

On calcule les coordonnées du point X. Il appartient à la droite (BE), ses coordonnées sont donc de la forme (S_C, s, S_A). Il appartient au cercle (ABC) donc

$$s(a^2S_A + c^2S_C) = -b^2S_AS_C$$

Les coordonnées du point X sont donc $(S_C(a^2S_A + c^2S_C), -b^2S_AS_C, S_A(a^2S_A + c^2S_C)$. De même, les coordonnées du point Y sont $(S_B(a^2S_A + b^2S_B), S_A(a^2S_A + b^2S_B), -c^2S_AS_B)$.

On calcule à présent les paramètres du cercle (AEX). On sait déjà que $u = 0$ puisque le cercle passe par le point A. Puisque le point X appartient au cercle (ABC), $-a^2y_Xz_X - b^2z_Xx_X - c^2x_Xy_X = 0$ et donc en injectant ses coordonnées dans l'équation du cercle (AEX) on a

$$w(a^2S_A + c^2S_C) = vb^2S_C$$

On injecte à présent les coordonnées du point E dans l'équation de cercle :

$$\begin{aligned} 0 &= a^2bcS_A^2 - b^2c^2S_AS_C + bc^3S_AS_C + (-vbS_A + wcS_A)(\underbrace{cS_C + cS_A}_{cb^2} - bS_A) \\ &= bS_A\left(a^2cS_A - bc^2S_C + c^3S_C + (wc - vb)(cb - S_A)\right) \end{aligned}$$

On injecte la première équation liant v et w :

$$v\left(c\frac{b^2S_C}{a^2S_A + c^2S_C} - b\right)(cb - S_A) = bc^2S_C - c^3S_C - a^2cS_A$$

et après simplification :

$$vb(cb - S_A) = c(a^2S_A + c^2S_C)$$

On pose $V_B = v(bc - S_A) = \dfrac{c}{b}(a^2S_A + c^2S_C)$ et $W_B = (bc - S_A)w = bcS_C$.

On trouve de même $V_C = bcS_B$ et $W_C = \dfrac{b}{c}(a^2S_A + b^2S_B)$.

Il reste alors à vérifier que les coordonnées de Z satisfont

$$(V_B - V_C)y_Z + (W_B - W_C)z_Z = 0$$

Or

$$\begin{aligned}
(V_B - V_C)b^2S_B + (W_B - W_C)c^2S_C &= cbS_B(a^2S_A + c^2S_C) - b^3cS_B^2 + c^3bS_C^2 - bcS_C(a^2S_A + b^2S_B) \\
&= cb\left(S_B(\underbrace{a^2S_A + c^2S_C - b^2S_B}_{\frac{1}{2}(b^4-(a^2-c^2)^2)}) - S_C(\underbrace{a^2S_A - b^2S_B + c^2S_C}_{\frac{1}{2}(c^4-(a^2-b^2)^2)})\right) \\
&= 2bcS_A(-S_BS_C + S_CS_B) \\
&= 0
\end{aligned}$$

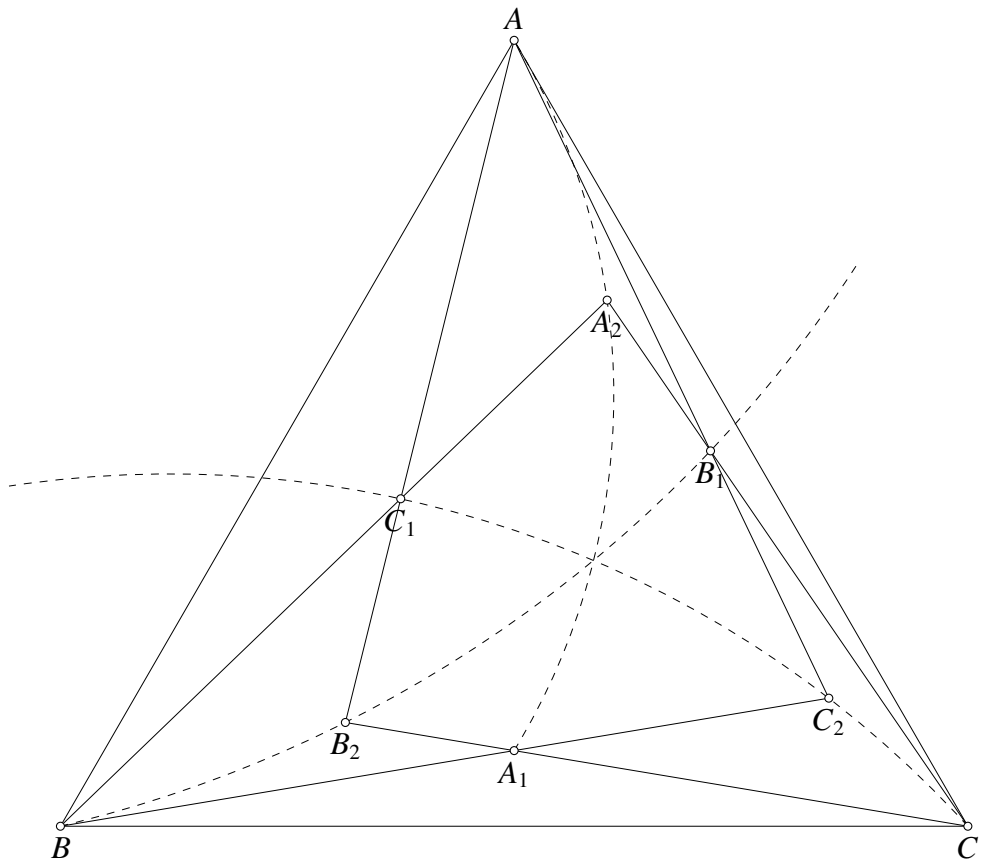
Donc le point Z appartient bien à l'axe radical des cercles (AEX) et (BFY), comme désiré.

Exercice 6
(IMO 2023 P6) Soit ABC un triangle équilatéral. Soit A_1, B_1 et C_1 trois points situés à l'intérieur du triangle ABC et vérifiant $A_1B = A_1C, B_1A = B_1C, C_1A = C_1B$ et

$$\widehat{BA_1C} + \widehat{AB_1C} + \widehat{AC_1B} = 480^\circ$$

Soit A_2 le point d'intersection des droites (B_1C) et (BC_1). On définit de la même façon B_2 et C_2. MOntrer que si $A_1B_1C_1$ est scalène, il existe deux points par lesquels passent les cercles circonscrits aux triangles AA_1A_2, BB_1B_2 et CC_1C_2.

Solution de l'exercice 3



On pose $AB = 1$. On exprime tout dans le repère barycentrique induit par le triangle ABC. L'énoncé à prouver est adapté aux coordonnées baraycentriques : une fois qu'on a les paramètres des trois cercles, on peut calculer les équations des axes radicaux et montrer que ce sont les même. L'enjeu va donc être d'avoir l'expression la plus simple possible des paramètres des cercles. Préparez vos formules de trigo, ça va chauffer.

On note $\alpha = \frac{1}{2}\widehat{BA_1C}, \beta = \frac{1}{2}\widehat{AB_1C}$ et $\gamma = \frac{1}{2}\widehat{AC_1B}$, de sorte que $\alpha + \beta + \gamma = \frac{4\pi}{3}$.

Comme A_1 ests ur la médiatrice de $[BC]$, ses coordonnées sont de la forme (x, y, y) avec x correspondant au rapport $\frac{\mathcal{A}_{BA_1C}}{\mathcal{A}_{BAC}}$ et y tel que $x + 2y = 1$. On a finalement que

$A_1 : \left(\frac{\sqrt{3}}{3}\cot\alpha, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cot\alpha, \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{6}\cot\alpha\right)$, ce que l'on peut réécrire après simplification comme

$$A_1 : (2,\ \sqrt{3}\tan\alpha - 1,\ \sqrt{3}\tan\alpha - 1)$$
$$B_1 : (\sqrt{3}\tan\beta - 1, 2,\ \sqrt{3}\tan\gamma - 1)$$
$$C_1 : (\sqrt{3}\tan\gamma - 1,\ \sqrt{3}\tan\gamma - 1, 2)$$

On peut alors calculer les coordonnées de A_2, B_2 et C_2. Le calcul naïf donne notamment

$$A_2 : ((\sqrt{3}\tan\beta - 1)(\sqrt{3}\tan\gamma - 1), 2(\sqrt{3}\tan\gamma - 1), 2(\sqrt{3}\tan\beta - 1))$$

On va essayer de transformer ça, par exemple en divisant toutes les coordonnées par $(\sqrt{3}\tan\beta - 1)(\sqrt{3}\tan\gamma - 1)$. On doit donc à présent simplifier la quantité $\frac{2}{\sqrt{3}\tan\beta - 1}$. Pour cela on s'aide de la formule

$$\tan(x+y) = \frac{\tan x + \tan y}{1 - \tan x \tan y}$$

qui, appliquée à β et $2\pi/3 - \beta$ donne

$$-\sqrt{3}(1 - \tan\beta \tan(2\pi/3 - \beta)) = \tan\beta + \tan(2\pi/3 - \beta)$$

qui a le mérite de se réécrire

$$4 = (\sqrt{3}\tan\beta - 1)(\sqrt{3}\tan(2\pi/3 - \beta) - 1)$$

(Oui cette partie là est horriblement astucieuse, en même temps le P6 n'allait pas se laisser faire si facilement). Bref, les coordonnées de A_2 sont

$$A_2 : (2,\ \sqrt{3}\tan(2\pi/3 - \beta) - 1,\ \sqrt{3}\tan(2\pi/3 - \gamma) - 1)$$

On calcule désormais les paramètres u_A, v_A et w_A du cercle (AA_1A_2). On a bien sûr $u_A = 0$. En injectant les coordonnées de A_1 dans l'équation de cercle, on trouve directement

$$v_A + w_A = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\alpha = \frac{\cos(\alpha - \pi/6)}{\sin\alpha}$$

Où le dernier terme a été calculé avec les formules de dupplication.

Pour la suite, on pose $\beta' = 2\pi/3 - \beta$ et $\gamma' = 2\pi/3 - \gamma$ et on utilise à nouveau la formule de trigo de $\tan(x+y)$.

En injectant les coordonnées de A_2 dans l'équation de cercle, on trouve

$$\begin{aligned}
(\sqrt{3}\tan\beta' - 1)v_A + (\sqrt{3}\tan\gamma' - 1)w_A &= \frac{-3 + 2\sqrt{3}(\tan\beta' + \tan\gamma') + 3\tan\beta'\tan\gamma'}{\sqrt{3}(\tan\beta' + \tan\gamma')} \\
&= \frac{-\sqrt{3} + \tan\beta' + \tan\gamma' + \sqrt{3}(1 - (\tan\beta' + \tan\gamma')\cot(\beta' + \gamma'))}{\tan\beta' + \tan\gamma'} \\
&= 1 - \sqrt{3}\cot(\beta' + \gamma')
\end{aligned}$$

On utilise l'hypothèse de l'énoncé : $\beta' + \gamma' = \alpha$, et on utilise la valeur de $v_A + w_A$. On trouve

$$\sqrt{3}(\tan\beta' v_A + \tan\gamma' w_A) = 1 - \sqrt{3}\cot\alpha + \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\alpha = \frac{3}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}\cot\alpha$$

et $\tan\beta' v_A + \tan\gamma' w_A = \frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{2}\cot\alpha = \frac{\sin(\pi/6 - \alpha)}{\sin\alpha}$.

On obtient un système en v_A et w_A. On déduit(attention beaucoup de trigo)

$$\begin{aligned} v_A &= \frac{\frac{\cos(\alpha-\pi/6)}{\sin\alpha} - \tan\gamma' \frac{\sin(\pi/6-\alpha)}{\sin\alpha}}{\tan\beta' - \tan\gamma'} \\ &= \frac{\cos\beta'}{\sin\alpha} \frac{\cos(\alpha-\pi/6)\cos\gamma' - \sin\gamma'\sin(\pi/6-\alpha)}{\sin\beta'\cos\gamma' - \sin\gamma'\cos\beta'} \\ &= \frac{\cos\beta'}{\sin\alpha} \frac{\cos(\gamma'+\pi/6-\alpha)}{\sin(\beta'-\gamma')} \\ &= \frac{\sin(\beta-\pi/6)\cos\beta}{\sin\alpha\sin(\gamma-\beta)} \end{aligned}$$

On a de même l'expression de w_A et des paramètres des autres cercles. On note ces paramètres $u_A, v_A, w_A, u_B, v_B, w_B, u_C, v_C, w_C$.

La dernière étape, la plus difficile, est de traduire que les paires de cercles ont le même axe radical. Il suffit de montrer que les axes sont égaux pour deux paires de cercles, ie que

$$-u_B x + v_A y + (w_A - w_B)z = 0$$

$$-u_C x + (v_A - v_C)y + w_A z = 0$$

représentent la même équation de droite. On veut donc k réel tel que

$$\frac{u_C}{u_B} = \frac{v_A - v_C}{v_A} = \frac{w_A}{w_A - w_C} = k$$

On vérifie alors que $k = \frac{\sin\beta\sin(\gamma-\alpha)}{\sin\gamma\sin(\beta-\alpha)}$ fonctionne, ce qui achève le problème.

3 Géométrie projective réelle (Baptiste)

On donne seulement les énoncés de la solution du TD ainsi que la solution. Le cours fera l'objet d'un polycopié à venir.

– Exercices –

Exercice 1
Donner une preuve projective du lemme suivant. Soit $ABCD$ un trapèze tel que (AB) et (CD) sont parallèles. On note X l'intersection des diagonales du trapèze ainsi que Y l'intersection des droites (AD) et (BC). Montrer que la droite (XY) coupe le segment (AB) en son milieu.

Exercice 2
Soit ℓ_1 et ℓ_2 deux droites parallèles, on dispose d'un cercle ω tangent à ℓ_1 en A et qui recoupe la droite ℓ_2 en B et C. La tangente en C à ω coupe la droite ℓ_1 en D, la droite (BD) intersecte une deuxième fois ω en E. On note enfin F l'intersection de la droite ℓ_1 avec la droite (CE). Montrer que F est le milieu du segment $[AE]$.

Exercice 3
Soient A, B, C et D quatres points sur une conique $\mathcal{E}$. On note P, l'intersection des tangentes en A et B à $\mathcal{E}$, Q l'intersection des tangentes en C et D à $\mathcal{E}$. On note également T l'intersection des droites (AC) et (BD) ainsi que S l'intersection des droites (AD) et (BC). Montrer que les points P, Q, S et T sont alignés.

Exercice 4
Soit $ABCD$ un quadrilatère, on note E (resp. F) l'intersection des droites (AB) et (CD) (resp. (BC) et (DA)). Soit P un point qui n'est pas sur la droite (EF), les droites (PA), (PB), (PC) et (PD) intersectent la droite (EF) en X, Y, Z et W respectivement. Montrer que les droites (AZ), (BW), (CX) et (DY) sont concourantes.

Exercice 5
Soit $ABCD$ un quadrilatère inscriptible. On pose $E = (AD) \cap (BC)$ et $F = (AC) \cap (BD)$. Soit M le milieu de $[CD]$, et N le point du cercle circonscrit à AMB distinct de M vérifiant $\frac{AM}{BM} = \frac{AN}{BN}$. Montrer que E, F et N sont alignés.

Exercice 6
Dans un triangle ABC, M et N désignent respectivement les points d'intersection des bissectrices des angles en B et C avec les côtés opposés. On appelle D l'intersection de la demi-droite $[MN)$ avec le cercle circonscrit à ABC. Montrer que

$$\frac{1}{BD} = \frac{1}{AD} + \frac{1}{CD}.$$

Exercice 7
Soit ABC un triangle, on note ω le cercle dont le centre est sur le côté BC et tangent aux côtés (AC) et (AB) en E et F respectivement. On note H le pied de la hauteur issue de A. Montrer que la droite (AH) bissecte l'angle $\angle EHF$.

Exercice 8
Soit ABC un triangle, on note X un point dans le triangle, les droites (BX) et (CX) intersectent (AC) et (AB) en D et E. On note de plus Y l'intersection des diagonales dans le quadrilatère $ADXE$. Soit Z la projection orthogonale de X sur la droite (BC). Montrer que les angles $\widehat{DZX}$ et $\widehat{EZA}$ sont égaux.

Exercice 9
Soient $\angle ABC$ et $\angle DBE$ deux angles droits. On note X l'intersection des droites (AD) et (CE) ainsi que Y l'intersection des droites (AE) et (CD). Montrer que $\widehat{XBY} = 90$.

Exercice 10
Soient A, B, C et D quatre points cocycliques, on note M et N les milieux des segments $[AB]$ et $[CD]$. On note E l'intersection des diagonales de $ABCD$ ainsi que F l'intersection des droites (AB) et (CD). On note X et Y les intersections de la droite (MN) avec les droites (BD) et (AC) respectivement. Montrer que les cercles circonscrits aux triangles EXY et FMN sont tangents.

Exercice 11
Soit A, B, C et D quatre points cocycliques sur un cercle de centre O, on note X l'intersection

des diagonales de $ABCD$. On note ℓ la droite passant par X et perpendiculaire à la droite (OX). La droite ℓ intersecte les côtés (AB) et (CD) en S et T. Montrer que X est le milieu de $[ST]$.

Exercice 12
Soit Ω un cercle de centre O et P et Q deux points à l'extérieur de ce cercle. On note t_1, t_2, t_3 et t_4 les tangentes en P puis Q au cercle Ω. On note S l'intersection de t_1 et t_3 ainsi que T l'intersection de t_2 et t_4. On note de plus X la projection orthogonale de O sur la droite (PQ). Montrer que la droite (PQ) bissecte l'angle $\angle SXT$.

Exercice 13
Soit ABC un triangle, on dispose de trois points D, E et F dans le triangle ABC de telle sorte que $\widehat{BAF} = \widehat{EAC}$, $\widehat{CBD} = \widehat{FBA}$ et $\widehat{ACE} = \widehat{DCB}$. Montrer que les droites (AD), (BE) et (CF) sont concourantes.

Exercice 14
Soit ABC un triangle, on note H l'orthocentre. Soient ℓ_1 et ℓ_2 deux droites se coupant perpendiculairement en H. Montrer que les pieds des médianes issues de H dans les trois triangles formés par les droites ℓ_1, ℓ_2 et un des côtés du triangle sont alignés.

Exercice 15
Soient $\mathcal{E}_1$, $\mathcal{E}_2$ et $\mathcal{E}_3$ trois coniques qui partagent deux points en commun. Pour $\mathcal{E}_i$ et $\mathcal{E}_j$ ils ont également deux autres points d'intersection, on note $\ell_{i,j}$ cette droite. Montrer que les trois droites obtenues ainsi sont concourantes.

Exercice 16
Soit $ABCD$ un quadrilatère de cercle circonscrit ω_1, on choisit ω_2 un cercle coupant le cercle ω_1 en X et Y, il coupe les droites (AB) et (CD) en P, Q, R et S dans cet ordre. Les droites (QR) et (PS) intersectent les droites (AC) et (BD) en U, V, W et Z. Montrer que les points X, Y, U, V, W et Z sont sur un même cercle.

– Solutions des exercices –

Solution de l'exercice 1
On note E l'intersection des droites (AB) et (CD). On note également M l'intersection de la droite (XY) avec le segment $[AB]$. On peut alors appliquer le théorème du quadrilatère complet pour le quadrilatère $ABCD$, cela nous renseigne que les points A, B, E et M sont en division harmonique. Comme le point E l'intersection de deux droites parallèles il s'agit du point à l'infini. On applique maintenant le lemme 2/3 pour conclure que M est le milieu de $[AB]$.

Solution de l'exercice 2
Par un argument de pôle/polaire dans le cercle ω, on obtient que A, C, E et F sont en division harmonique. On projete ensuite du cercle ω sur la droite ℓ_1 depuis C. On obtient ainsi

$$\begin{aligned} -1 &= b_{ACEB} \\ &= b_{CA,CC,CE,CB} \\ &= b_{ADF\infty}. \end{aligned}$$

On conclut ensuite en appliquant le lemme 2/3.

Solution de l'exercice 3
On applique deux fois le théorème de Pascal. Dans un premier temps avec les points $(1,2,3,4,5,6) = (A,A,C,B,B,D)$, on obtient que les points $(12)\cap(45) = P$, $(23)\cap(56) = S$ et $(34)\cap(61) = T$ sont alignés. On montre par un argument de symétrie que les points S, Q et T sont alignés.

Solution de l'exercice 4
On effectue une transformation projective qui envoie la droite (EF) sur la droite à l'infini. Dans ce cas, les points X, Y, Z et W représentent des directions dans le plan. L'énoncé de l'exercice devient alors le suivant. *Soit $ABCD$ un parallèlogramme et soit P un point du plan, montrer que les parallèles à (PA), (PB), (PC) et (PD) passant par C, D, A et B sont concourantes.* Soit P' le symétrique de P par rapport au centre du parallèlogramme, on remarque que les quadrilatères $PBP'D$ et $PAP'C$ sont des parallèlogrammes. Le point P' est donc le point d'intersections des quatre droites que l'on considéraient.

Solution de l'exercice 5
On réfère à la liste d'exo d'Ambroise Marigot du stage de Grésillon en 2011.

Solution de l'exercice 6
On réfère à la liste d'exo d'Ambroise Marigot du stage de Grésillon en 2011.

Solution de l'exercice 7
On note X l'intersection des droites (BC) et (EF). On note également Y l'intersection des droites (EF) et (AH). D'après un argument de pôle/polaire les points F, E, X et Y sont en division harmonique. Il suit que les droites (HF), (HE), $HX)$ et (HY) sont en division harmonique. Comme les droites (HY) et (HX) sont perpendiculaires on en déduit d'après le lemme 2/4 que la droite (AH) bissecte l'angle $\angle FHE$.

Solution de l'exercice 8
On note W l'intersection des droites (ED) et (BC). D'après le théorème du quadrilatère complet appliqué au quadrilatère $ADXE$, on obtient que les points E, D, W et Y sont en division harmonique. Ainsi, les droites (ZE), (ZD), (ZW) et (ZY) sont en division harmonique. Comme les droites (ZY) et (ZW) sont perpendiculaires, on applique le lemme 2/4 pour montrer que la droite (ZY) bissecte l'angle $\angle EZD$. De la même manière, la droite (ZY) bissecte l'angle $\angle AZX$. Cela conclut.

Remarque 1.
On remarque d'après le dual du deuxième théorème de Desargues qu'il existe une involution projective des droites passant par Z qui échange (ZA) avec (ZX), (ZE) avec (ZD) et (ZB) avec (ZC). Dans le cas particulier de cet exercice, cette involution est une ainsi une symétrique axiale d'axe (ZY).

Solution de l'exercice 9
On applique le dual du deuxième théorème de Desargues aux droites (CE), (CD), (DA) et (AE). Cela montre qu'il existe une involution projective échangeant (DB) avec (BE), (BC) avec (BA) et enfin (BY) avec (BX). Comme cette involution coïncide avec la rotation d'angle 90 sur les deux premières paires de droite on en déduit que cette involution et exactement la rotation d'angle 90, cela conclut.

Solution de l'exercice 10
On note $\mathcal{P}$ la conique tangente aux droites (AB), (BD), (DC), (CA) et (XY). On va montrer que

cette conique est une parabole. Cette conique induit une transformation projective $\mathcal{T}$ de la droite (AB) vers la droite (DC). La transformation projective $\mathcal{T}$ envoie B sur D, A sur C et M sur N. Comme $r_{ABM} = r_{DCN}$, $\mathcal{T}$ envoie $\infty_{(AB)}$ sur $\infty_{(CD)}$. Cela montre que la droite à l'infini est tangente à la conique $\mathcal{P}$ c'est ainsi une parabole !

On peut maintenant conclure facilement. En effet soit T le foyer de la parabole, on sait que les cercles cirocnscrits aux triangles dont les trois côtés sont tangents à la parabole passent par T. En particulier, les cercles circonscrits aux triangles EXY, FBC, BMX et YCN passent tous les deux par T. Pour conclure il suffit de démontrer que $\widehat{YTN} = \widehat{MTX}$. On a cependant la suite d'égalités suivante :

$$\begin{aligned}
\widehat{NTY} &= \widehat{NCY} && (YNCT \text{ est cyclique})\\
&= \widehat{MXB} && (ABCD \text{ est cyclique})\\
&= \widehat{MTX} && (BMXT \text{ est cyclique}).
\end{aligned}$$

Ce qui conclut.

Remarque 2.
On utilise seulement que $r_{ABM} = r_{DCN}$ et pas que ce rapport vaut -1.

Remarque 3.
Il est également possible de résoudre cet exercice en introduisant T comme le point de Miquel du quadrilatère formé par les droites (AB), (BD), (DC) et (AC) et de montrer que les cocyclicités ont bien lieu. On a donne cet preuve pour montrer la parabole cachée de la figure dès qu'il y a une point de Miquel !

Solution de l'exercice 11
On note U et V les points d'intersection de la droite (EF) avec le cercle circonscrit à $ABCD$. On sait que $XU = XV$. On applique maintenant le troisième théorème de Desargues aux points A, B, C et D. On choisit les coniques $(AB) \cup (CD)$, $(AC) \cup (BD)$ et le cercle circonscrit à ω. Cela induit une involution projective de la droite (ST) qui échange S avec T, X avec lui-même et U avec V. Comme $XU = XV$, cette involution coïncide avec la symétrie centrale de centre X et donc $XS = XT$ comme voulu.

Solution de l'exercice 12
Cet exercice est l'exercice dual de l'exercice précédent.

Solution de l'exercice 13
D'après le dual du lemme de coconicité on déduit que les droites (AF), (FB), (BD), (DC), (EC) et (EA) sont tangents à une seule et même conique. On conclut alors en appliquant le théorème de Brianchon.

Solution de l'exercice 14
On note M_1, M_2 et M_3 les milieux sur les côtés (BC), (CA) et (AB). On va montrer qu'il existe une involution projective de l'espace des droites passant par H qui échange (HM_1) avec (HA), (HM_2) avec (HB) et (HM_3) avec (HC). Cela concluerait par une forme de réciproque du deuxième théorème de Desargues. En effet, notons M_3' l'intersection de la droite (M_1M_2) avec le côté (BC). D'après le théorème de Desargues appliqué aux droites (AB), (BC), (CA) et (M_1M_2), on sait qu'il existe une involution qui échange (HM_1) avec (HA), (HM_2) avec (HB) et (HM_3') avec (HC). On conclut par un argument d'unicité.

Soit maintenant d une des bissectrices des droites ℓ_1 et ℓ_2. La symétrie d'axe d échange effectivement (HM_1) avec (HA), (HM_2) avec (HB) et (HM_3) avec (HC). Cela conclut.

Solution de l'exercice 15
Cet exercice nous fait penser fortement au théorème des axes radicaux et a raison ! On considère la transformation projective qui envoie les points communs d'intersection sur les deux points cycliques. Dans ce cas l'exercice devient exactement la concourance des axes radicaux.

Solution de l'exercice 16
On montre dans un premier temps que les points U, V, W et Z sont cocycliques. On effectue une petite chasse aux angles.

$$\begin{aligned}\widehat{UWZ} &= \widehat{BPS} - \widehat{PAX} \\ &= \widehat{CRQ} - \widehat{SDZ} \\ &= \widehat{RVZ}.\end{aligned}$$

On va maintenant montrer que le quadrilatère $XYZW$ est cyclique. On utilise le troisième théorème de Desargues dans le quadrilatère $ABCD$ et pour la droite (PS). On obtient alors qu'il existe une involution $\mathcal{I}$ qui échange W avec Z, P et S ainsi que M et N si M et N sont les intersections de la droite (PS) avec ω_1. Soit K le point d'intersection des droites (XY) et (PS). Une inversion de centre K et de rayon $\sqrt{KX \cdot KY}$ échange P et S ainsi que M et N donc l'involution $\mathcal{I}$ coïncide avec cette inversion. On en déduit que $KW \cdot KZ = KX \cdot KY$. Ce qui conclut. De la même manière, $UVXY$ est cyclique.

Comme les droites (UV), (WZ) et (XY) n'ont pas de raison d'être concourantes on en déduit que les points U, V, W, X, Y et Z sont sur un même cercle.

4 Algèbre combinatoire (Félix)

Exercice 1
Étant donnés 2023 nombres, on nomme "fusion" l'opération consistant à remplacer deux d'entre eux par deux exemplaires de leur moyenne. Montrer qu'il existe un ensemble de 2023 réels distincts tels que si on y effectue une fusion quelconque, il est toujours possible d'atteindre un état où tous les nombres sont égaux en effectuant des fusions supplémentaires.

Exercice 2
Pour tout ensemble $A = a_1, a_2, a_3, a_4$ de 4 entiers strictement positifs distincts de somme $s_A = a_1 + a_2 + a_3 + a_4$, on note p_A le nombre de paires (i, j) avec $1 \leqslant i < j \leqslant 4$ telles que $a_i + a_j$ divise s_A. Parmi tous les ensembles de quatre entiers strictement positifs distincts, quels sont ceux pour lesquels p_A est maximal ?

Exercice 3
Le nombre 2 est écrit n fois au tableau. On répète $n - 1$ fois l'opération consistant à effacer deux nombres a et b écrits sur le tableau et à les remplacer par $\sqrt{\dfrac{ab+1}{2}}$. Il reste alors un seul nombre x.
a) Montrer que $x \geqslant \sqrt{\dfrac{n+3}{n}}$

b) Montrer qu'il existe une infinité de valeurs de n pour lesquelles l'égalité est possible, et une infinité de valeurs pour lesquelles l'égalité est impossible.

Exercice 4
a) Prouver qu'il existe des entiers a, b et c tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $|a|,|b|,|c| < 10^6$ pour lesquels

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| < 10^{-11}$$

b) Soient a, b et c des entiers tels que $(a,b,c) \neq (0,0,0)$ et $|a|,|b|,|c| < 10^6$. Prouver que

$$|a + b\sqrt{2} + c\sqrt{3}| > 10^{-21}$$

Exercice 5
Soit $a_0, a_1, a_2, ...$ une suite de réels vérifiant $a_n = |a_{n+1} - a_{n+2}|$ pour tout n et telle que a_0 et a_1 sont des réels strictement positifs distincts.

Cette suite peut elle être bornée ?

Exercice 6
Henry possède $3n$ batons de longueurs $2, 3, 4, ..., 3n + 1$. Montrer qu'il peut les assembler par groupes de 3 de manière à former n triangles obtus.

Exercice 7
Montrer que tout entier peut s'écrire comme la somme de puissances distinctes du nombre d'or $\varphi = \dfrac{1 + \sqrt{5}}{2}$

Exercice 8
Soit $n \geqslant 3$ un entier et $a_1 < a_2 < \ldots < a_n$ des nombres réels strictement positifs de somme 2. Soit X un sous-ensemble de $\{1, 2, \ldots, n\}$ tel que la somme

$$\left| 1 - \sum_{i \in X} a_i \right|$$

soit minimale. Démontrer qu'il existe des nombres réels $b_1 < b_2 < \ldots < b_n$ strictement positifs de somme 2 et tels que

$$\sum_{i \in X} b_i = 1.$$

5 Géométrie projective dynamique (Aurélien)

Coming soon...

6 Suites et inégalités non classiques (Henry)

Ce TD part du constat suivant : peu d'inégalités sont tombées dans les années 2010 aux Olympiades Internationales, avant un large regain d'intérêt pour la discipline dans les années plus récentes avec essentiellement un problème chaque année : les P2 en 2020 et 2021, une inéquation fonctionnelle en P2 en 2022, ainsi que le P4 en 2023. Il y a donc beaucoup à gagner à savoir résoudre les problèmes d'inégalité !

Les problèmes proposés ici sont pour la plupart issus de compétitions internationales plus ou moins récentes, et ont pour objectif de couvrir un panel assez varié d'inégalités olympiques, sachant que les inégalités homogènes en 3 variables ne sont plus vraiment à la mode. Nous ne parlerons pas ici de techniques d'optmisation comme les multiplicateurs de Lagrange, non nécessaires à la résolution de problèmes d'olympiade.

Exercice 1 (Pologne 1995)
Soit n un entier strictement positif. Trouver la valeur minimale que peut prendre la quantité

$$x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \ldots + \frac{x_n^n}{n},$$

où $x_1, \ldots, x_n$ sont des réels strictement positifs dont la somme des inverses vaut exactement n.

Solution de l'exercice 1
La contrainte donnée dans l'énoncé nous dit que la moyenne harmonique des x_i est égale à 1. Ainsi, par IGH,

$$x_1 \cdots x_n \geq 1.$$

Un fois cela obtenu, il suffit d'appliquer l'IAG pondérée par les poids $1, \frac{1}{2}, \ldots, \frac{1}{n}$ aux x_i^i pour obtenir

$$\begin{aligned} x_1 + \frac{x_2^2}{2} + \frac{x_3^3}{3} + \ldots + \frac{x_n^n}{n} &\geq \left(1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}\right) \sqrt[1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}]{x_1 x_2 \cdots x_n} \\ &\geq 1 + \frac{1}{2} + \ldots + \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

On voit alors que ce minimum est atteint lorsque les x_i sont tous égaux à 1.

Exercice 2 (Vietnam 1998)
Soient $x_1, \ldots, x_n$ des réels strictement positifs tels que

$$\frac{1}{x_1 + 1998} + \ldots + \frac{1}{x_n + 1998} = \frac{1}{1998},$$

démontrer que

$$\frac{\sqrt[n]{x_1 \ldots x_n}}{n-1} \geq 1998.$$

Solution de l'exercice 2
Remarquons d'abord que le 1998 ne sert à rien dans l'énoncé puisqu'en remplaçant les x_i par $1998 \cdot x_i$ tous les 1998 de l'énoncé sont remplacés par des 1. On applique ce changement dans

la suite. On commence par poser $y_i = \frac{1}{x_i+1}$, ainsi $x_i = \frac{1}{y_i} - 1$. On réécrit le produit qu'on veut minimiser :

$$\prod_{i=1}^{n} x_i = \prod_{i=1}^{n} \left(\frac{1}{y_i} - 1\right) = \exp\left[\sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{y_i} - 1\right)\right].$$

Nous cherchons à minimiser cette somme. Pour cela on aimerait appliquer l'inégalité de Jensen. On vérifie que $\ln\left(\frac{1}{y} - 1\right)$ est bien convexe. En effet

$$\frac{d}{dy} \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{1}{y^2 - y}$$
$$\frac{d^2}{dy^2} \ln\left(\frac{1}{y} - 1\right) = \frac{1 - 2y}{(y^2 - y)^2},$$

mais cela pose problème puisque la fonction n'est que convexe sur $[0, 1/2]$. Qu'à cela ne tienne, on sait que les y_i somment à 1, on s'attend à ce qu'ils soient presque tous entre 0 et $\frac{1}{2}$. S'ils le sont tous alors

$$\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \ln\left(\frac{1}{y_i} - 1\right) \geq \ln\left(\frac{1}{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} y_i} - 1\right) = \ln(n-1),$$

d'où le résultat.

Sinon il convient de remarquer que si l'on remplace deux y_i par leur moyenne, la valeur de la somme décroît. En effet il suffit de vérifier que

$$\left(\frac{1}{y} - 1\right)\left(\frac{1}{y'} - 1\right) \geq \left(\frac{2}{y + y'} - 1\right),$$

ce qui est vrai après calcul si $y + y' \leq 1$.

En faisant les remplacements nécessaires, on se ramène donc dans la zone où la fonction est convexe.

Exercice 3 (RMM 2016)
Soient x et y des réels strictement positifs tels que $x + y^{2016} \geq 1$.
Démontrer que $x^{2016} + y > 1 - \frac{1}{100}$.

Solution de l'exercice 3
On rappelle l'inégalité de Bernoulli. Pour $n > 1$ et $x > -1$ non nul,

$$1 + nx < (1 + x)^n.$$

Si $x \geq \frac{1}{100 \cdot 2016}$, on remarque que par Bernoulli,

$$x^{2016} \geq \left(1 - \frac{1}{100 \cdot 2016}\right)^{2016} > 1 - \frac{1}{100}.$$

Dans ce cas l'inégalité à montrer est déjà vraie.

Dans l'autre cas, la condition permet de déduire que y est assez large. En effet, $y^{2016} \geq 1 - x > \frac{1}{100 \cdot 2016}$. Pour démontrer que $y > 1 - \frac{1}{100}$, il suffit de démontrer l'inégalité

$$\left(\frac{1}{100 \cdot 2016}\right)^{\frac{1}{2016}} \geq \frac{99}{100}.$$

Or par Bernoulli encore une fois,

$$\left(1+\frac{1}{99}\right)^{2016} > \left(1+\frac{1}{99}\right)^{20\cdot 99} > \left(1+99\cdot\frac{1}{99}\right)^{20} = 2^{20} > 100\cdot 2016,$$

ce qui conclue.

Exercice 4 (Shortlist IMO 2003)
Soient a_{ij} , $1 \leq i, j \leq 3$ des nombres réels tels que les a_{ij} sont strictement positifs pour $i = j$ mais strictement négatifs pour $i \neq j$.
Démontrer qu'il existe des réels strictement positifs c_1, c_2, c_3 tels que les nombres

$$\begin{aligned} &a_{11}c_1 + a_{12}c_2 + a_{13}c_3 \\ &a_{21}c_1 + a_{22}c_2 + a_{23}c_3 \\ &a_{31}c_1 + a_{32}c_2 + a_{33}c_3 \end{aligned}$$

soient soit tous strictement négatifs, soit tous strictement positifs, ou alors tous nuls.

Solution de l'exercice 4
On considère les points P, Q, R de coordonnées (a_{11}, a_{12}, a_{13}), (a_{21}, a_{22}, a_{23}) et (a_{31}, a_{32}, a_{33}). On remarque qu'ils vivent tous dans leur propre huitième d'espace particulier. L'énoncé nous demande en fait de vérifier qu'il existe un point à l'intérieur du triangle PQR dont les coordonnées sont soit $(+,+,+)$, soit $(-,-,-)$. Considérons les deux premières coordonnées (on projette sur le plan xy. Notons alors P', Q', R' les projections des points correspondants.

— Si $O(0,0,0)$ est intérieur à P', Q', R', on contruit un point intérieur à PQR comme suit. On relève O en un point S dans PQR qui est projeté sur O. Si $S = O$ on a gagné. Si la troisième coordonnée de S est négative, on peut légèrement bouger S dans PQR vers les x et y négatifs et obtenir $x(S), y(S), z(S) < 0$. On fait de même à l'opposé si $z(S) > 0$.

— Sinon, O est en dehors de $P'Q'R'$. Alors le segment $[OR']$ intersecte $[P'Q']$ en T' dans le quadrant $x < 0, y < 0$. En relevant T' en T on obtient un point à coordonnées strictement négatives car $z(P) < 0$ et $z(Q) < 0$. Ainsi un point de $[RT]$ très proche de T convient.

Remarque 1.
Plusieurs autres solutions astucieuses ont été proposées par les élèves, à base de produits scalaires et de coordonnées homogènes.

Exercice 5 (British MO 1998)
Résoudre pour $x, y, z \in \mathbb{R}^+$ nombres réels positifs le système d'équations suivant :

$$\begin{aligned} xy + yz + zx &= 12 \\ xyz &= 2 + x + y + z. \end{aligned}$$

Solution de l'exercice 5
Cet exercice est un problème d'inégalité déguisé. On remarque que $(2,2,2)$ est une solution, ainsi on aimerait montrer que nous sommes dans le cas d'égalité d'une inégalité.

En effet par IAG on a

$$12 \geq xy + yz + zx \geq 3\sqrt[3]{x^2y^2z^2},$$

ainsi que

$$xyz = 2 + x + y + z \geq 2 + 3\sqrt[3]{xyz}.$$

On voit que si l'on pose $X = \sqrt[3]{xyz}$, à la fois $X^2 \leq 4$ et $X^3 - 3X - 2 \geq 0$, soit $X \leq 2$ et $(X-2)(X+1)^2 \geq 0$, ce qui revient à dire que $X = 2$. Ainsi toutes les inégalités sont des égalités et on obtient rapidement $x = y = z = 2$, la seule solution.

Les exercices suivants n'ont pas été traité en cours.

Exercice 6 (Shortlist IMO 2010)
Soient $x_1, \ldots, x_{100}$ des réels positifs tels que $x_i + x_{i+1} + x_{i+2} \leq 1$ pour tout $1 \leq i \leq 100$ (en notant $x_{101} = x_1, x_{102} = x_2$). Trouver la valeur maximale de

$$\sum_{i=1}^{100} x_i x_{i+2}.$$

Exercice 7 (Chine 2016)
Soient $a_1, a_2, \cdots, a_n \in \{0, 1, \cdots, n\}$. Pour tous $1 \leq j \leq n$, on définit b_j comme le nombre d'entiers i de $\{1, \ldots, n\}$ tels que $a_i \geq j$. Par exemple pour $n = 3$, si $a_1 = 1, a_2 = 2, a_3 = 1$, alors $b_1 = 3, b_2 = 1, b_3 = 0$.

1. Démontrer que
$$\sum_{i=1}^{n} (i + a_i)^2 \geq \sum_{i=1}^{n} (i + b_i)^2.$$
2. Démontrer que pour tout entier $k \geq 3$,
$$\sum_{i=1}^{n} (i + a_i)^k \geq \sum_{i=1}^{n} (i + b_i)^k.$$

Exercice 8 (Shortlist IMO 2020)
Soient n et k des entiers strictement positifs. Démontrer que si $a_1, \ldots, a_n \in [1, 2^k]$, on a

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{a_i}{\sqrt{a_1^2 + \ldots + a_i^2}} \leq 4\sqrt{kn}$$

Exercice 9 (British MO 2020)
Une suite de réels non nuls $b_1, b_2, b_3, \ldots$ vérifie

$$b_{n+2} = \frac{b_{n+1}^2 - 1}{b_n}$$

pour tout entier naturel n.

En supposant que $b_1 = 1$ et $b_2 = k$, où $1 < k < 2$, démontrer qu'il existe une constante B qui dépend de k telle que $-B \leqslant b_n \leqslant B$ pour tout n. Démontrer de plus que pour tout $1 < k < 2$, il existe une valeur de n telle que $b_n > 2020$.

7 Géométrie combinatoire (Vincent)

Exercices

Exercice 1
On considère n points du plan en position générale : trois d'entre eux ne sont jamais alignés. On suppose qu'il existe k triangles d'aire 1 dont les sommets figurent parmi ces n points. Démontrer que $3k \leqslant 2n(n-1)$.

Exercice 2
On considère n points du plan en position générale : trois d'entre eux ne sont jamais alignés. On suppose en outre que chacun de ces n points est le centre d'un cercle passant par au moins k des $n-1$ points restants. Démontrer que $k < 1/2 + \sqrt{2n}$.

Exercice 3
Six points ont été disposés dans un rectangle de dimensions 3×4. Démontrer que, parmi ces six points, il en existe deux qui sont à distance au plus $\sqrt{5}$ l'un de l'autre.

Exercice 4
Soit $n \geqslant 2$ un entier. On a placé $3n^2 - 10n + 10$ cercles de rayon 1 dans le plan. Démontrer que l'une des deux assertions suivantes est vraie :

a) il existe n cercles dont aucun ne rencontre un autre ;

b) il existe n cercles dont chacun rencontre les $n-1$ autres.

Exercice 5
On considère n points du plan, en position quelconque. Est-il possible de les colorier en rouge et noir de sorte que, pour toute droite d verticale ou horizontale, la différence (en valeur absolue) entre le nombre de points rouges de d et le nombre de points noirs de d ne dépasse jamais 1 ?

Exercice 6
Soit P un polygone régulier à 2026 côtés. On dit qu'une diagonale de P est *bonne* si ses extrémités partagent le contour de P en deux parties ayant chacune un nombre impair de côtés de P. On dit aussi que les côtés de P sont *bons*. On suppose que P a été subdivisé en triangles par 2023 diagonales n'ayant deux à deux aucun point commun à l'intérieur de P. Combien, au maximum, une telle subdivision peut-elle contenir de triangles isocèles dont deux côtés sont bons ?

Solutions des exercices

Solution de l'exercice 1
Par construction, il existe $3k$ couples (a, T) pour lesquels T est un triangle d'aire 1 et a est une arête de T. Or, chaque arête a appartient à au plus quatre tels couples, car le triangle T est formé avec un point P situé à distance $2/|a|$ de la droite soutenant l'arête a : une fois a fixée, le point P est contraint à vivre sur deux droites parallèles, dont chacune contient au plus deux de nos n points. Puisqu'il y a $n(n-1)/2$ arêtes a possibles, on a donc au plus $2n(n-1)$ couples (a, T) possibles, de sorte que $3k \leqslant 2n(n-1)$.

Solution de l'exercice 2

Soit X notre ensemble de points ; on numérote ses éléments de P_1 à P_n puis, pour tout entier $i \leqslant n$, on note C_i un cercle de centre P_i et contenant au moins k points de X. On va alors compter les paires de points appartenant tous deux à un cercle C_i.

Pour ce faire, on traite les cercles C_i un par un. A priori, C_i nous permet de découvrir $\binom{k}{2}$ paires de points. Cependant, on a pu en avoir déjà découvert certaines, *via* d'autres cercles C_j pour lesquels $j \leqslant i-1$. Plus précisément, comme C_i et C_j ont au plus deux points de X en commun, $i-1$ paires de points qu'on aura ajoutées grâce au cercle C_i étaient susceptibles d'avoir déjà été comptabilisées. Cela nous assure que C_i nous permet de découvrir au moins $\binom{k}{2}-(i-1)$ nouvelles paires de points.

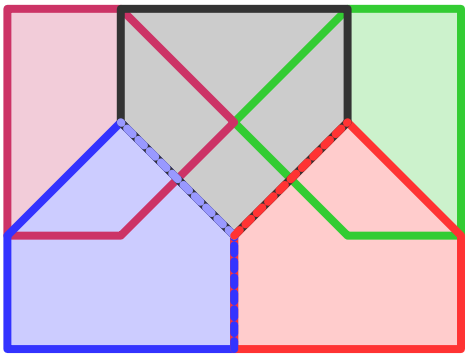
Au total, on a donc découvert au moins $n\binom{k}{2} - n(n-1)/2$ paires de points. Or, il y a $\binom{n}{2}$ paires de points en tout. On en conclut que $n\binom{k}{2} - \frac{n(n-1)}{2} \leqslant \binom{n}{2}$. Si l'on pose $k^* = 1/2 + \sqrt{2n}$, cette dernière inégalité se réécrit comme

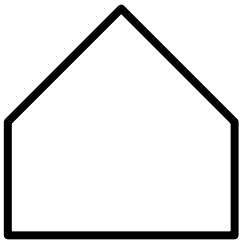
$$k(k-1) \leqslant 2(n-1) < 2n - 1/4 = k^*(k^*-1),$$

démontrant ainsi que $k < k^*$.

Solution de l'exercice 3

Découpons notre rectangle 3×4 en cinq zones monochromes en forme de maison, comme ci-dessous ; certaines zones se chevauchent, mais ce n'est pas grave.





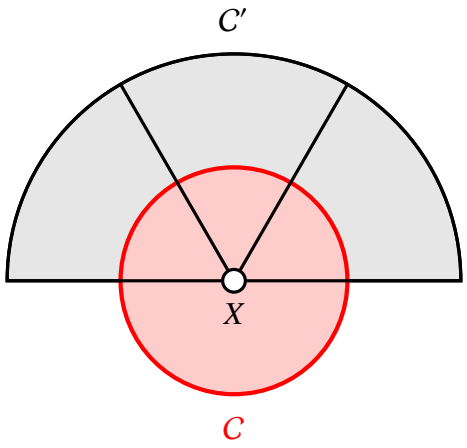
Maison

Parmi nos six points, deux appartiennent à la même zone. Ils sont donc à distance au plus $\sqrt{5}$ l'un de l'autre.

Solution de l'exercice 4

Soit $\mathcal{S}$ notre ensemble de points, et X un sommet de l'enveloppe convexe de $\mathcal{S}$, puis C le cercle de rayon 1 centré en X. L'ensemble $\mathcal{S}$ est inclus dans un demi-plan $\mathcal{P}$ passant par X.

Supposons que X rencontre au moins $3n-5$ autres cercles. On considère alors le demi-cercle, disons C', de centre X, de rayon 2 et inclus dans le demi-plan $\mathcal{P}$: les $3n-5$ centres de cercles que rencontre X appartiennent à C'. On divise ensuite ensuite C' en trois secteurs angulaires de 60° chacun. L'un d'eux contient au moins $n-1$ points, ainsi que X lui-même, et il est de diamètre 2 : on est donc dans le cas b).



Sinon, on colorie le cercle C en rouge, et on élimine de $\mathcal{S}$ le point X et les $3n-6$ (ou moins) centres des cercles que rencontre C. On réitère cette opération $n-3$ fois supplémentaires, de manière à avoir $n-2$ cercles rouges, qui ne se rencontrent pas et ne rencontrent aucun des cercles non encore éliminés.

Puisque l'on a éliminé au plus $3n-5$ points à chacune de nos $n-2$ étapes, il nous reste au moins $(3n^2-10n+10)-(3n-5)(n-2) = n$ points. Si les cercles centrés en ces points se rencontrent tous, on est dans le cas b). Sinon, on colorie en rouge deux cercles qui ne se rencontrent pas. Aucun de nos n cercles rouges n'en rencontre un autre, et on est donc dans le cas a).

Solution de l'exercice 5

Soit X l'ensemble de nos n points. On introduit le graphe biparti $\mathcal{G} = (A \sqcup B, E)$ dont A est l'ensemble des droites horizontales passant par un point de X, B est l'ensemble des droites verticales passant par un point de X, et E est l'ensemble des paires de droites a et b qui se rencontrent en un point de X. Il s'agit désormais de colorier les arêtes de $\mathcal{G}$ en rouge et noir de sorte que chaque sommet de $\mathcal{G}$ soit de degrés rouge et noir différents d'au plus 1 l'un de l'autre : on appelle *score* d'un sommet la différence entre ces degrés.

Pour ce faire, on recouvre $\mathcal{G}$ à l'aide d'un nombre minimum de chemins, chaque arête appartenant à un unique chemin ; ces chemins peuvent être des cycles si nécessaire. On colorie ensuite les arêtes de chaque chemin en utilisant alternativement les couleurs rouge et noire ; comme $\mathcal{G}$ est biparti, chaque cycle est de longueur paire, donc ce coloriage existe même sur les cycles. Lorsque l'on suit un chemin, rentrer dans un sommet s pour en ressortir aussitôt ne change pas le score de s. Par conséquent, chaque chemin fait varier d'au plus 1 le score de ses extrémités (si notre chemin n'est pas un cycle), et ne change pas le score des autres sommets.

Or, chaque sommet est l'extrémité d'au plus un de nos chemins. Notre coloriage nous assure donc que chaque sommet sera de score au plus 1, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6

On dira qu'un triangle est *isobon* s'il est isocèle et possède deux bons côtés. En regroupant les 2026 côtés de P en 1013 groupes de deux côtés consécutifs, on forme 1013 triangles isobons, que l'on peut ensuite intégrer à une triangulation.

On considère maintenant une triangulation quelconque, et on entreprend de démontrer qu'elle ne contient pas plus de 1013 triangles isobons. Dans la suite, on identifiera les côtés de P à des bonnes diagonales. On considère alors le graphe biparti $\mathcal{G} = (A \sqcup B, E)$ dont A est l'ensemble des triangles de la triangulation, B est l'ensemble des bonnes diagonales, et E est l'ensemble des paires formées d'un triangle $a \in A$ et d'un *bon* côté de a.

Enfin, on associe un entier à chaque bon sommet $b \in B$, c'est-à-dire chaque bonne diagonale, en procédant comme suit : si b sépare P en deux parties comptant x et y sommets, on associe à b l'entier $\min\{x, y\}$. Dès lors, un triangle $a \in A$ est isobon s'il est voisin de deux sommets qui ont été associés au même entier.

Tout triangle $a \in A$ divise P en quatre régions : t et trois autres régions qui ne partagent aucun côté entre elles. Par conséquent, ôter a du graphe $\mathcal{G}$ déconnecte $\mathcal{G}$, ce qui signifie que $\mathcal{G}$ est acyclique : c'est une forêt.

En outre, tout triangle $a \in A$ possède 0 ou 2 côtés bons ; son degré dans $\mathcal{G}$ vaut donc 0 ou 2. Par conséquent que chaque composante connexe de $\mathcal{G}$ est en fait un chemin, qui part d'un côté de P pour arriver à un autre côté de P : il existe 1013 tels chemins. Or, lorsque l'on parcourt un chemin, les entiers associés aux sommets $b \in B$ que l'on rencontre commencent par croître strictement à partir de 1, puis ils décroissent strictement jusqu'à valoir de nouveau 1. Le seul moment où l'on a pu rencontrer deux sommets de même numéro était le moment où ce numéro était le plus grand possible sur le chemin. On en conclut que chaque chemin contient au plus un triangle isobon, et donc que le maximum recherché vaut 1013.

8 TD Petites idées simples (Aurélien)

Ce cours est fondé sur le TD du cours de Baptiste Séraille de 2020 groupe E.

2 Entraînement de mi-parcours

Énoncés

Exercice 1
Théo dispose de 101 cartes, qu'il a numérotées de 1 à 101 au stylo bleu. Il place ensuite les cartes face cachées autour d'un cercle dans un ordre quelconque. Pour chaque carte C, il note $f(C)$ le nombre de cartes avec un numéro bleu inférieur à celui de C, parmis les 50 qui suivent la carte C lorsque l'on parcourt le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre. Il inscrit alors au stylo rouge le nombre $f(C)$ sur la face visible de la carte C.

Une fois cela fait, Aurélien arrive et voit la face visible de chaque carte. Montrer qu'Aurélien peut retrouver les numéros bleus à partir des numéros rouges inscrits.

Exercice 2
Déterminer la plus grande constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout 2023−uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_{2023})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} > C$$

Exercice 3
Un ensemble A d'entiers strictement positifs distincts possède les propriétés suivantes :

- Si $n \in A$, alors $2n \in A$.
- Pour tout entier n strictement positif, A contient un élément divisible par n.
- Pour tout $C > 0$, on dispose d'un sous ensemble fini B de A tel que $\sum_{x \in B} \frac{1}{x} > C$.

Montrer que pour tout rationnel r strictement positif, on dispose d'un sous-ensemble fini B de A tel que $\sum_{x \in B} \frac{1}{x} = r$

Solutions

Exercice 1
Théo dispose de 101 cartes, qu'il a numérotées de 1 à 101 au stylo bleu. Il place ensuite les cartes face cachées autour d'un cercle dans un ordre quelconque. Pour chaque carte C, il note $f(C)$ le nombre de cartes avec un numéro bleu inférieur à celui de C, parmis les 50 qui suivent la carte C lorsque l'on parcourt le cercle dans le sens des aiguilles d'une montre. Il inscrit alors au stylo rouge le nombre $f(C)$ sur la face visible de la carte C.

Une fois cela fait, Aurélien arrive et voit la face visible de chaque carte. Montrer qu'Aurélien peut retrouver les numéros bleus à partir des numéros rouges inscrits.

Solution de l'exercice 1

Etant donné deux cartes c_1 et c_2, on dit que $c_1 \prec c_2$, ou encore que c_2 *est dans le champ de vision de* c_1 si la carte c_2 est parmi les 50 cartes suivant c_1 dans le sens des aiguilles d'une montre.

L'hypothèse de l'énoncé se traduit par le fait que pour toute paire de cartes (c_1, c_2) distinctes, on a $c_1 \prec c_2$ ou $c_2 \prec c_1$.

On commence par identifier la carte dont le numéro bleu est 1. On note dans l'ordre des aiguilles d'une montre $c_1, \dots, c_r$ les cartes dont le numéro rouge est 0, et $b_1, \dots, b_r$ leur numéro bleu. Notons que si $c_i \prec c_j$, alors $b_i < b_j$.

Soit i l'indice tel que $b_i = 1$. Alors pour tout $j \neq i$, $b_j > b_i$ donc on ne peut pas avoir $c_j \prec c_i$. Ainsi, pour tout $j \neq i$, $c_i \prec c_j$. Ainsi, c_i est l'unique carte parmi les c_j qui n'est dans le champ de vision d'aucune des autres cartes c_j. Aurélien peut donc identifier la carte de numéro bleu 1.

Pour déterminer les numéros suivants, Aurélien remplace le numéro bleu de la carte avec le numéro bleu 1 par le numéro 102 et réécrit les numéros rouges de toutes les cartes pour cette nouvelle configuration.

En réitérant le procédé décrit précédemment, Aurélien peut alors déterminer successivement toutes les numéros bleus dans l'ordre croissant.

Exercice 2
Déterminer la plus grande constante $C > 0$ vérifiant la propriété suivante :

Pour tout 2023−uplet $(a_1, a_2, \ldots, a_{2023})$ de réels strictement positifs deux à deux distincts, on a l'inégalité suivante :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} > C$$

Solution de l'exercice 2

Réponse : 1012

On commence par montrer que $C \leqslant 1012$.
Pour cela, on se donne $0 < \varepsilon$ suffisamment petit et on pose

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = (i-1)\varepsilon,\ a_{2i+1} = 1 + i\varepsilon \ \ \forall\, 2 \leqslant i \leqslant 1011$$

pour laquelle on vérifie que les termes de la suite sont deux à deux distincts.

$$\begin{aligned}
RHS &= \frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} \\
&= \frac{\varepsilon^2}{\varepsilon} + \frac{1}{1+\varepsilon-\varepsilon} + \frac{1+\varepsilon}{1} + \sum_{i=2}^{1010} \left(\frac{(i-1)\varepsilon}{1+i\varepsilon-i\varepsilon} + \frac{1+i\varepsilon}{1+(i+1)\varepsilon-i\varepsilon} \right) \\
&\quad + \tfrac{1010\varepsilon}{1+1011\varepsilon-\varepsilon^2} + \tfrac{1+1011\varepsilon}{1-\varepsilon^2} \\
&= \varepsilon + 1 + 1 + \varepsilon + \sum_{i=2}^{1010} \left((i-1)\varepsilon + 1 + \underbrace{\frac{(i-1)\varepsilon}{1+\varepsilon}}_{<(i-1)\varepsilon} \right) + \underbrace{\frac{1010\varepsilon}{1+1011\varepsilon-\varepsilon^2}}_{<1010\varepsilon} + \underbrace{\frac{1+1011\varepsilon}{1-\varepsilon^2}}_{<1+1012\varepsilon} \\
&< 1012 + \left(\tfrac{1011\times 1012}{2} + 2 \right) \varepsilon
\end{aligned}$$

où chacune des inégalités est satisfaite pour $\varepsilon > 0$ suffisamment petit. Ainsi, pour tout $C' > 1012$, on dispose de $(a_1, \ldots, a_{2023})$ tel que l'expression du membre de gauche est inférieur à C'. On a donc bien $C \geqslant 1012$.

On démontre désormais que $C \geqslant 1012$. Soit $(a_1, \ldots, a_{2023})$ un ensemble de réels strictement positifs et distincts. Pour simplifier la notation, on pose $a_{2024} = a_1$ et $a_{2025} = a_2$

Pour tout i, on pose $f(i) = a_{i+1}$ si $a_{i+1} > a_{i+2}$ et $f(i) = i + 2$, de sorte que $\dfrac{a_i}{|a_{i+1} - a_{i+2}|} \geqslant \frac{a_i}{a_{f(i)}}$.

La suite $(f^{(n)}(1))_n$ étant à valeurs dans $\{1, \ldots, 2023\}$, de sorte que l'on dispose de $r < s$ tel que $f^{(r)}(1) = f^{(s)}(1)$. Quitte à translater la suite, on peut supposer que $r = 0$. La suite est donc périodique, on note p sa période. Puisque $|f(i) - i| \leqslant 2$, on a $2p \geqslant 2023$ de sorte que $p \geqslant 1012$.

On peut alors conclure par l'inégalité des moyennes :

$$\frac{a_1}{|a_2 - a_3|} + \frac{a_2}{|a_3 - a_4|} + \ldots + \frac{a_{2023}}{|a_1 - a_2|} \geqslant \sum_{i=0}^{p-1} \frac{a_{f^{(i)}(1)}}{a_{f^{(i+1)}(1)}} \geqslant p \sqrt[p]{\prod \frac{a_{f^{(i)}(1)}}{a_{f^{(i+1)}(1)}}} = p \geqslant 1012$$

Remarque : Le problème reste vrai si les réels ne sont plus supposés deux à deux distincts (mias en imposant que le membre de gauche soit bien défini). La construction peut alors être simplifiée par

$$a_1 = \varepsilon^2, a_2 = 1, a_3 = 1 + \varepsilon \quad \text{et} \quad a_{2i} = \varepsilon,\ a_{2i+1} = 1 \ \ \forall\, 2 \leqslant i \leqslant 1011$$

Exercice 3
Un ensemble A d'entiers strictement positifs distincts possède les propriétés suivantes :

- Si $n \in A$, alors $2n \in A$.
- Pour tout entier n strictement positif, A contient un élément divisible par n.
- Pour tout $C > 0$, on dispose d'un sous ensemble fini B de A tel que $\sum_{x\in B} \frac{1}{x} > C$.

Montrer que pour tout rationnel r strictement positif, on dispose d'un sous-ensemble fini B de A tel que $\sum_{x\in B} \frac{1}{x} = r$

Solution de l'exercice 3
On dit qu'un rationnel r est *atteignable* si il existe un sous-ensemble fini B de A tel que $\sum_{x\in B} \frac{1}{x} = r$.

On commence par prouver qu'il suffit de montrer que tous les nombres dyadiques sont atteignables par tout ensemble vérifiant les mêmes propriétés que A.

Soit $r = \frac{a}{2^k b}$ un rationnel strictement positif, avec b impair et a premier avec $2^k b$. D'après l'hypothèse de l'énoncé, on dispose de m tel que $mb \in A$. Alors tout nombre de la forme

$$\frac{1}{mb}\left(\sum_{i=0}^{r} 2^{-\alpha_i}\right)$$

avec $\alpha_1 < \ldots < \alpha_r$ est atteignable. On cherche alors à soustraire un tel nombre à la fraction $\frac{a}{2^k b}$ pour obtenir un nombre dyadique.

Pour cela, on note ℓ tel que $2^\ell \leqslant b < 2^{\ell+1}$. On dispose d'un entier $n \in \{0, \ldots, b-1\}$ tel que $n \equiv ma2^{-k+\ell} \mod b$. On note alors $n = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i}$ sa décomposition en base 2. On dispose donc de p tel que $pb = 2^\ell ma - 2^k n$. On vérifie alors que

$$\frac{a}{2^k b} - \left(\sum_{i=1}^{r} \frac{1}{2^{\ell-\alpha_i}}\right)\frac{1}{mb} = \frac{p}{2^{\ell+k}}$$

On vérifie ensuite que $A \setminus \{2^k b, k \in \mathbb{N}\}$ vérifie les mêmes propriétés que a, et il suffit de montrer que les dyadiques sont atteignables par tout ensemble vérifiant les mêmes propriétés que A.

Soit désormais A un ensemble vérifiant les propriétés de l'énoncé que $\frac{p}{2^k}$ un entier dyadique.

Soit P l'ensemble des nombres x tels que $x \in P$ mais $x/2$ n'est pas dans P.

On a alors

$$A = \bigsqcup_{n\in\mathbb{N}} 2^n P = \bigsqcup_{k\in\mathbb{N}} \{2^n x, x \in P\}$$

en particulier, on a

$$+\infty = \sum_{x\in A} \frac{1}{x} = \lim_{m\to\infty} \sum_{x\in P} \underbrace{\sum_{n=0}^{m} \frac{1}{2^n x}}_{\to 2/x} = 2\sum_{x\in P} \frac{1}{x}$$

Etant donné $x \in P$ tel que $x = \sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i}$, on vérifie que

$$\frac{1}{2^{\alpha_r}} = \frac{1}{x}\left(\sum_{i=1}^{r} 2^{\alpha_i - \alpha_r}\right)$$

est atteignable.

Par ailleurs, pour tout j, on note N_j le nombre d'éléments de P tels que $2^j \leqslant x < 2^{j+1}$. On a alors par comparaison que

$$\sum_{j\in\mathbb{N}} \frac{N_j}{2^j} \geqslant \sum_{j\in\mathbb{N}} \sum_{x\in P\cap[2^j,2^{j+1}[} \frac{1}{x} = +\infty$$

On dispose donc de $x_1, \ldots, x_\ell \in P$ tels que si $j_1, \ldots, j_r$ vérifient $2^{j_i} \leqslant x < 2^{j_i+1}$ pour tout i et $\sum_{i=1}^{\ell} \frac{1}{2^{j_i}} \geqslant \frac{p}{2^k}$.

Puisque les x_i sont distincts, toute somme de termes de la forme $\frac{1}{2^{j_i}}$ est atteignable.

Si $j_r = j_s > k$, on rassemble $\frac{1}{2^{j_r}}$ et $\frac{1}{2^{j_s}}$ en $\frac{1}{2^{j_r-1}}$. On couple les puissances de deux égales jusqu'à ce qu'il ne reste que des puissances de 2 deux à deux distinctes ou égales à 2^{-k}.

Supposons que l'on ne puisse pas écrire $\frac{p}{2^k}$ avec les puissances écrites. En particulier, on dispose d'au plus $p-1$ termes 2^{-k}, et d'au plus un terme 2^{-j} pour tout $j > k$. Mais alors la sommes des puissances dont on dispose est inférieure strictement à $\frac{p}{2^k}$, ce qui est absurde.

Ainsi, tous les dyadiques sont atteignables, ce qui conclut.

3 Deuxième partie : Arithmétique, Algèbre et Combinatoire

1 Équations fonctionnelles sur Z (Rémi)

L'objectif de ce cours est de (re-)découvrir certaines idées classiques des EF sur les entiers. Celles-ci représentent une classe d'exercices à part parmi les EF, puisqu'on peut combiner des idées habituelles avec des idées d'arithmétqiue, notamment pour obtenir des inégalités. Les solutions sont faites pour être pédagogiques plutôt qu'efficaces et servent de cours, en particulier sur les 4 premiers exercices. Seuls les 3 premiers ont été traités en cours.

Exercices

Exercice 1 (A2 2015)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(x - f(y)) = f(f(x)) - f(y) - 1$$

Exercice 2 (BMO SL 2017, N2)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que $xf(x) + f(y)^2 + 2xf(y)$ soit un carré parfait pour tous $x, y \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 3 (Iran 2011)
Soit $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ une fonction telle que pour tous $a, b \in \mathbb{N}^*$, l'expression $af(a) + bf(b) + 2ab$ soit un carré parfait. Montrer que $f(a) = a$ pour tout $a \in \mathbb{N}^*$.

Exercice 4 (BMO 2016, A8)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour toute fonction $g : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$, $f(g(n)) - g(f(n))$ soit indépendant de $n \in \mathbb{Z}$.

Exercice 5 (N6 2016)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $m, n \in \mathbb{N}^*$, $f(m) + f(n) - mn$ soit non nul et divise $mf(m) + nf(n)$.

Exercice 6 (Israël 2021)
Trouver toutes les fonctions non bornées $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(f(x) - y) \mid x - f(y)$$

Exercice 7 (China MO 2021, 6)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{Z}$,

$$f(f(x) + y) \mid x + f(y)$$

Solutions

Solution de l'exercice 1

La première étape est de constater que $x \mapsto x+1$ et $x \mapsto -1$ sont solutions, montrons que ce sont les seules. On commence par poser $y = f(x)$ pour faire disparaître deux termes : on obtient $f(x - f(f(x))) = -1$, et en particulier pour $x = 0$, $f(-f(f(0))) = -1$. On pose alors $y = -f(f(0))$ puisqu'on connaît $f(y)$ dans ce cas, et on obtient $f(x+1) = f(f(x))$. On peut donc réécrire l'équation initiale sous la forme $f(x - f(y)) = f(x+1) - f(y) - 1$.

A ce stade, il est bon de constater que si la fonction est injective on a gagné, puisque $f(f(x)) = f(x+1)$ donne la solution $x \mapsto x+1$. On peut donc supposer que f n'est pas injective, ce qui nous donne l'existence de deux entiers $a < b$ tels que $f(a) = f(b)$. Le but va donc être de prouver que f est constante (pour aboutir à la deuxième solution $x \mapsto -1$.

Comme $f(a) = f(b)$, $f(f(a)) = f(f(b))$, donc $f(a+1) = f(b+1)$. Par récurrence immédiate, $f(a+n) = f(b+n)$, donc la fonction est périodique sur $\mathbb{Z}_{\geqslant a}$. Cela implique que f est bornée sur cet ensemble, mais surtout qu'elle atteint son maximum M et son minimum m puisqu'on travaille sur $\mathbb{Z}$ et pas $\mathbb{R}$! On dispose donc de $x, y \geqslant a$ tels que $f(x_0) = M$ et $f(y_0) = m$. On peut donc obtenir la suite d'inégalités suivante, en choisissant un x suffisamment grand tel que $f(x - f(y_0)) = m$ (possible car f est périodique donc atteint une infinité de fois son minimum) :

$$m \leqslant f(x+1) = f(x - f(y_0)) + f(y_0) + 1 = 2m + 1$$

On en déduit donc que $m \geqslant -1$. Un raisonnement tout à fait analogue montre que $M \leqslant -1$, mais comme $m \leqslant M$, on a $m = M = -1$. Finalement, $f(x) = -1$ pour tout $x \geqslant a$.

Revenons à notre version modifiée de l'équation initiale : on isole $f(y)$, ce qui donne $f(y) = f(x+1) - f(x - f(y)) - 1$. On écrit les choses sous cette forme puisque cela nous permet de choisir x aussi grand qu'on veut de sorte que $x+1 \geqslant a$ et $x - f(y) \geqslant a$. Ainsi, $f(y) = -1 - (-1) - 1 = -1$ pour tout y, donc f est bien la fonction constante égale à -1 dans ce cas, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 2

On commence par remarquer que l'expression de l'énoncé ressemble beaucoup à un carré parfait : en effet, on peut la réécrire sous la forme $(f(y) + x)^2 + xf(x) - x^2$. Le terme résiduel ne dépend que de x, donc on sent bien qu'il va y avoir un problème si $f(y)$ devient trop grand. Formalisons cette idée, et supposons que f est non bornée. On doit avoir $(f(y) + x)^2 + xf(x) - x^2 = a^2$, essayons donc de montrer que $(f(y) + x - 1)^2 < a^2 < (f(y) + x + 1)^2$. On sait que $(f(y) + x + 1)^2 = (f(y) + x)^2 + 2(f(y) + x) + 1 = a^2 + (x^2 - xf(x) + 2x + 1) + 2f(y)$. On reconnaît donc le a^2 voulu, accompagné de termes en x, mais on a un $2f(y)$ que l'on peut choisir aussi grand qu'on veut, donc cette quantité sera bien supérieure à a^2. On montre de même l'autre inégalité, donc quand f est non bornée on sait que a^2 est strictement compris entre deux carrés, il doit donc valoir $(f(y) + x)^2$, donc $xf(x) - x^2 = 0$ et $f(x) = x$.

Reste à traiter le cas où f est bornée. On suppose donc qu'il existe un entier M tel que $f(n) < M$ pour tout $n \in \mathbb{N}^*$. Là encore, on va essayer de faire des inégalités, mais en étant un peu subtils (autrement dit en faisant de l'arithmétique). On pose $x = p$ un grand premier. L'énoncé s'écrit $pf(p) + f(y)^2 + 2pf(y) = n^2$, ce qui donne $p(f(p) + 2f(y)) = n^2 - f(y)^2 = (n - f(y))(n + f(y))$. Cela justifie le choix de $x = p$ pour pouvoir le mettre en facteur d'une part, et factoriser la différence des deux carrés d'autre part. Comme p divise l'un des deux termes du membre de gauche, on sait a minima que $p \leqslant n + f(y)$. On peut donc choisir p suffisamment grand (supérieur à $4M$), de sorte que $n - f(y) = n + f(y) - 2f(y) \geqslant p - 2M \geqslant \frac{p}{2}$ (on veut faire des arguments de taille, donc inutile de s'embêter à garder trop de termes, c'est comme ça qu'on réussit à transformer

des arguments vaseux de type "tel truc va grandir trop vite" en un raisonnement rigoureux). On peut donc écrire la suite d'inégalités :

$$3Mp \geqslant p(f(p) + 2f(y)) = (n - f(y))(n + f(y)) \geqslant \frac{p^2}{2}$$

Cette inégalité devient fausse dès que $p > 6M$, donc f ne peut pas être bornée. Finalement, la seule solution potentielle est l'identité, qui convient bien.

Solution de l'exercice 3

La première idée va être de montrer que $af(a)$ est toujours un carré parfait. On peut avoir cette idée en constatant qu'en posant $b = p$ n'importe quel premier, $af(a)$ est un carré modulo p. Si l'on ne souvient pas du N2 2007 qui dit exactement ça, on peut le retrouver dans cette situation précise, en supposant que $v_p(af(a)) = 2k+1$ pour un certain p premier. On peut alors choisir $b = p^{2k+2}$, et l'expression $af(a) + p^{2k+2}f(p^{2k+2}) + 2ap^{2k+2} = m^2$ montre que $p^{2k+1} \mid m^2$ et donc $p^{2k+2} \mid m^2$ puisque c'est un carré. Tous les termes sont divisibles par p^{2k+2}, donc $af(a)$ aussi, d'où la contradiction. Ainsi, pour tout q premier, on dispose d'un entier $g(q)$ tel que $f(q) = qg(q)^2$.

Le réflexe ici doit être de s'intéresser à la décomposition en facteurs premiers de $f(q)$, puisqu'on sait déjà que c'est un multiple de q (ne serait-ce que parce qu'on se doute bien qu'il n'y aura pas d'autres diviseurs premiers puisque ce n'est jamais le cas dans aucun exercice d'EF sur les entiers). Supposons donc qu'il existe un premier $p \neq q$ divisant $f(q)$. En posant $a = p$ et $b = q$, on obtient $pf(p) + qf(q) + 2pq = m^2$, et on sait que p divise tous les termes du membre de gauche, donc il divise m. Comme $pf(p)$, $qf(q)$ et m^2 sont des carrés, on sait que p^2 divise tous ces termes, donc $p^2 \mid 2pq$, d'où $p \mid 2q$. Comme on a supposé $p \neq q$, il ne reste que l'option $p = 2$, que l'on peut exclure en posant $a = b = q$. En effet, cela donne $2q^2g(q)^2 + 2q^2 = m^2$, soit $2(g(q)^2 + 1) = \left(\frac{m}{q}\right)^2$, ce qui montre que $g(q)^2 + 1$ est pair et donc $g(q)$ est impair. Le même raisonnement en partant du fait que $f(1)$ est un carré et en posant $a = 1$ et $b = p$ permet de montrer que $f(1)$ ne peut pas avoir de facteur premier, donc $f(1) = 1$.

On sait donc que pour tout q premier, on dispose d'un entier n tel que $f(q) = q^n$. On sait de plus que n est impair, puisque $qf(q)$ est un carré, donc on peut poser $n + 1 = 2t$. On écrit cette fois l'hypothèse de l'énoncé pour $a = q$ et $b = 1$, ce qui donne $q^{2t} + 2q + 1 = m^2$. On utilise la même idée que dans l'exercice précédent : on sait que $(q^t + 1)^2 = q^{2t} + 2q^t + 1 \geqslant q^{2t} + 2q + 1 = m^2$, donc $q^t + 1 > m > q^t$ si $t > 1$. Finalement, $t = 1$, donc $n = 1$ et donc $f(q) = q$ pour tout premier q.

Il ne reste plus qu'à poser $b = q$ dans l'énoncé, ce qui nous indique que $af(a) + q^2 + 2aq$ doit être un carré, de même que $a^2 + q^2 + 2aq$. Leur différence vaut $a^2 - af(a)$, qui est indépendante de q, donc quitte à le choisir suffisamment grand on trouve une contradiction. Ainsi, $a^2 = af(a)$, et donc $f(a) = a$ pour tout a. Réciproquement, l'identité est bien solution.

Solution de l'exercice 4

La principale difficulté consiste à ne pas se laisser impressionner par un tel énoncé. En effet, l'idée que cet exercice sert à rappeler ici est que composer deux fonctions dans des ordres différents permet de faire rentrer ou sortir certains termes des parenthèses (même idée que calculer $f \circ f \circ f$ de deux façons différentes quand on a une expression de $f \circ f$). Ici, il suffit de poser $g : x \mapsto x + 1$, ce qui donne $f(g(x)) - g(f(x)) = f(x+1) - (f(x) + 1)$, donc $f(x+1) - f(x) = c$ pour tout $x \in \mathbb{Z}$. Cette expression nous intéresse particulièrement sur les entiers, puisqu'elle permet de calculer tous les termes à partir d'un seul : ici, cela donne que f est affine. Il ne

reste plus qu'à trouver celles qui marchent, ce qu'on peut faire en choisissant $g : x \mapsto x^2$, ce qui montre que l'expression $(ax+b)^2 - ax^2 + b$ doit être indépendante de x. Les calculs donnent $a^2 - a = 0$ et $2ab = 0$, donc soit $a = 0$ et f est constante, soit $b = 0$ auquel cas $a = 1$. On vérifie facilement réciproquement que les constantes et l'identité sont bien solutions.

Solution de l'exercice 5
Cet exercice a été corrigé dans le poly du stage de 2022 par Thomas Budzinski (pp.382-383).

Solution de l'exercice 6
Cet exercice présente plusieurs idées intéressantes, et est assez proprement corrigé dans le post sur AoPS à son sujet : https://artofproblemsolving.com/community/c6h2455346p20461103

Solution de l'exercice 7
L'exercice précédent est le cas "facile" de celui-ci. Je n'ai donc que deux mots à dire : "bon courage". https://artofproblemsolving.com/community/c6h2354727p19116098

2 Pot pourri algèbre (Émile)

Exercice 1 (Iran TST 2018 P5)
Soient $2n-1$ réels strictements positifs de somme S. Montrer qu'il existe au moins $\binom{2n-2}{n-1}$ manières d'en choisir n tels que la somme de ces n soit strictement supérieure à $\frac{S}{2}$.

Solution de l'exercice 1
Considérons une permutation quelconque $a_0, \ldots, a_{2n-2}$ des $n-1$ nombres, et considérons les indices modulo $2n-1$. Choisissons n réels consécutifs parmi ceux-ci, disons $a_{k+1}, a_{k+2}, \ldots, a_{k+n}$. Remarquons que si la somme de ces n réels est inférieure ou égale à $\frac{S}{2}$, il ne peut pas en être de même de la somme de $a_{k+n+1}, a_{k+n+2}, \ldots, a_{k+2n}$ car ces deux sommes combinées valent $S + a_{k+1} > S$. Ainsi, si part de $k = 0$ et que l'on translate les indices de n à chaque fois, il ne peut jamais y avoir deux n-uplets de somme inférieure ou égale à $\frac{S}{2}$ à la suite. Comme n et $2n-1$ sont premiers entre eux, en translatant par n comme ceci, on trouve $2n-1$ différents n-uplets, dont au moins la moitié, c'est-à-dire au moins n, ont une somme strictement supérieure à $\frac{S}{2}$.

On peut par exemple faire un raisonnement probabiliste à présent. Si on choisit une permutation aléatoire des $2n-1$ réels, puis que l'on en choisit n à la suite uniformément, on a une probabilité supérieure ou égale à $\frac{n}{2n-1}$ de trouver un n-uplet de somme strictement supérieure à S. Ainsi, le nombre de façons de choisir n des réels dont la somme est strictement supérieure à $\frac{S}{2}$ est au moins

$$\frac{n}{2n-1}\binom{2n-1}{n} = \binom{2n-2}{n-1}.$$

Exercice 2 (PKU Summer Camp 2023 P5)
Soient $n > m$ des entiers. Trouver toutes les suites de m entiers $1 \leq i_1 < i_2 < \ldots < i_m \leq n$ telles que pour toutes les suites de réels $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ de somme nulle $\sum_{i=1}^{n} x_i = 0$, alors on a

$$\sum_{k=1}^{m} x_{i_k} > 0.$$

Solution de l'exercice 2

Après quelques tentatives sur cet exercice, on s'apperçoit que des suites de réels intéressantes sont des suites de réels constantes négatives jusqu'à un certain rang k, puis constantes positives à partir du rang $k+1$. Prenons alors la suite définie par

$$\begin{cases} x_i = -(n-k) + \varepsilon_i & \text{si } i \leq k \\ x_i = k + \varepsilon_i & \text{si } i > k \end{cases}$$

où les ε_i sont des petits nombres strictements croissants dont la somme est nulle. Alors si $i_1 < \ldots < i_m$ vérifient les conditions de l'énoncé, on peut choisir $k = i_j$ pour un certain entier j. Alors par hypothèse,

$$-(n-i_j)j + i_j(m-j) + \sum_{i=1}^{m} \varepsilon_{i_k} > 0$$

donc en choisissant les ε_i assez petits, on a que $-(n-i_j)j + i_j(m-j) \geq 0$, et donc pour tout j,

$$i_j \geq \frac{jn}{m}.$$

Vérifions que cette condition est aussi suffisante. En effet, supposons que pour tout j, $i_j \geq \frac{jn}{m}$, et soit $x_1 < \ldots < x_n$ de somme nulle. Alors la stricte croissance de la suite des x_i permet d'écrire, avec $i_0 = 0$,

$$\begin{aligned} 0 = \sum_{i=1}^{n} x_i &= \sum_{j=1}^{m} \sum_{i=i_{j-1}}^{i_j} x_i \\ &< \sum_{j=1}^{m} (i_j - i_{j-1}) x_{i_j} \end{aligned}$$

où l'inégalité est stricte car comme $m < n$, une des sommes intérieures possède au moins deux éléments. Mais remarquons que dans cette expression, à part i_m qui vaut forcément n, tous les i_j ont un coefficient $x_{i_j} - x_{i_{j+1}}$ qui est négatif. En appliquant l'inégalité sur i_j, on obtient donc

$$\leq \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{jn}{m} - \frac{(j-1)n}{m} \right) x_{i_j} = \frac{1}{m} \sum_{j=1}^{m} x_{i_j}$$

ce qui conclut.

Exercice 3 (USAMO 2010 P2)

Il y a n élèves les uns derrière les autres en cercle, de tailles $h_1 < h_2 < \ldots < h_n$. A tout moment, si un élève de taille h_k est juste derrière un élève de taille inférieure ou égale à h_{k-2}, il peut décider d'échanger de place avec celui-ci. Déterminer le nombre maximal d'échanges qui peuvent avoir lieu parmi toutes les configurations initiales et les choix d'échanges.

Solution de l'exercice 3

Commençons par étudier la configuration où les élèves sont dans l'ordre $1, 2, \ldots, n$ sur le cercle. Dans ce cas, l'élève n peut échanger avec l'élève devant lui $n-2$ fois, jusqu'à arriver juste derrière l'élève $n-1$. Ensuite, les élèves $n-1$ et n, chacun à leur tour, échangent avec l'élève devant eux, jusqu'à arriver à la fin dans l'ordre $n, n-1, n-2$, ils font chacun $n-3$

échanges. Ensuite, les élèves $n-2, n-1$ et n échangent chacun à leur tour avec l'élève devant eux, $n-3$ fois. Ils continuent ainsi, jusqu'à ce que les $n-2$ élèves $3, 4, \ldots, n$ échangent chacun leur tour avec l'élève 1. A la fin, les élèves sont dans l'ordre inverse de l'ordre de départ, c'est-à-dire $n, n-1, \ldots, 1$, et plus aucun élève ne peut faire d'échanges. En tout, le nombre d'échanges faits est

$$1\times(n-2)+2\times(n-3)+\ldots+(n-2)\times 1=\frac{(n-2)(n-1)}{2}(n-1)-\frac{(n-2)(n-1)(2n-3)}{6}$$

$$=\frac{n(n-1)(n-2)}{3}=\binom{n}{3}.$$

Montrons maintenant que l'on ne peut pas faire mieux que $\binom{n}{3}$ échanges. Pour ceci, montrons que pour tout m, l'élève m peut échanger avec des élèves plus petits au plus $\binom{m-1}{2}$ fois. On montre ceci par récurrence, si $m \leq 2$ c'est vrai. Supposons que le résultat soit vrai pour m, considérons l'élève $m+1$. Remarquons que celui-ci ne peut jamais échanger avec l'élève m, et posons d le nombre d'élèves plus petits que m devant $m+1$ et derrière m sur le cercle. Alors au départ, d vaut au plus $m-1$, il diminue de 1 dès que $m+1$ fait un échange avec un élève plus petit, et augmente de 1 si m fait un échange avec un élève plus petit. Mais m ne peut échanger que $\binom{m-1}{2}$ fois avec des élèves plus petits, donc $m+1$ ne peut échanger que

$$m-1+\binom{m-1}{2}=\binom{m}{2}$$

fois avec des élèves plus petits. Alors le nombre total d'échanges ne peut pas dépasser

$$\binom{n-1}{2}+\binom{n-2}{2}+\ldots+\binom{2}{2}=\binom{n}{3}.$$

Exercice 4 (Israël TST 2021 P2)
Dans la maison de Benoît se trouvent 2023 interrupteurs et 2023×1011 ampoules. Chaque ampoule correspond à une paire d'interrupteurs, et s'allume précisément quand les deux interrupteurs sont tous les deux allumés. Cependant, Benoît a oublié d'étiquetter les ampoules, et il ne se souvient pas à quelle ampoule correspond quelle paire d'interrupteurs. Au départ, tous les interrupteurs sont éteints. Chaque minute, Benoît peut changer l'état d'un unique interrupteur, et il prend alors note de l'état des ampoules. Quelle est la durée minimale dont Benoît aura besoin pour déterminer toutes les correspondances entre ses ampoules et ses interrupteurs ?

Solution de l'exercice 4
Montrons que la réponse est $4044 = 2\times 2023-2$. Pour ceci, il faut essayer de comprendre comment choisir la stratégie de Benoît. Une première remarque est que nécessairement, Benoît doit allumer chaque interrupteur au moins une fois dans sa stratégie. En effet, si par exemple

Benoît n'allumait pas l'interrupteur 1, il n'aurait aucune manière de distinguer entre toutes les ampoules dont un des interrupteurs est l'interrupteur 1 (dont il y en a 2022, donc plus que une).

Afin de pouvoir déterminer à quelle ampoule correspond une certaine paire d'interrupteurs i, j, il faut que pour toute autre paire d'interrupteurs k, l, on puisse distinguer l'ampoule correspondant à la première paire de l'ampoule correspondant à la deuxième paire, ou encore qu'il existe un moment où une des deux ampoules est allumée et l'autre est éteinte. En d'autres termes, pour toutes paires i, j et k, l d'interrupteurs, il faut un instant où l'une des paires a les deux interrupteurs allumés, mais pas l'autre.

Supposons maintenant que les interrupteurs i, j, k, l soient tous les quatre distincts. Nécessairement, pour distinguer les deux paires, au moins une des paires doit s'allumer à un moment dans la stratégie de Benoît, supposons que la paire i, j s'allume en premier (potentiellement en même temps que la paire k, l). Mais au moment où Benoît allume la paire i, j, il ne peut pas allumer la paire k, l puisque les deux paires sont disjointes, et donc il existe un moment où une l'ampoule correspondant à i, j est allumée, et celle correspondant à k, l est éteinte. Benoît n'a donc pas besoin de se soucier des paires disjointes.

Supposons maintenant que les interrupteurs i, j, k, l ne soient pas tous les quatre distincts, les deux paires sont donc de la forme i, j et i, k avec i, j, k distincts. Dans ce cas-là, si Benoît n'adapte pas bien sa stratégie, les deux couples d'interrupteurs peuvent être allumés en même temps en allumant l'interrupteur i alors que les interrupteurs j et k sont déjà tous les deux allumés. Supposons par l'absurde que Benoît ait une stratégie qui ne touche qu'à chacun des interrupteurs i, j, k une seule fois (on a vu qu'il doit nécessairement tous les allumer au moins une fois), supposons qu'il allume d'abord i, puis j, puis k. Alors comme il n'éteint aucun de ces interrupteurs après les avoir allumés, les couples i, k et j, k d'interrupteurs sont allumés précisément en même temps, et donc les ampoules correspondantes ne peuvent pas être distinguées l'une de l'autre, absurde. Ainsi, la stratégie de Benoît doit nécessairement toucher un des trois interrupteurs au moins deux fois.

D'après l'analyse précédente, dans tout triplet d'interrupteurs, un d'entre eux doit être touché au moins deux fois. Ainsi, il ne peut y avoir au plus 2 interrupteurs qui ne sont touchés qu'une seule fois, et Benoît a besoin d'au moins $2 + 2021 \times 2 = 4044$ minutes.

Montrons que Benoît peut effectivement trouver les correspondances entre interrupteurs et ampoules en 4044 minutes. Pour ceci, il numérote les interrupteurs de 1 à 2023 et il allume successivement les interrupteurs $1, 2, \ldots, 2023$. Ensuite, il éteint les interrupteurs $1, 2, \ldots, 2021$ dans cet ordre. Ceci prend bien 4044 minutes, vérifions que cette stratégie marche bien. D'après notre étude précédente, il suffit de voir que pour deux paires d'interrupteurs i, j et i, k avec i, j, k distincts, il y a un moment où l'une des paires est allumée et pas l'autre. Sans perte de généralité, $j < k$. Considérons le premier instant où la paire i, j est allumée. Si la paire i, k s'allume en même temps, ceci signifie que l'on a allumé l'interrupteur i après l'interrupteur j, donc $i > j$, et que l'interrupteur k était déjà allumé, donc $i > k$. Mais alors comme $j < k < i$, nécessairement $j \leq 2021$ et à un moment lorsque Benoît éteint les interrupteurs, il éteint l'interrupteur j, à ce moment les interrupteurs i, k sont toujours allumés, ce qui permet effectivement de distinguer entre les deux paires.

Exercice 5 (BMO SL 2013 C4)
Considérons un échiquier $(2n + 1) \times (2n + 1)$. Considérons une ligne brisée L fermée, ne s'intersectant jamais, qui emprunte les côtés des cases de l'échiquier et qui passe par tous les sommets des cases. Tous les carrés à l'intérieur de L sont coloriés en rouge, ceux à l'extérieurs

étant blancs. Montrer que sur toute ligne de l'échiquier, le nombre de paires de carrés rouges adjacents est toujours pair.

Solution de l'exercice 5

On montre le résultat par récurrence sur la ligne, en partant de la ligne du haut. Considérons uniquement les segments verticaux sur la ligne du haut. Si un segment s ne fait pas partie de la ligne brisée L, alors comme L passe nécessairement par le sommet x en haut de s et que celui-ci n'a que trois voisins, L contient nécessairement les arêtes directement à gauche et à droite de x, et donc les deux carrés de chaque côté de s sont coloriés en rouge. On a ainsi montré que chaque carré blanc sur la ligne du haut possédait un segment de L à gauche et à droite de celui-ci, et il n'y a donc jamais deux carrés blancs adjacents sur cette ligne. Enfin, le nombre de paires de carrés rouges adjacents est donné par $2n$ moins le nombre de paires de carrés rouge et blanc adjacents, cette dernière valeur valant deux fois le nombre de carrés blancs par l'argument précédent. Ainsi, le nombre de paires de carrés rouges adjacents est pair sur la ligne du haut de la grille.

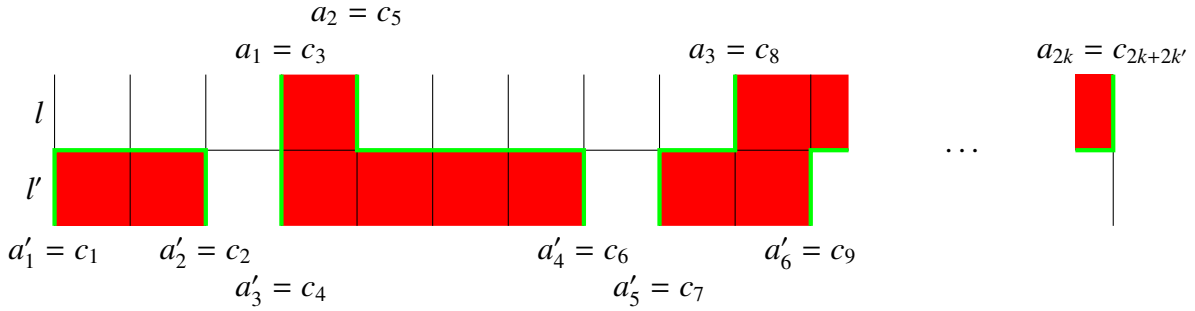
Supposons maintenant que pour une certaine ligne l, qui n'est pas la ligne du bas, on sache que le nombre de paires de carrés rouges adjacents est pair, et considérons la ligne l' juste en dessous.

Sur la ligne l, il y a certains segments verticaux appartenant à L, qui sont soit des segments avec un carré blanc à gauche et rouge à droite, soit des segments avec un carré rouge à gauche et blanc à droite. En numérotant les segments verticaux de la grille de gauche à droite par $0, 1, \ldots, 2n+1$, on note par $a_1, a_3, a_5, \ldots, a_{2k-1}$ les positions des segments verticaux de L du premier type, et par $a_2, a_4, \ldots, a_{2k}$ les positions des segments verticaux de L du second type. Remarquons que l'on a nécessairement $a_1 < a_2 < a_3 < a_4 < \ldots < a_{2k}$. De même, sur la ligne l' juste en-dessous, on dénote par $a'_1, \ldots, a'_{2k'}$ les positions des segments verticaux de L.

Maintenant, entre les segments aux positions a_{2i-1} et a_{2i}, il y a $a_{2i} - a_{2i-1}$ carrés rouges consécutifs, et donc $a_{2i} - a_{2i-1} - 1$ paires de carrés rouges adjacents. Par hypothèse de récurrence, la valeur

$$\sum_{i=1}^{k} (a_{2i} - a_{2i-1} - 1) = \sum_{i=1}^{k} a_{2i} - \sum_{i=1}^{k} a_{2i-1} - k$$

est paire. Remarquons que ceci est équivalent à dire que $\sum_{i=1}^{2k} a_i + k$ est pair. On cherche maintenant à montrer que la valeur analogue $\sum_{i=1}^{2k'} a'_i + k'$ est paire.



Encore une fois, on utilise le fait que L passe par tous les sommets de la grille, et notamment tous les sommets entre les lignes l et l', que l'on numérote de droite à gauche $x_0, x_1, \ldots, x_{2n+1}$. Ordonnons l'ensemble des a_i et a'_j en $c_1 \leq c_2 \leq \ldots \leq c_{2k+2k'}$. x_0 doit avoir

deux segments de L adjacents, donc au moins un de ceux-ci doit être vertical, et $c_1 = 0$. De même, $c_{2k+2k'} = 2n+1$. Ensuite, si $c_2 = c_1$, alors x_0 n'a pas de segment horizontal de L adjacent. Sinon, le segment à sa droite appartient nécessairement à L. Ensuite, si $c_2 = 1$, x_1 a un segment vertical de L adjacent, donc le segment à sa droite ne peut pas appartenir à L. Sinon, x_1 a encore un segment de L à sa droite. On trouve donc qu'il y a une section horizontale de L qui va entre les positions c_1 et c_2, et qui peut être de longueur nulle. De plus, en position c_2, le sommet ne peut avoir que deux segments de L adjacents, et donc nécessairement $c_3 > c_2$. De plus, le sommet à sa droite x_{c_2+1} n'a pas de segment de L à sa gauche, donc il doit être adjacent à un segment vertical de L, et $c_3 = c_2 + 1$ nécessairement. En répétant ce raisonnement, on trouve que pour tout i, $c_{2i+1} = c_{2i} + 1$. Mais on a alors

$$2n+1 = c_{2k+2k'} - c_0 = (c_2 - c_1) + \sum_{i=1}^{k+k'-1} ((c_{2i+2} - c_{2i+1}) + (c_{2i+1} - c_{2i})) = \sum_{i=1}^{k+k'} (c_{2i} - c_{2i-1}) + (k + k' - 1).$$

Ainsi, la somme $\sum_{i=1}^{k+k'} (c_{2i} - c_{2i-1}) + k + k'$ est paire, et donc la somme $\sum_{i=1}^{2k+2k'} c_i + k + k'$ est paire, mais celle-ci vaut précisément

$$\sum_{i=1}^{2k+2k'} c_i + k + k' = \left(\sum_{i=1}^{2k} a_i + k\right) + \left(\sum_{i=1}^{2k'} a'_i + k'\right)$$

ce qui conclut en utilisant l'hypothèse de récurrence.

Exercice 6 (ELMO 2012 P6)
Un coffre-fort diabolique a $n > 1$ molettes, qui peuvent chacune prendre $c > 1$ états. Les molettes sont initialement dans les états $d_1, d_2, \ldots, d_n$ avec $0 \leq d_i < c$ pour tout i. Cependant, les états les molettes sont cachées. A chaque tour, il est possible de choisir des entiers $c_1, \ldots, c_n$, et de tourner chaque molette du c_i correspondant, c'est-à-dire que d_i est remplacé par d'_i tel que $d'_i \equiv d_i + c_i [c]$. Après chaque tour, on appuie sur un bouton. Alors si toutes les molettes sont dans l'état zéro, le coffre-fort s'ouvre, sinon le coffre-fort diabolique décide d'un entier k et décale les valeurs des molettes cycliquement par k, c'est-à-dire que la molette i prend alors la valeur qui était prise par la molette $i - k$, où les indices sont pris modulo n.

Montrer qu'il est possible d'ouvrir le coffre-fort quelque soit l'état initial des molettes et les entiers k choisis par le coffre-fort, si et seulement si n et c sont tous les deux des puissances d'un même nombre premier.

(Bonus : dans le cas où n et c sont tous les deux des puissances d'un même nombre premier, déterminer le nombre minimal de tours à effectuer pour s'assurer d'ouvrir le coffre-fort)

Solution de l'exercice 6
La preuve se déroule en plusieurs étapes. Tout d'abord, traitons le cas où n et c ne sont pas tous les deux des puissances d'un même nombre premier. Alors il existe deux nombres premiers distincts $p \neq q$ tels que p divise n et q divise c. Remarquons que si l'on ne considère que les états des molettes modulo p, on retrouve le problème avec $n = p$, et donc sans perte de généralité, $n = p$ (car si on avait une stratégie avec n, on en aurait une avec p). Maintenant, comme l'on cherche une stratégie pour le coffre-fort diabolique dans cette première partie, on peut considérer que le coffre-fort diabolique ne choisit que des k qui sont multiples de $\frac{c}{q}$, alors en ne considérant que les molettes dont les positions sont des multiples de $\frac{c}{q}$, il suffit de

montrer que le coffre-fort diabolique peut s'arranger pour ne pas s'ouvrir avec seulement ces q molettes, on peut donc supposer que $c = q$.

Maintenant que l'on s'est ramené à $n = p$ et $c = q$ premiers entre eux, supposons que l'on parte de la configuration où toutes les molettes sont à 0, sauf une qui est à 1, située aléatoirement parmi les n molettes. Maintenant, supposons par l'absurde qu'il existe une stratégie permettant d'ouvrir le coffre-fort à partir de cette configuration, et considérons la première étape t où la stratégie atteint à coup sûr à une configuration où toutes les molettes sont dans la même position. Ceci signifie qu'il existe une stratégie pour le coffre-fort tel que juste avant l'étape t, les molettes ne soient pas toutes dans la même position, disons qu'elles sont dans les positions $d_1, \dots, d_n$ avec les d_i non tous égaux. Juste avant l'étape t, le coffre-fort peut aussi décider de translater les indices des d_i par un entier k au choix. D'après la définition de t, il existe un choix de c_i tel que pour tout k choisi par le coffre-fort, tous les $d_{i+k} + c_i$ sont égaux modulo c. Ceci signifie notamment que

$$d_1 + c_1 \equiv d_2 + c_2 \equiv \dots \equiv d_n + c_n[c], \quad d_2 + c_1 \equiv d_3 + c_2 \equiv \dots \equiv d_1 + c_n[c].$$

En combinant les deux séries d'équations, on trouve que $c_2 - c_1 \equiv c_3 - c_2 \equiv \dots \equiv c_1 - c_n[c]$, et ensuite que les différences $d_{i+1} - d_i$ sont égales modulo c. Mais alors on a pour tout i,

$$n(d_{i+1} - d_i) \equiv (d_2 - d_1) + (d_3 - d_2) + \dots + (d_1 - d_n) \equiv 0[c].$$

Comme maintenant n et c sont premiers entre eux, toutes les différences $d_{i+1} - d_i$ sont nulles modulo c, et donc tous les d_i sont égaux modulo c, absurde par définition des d_i.

Il reste à montrer l'autre sens, plus difficile... Supposons donc qu'il existe un nombre premier p et des entiers $a, b > 0$ tels que $n = p^a$ et $c = p^b$. Commençons par se ramener au cas $b = 1$, c'est-à-dire c premier. Supposons alors qu'il existe une stratégie S, qui est donc une suite de choix de $(c_1, \dots, c_n)$ qui permettent d'ouvrir le coffre-fort lorsque $c = p$. Travaillons par récurrence sur b, le cas $b = 1$ est notre supposition. Supposons à présent que l'on ait une stratégie S_b qui fonctionne pour $c = p^b$ et montrons l'existence d'une stratégie S_{b+1} pour $c = p^{b+1}$. Pour ceci, considérons pS_b la suite des $(pc_1, pc_2, \dots, pc_n)$ pour $(c_1, \dots, c_n)$ dans S_b, comme les c_i sont définis modulo p^b, les pc_i sont bien définis modulo p^{b+1}. Maintenant, considérons la stratégie $S = S_1$ dont on a supposé l'existence, et soient $s_1, s_2, \dots, s_t$ les n-uplets d'entiers modulo p qui composent la stratégie. Considérons pour chaque i, s'_i un n-uplet d'entiers modulo p^{b+1} qui donne s_i lorsque l'on regarde chaque composante modulo p.

Alors on considère la stratégie suivante : on applique d'abord pS_b, puis l'étape s'_1, puis pS_b à nouveau, puis s'_2, puis pS_b à nouveau, et ainsi jusqu'à s'_t et pS_b à nouveau encore.

Vérifions que cette stratégie ainsi construite permet bien d'ouvrir le coffre-fort. Soit $d_1, \dots, d_n$ la configuration des molettes du coffre-fort, et $\bar{d}_1, \dots, \bar{d}_n$ la projection modulo p des valeurs des molettes. Remarquons que si l'on applique des étapes de pS_b, alors les $\bar{d}_i$ ne changent pas puisqu'on ne tourne les molettes qu'avec des multiples de p. En ne considérant pas les étapes pS_b, modulo p, les $\bar{d}_i$ sont modifiés d'après les s_i. Comme les s_i forment une stratégie pour $c = p$, il existe forcément un i tel que après avoir tourné les molettes de s'_i, tous les $\bar{d}_i$ sont nuls (ou alors c'était déjà le cas dès le début). Mais alors on applique juste après les étapes de pS_b. Alors pendant toutes ces étapes, les d_i seront des multiples de p modulo p^{d+1}, et donc on peut considérer les d_i/p qui sont définis modulo p^d, appliquer les étapes de pS_b revient à appliquer les étapes de S_b aux d_i/p modulo p^d, par hypothèse de récurrence il y

aura un moment où toutes les molettes arriveront sur 0 et le coffre-fort s'ouvrira. Ceci conclut alors la récurrence.

Il reste donc à traiter le cas $c = p$ premier. Pour ce cas, remarquons qu'une configuration des molettes $d_1, \dots, d_n$ peut être encodée par un polynôme $P = d_n X^{n-1} + d_{n-1} X^{n-2} + \dots + d_2 X + d_1$ à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$. Alors tourner les molettes de $c_1, \dots, c_n$ revient à ajouter à P le polynôme $Q = c_n X^{n-1} + c_{n-1} X^{n-2} + \dots + c_2 X + c_1$, le but étant d'atteindre le polynôme nul. Regardons quel est l'effet de la translation effectuée par le coffre-fort diabolique sur le polynôme P. Translater de k revient à multiplier P par X^k, et il faut alors remplacer les X^l avec $l \geq n$ par des X^{l-n}. Pour faire ceci, on soustrait à P un multiple de $X^n - 1$ afin d'obtenir un polynôme de degré inférieur ou égal à $n-1$, c'est-à-dire que l'on prend le reste de P dans la division euclidienne par $X^n - 1$. La remarque clé est que si n est une puissance de p, alors $X^n - 1 \equiv (X-1)^n [p]$. Pour un polynôme P à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$, on notera par $val(P)$ le plus grand entier l tel que $(X-1)^l$ divise P, avec $val(0) = \infty$. Remarquons que si $val(P) < n$, alors pour tout $k \geq 0$, $val(X^k P) = val(P)$, car $X^k P = P + (X^k - 1)P$ et $val((X^k - 1)P) > val(P)$. De plus, le reste R de la division euclidienne de P par $(X-1)^n = X^n - 1$ vérifie $val(R) = val(P)$. Si $val(P) \geq n$, alors $R = 0$. Le but étant de se ramener à $R = 0$, il faut donc arriver à augmenter $val(P)$ jusqu'à atteindre ou dépasser n.

La stratégie S sera la suivante : chaque étape s_i, $1 \leq i < p^n$ de S est donnée par le choix d'un polynôme Q_i défini par $Q_i = (X-1)^{n-1-v_p(i)}$. Vérifions que cette stratégie marche effectivement. Soit P le polynôme correspondant aux valeurs des molettes. Si $P = 0$, il n'y a rien à faire, on supposera donc $P \neq 0$. Posons $P(X+1) = \sum_{i<n} a_i X^i$, afin que $P(X) = \sum_{i<n} a_i (X-1)^i$. Le plus petit coefficient non nul est alors $a_{val(P)}$. On a vu que lorsque le coffre-fort translate les valeurs des molettes, $val(P)$ est conservé. Mais en reprenant les mêmes arguments, on trouve qu'en plus, $a_{val(P)}$ est aussi conservé (et reste toujours non nul).

Remarquons que le couple $(val(P), a_{val(P)})$ est conservé dès que le numéro i de l'étape vérifie $v_p(i) < n - 1 - val(P)$. Si $v_p(i) = n - 1 - val(P)$, alors soit $a_{val(P)} \not\equiv -1 \pmod{p}$, dans ce cas $a_{val(P)}$ augmentera simplement de 1, et dans le cas contraire $val(P)$ augmente d'au moins 1 et $a_{val(P)}$ se transforme de manière quelconque. Alors on montre par récurrence descendante sur $val(P)$ que la stratégie S permettra d'ouvrir le coffre-fort en au plus $p^{n-val(P)} - 1$ étapes.

Lorsque $val(P) = n-1$, les $p-1$ premières étapes correspondent à $Q_i = (X-1)^{n-1}$ donc $a_{val(P)}$ augmente successivement de 1 jusqu'à arriver à -1 modulo p, la prochaine étape correspond à faire passer P à 0. Supposons donc que ceci soit vrai pour $val(P) = n - k$, montrons le pour $val(P) = n - k - 1$. Alors sur les $p^{k+1} - 1$ premières étapes, tant que $val(P) = n - k - 1$, les seules étapes qui modifient $(val(P), a_{val(P)})$ sont les étapes multiples de p^k. A chacune de ces étapes, $a_{val(P)}$ augmente de 1. Comme il y a $p-1$ étapes multiples de p^k, au bout d'un moment $a_{val(P)}$ doit arriver à -1 puis être modifié à nouveau, et donc $val(P)$ doit augmenter d'au moins un. Ensuite, les $p^k - 1$ prochaines étapes sont identiques aux $p^k - 1$ premières. Par hypothèse de récurrence, on arrivera à $P = 0$ avant l'étape $p^{k+1} - 1$, ce qui conclut.

Ainsi, il existe bien une stratégie lorsque $c = p$ et n est une puissance de p, ce qui conclut l'exercice.

On explique maintenant rapidement les idées pour résoudre la question bonus. D'un côté, on peut montrer par récurrence que la stratégie trouvée précédemment permet d'ouvrir le coffre-fort en au plus $c^n - 1$ étapes, quelque soient les valeurs de n et c puissances d'un même nombre premier. Montrons que l'on ne peut pas faire mieux. L'idée est la suivante : soit S' une stratégie pour ouvrir le coffre-fort, considérons la quantité N_i qui détermine, pour tout indice i, le nombre de configurations possibles après l'étape i de S', sur toutes les configu-

rations initiales des molettes et tous les choix du coffre-fort, sachant que l'on s'arrête si on a ouvert le coffre-fort. Au départ, $N_0 = n^c$, et à la fin, $N_{|S'|} = 1$, il suffit donc de montrer que pour tout i, $N_{i+1} \geq N_i - 1$ pour obtenir $|S'| \geq n^c - 1$. Pour ceci, on remarque simplement qu'à l'étape i de S', chaque configuration possible non nulle avant l'étape i donne lieu à une configuration possible (potentiellement nulle) après l'étape i. Le choix du k par le coffre-fort ne peut qu'augmenter le nombre de configurations possibles des molettes, et donc on a bien $N_i \geq N_{i-1} - 1$.

3 Techniques asymptotiques en arithmétique (Antoine)

Ce poly est (en partie) inspiré du poly suivant : https://www.cmi.ac.in/~ayannath/olympiad-analytic-nt.pdf. Si vous voulez (bien) plus d'exos, ainsi que d'autres notions de théorie analytique des nombres, ça peut être une bonne idée d'aller le voir.

Bases de l'analyse asymptotique

On s'intéresse ici principalement à des fonctions à valeurs strictement positives, au moins dans un voisinage de notre point d'étude. Dans le cas général, Il faut faire attention lorsqu'on somme ou divise des équivalents/ petits o/ grands O. On notera sans grande distinction log et ln le logarithme népérien (en base e).

Définition 1.
Soient f, g des fonctions, d'un ensemble X (typiquement $\mathbf{N}, \mathbf{Z}$ ou $\mathbf{R}$) vers $\mathbf{R}$ (ou $\mathbf{C}$). On dit que f est équivalente à g lorsque x tend vers a si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1,$$

ce qu'on note $f \underset{x \to a}{\sim} g$. Souvent a sera égal à $+\infty$, mais d'autres cas ne sont pas à exclure non plus. On sous-entend souvent la valeur de a, et la notation devient alors $f \sim g$.

De même, on dit que "f est un grand O de g", ce qu'on note $f = \underset{x \to a}{O}(g)$ s'il existe une constante $C > 0$ telle que, dans un voisinage de a, $f(x) \leq Cg(x)$.

Enfin, on dit que "f est un petit o de g", ce qu'on note $f = \underset{x \to a}{o}(g)$, si

$$\lim_{x \to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0,$$

En des termes simples, deux fonctions équivalentes se ressemblent, si f est un grand O de g alors f est au plus du même ordre que g, et si f est un petit o de g alors f est d'un ordre strictement plus petit que g.

La propriété suivante est ce pourquoi ces notions sont vraiment utiles, mais la somme ne marche que si on travaille avec des fonctions à valeurs positives !

Proposition 2.
Si $f \sim g$ et $h \sim k$ alors $f + h \sim g + k$, et $fh \sim gk$.

Comme vous vous l'imaginez, les mêmes résultats de produit et de somme sont vrais pour o et O. De plus, on a la propriété suivante :

Proposition 3.
Si $f = o(g)$, alors $f + g \sim g$. De manière similaire, si $f = O(g)$, alors $f + g = O(g)$. (Autrement dit on oublie les petites choses).

Proposition 4 (Formule de Stirling)**.**
On a

$$n! \sim \left(\frac{n}{e}\right)^n \sqrt{2n\pi}.$$

Exemple 5.
Si p est un nombre premier, alors $v_p(n!) \sim \frac{n}{p-1}$. Cela découle de la formule de Lengendre. Si on a besoin de bornes explicites, on a même

$$\frac{n}{p} - 1 \leq v_p(n!) \leq \frac{n}{p-1}.$$

On présente une première application, qui est principalement de l'ordre de l'heuristique. L'idée est de faire des calculs très imprécis, pour voir si des raisonnements sur la taille des nombres a des chances de marcher ou s'il faut travailler un peu plus.

Exemple 6 (P4 IMO 2019)**.**
Résoudre

$$n! = (2^k - 1)(2^k - 2) \cdots (2^k - 2^{k-1}).$$

Solution : On a deux quantités qui se battent l'une contre l'autre ici. D'un côté, $v_2(n!) = O(n)$, et $v_2(f(k)) = \frac{k(k-1)}{2}$, et d'un autre côté, $f(k) \approx 2^{k^2}$ et $n! \sim (\frac{n}{e})^n \sqrt{2n\pi}$.

Donc on a en gros $n \approx \frac{k(k-1)}{2}$, et donc $f(k) \approx 2^n$, mais $n!$ croît beaucoup plus vite que 2^n, on va donc avoir un problème au bout d'un moment.

Bien sûr, des raisonnements quantitatifs plus précis que ce qui vient d'être fait sont nécessaires pour trouver une borne exacte, mais l'idée est là, et quand on voit ça en compétition on sait que des raisonnements du style peuvent marcher, et ça nous a pris 5 minutes de faire ça.

Un outil très intéressant est la série, qu'on verra juste comme la limite d'une somme finie (même si la vraie terminologie est plus pédante que ça).

Définition 7.
Soit a_n une suite de réels positifs. Notons que comme $\sum_{k=1}^{n} a_k$ est croissante, cette limite converge vers une limite finie si et seulement si $(\sum_{k=1}^{n} a_k)_n$ est bornée. Sinon, on dit que la série diverge (vers $+\infty$). On note alors $\sum_{n=1}^{\infty} a_k$ la valeur de cette limite, en écrivant $\sum_{n=1}^{\infty} a_k = +\infty$ si on est dans le cas non borné.

On dit qu'une série converge lorsque la limite est finie, et diverge si elle est infinie.

Proposition 8 (Combo séries/équivalents)**.**
Soient a_n, b_n deux suites telles que $a_n \sim b_n$. Alors la série $\sum a_n$ converge ssi la série $\sum b_n$ converge, et de plus,

- Si $\sum a_n$ diverge, $\sum_{k=1}^{n} a_k \sim \sum_{k=1}^{n} b_k$,
- Si $\sum a_n$ converge, $\sum_{k=n}^{\infty} a_k \sim \sum_{k=n}^{\infty} b_k$.

Attention, cette propriété est uniquement vraie parce qu'on travaille avec des nombres positifs !

Remarque 9.
Il existe également des résultats du même genre dans le cas O et o, je vous laisse les (t/p)rouver par vous-même.

Un intérêt crucial des séries est qu'on peut toujours majorer une somme finie par la série :

Exemple 10 (EMC 2022 P2, question b))**.**
On dit qu'un entier n est *joli* s'il existe un entier k et des entiers non nécessairement distincts $d_1, \dots d_k$ tels que $n = \prod d_i$ et $d_i^2 \mid n + d_i$ pour tout $i \leq k$. Existe-t-il un carré parfait joli différent de 1 ?

Solution : On commence par écarter les $d_i = 1$, ils ne servent à rien on peut juste les enlever.
On remarque que $d_i \mid d_1 \cdot d_{i-1} d_{i+1} \cdot d_k + 1$, donc d_i est premier avec tous les autres d_j. En particulier, les d_i sont tous des carrés.

De plus, pour tout i, et pour tout $j \neq i$, $d_i \mid \frac{n}{d_j}$, et par hypothèse $d_i \mid \frac{n}{d_i} + 1$. En sommant,

$$d_i \mid \sum_{j=1}^{k} \frac{n}{d_j} + 1.$$

Comme c'est vrai pour tout i et que les d_i sont premiers entre eux, $n \mid \sum \frac{n}{d_j} + 1$.
Mais alors $1 < \sum \frac{1}{d_j}$, et les d_i sont des carrés distincts strictement plus grands que 1 : on a donc

$$\sum \frac{1}{d_j} < \sum_{m=2}^{\infty} \frac{1}{m^2} = \frac{\pi^2}{6} - 1 < 1,$$

contradiction.

Proposition 11 (Séries de Riemann)**.**
$\sum_n n^\alpha$ converge ssi $\alpha < -1$.
De plus, si $\alpha > -1$,

$$\sum_{k=1}^{n} k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha + 1} n^{\alpha+1}$$

Si $\alpha < -1$,

$$\sum_{k=n}^{\infty} k^\alpha \sim \frac{1}{\alpha + 1} n^{\alpha+1}.$$

Enfin,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \sim \ln n.$$

Proposition 12 (Produit Eulérien)**.**
Si $\alpha > 1$, alors

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^{\alpha}} = \prod_{p \text{ premier}} \frac{1}{1 - p^{-\alpha}}$$

Proposition 13 (Valeurs de séries à connaître)**.**

— $\sum x^n = \frac{1}{1-x}$
— $\sum n^{-2} = \frac{\pi^2}{6}$
— $\sum \frac{1}{n(n+1)} = 1$ (télescopage)
— $\sum n^{-4} = \frac{\pi^4}{90}$
— $\sum \frac{1}{n!} = e$

Résultats sur les nombres premiers

Proposition 14 (Postulat de Bertrand)**.**
Pour tout $n \geq 2$, il y a toujours un nombre premier entre n et $2n$.

Ce résultat peut être amélioré de la manière suivante : pour tout $c > 1$, il y a un N tel que pour tout $n \geq N$, il y a un nombre premier entre n et cn.
Ce résultat est lui-même un corollaire d'un résultat fondamental en théorie analytique des nombres :

Théorème 15 (Théorème des nombres premiers (TNP))**.** Soit $\pi(x)$ le nombre de nombres premiers plus petits que x. Alors

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log(x)}$$

(il s'agit du log en base e).

Remarque 16.
La preuve requiert des idées relevant de l'analyse complexe, et dépasse laaaargement le cadre de ce cours.

Corollaire 17.
Soit p_n le n-ième nombre premier. Alors

$$p_n \sim n \log(n).$$

À partir de là, on trouve

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{p_k} \sim \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k \ln k} \sim \ln \ln n.$$

Tout ça c'est bien beau, mais si on généralisait encore ?

On sait par Dirichlet que si $a \wedge d = 1$, il y a une infinité de nombre premiers congrus à 1 modulo d. On a en fait quelque chose de beaucoup plus fort, qui est que les nombres premiers sont équirépartis modulo d, autrement dit :

Théorème 18. Soit d un entier, et a un entier avec $a \wedge d$. On note $\pi_d^a(n)$ le nombre de nombres premiers congrus à a modulo d et qui sont plus petits que n. Alors

$$\pi_d^a(n) \sim \frac{1}{\varphi(d)} n \log(n).$$

De manière équivalente, si q_k est le k-ième nombre premier de la forme, alors

$$q_n \sim \varphi(d) \frac{n}{\log(n)}.$$

Exercices

Exemple 19.
(Concours 18 Mathraining, Problème 6)
Pour quels polynômes P à coefficients entiers peut-on trouver des entiers strictement positifs $a < b < c < d$ tels que pour tout k entier strictement positif,

$$P(ak) + P(bk) \mid P(ck) + P(dk)?$$

(Idée de) Solution : Par sommation et quotients d'équivalents strictement positifs,

$$\frac{P(ck) + P(dk)}{P(ak) + P(bk)} \sim \frac{\alpha k^n c^n + \alpha k^n d^n}{\alpha k^n a^n + \alpha k^n b^n} = \frac{c^n + d^n}{a^n + b^n}$$

Donc on a une suite à valeurs entières convergeant vers une constante. On obtient d'abord que cette suite est stationnaire, et donc la valeur limite est entière. On réécrit alors le fait que notre suite est stationnaire : il existe $N \in \mathbf{N}$ tel que pour tout $k \geq N$, on a

$$(a^n + b^n)(P(ck) + P(dk)) = (c^n + d^n)(P(ak) + P(bk)).$$

Vu qu'on a affaire à un polynôme, l'identité est vraie partout, et la conclusion n'est plus très loin. Comme elle n'utilise pas d'arguments qui nous intéresse ici, elle est laissée au lecteur.

Exercice 1
Soit a_n une suite quasi injective à valeurs entières (i.e. il existe $C > 0$ tel que $a_n = k$ a un nombre de solutions plus petit que C pour tout k). Montrer que si a_n n'a qu'un nombre fini de diviseurs premiers, alors

$$\sum_n \frac{1}{a_n} < \infty.$$

Solution de l'exercice 1
Soient $p_1, \ldots, p_k$ les nombres premiers qui divisent au moins l'un des a_i. On a l'inégalité (pas très précise mais c'est pas grave) :

$$\sum \frac{1}{a_i} \leq \prod_{i=1}^{k} \sum_{j \geq 0} \frac{1}{p_i^j} = \prod_{i=1}^{k} \frac{1}{1 - p_k} < \infty.$$

Une version plus forte de ce résultat est le suivant, bien qu'elle soit plus longue à reprouver :

Exercice 2
Soit a_n une suite quasi injective croissante à valeurs entières (i.e. il existe $C > 0$ tel que $a_n = k$ a moins de C solutions pour tout k). Montrer que si a_n n'a qu'un nombre fini de diviseurs premiers, alors il existe $c > 1$ tel que

$$c^n = O(a_n).$$

Solution de l'exercice 2
Soient $p_1, \dots, p_k$ les nombres premiers qui divisent au moins l'un des a_i. On a $2^{v_{p_i}(a_n)} \leq p_i^{v_{p_i}(a_n)} \leq a_n$, donc $v_{p_i}(a_n) \leq \log_2(a_n)$. C'est bien sûr vrai pour tout i, donc $\max v_{p_i}(a_n) \leq \log_2(a_n)$.
Cependant, pour un $A \in \mathbf{N}$ donné, il y a au plus kAC nombres de $(a_n)_n$ avec $\max v_{p_i}(a_n) < A$. Par croissance, on a donc $\max v_{p_i}(a_{kAC+1}) \geq A$, et donc $\log_2(a_{kAC+1}) \geq A$. On pose donc $c = 2^{\frac{1}{kC}}$ et on a fini.

Corollaire 20 (Lemme de Schur)**.**
Un polynôme non constant a une racine modulo une infinité de nombres premiers.

Exercice 3 (Baltic Way 2022 P17)
Soit $\sigma(n)$ la somme des diviseurs de n et $\omega(n)$ le nombre de diviseurs premiers de n. Montrer que

$$\sigma(n) < n(\omega(n) + 1)$$

Solution de l'exercice 3
Soient $p_1, \dots p_k$ les nombres premiers divisant n. On a alors

$$\sigma(n) = \prod_i \frac{p_i^{\alpha_i+1} - 1}{p_i - 1},$$

et donc

$$\frac{\sigma(n)}{n} = \prod_i \frac{p_i - p_i^{-\alpha_i}}{p_i - 1} < \prod_i \frac{p_i}{p_i - 1} = \prod_i \left(1 + \frac{1}{p_i - 1}\right) \leq \prod_i \left(1 + \frac{1}{i}\right) = \omega(n) + 1$$

où on a utilisé $p_i \geq i + 1$.

Exercice 4
Trouver tous les polynômes P à coefficients entiers tels que $P(n)$ soit un palindrome pour tout $n \geq 0$?

Solution de l'exercice 4
Les polynômes constants égaux à des palindrômes marchent. Supposons que P ne soit pas constant.
Comme $P(x) \sim a_d x^d$, $\log(P(x)) \sim d \log(x)$. Si on s'intéresse aux $P(n)$ dont l'écriture décimale commence par un 1, on veut que $10^k \leq P(n) < 2 \cdot 10^k$. En passant au log, on a $k \log 10 \leq \log(P(n)) < \log 2 + k \log 10$. Comme $\log(x + 1) - \log(x) \to 0$, il y a des suites de nombres consécutifs de plus en plus grandes telles que le premier chiffre de $P(n)$ soit 1.
Seulement, puisque $P(n)$ est un palindrome, si le premier chiffre de $P(n)$ est 1, alors le dernier

chiffre de $P(n)$ est 1 ! Donc puisque pour n suffisamment grand, on a 10 entiers consécutifs tels que $P(n)$ ait pour premier chiffre 1, comme $P(n)$ est 10-périodique modulo 10, $P(n) \equiv 1 \pmod{10}$ pour tout n.
Cependant on aurait pu faire ce raisonnement avec n'importe que autre chiffre que 1, contradiction.

Exercice 5 (Putnam 2007)
Trouver tous les polynômes tels que si n s'écrit avec uniquement des 1 en base 10, c'est également le cas pour $P(n)$.

Solution de l'exercice 5
Voir A-4 ici : https://kskedlaya.org/putnam-archive/2007s.pdf

Exercice 6 (China TSTST Test 2 Jour 1 P1)
Soit n un entier, et D_n l'ensemble des diviseurs positifs de n. On pose $f(n)$ comme étant le plus petit entier m tel que tous les éléments de D_n soient distincts modulo m.
Montrer qu'il existe un entier N, tel que pour tout $n \geq N$, $f(n) \geq n^{0.01}$.

Solution de l'exercice 6
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h1401990p7841287, post #13 par exemple.

Exercice 7 (P6 EGMO 2021)
Existe-t-il un entier a tel que l'équation

$$\left\lfloor \frac{m}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \cdots + \left\lfloor \frac{m}{m} \right\rfloor = n^2 + a$$

ait un nombre de couples solutions (m, n) plus grand que 10^6 ?

Solution de l'exercice 7
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6t68271f6h2526709_2021_egmo_p6_floorm1____floormm__n2__a(P6EGMO2021).

Exercice 8 (P5 APMO 2018)
Trouver tous les polynômes à coefficients entiers tels que si on a des réels s, t tels que $P(s), P(t)$ sont des entiers, alors $P(st)$ est aussi un entier.

Solution de l'exercice 8
Voir https://artofproblemsolving.com/community/c6h1662906p10561165(P5APMO2018).

Exercice 9
Montrer qu'il y a qu'un nombre fini de solutions à l'équation $n! = m^3 + 8$.

Solution de l'exercice 9
L'idée va bien sûr être de faire des choses asymptotiques, sinon on nous demanderait pas de montrer qu'il y a qu'un nombre fini de solutions.
Déjà, on factorise $m^3 + 8 = (m+2)(m^2 - 2m + 4)$. Une idée est de se demander quand on peut avoir $p \mid m^2 - 2m + 4$. Le discriminant est $4 - 4 \times 1 \times 3 = -12$, on cherche donc à savoir quand -12 est un résidu quadratique modulo p. Si $p \geq 5$, on a par réciprocité quadratique

$$\left(\frac{-12}{p}\right) = \left(\frac{-3}{p}\right) = \left(\frac{-1}{p}\right)\left(\frac{3}{p}\right) = (-1)^{\frac{p-1}{2}}(-1)^{\frac{3-1}{2}\frac{p-1}{2}}\left(\frac{p}{3}\right) = \left(\frac{p}{3}\right).$$

Ainsi, si $p \geq 5$ est tel que $p \mid m^2 - 2m + 4$, on doit avoir $p \equiv 1 \pmod 3$. En contraposant, si $p \equiv 2 \pmod 3$ (et $p \neq 2$), on a $p \nmid m^2 - 2m + 4$. Cependant, si $p \leq n$, alors $p \mid n! = (m+2)(m^2 - 2m + 4)$, et $p \mid m + 2$. On en déduit

$$\prod_{\substack{p \equiv 2[3] \\ 2 < p \leq n}} p^{v_p(n!)} \mid m + 2.$$

En passant à l'inégalité puis au log, on trouve donc

$$\sum_{\substack{p \equiv 2[3] \\ 2 < p \leq n}} v_p(n!) \log(p) \leq \log(m+2).$$

On va donc essayer de faire des équivalents. Avec un peu de chance, vu qu'on a des théorèmes d'équirépartition des nombres premiers modulo 3, la valeur de la dernière somme en remplaçant $p \equiv 2[3]$ par $p \equiv 1[3]$ (et celle-ci devrait donc valoir $\frac{1}{2} n \log(n)$ puisque la somme des deux devrait valoir $\log(n!) \sim n \log(n)$ par Stirling). Si on arrive à faire ça, on devrait alors avoir

$$\frac{1}{2} n \log(n) \sim f(n) \leq \log(m+2) \sim \log(m) \text{ et } 2\log(m) \sim \log(m^2 - 2m + 4) \leq g(n) \sim \frac{1}{2} n \log(n)$$

ce qui donnerait effectivement une contradiction à partir d'un certain rang. Allons-y !

On a $v_p(n!) \geq \frac{n}{p} - 1$, donc on peut écrire

$$\sum_{\substack{p \equiv 2[3] \\ 2 < p \leq n}} v_p(n!) \log(p) \geq \sum_{\substack{p \equiv 2[3] \\ 2 < p \leq n}} (\frac{n}{p} - 1) \log(p) = \sum_{\substack{p \equiv 2[3] \\ 2 < p \leq n}} \frac{n}{p} \log(p) - \log(p).$$

Comme on n'aime pas avoir des signes $-$ qui traînent, on sépare en deux sommes qu'on étudie séparément, et ensuite on voit.
D'un côté, on a la somme $\displaystyle\sum_{\substack{p \equiv 2[3] \\ 2 < p \leq n}} \frac{n}{p} \log(p)$. On numérote les nombres premiers congrus à 2 modulo 3 $p_1, p_2, \ldots$ (avec $p_1 = 5$, on dégage 2). On note $\pi_3^2(n)$ le nombre de nombres premiers impairs plus petits que n, de sorte que

$$\sum_{\substack{p \equiv 2[3] \\ 2 < p \leq n}} \frac{n}{p} \log(p) = n \sum_{k=1}^{\pi_3^2(n)} \frac{\log(p_k)}{p_k}.$$

On utilise à présent l'équirépartition des nombres premiers modulo 3, pour obtenir $p_k \sim 2k \log(k)$. On a donc $\frac{\log(p_k)}{p_k} \sim \frac{\log(2k\log(k))}{2k\log(k)} \sim \frac{1}{2k}$. Par sommation des équivalents, on obtient

$$n \sum_{k=1}^{\pi_3^2(n)} \frac{\log(p_k)}{p_k} \sim n \sum_{k=1}^{\pi_3^2(n)} \frac{1}{2k} \sim \frac{n}{2} \log(\pi_3^2(n)) \sim \frac{n}{2} \log(\tfrac{n}{2\log(n)}) \sim \frac{1}{2} n \log(n).$$

Tiens ça sent bon, on a notre $\frac{1}{2} n \log(n)$. On va quand même calculer l'autre somme, il se pourrait que ça change des choses.

Avec les mêmes arguments, on a

$$\sum_{\substack{p\equiv 2[3]\\ 2<p\leq n}} \log(p) = \sum_{k=1}^{\pi_3^2(n)} \log(p_k) \sim \sum_{k=1}^{\pi_3^2(n)} \log(2k\log(k)) \sim \sum_{k=1}^{\pi_3^2(n)} \log(k) \sim \pi_3^2(n)\log(\pi_3^2(n)) \sim \frac{n}{2}$$

Ok trop bien, cette somme là est un o de la première, donc le total est également équivalent à $\frac{1}{2}n\log(n)$. Par somme, $\log(m^2-2m+4)$ est plus petit que quelque chose équivalent à $v_p(n!) - \frac{1}{2}n\log(n) \sim \frac{1}{2}n\log(n)$, contradiction puisqu'il est censé être deux fois plus grand que $\log(m+2)$.

4 Équations fonctionnelles (Émile)

Exercice 1 (OJIMC 2021 P1)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous les réels x, y, on ait

$$xf(y) + f(x+y) \geq (y+1)f(x) + f(y).$$

Solution de l'exercice 1
Appliquons d'abord l'inégalité de l'énoncé avec $x = 0$. Alors on obtient $f(y) \geq (y+1)f(0) + f(y)$ pour tout y, mais alors nécessairement $f(0)$ doit valoir 0.

Appliquons à présent l'inégalité de l'énoncé avec $x = 1$. On obtient donc que pour tout y réel,

$$f(y) + f(y+1) \geq (y+1)f(1) + f(y)$$

et donc que pour tout y, $f(y+1) \geq (y+1)f(1)$, ou encore que pour tout réel x, $f(x) \geq xf(1)$.

Première solution
Posons à présent $y = 1$. Alors l'inéquation devient, pour tout $x \in \mathbb{R}$,

$$xf(1) + f(x+1) \geq 2f(x) + f(1).$$

Comme $xf(1) \leq f(x)$ par la remarque précédente, on obtient donc que pour tout x, $f(x+1) \geq f(x) + f(1)$.

A présent, on est en mesure de calculer $f(-1)$. En effet, on sait d'une part que $f(-1) \geq -1 \times f(1) = -f(1)$. Mais d'autre part, $f(-1+1) \geq f(-1) + f(1)$, donc $f(-1) \leq -f(1)$, et finalement $f(-1) = -f(1)$.

Montrons maintenant que l'inégalité $f(x+1) \geq f(x) + f(1)$ est en fait une égalité. En effet, en posant $x = -1$ dans l'inéquation fonctionnelle, on trouve que pour tout y réel,

$$-f(y) + f(y-1) \geq -(y+1)f(1) + f(y).$$

On a donc $f(y-1) \geq 2f(y) - (y+1)f(1)$. En utilisant le fait que $f(y) \geq yf(1)$ sur un des deux $f(y)$ à droite, on trouve bien $f(y-1) \geq f(y) - f(1)$ pour tout y. Ainsi, pour tout x, $f(x) + f(1) \geq f(x+1)$, et donc $f(x+1) = f(x) + f(1)$ car on avait déjà l'inégalité inverse.

Montrons finalement que $f(x) = xf(1)$ pour tout x. On a déjà une inégalité, il suffit de voir l'autre. Avec ce que l'on a montré précédemment, on reprend l'égalité avec $y = 1$, pour obtenir que pour tout x,

$$xf(1) + f(x) + f(1) \geq 2f(x) + f(1)$$

et donc $f(x) \leq xf(1)$. Finalement, pour tout x, $f(x) = xf(1)$, et donc f est linéaire. Reciproquement, si f est linéaire, elle est bien solution de l'énoncé (et même avec une égalité).

Deuxième solution

Posons $y = -x$ afin d'obtenir, car $f(0) = 0$, que pour tout x réel,

$$xf(x) \geq (1 - x)f(x) + f(-x)$$

et donc

$$(1 - x)(f(x) + f(-x)) \leq 0.$$

Ainsi, pour tout $x < 1$, on a $f(x) + f(-x) \leq 0$. Mais si $x \geq 1$, on a aussi $f(x) + f(-x) = f(-x) + f(-(-x)) \leq 0$ car $-x < 1$. Ainsi, pour tout x réel, $f(x) + f(-x) \leq 0$. Il reste ensuite à remarquer que

$$0 \geq f(x) + f(-x) \geq xf(1) + (-x)f(1) = 0$$

et donc que ces deux inégalités sont des égalités. La deuxième nous donne notamment que pour tout x, $f(x) = xf(1)$, c'est-à-dire que f est linéaire. La vérification que les fonctions linéaires fonctionnent bien est simple.

Exercice 2

Trouver toutes les fonctions $f, g : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que

$$\forall x > 0, \quad \begin{cases} g(f(x)) = \frac{x}{xf(x)-2} \\ f(g(x)) = \frac{x}{xg(x)-2} \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 2

Remarquons que comme le côté gauche de l'équation est forcément strictement positif, on a toujours $xf(x) - 2 > 0$ et $xg(x) - 2 > 0$ pour tout $x > 0$, ou encore $xf(x) > 2$ et $xg(x) > 2$ pour tout x.

Supposons maintenant que l'on ait montré que pour tout x, $xf(x) > a$ et $xg(x) > a$, où $a > 1$ est une constante strictement positive. En réintroduisant dans les équations, on trouve que pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{xf(x) - 2} = g(f(x)) > \frac{a}{f(x)}$$

$$xf(x) > axf(x) - 2a$$

et donc

$$xf(x) < \frac{2a}{a - 1}$$

car $a > 1$. Le même raisonnement donne que pour tout $x > 0$, $xg(x) < \frac{2a}{a-1}$. On réapplique donc la même méthode pour obtenir, pour tout $x > 0$,

$$\frac{x}{xf(x)-2} = g(f(x)) < \frac{2a}{(a-1)f(x)}$$
$$(a-1)xf(x) < 2axf(x) - 4a$$
$$xf(x) > \frac{4a}{a+1}$$

et la même inégalité pour g. Posons donc $a_0 = 2$ et pour tout n, $a_{n+1} = \frac{4a_n}{a_n+1}$. On vérifie facilement que pour tout n, $a_n > 1$, on sait alors que pour tout $n \geq 0$ et $x > 0$,

$$a_n < xf(x) < \frac{2a_n}{a_n - 1}.$$

Etudions maintenant la convergence de la suite a_n. On voudrait montrer que cette suite est croissante et qu'elle converge vers le point fixe de $x \mapsto \frac{4x}{x+1}$ qui est 3. Pour ceci, on peut par exemple remarquer que si un couple f, g de fonctions comme dans l'énoncé existait, alors on aurait nécessairement $a_n < \frac{2a_n}{a_n-1}$, et donc $a_n < 3$. Alors on a pour tout n, $a_{n+1} > \frac{4a_n}{3+1} = a_n$, donc la suite a_n est croissante. Ainsi, comme elle est bornée par 3, elle converge, vers 3 qui est l'unique point fixe de $x \mapsto \frac{4x}{x+1}$ supérieur à $a_0 = 2$.

A la limite, on obtient donc que pour tout x, $xf(x) \geq 3$. Mais de plus, $\frac{2a_n}{a_n-1}$ converge aussi, vers $\frac{2\cdot 3}{3-1} = 3$, et donc à la limite, $xf(x) \leq 3$ pour tout x. Comme on a de même pour g, on a donc que pour tout $x > 0$,

$$f(x) = g(x) = \frac{3}{x}.$$

Réciproquement, on vérifie bien que ce couple de fonctions est bien solution.

Exercice 3 (Turquie TST 2013 P2)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on ait :

$$\begin{cases} f(x^2) = f(x)^2 - 2xf(x) \\ f(-x) = f(x-1) \\ 1 < x < y \implies f(x) < f(y) \end{cases}.$$

Solution de l'exercice 3
La première condition nous donne envie de compléter le carré à droite, ce qui nous donne pour tout x,

$$f(x^2) + x^2 = (f(x) - x)^2$$

Le côté de gauche étant invariant par le changement $x \mapsto -x$, on obtient pour tout x,

$$(f(-x) + x)^2 = (f(x) - x)^2.$$

On a alors, pour tout x, soit $f(-x) + x = f(x) - x$, soit $-f(-x) - x = f(x) - x$. Le deuxième cas donnerait $f(-x) = -f(x)$, impossible car f est à valeurs strictement positives, donc pour tout x,

$$f(x) = f(-x) + 2x = f(x-1) + 2x.$$

On obtient ainsi une sorte d'équation de récurrence. Avec cette équation, on obtient que pour tout réel x et tout n entier positif,

$$f(x+n) = f(x) + 2(x+1) + 2(x+2) + \ldots + 2(x+n) = f(x) + 2xn + n^2 + n$$

et on peut vérifier que ceci reste vrai pour des entiers n négatifs. La première égalité de l'énoncé avec $x = 0$ donne $f(0) = f(0)^2$. Comme nécessairement $f(0) > 0$, on obtient $f(0) = 1$. On obtient alors $f(n) = n^2 + n + 1$. On s'attend alors à ce que la solution soit $f : x \mapsto x^2 + x + 1$, et on vérifie effectivement que cette fonction est solution de l'énoncé, vérifions que c'est effectivement la seule.

Première solution

Soit x un réel. On va choisir un autre réel y et appliquer la première équation de l'énoncé à x et y. On aimerait pouvoir lier $f(x)$ et $f(y)$, ainsi que $f(x^2)$ et $f(y^2)$. Une façon de pouvoir faire ça est si $y - x$ et $y^2 - x^2$ sont tous les deux des entiers (car on a une relation entre $f(x)$ et $f(x+n)$ pour tout n entier). En posant $y = x + n$, on veut donc que $2xn$ soit entier. Ceci nous fait donc penser à poser $x = \frac{p}{q}$ un rationnel et $y = x + q$. Alors on a

$$f(y) = f(x+q) = f(x) + 2xq + q^2 + q$$

et

$$f(y^2) = f(x^2 + 2qx + q^2) = f(x^2) + 2x^2(2qx + q^2) + (2qx + q^2)^2 + (2qx + q^2).$$

On écrit alors la première relation pour x et y et on les combine dans l'équation ci-dessus

$$f(y)^2 - 2yf(y) = f(x)^2 - 2xf(x) + 2x^2(2qx + q^2) + (2qx + q^2)^2 + (2qx + q^2).$$

En remplaçant les $f(y)$ par des quantités ne faisant intervenir que x, on trouve

$$(f(x)+2xq+q^2+q)^2 - 2(x+q)(f(x)+2xq+q^2+q) = f(x)^2 - 2xf(x) + 2x^2(2qx+q^2) + (2qx+q^2)^2 + (2qx+q^2).$$

On peut soit résoudre cette équation, soit remarquer que les termes en $f(x)^2$ s'annulent et donc que l'équation est affine en $f(x)$, avec coefficient directeur

$$2(2xq + q^2 + q) - 2(x + q) + 2x = 4xq + 2q^2$$

qui est non nul (sinon $x = -\frac{q}{2}$ et alors $q = 1$ ou 2, ce qui est contradictoire dans chaque cas). Mais on sait déjà que $f(x) = x^2 + x + 1$ est une solution du problème, donc nécessairement la solution de cette équation affine est $f(x) = x^2 + x + 1$.

Il reste à voir que l'on peut étendre cette égalité à tous les réels. Sur $]1, +\infty[$, c'est possible par densité des rationnels d'après la troisième relation de l'énoncé. Ensuite, on l'étend sur tout $\mathbb{R}$ par notre relation entre $f(x)$ et $f(x+n)$ pour tous x, n, ce qui conlclut.

Deuxième solution

Posons S l'ensemble des réels x tels que $f(x) = x^2+x+1$. D'après ce que l'on a vu, S contient déjà tous les entiers, et si $x \in S$, alors pour tout entier n, $x + n \in S$. Montrons maintenant que S est stable par racine carrée. Soit $x \in S$ avec $x > 0$, alors on peut écrire

$$x^2 + x + 1 = f(x) = f(\sqrt{x})^2 - 2\sqrt{x}f(\sqrt{x})$$

C'est une équation de degré deux sur $f(\sqrt{x})$, dont les solutions sont

$$f(\sqrt{x}) = \frac{1}{2}(2\sqrt{x} \pm \sqrt{4x + 4(x^2 + x + 1)})$$
$$= \sqrt{x} \pm (x + 1).$$

Seule une des deux solutions est positive, c'est $x + \sqrt{x} + 1$, et donc $\sqrt{x} \in S$. Maintenant, il y a de nombreuses manières de finir. On peut par exemple dire que S contient tous les nombres de la forme $n^{2^{-k}}$ avec $n, k \in \mathbb{N}$, qui forment une partie dense de $]1, +\infty[$ (car cette partie contient tous les entiers et est stable par moyenne géométrique). Alors par stricte croissance de f sur cet intervalle et par continuité de $x \mapsto x^2 + x + 1$, pour tout $x > 1$, $f(x) = x^2 + x + 1$. On obtient alors le résultat pour tout x en utilisant le fait que S est stable par addition d'un entier.

Exercice 4
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ telles que pour tous $x, y > 0$,

$$f\left(\frac{f(x)}{yf(x) + 1}\right) = \frac{x}{xf(y) + 1}.$$

Solution de l'exercice 4
On remarque tout d'abord que pour tout $z > 0$, l'application $x \in \mathbb{R}_+^* \mapsto \frac{x}{xz+1} \in]0, z^{-1}[$ est une bijection strictement croissante.

Maintenant, si $f(x) = f(x')$, on trouve que

$$\frac{x}{xf(1) + 1} = f\left(\frac{f(x)}{1 \times f(x) + 1}\right) = f\left(\frac{f(x')}{1 \times f(x') + 1}\right) = \frac{x'}{x'f(1) + 1}$$

donc $x = x'$ et f est injective.

D'autre part, fixons $y > 0$. Chaque z compris entre 0 et $f(y)^{-1}$ (strictement) s'écrit comme un $\frac{x}{xf(y)+1}$ pour un certain x strictement positif, tout $0 < z < f(y)^{-1}$ est atteint par f. En particulier, si $0 < z < f(y)^{-1}$, on peut écrire $z = f(y')$. Mais alors f atteint tout point entre 0 et $f(y')^{-1} = z^{-1}$. En faisant tendre z vers 0 (ce qui est permis, la seule contrainte étant $0 < z < f(y)^{-1}$), on en déduit que f est surjective, donc f est bijective.

Première solution
Soit g la bijection réciproque de f, i.e. la seule fonction telle que $f(g(x)) = g(f(x)) = x$ pour tout $x > 0$. On vérifie que g vérifie la même équation fonctionnelle que f : en appliquant l'équation fonctionnelle de départ à $g(x)$ et $g(y)$, on obtient

$$f\left(\frac{x}{xg(y) + 1}\right) = \frac{g(x)}{yg(x) + 1}.$$

En appliquant g des deux côtés, on obtient que g vérifie la même équation que f.

Soient maintenant $x, x' > 0$ tels que $x' < f(x)$. Alors il existe un $y > 0$ tel que $x' = \frac{f(x)}{yf(x)+1}$ (il suffit de prendre $y = \frac{1}{x'} - \frac{1}{f(x)}$), donc $f(x') = f\left(\frac{f(x)}{yf(x)+1}\right) = \frac{x}{xf(y)+1} < x$.

Donc si $x' < f(x)$, alors $f(x') < x$. En particulier, si $x < f(x)$, alors $f(x) < x$, c'est absurde. Donc pour tout réel $x > 0$, $f(x) \leq x$.

Or, on a vu que g était également solution de l'équation, donc pour tout réel $x > 0$, on a $g(x) \leq x$. Notamment, si $x > 0$, $x = g(f(x)) \leq f(x)$. On a donc forcément $f(x) = x$, donc f est l'identité, et on vérifie facilement que l'identité est bien solution.

Deuxième solution

Maintenant que l'on a f bijective, remarquons que dans l'énoncé, si l'on fixe y et que x varie, alors le côté droit prend toutes les valeurs entre 0 et $\frac{1}{f(y)}$ (non compris), et le terme dans la fonction à gauche prend toutes les valeurs entre 0 et $\frac{1}{y}$ (non compris), car f est surjective. Ceci signifie donc que pour tout $y > 0$,

$$f\left(\left]0, \frac{1}{y}\right[\right) = \left]0, \frac{1}{f(y)}\right[.$$

Cette remarque paraît simple, mais elle permet déjà de montrer que f est croissante. En effet, lorsque y augmente, l'ensemble à gauche diminue (pour la relation d'inclusion), donc nécessairement celui de droite aussi, et donc $f(y)$ augmente, ce que l'on voulait montrer. Alors comme f est croissante bijective sur $\mathbb{R}_+^*$, on obtient qu'elle est continue, et qu'elle admet 0 comme limite en 0. On fait maintenant tendre y vers 0 dans l'équation de l'énoncé. A gauche, le terme dans la parenthèse tend vers $f(x)$, et donc le terme de gauche tend vers $f(f(x))$ par continuité de f. A droite, comme $f(y)$ tend vers 0, le terme tend vers x. On obtient donc, pour tout $x > 0$,

$$f(f(x)) = x.$$

Mais c'est maintenant un exercice classique de vérifier que la seule involution croissante de $\mathbb{R}_+^*$ est l'identité. En effet, supposons par l'absurde qu'il existe $x > 0$ tel que $f(x) > x$ (respectivement $f(x) < x$), alors par croissance on a $f(f(x)) > f(x)$ (respectivement $f(f(x)) < f(x)$), et donc $x > x$ (respectivement $x < x$), absurde. Ainsi, f est nécessairement l'identité.

Il reste enfin à vérifier que l'identité est bien solution de l'équation initiale, ce qui est vrai.

Exercice 5 (RMM 2019 P5)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x, y,

$$f(x + yf(x)) + f(xy) = f(x) + f(2023y).$$

Solution de l'exercice 5

Tout d'abord, voyons que le 2023 est arbitraire et n'a aucune influence sur l'équation. En effet, en posant $g(x) = \frac{f(2023x)}{2023}$ pour tout x, l'équation de l'énoncé avec $2023x$ au lieu de x donne que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$, on a

$$g(x + yg(x)) + g(xy) = g(x) + g(y).$$

On cherche maintenant à égaliser des termes dans la fonction g, par exemple xy et y qui peuvent être égalisés en posant $x = 1$. Dans ce cas, l'équation donne

$$g(1 + yg(1)) = g(1).$$

Remarquons déjà que si $g(1) \neq 0$, alors $1 + yg(1)$ prend toutes les valeurs réelles lorsque y varie, et donc g est constante. Ceci donne comme solution f constante, dont on vérifie que c'est bien une solution pour tout choix de la constante.

On suppose à présent que l'on est dans le cas $g(1) = 0$. Alors en posant $y = 1$ pour égaliser xy et x, on trouve que pour tout x,

$$g(x + g(x)) = 0.$$

Si 1 est le seul point où g s'annule, alors g est de la forme $g(x) = 1 - x$, et f est donc de la forme $f(x) = 2023 - x$, dont on vérifie que c'est effectivement une solution. Supposons à présent qu'il existe un point $a \neq 1$ tel que $g(a) = 0$.

Remarquons qu'en posant $x = b$ pour b un zéro quelconque de g, on trouve dans l'équation de g que pour tout y, $g(by) = g(y)$. Or on sait que pour tout x, $x + g(x)$ est un zéro de g, donc par exemple avec $x = 0$, on trouve que $g(0)$ est un zéro de g, donc pour tout y, $g(g(0)y) = g(y)$.

Si g est identiquement nulle, on retombe sur une fonction constante, cas qui a déjà été traité précédemment, on suppose donc que ce n'est pas le cas, et qu'il existe un point $s \in \mathbb{R}$ tel que $g(s) \neq 0$. En posant $x = as$ dans l'équation de g (où on rappelle que $a \neq 1$ est un zéro de g), on trouve que pour tout y,

$$g(as + yg(s)) + g(sy) = g(as + yg(as)) + g(asy) = g(as) + g(y) = g(s) + g(y)$$

et donc $g(as + yg(s))$ est indépendent du choix de a comme zéro de g. Si b est un autre zéro de g, on a donc $g(as + yg(s)) = g(bs + yg(s))$ pour tout y réel, et donc comme $g(s) \neq 0$, $yg(s)$ prend toutes les valeurs réelles et g est $(a - b)s$-périodique.

Si jamais on peut choisir $s \neq 0$ tel que $g(s) \neq 0$, alors g est effectivement périodique de période $p = (a - 1)s \neq 0$. En posant $x = p$ dans l'équation de g, on trouve que pour tout y,

$$g(y) + g(py) = g(g(0)y) + g(py) = g(p + g(p)y) + g(py) = g(p) + g(y) = g(0) + g(y)$$

d'où $g(py) = g(0)$ pour tout y. Comme $p \neq 0$, on obtient que g est constante. Ainsi, g est forcément nulle en dehors de 0.

On pourrait s'attendre à en conclure facilement que g est nulle, mais en fait toute fonction nulle en dehors de 0 fonctionne ! En effet, soit g n'importe quelle fonction nulle en dehors de 0, on suppose même que $g(0) \neq 0$ car l'autre cas a déjà été traité, et soient x, y des réels. Si x, y sont tous les deux non nuls, alors x, y, xy et $x + yg(x) = x$ sont tous non nuls et l'équation sur g s'écrit $0 + 0 = 0 + 0$. Si maintenant $y = 0$ et x est non nul, l'équation devient $0 + g(0) = 0 + g(0)$. Si $x = 0$ et y est non nul, alors $x + yg(x) = yg(0) \neq 0$ et l'équation devient $0 + g(0) = g(0) + 0$. Enfin, si $x = y = 0$, l'équation devient $g(0) + g(0) = g(0) + g(0)$. On voit donc que g fonctionne bien, on obtient donc que toutes les fonctions f nulles en dehors de 0 sont solutions.

Pour conclure, les solutions sont $f : x \mapsto 2023 - x$, f constante, et f nulle en dehors de 0, prenant une valeur quelconque en 0.

Exercice 6 (ELMO 2017 P6)
Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous réels a, b, c, on ait

— Si $a + b + c \geq 0$, alors $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \geq 3f(abc)$

— Si $a + b + c \leq 0$, alors $f(a^3) + f(b^3) + f(c^3) \leq 3f(abc)$.

Solution de l'exercice 6
Commençons par chercher quelques propriétés de base de la fonction f. Déjà, remarquons que l'on peut translater f par une constante en $f + c$ avec $c \in \mathbb{R}$ et que ceci ne change pas la véracité de l'équation. On va donc supposer sans perte de généralité que $f(0) = 0$. Prenons maintenant $b = -a, c = 0$. Alors on trouve $f(a^3) + f(-a^3) = 0$ pour tout a. Comme a^3 peut prendre n'importe quelle valeur réelle, on obtient donc que f est une fonction impaire. Enfin, si $x \geq y$, on peut prendre $a = x^{1/3}, b = -y^{1/3}, c = 0$ dont la somme est positive pour obtenir $f(x) \geq f(y)$, ou encore que f est croissante.

Comme on voudrait éviter de travailler avec une inégalité, on va considérer le cas où $c = -a - b$ afin que les deux inégalités de l'énoncé soient valides et que pour tous a, b,

$$f(a^3) + f(b^3) + f(-(a+b)^3) = 3f(-ab(a+b)).$$

On utilise les propriétés montrées sur f pour obtenir

$$f(a^3) + f(b^3) + 3f(ab(a+b)) = f((a+b)^3).$$

D'ici, une substitution typique à faire serait $a = b$, on va poser $a = b = d^{1/3}$ pour obtenir une équation sur une nouvelle inconnue d : pour tout d réel,

$$2f(d) + 3f(2d) = f(8d).$$

Ainsi, la suite des $f(2^k d)$ suit une équation linéaire à coefficients constants, dont le polynôme caractéristique est $X^3 - 3X - 2$. Astucieusement, on aura remarqué que la fonction identité est solution du problème, et dans ce cas $f(2^k d) = 2^k d$, donc 2 doit être une racine de ce polynôme caractéristique, c'est bien le cas. On trouve que l'autre racine est -1, qui est une racine double. Ainsi, il existe des constantes a, b, c telles que pour tout d réel, k entier (qui peut être négatif),

$$f(2^k d) = 2^k a + (-1)^k (kb + c).$$

Mais f étant monotone, $k \mapsto f(2^k d)$ doit être monotone, ce qui donne nécessairement $b = c = 0$, et donc $f(2^k d) = 2^k a$. En posant $k = 0$, on trouve $a = f(d)$ et donc pour tout d réel et k entier,

$$f(2^k d) = 2^k f(d).$$

A partir de l'étude du cas $a = b$ dans l'équation $f(a^3) + f(b^3) + 3f(ab(a+b)) = f((a+b)^3)$, on va plutôt chercher à égaliser $b^3 = ab(a+b)$, ce qui donne une équation de degré 2 sur b se résolvant en $b = \varphi a$ avec $\varphi = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$. On trouve alors que pour tout d réel, en posant $a = d^{1/3}$,

$$f(d) + 4f(\varphi^3 d) = f(\varphi^6 d).$$

On a nouveau une équation linéaire à coefficients constants sur les $f(\varphi^{3k} d)$, de polynôme caractéristique $X^2 - 4X - 1$, dont les racines sont φ^3 et $-\varphi^{-3}$. Mais encore une fois la monotonicité de $k \mapsto f(\varphi^{3k} d)$ implique que le coefficient devant $-\varphi^{-3}$ est nul, et donc pour tout d réel et k entier,

$$f(\varphi^{3k} d) = \varphi^{3k} f(d).$$

Ainsi, on obtient que pour tous entiers k, l, on a

$$f(2^k \varphi^{3l}) = 2^k \varphi^{3l} f(1).$$

Mais alors par théorème d'approximation de Dirichlet, tout réel positif est approchable par des $2^k \varphi^{3l}$ (il faudrait vérifier que φ^{3l} n'est jamais une puissance de 2, mais ce n'est pas trop dur), et donc on obtient $f(x) = xf(1)$ pour tout réel positif x par croissance de f. L'imparité de f nous indique que f est nécessairement linéaire, de coefficient positif. En enlevant la condition $f(0) = 0$, f est donc affine de coefficient directeur positif.

Réciproquement, si f est affine de coefficient directeur positif, elle satisfait les conditions de l'énoncé.

5 Polynômes (Martin)

L'objectif du cours est de répérer quelques idées couvrant une large famille d'exercices sur les polynômes. On se concentrera uniquement sur les exercices impliquant les polynômes à coefficients réels (les exercices de polynômes à coefficients entiers sont souvent une famille à part car ils impliquent des argument d'arithmétique).

Tout d'abord, les exercices de polynômes réels sont très peu présents aux OIM, en revanche ils sont apparus récemment au RMM, à l'EMC et à la Balkan MO (ou dans leurs shortlists).

D'autre part, nous allons dans ce cours développer un (tout petit) peu de théorie autour des polynômes réels. Nous allons notamment développer deux aspects :

- Les outils nécessaires à la résolution d'équations polynomiales. On étudie pour cela l'arithmétique des polynômes réels, dont les raisonnements sont très similaires aux raisonnements rencontrés sur les entiers : divisibilité, division euclidienne... que nous allons coupler avec l'aspect analytique des polynômes réels : rigidité, croissance contrôlée, dérivation.
- La recherche de racines réelles. On se penche surtout sur les exercices demandant de discuter l'existence de racines réelles ou de les localiser. Les arguments sont souvent des inégalités appliqués à des réels sur intervalle choisis, parfois doublés de l'usage des relations de Viète.

On prendra soin de rester sur la droite réelle et de ne jamais basculer dans le complexe.

Enfin, on ne fera aucune distinction entre un polynôme et sa fonction polynomiale associée.

Equations polynomiales

Quelques rappels. On y retrouve des idées similaires à l'arithmétique, la touche supplémentaire venant de la nature analytique des polynômes.

- La division euclidienne est fondatrice. Elle implique notamment :
  1. (factorisation) si a est racine de P, alors on a Q tel que $P(X) = (X-a)Q(X)$. Dans le cadre des polynômes réels, on peut toujours décomposer P en un produit de polynômes de degré 1 et de polynômes de degré 2 sans racines réelles. Une information de la forme $P(b) = c$ se transforme alors en $P(X) = (X-b)Q(X) + c$.
  2. (rigidité) Si P a plus de $\deg P + 1$ racines, alors il est nul. Dans les problèmes, soit cela montre que deux polynômes sont égaux, soit cela peut donner un argument de taille (on majore le nombre de racines que l'on a exhibées).
  3. Moins centrale mais plutôt amusant : en itérant la division euclidienne, on peut obtenir une écriture en base Q d'un polynôme P : il existe $c_0, c_1, \ldots, c_r$ des polynômes réels de degré inférieurs à $\deg Q$ tels que $P(X) = \sum c_i(X)Q^i(X)$.
- La notion de degré. Comparer les degrés de deux polynômes est la première chose à faire face à une équation polynomiale (la deuxième étant de comparer les coefficients dominants et constants). Il interviendra souvent via un argument de taille : si P divise $A - B$ et que $\deg(A-B) < \deg P$, alors $A = B$. Le degré est également une quantité analytique puisqu'il permet de contrôler la croissance du polynôme en $\pm\infty$: un polynôme

croît comme $x^{\deg P}$, de sorte que des équations du type $2^x = P(x)$ ont un nombre fini de solutions. Enfin, le degré donne des informations sur les racines de P : si $\deg P$ est impair, alors P admet une racine (utiliser le TVI) et par contraposée, si P n'a pas de racines alors P est de degré pair.

On développe désormais la notion de dérivation. Là aussi, il y a l'aspect arithmétique de la dérivation (on obtient grâce à elle des informations de divisibilité) et l'aspect analytique (variations du polynômes).

L'aspect arithmétique d'abord. Voici le lemme suivant :

Lemme 1. Soient P et Q deux polynômes réels tels que Q^m divise P. Alors Q^{m-1} divise P'.

Démonstration. On se donne A tel que $P = Q^m A$. En dérivant l'équation, on trouve $P' = Q^{m-1}(QA' + mQ'A)$, de sorte que Q^{m-1} divise P'. □

Ce lemme justifie l'idée important suivante :

Lorsqu'il y a des puissances dans une équation polynomiale, la dériver

L'exemple suivant permet d'illustrer mon propos :

Exercice 1
Soit $n \geqslant 3$ un entier impair. Déterminer tous les triplets (A, B, C) de polynômes réels tels que

$$A^n + B^n + C^n = 0$$

Solution de l'exercice 1
On remarque que C^n divise $A^n + B^n$, donc en appliquant le lemme on trouve que C^{n-1} divise $A'A^{n-1} + B'B^{n-1}$. On déduit par soustraction que C^{n-1} divise $A^{n-1}(A'B - B'A)$.

Maintenant qu'on a cette relation clée, on choisit proprement C pour avoir un argument de taille sur le degré :

On commence par remarquer que si l'un des polynômes est nul, disons A, alors on a nécessairement $C = -B$. On obtient donc une famille de solutions de la forme $(0, B, -B)$ et ses permutations (on vérifie qu'elles fonctionnent). Dans la suite, on suppose que les polynômes sont non nuls.

Tout d'abord, si D divise A et B, alors D divise C. Ainsi, quitte à diviser, on peut supposer que A, B et C sont premiers entre eux deux à deux. On suppose ensuite par symétrie que $\deg C \geqslant \deg A, \deg B$ et que C est non constant. Puisque C^{n-1} divise $A^{n-1}(A'B - B'A)$ et que C est premier avec A, on a que C^{n-1} divise $A'B - B'A$. Si ce dernier terme n'est pas nul, on a alors

$$(n-1)\deg(C) \leqslant \deg(A'B - B'A) \leqslant \deg(A) + \deg(B) - 1 < 2deg(C)$$

ce qui est absurde si C est non constant.

Dans le cas où C est non constant, on déduit que $A'B - AB' = 0$, ce qui se réécrit $\left(\frac{A}{B}\right)' = 0$ ou encore $A = cB$ pour une certaine constante c. Comme les polynômes sont supposés premiers entre eux deux à deux, on déduit que A et B sont constants. Mais alors en réinjectant, on a C^n qui est constant donc C est constant (ce qui est contraire à ce que l'on supposait.

Finalement, C est constant et comme il était de degré maximal, A et B le sont aussi. Le triplet (A, B, C) est de la forme (a, b, c) avec $a^n + b^n + c^n = 0$. En remontant, on trouve que les triplets sont de la forme (aD, bD, cD) avec $a^n + b^n + c^n = 0$ et D un polynôme réel quelconque.

Voyez comment on combiné la dérivation avec un argument de taille sur le degré.

Le lemme généralise la notions suivante : a est racine de multiplicité k de P ssi $P(a) = P'(a) = \dots P^{(k-1)}(a) = 0$. Donc P' renferme des informations sur les racines de P ! On pourra le comprendre à travers l'exemple suivant :

Exercice 2
Existe-t-il un polynôme P tel que $P(X) = (X-a_1)^3(X-a_2)^2\dots(X-a_n)$ et $P(X)+1 = (X-b_1)^3(X-b_2)^2\dots(X-b_n)^2$?

Solution de l'exercice 2
La clée est que les deux polynômes ont la même dérivée. On va regarder les racines de P'.

a_1 est racine de multiplicité 2 et $a_2, \dots, a_n$ sont racines de multiplicité 1 de P'. De même pour les b_i. Comme les a_i et b_i sont deux à deux distincts, on déduit

$$2n = \deg P' \geqslant 2 + (n-1) + 2 + (n-1) = 2(n+1)$$

ce qui est absurde. Un tel polynôme n'existe pas.

Donc ici, le polynôme P' a permis de rassembler les informations apportées par P et les translatés de P. Bref, vous l'aurez compris, la dérivation des équations c'est super.

On donne maintenant quelques théorèmes qui pourraient s'avérer utiles.

- La formule de Taylor nous donne que

$$P(X) = \sum_{k=0}^{\deg P} \frac{P^{(k)}(0)}{k!} X^k$$

  autrement dit, on peut récupérer les coefficients de P à partir de leur dérivée. Ce concept peut s'avérer utile lorsque l'on veut construire des polynômes vérifiant des propriétés.

- Le théorème de Rolle, qui fonctionne comme suit : si $P(a) = P(b)(= 0)$, alors on peut montrer que P admet un minimum ou un maximum sur $]a, b[$. Le point ou P admet cet extremum est un point d'annulation de P'. Une conséquence remarquable est que si P admet n racines réelles, P' en admet $n-1$.

On passe aux exos :

Exercice 3
(USA TST 2017 P3) Soient P et Q deux polynômes réels non constants et premiers entre eux. Montrer qu'il existe au plus trois réels λ vérifiant que $P + \lambda Q$ est un carré.

Solution de l'exercice 3
Soit λ vérifiant que $P + \lambda Q = A^2$. en dérivant cette équation, on trouve que A divise $P + \lambda Q$ et $P' + \lambda Q'$. En soustrayant, on trouve que A divise $Q(Q'P - P'Q)$ et $P(P'Q - Q'P)$. On écrit $A = B_1 \dots B_r$ sa décomposition en facteurs irréductibles (pas forcément distincts) et on suppose que $\gcd(A, P'Q - Q'P) = B_1 \dots B_k$. Alors $B_{k+1} \dots B_r$ divise Q et P, ce qui n'est pas possible. On déduit que A divise $Q'P - P'Q$.

Considérons désormais $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$ et λ_4 quatre réels vérifiant la propriété, et $A_1, \dots, A_4$ les polynômes associés.

Notons que si $i \neq j$ et si D divise A_i et A_j, alors D divise $P + \lambda_i Q - (P + \lambda_j Q)$ donc D divise Q. Mais D divise aussi $\lambda_i(P + \lambda_j Q) - \lambda_j(P + \lambda_i Q)$ donc D divise P. Bref D divise P et Q donc D est constant.

Ainsi les A_i sont premiers entre eux deux à deux et leur produit divise $P'Q - Q'P$. Vous l'aurez compris, on conclut par un argument de taille, étant donné que $2 \deg A_i \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$ avec égalité pour au plus 1 des A_i (car pour abaisser le degré, il faut que les deux polynômes soient de même degré et un unique λ permet de compenser les coefs dominants. Si $P'Q - Q'P \neq 0$, alors

$$3 \max(\deg P, \deg Q) \leqslant \deg(A_1A_2A_3A_4) \leqslant \deg Q'P - P'Q \leqslant \deg P + \deg Q - 1 < 2 \max(\deg P, \deg Q)$$

C'est absurde, donc $P'Q = Q'P$. On conclut comme dans l'exemple que P et Q sont égaux à constante multiplicative près, ce qui contredit les hypothèses.

Exercice 4
(RMM 2018 P2) Déterminer s'il existe deux polynômes réels non constants P et Q tels que

$$P(X)^{10} + P(X)^9 = Q(X)^{21} + Q(X)^{20}$$

Solution de l'exercice 4
Première chose : on regarde les degrés. On déduit notamment qu'il existe d tel que $\deg Q = 10d$ et $\deg P = 21d$.

Ensuite, on factorise des deux côtés : $P(X)^9(P(X) + 1) = Q(X)^{19}(Q(X) + 1)$. On dérive cette équation et on trouve

$$P'P^8(10P + 9) = Q'Q^{19}(20 + 21Q)$$

On déduit notamment que $Q^{19} \mid \gcd(P'P^8(10P + 9), P^9(P + 1))$. Or la relation $10(P + 1) - (10P + 9) = 1$ donne que les polynômes $10P + 9$ et $P + 1$ sont premiers entre eux. Ainsi, Q^{19} divise $P^8 \gcd(P', P)$. En regardant les degrés, cela donne

$$19 \times 10d \leqslant 8 \deg P + \deg P = 9 \times 21d$$

ce qui est absurde. Il n'y a pas de solutions.

Recherche de racine et analyse des polynômes

Une autre catégorie de problèmes de polynômes concerne la recherche des racines de ces polynômes.

Comme les polynômes sont des objets continus, pour montrer qu'un polynôme n'a pas de racines réelles il suffit de montrer qu'il est de signe constant. L'exercice se ramène alors à une inégalité à démontrer.

Un autre aspect important est l'aspect analytique de P. Ainsi, deux idées peuvent être pertinentes lorsque l'on étudie des polynômes réels :

- Considérer x très grand. Comme P' diverge en $\pm\infty$, P est strictement monotone (et de fait injectif) sur un intervalle de la forme $]M, \infty[$.

- Considérer x très proche de 0. Alors P se comporte comme $P(0) + xP'(0)$ (à comprendre au sens de la différence est très petite), donc P se comporte comme une fonction affine.

Exercice 5
(IMO SL 2017 A1) Soient $a_1, \ldots, a_n, k$ et M des entiers strictement positifs. On suppose que

$$\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n} = k \quad \text{et} \quad a_1 a_2 \ldots a_n = M$$

On suppose que $M > 1$. Montrer que le polynôme $M(1+X)^k - (X+a_1)\ldots(X+a_n)$ ne possède pas de racine strictement positive.

Solution de l'exercice 5

Première solution : Il suffit de montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$. Or, d'après l'inégalité de Bernouilli : $(1+y)^a > 1 + ya$ si $y > 0$:

$$(x+a_1)\ldots(x+a_n) < a_1(x+1)^{1/a_1} a_2(1+x)^{1/a_2} \ldots a_n(1+x)^{1/a_n} = M(1+x)^k$$

ce qui donne le résultat voulu.
Deuxième solution : La première solution est peut-être trop astucieuse, mais cet exercice peut être vu comme un deuxième exemple de l'application de l'IAG au niveau olympique.

Commençons par remarquer que 0 est bien une racine du polynôme. Nous allons donc montrer que pour tout $x > 0$, on a $M(1+x)^k > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$, ou ce qui revient au même qu'on a $a_1(1+x)^{1/a_1} \cdot a_2(1+x)^{1/a_2} \cdots a_n(1+x)^{1/a_n} > (x+a_1)\ldots(x+a_n)$.

Il suffit donc de montrer que pour tout $1 \leqslant j \leqslant n$, on a $a_j(1+x)^{1/a_j} > (x+a_j)$ pour tout $x > 0$. D'après l'inégalité arithmético-géométrique pondérée, on a

$$x + a_j = (x+1) + (a_j - 1) = a_j \left[\frac{1}{a_j}(x+1) + \frac{a_j - 1}{a_j} 1 \right] \geqslant a_j (x+1)^{1/a_j},$$

avec égalité si et seulement si $x + 1 = 1$, i.e. $x = 0$, ce qui est exclus. D'où, l'inégalité stricte.

Exercice 6
(IMO 2016 P5) L'équation

$$(x-1) \times \ldots \times (x-2016) = (x-1) \times \ldots \times (x-2016)$$

est écrite au tableau. On désire efface certains facteurs de degré 1 de sorte que l'équation restante n'admette pas de solution réelle. Déterminer le plus petit nombre de facteurs linéaires à effacer pour réaliser cet objectif.

Solution de l'exercice 6

Réponse : 2016

Tout d'abord, si l'on retire moins de 2016 facteurs, d'après le principe des tiroirs il existe un facteur $x - k$ qui n'est retiré sur aucun des deux côtés, donc l'équation admet la solution réel $x = k$.

Montrons à présent que l'on peut retirer 2016 facteurs de sorte que l'équation n'admet aucune solution.

Pour cela, on retire à gauche les facteurs de la forme $x-4k+3, x-4k$ (pour $1 \leqslant k \leqslant 504$) et à droite les facteurs de la forme $x-4k+2$ et $x-4k+1$. Montrons que l'équation

$$(x-1)(x-4)\dots(x-2013)(x-2016) = (x-2)(x-3)\dots(x-2014)(x-2015)$$

n'admet pas de solution réelle.

• : Le résultat est vrai si $x \in \{1,\dots,2016\}$ puisque l'un des côtés du tableau est alors nul et pas l'autre.

• : Si $x<1$ ou $x>2016$, alors $(x-(4k+2))(x-(4k+3)) > (x-(4k+1))(x-(4k+4))$ pour tout $k \in \{0,\dots,503\}$ de sorte que le côté droit est plus grand que le côté gauche.

• : Si $4k<x<4k+1$, la preuve s'adapte.

• : Si $4k+1<x<4k+2$ et $4k+3<x<4k+4$, alors le produit $(x-(4k+1))(x-(4k+4))$ est négatif et les autres facteurs $(x-(4j+1))(x-(4j+4))$ sont positifs, de sorte que le membre de gauche est strictement négatif. En revanche les facteurs $(x-(4j+2))(x-(4j+3))$ sont positifs, donc le membre de droite est strictement positif.

• : Si $4k+2<x<4k+3$. Cette fois-ci on a $(x-1)(x-2016) > (x-2)(x-2015)$ et $(x-4j)(x-4j-1) > (x-4j+1)(x-4j-2)$ pour tout j, de sorte que le côté gauche est strictement plus grand que le côté droit.

Exercice 7

(IMO SL 2014 A5) On considère tous les polynômes P à coefficients réels avec la propriété suivante :

$$|y^2 - P(x)| \leqslant 2|x| \quad \text{si et seulement si} \quad |x^2 - P(y)| \leqslant 2|y|$$

Déterminer toutes les valeurs possibles de $P(0)$.

Solution de l'exercice 7

Réponse : $P(0) \in]-\infty, 0[\cup\{1\}$.

Les longueurs de la preuve sont seulement techniques, mais elle se résume en les étapes suivantes :

Etape 1 : $C \leqslant 0$ marche : Prendre un polynôme P de degré 2 simple.

Etape 2 : Si $P(0) \geqslant 0$, alors P est pair : regarder pour (x,y) et $(-x,y)$ et regarder pour x très petit + rigidité.

Etape 3 : $P>0$ Regarder pour x proche d'une racine et pour $y=0$.

Etape 4 : P est de degré 2 : regarder pour x grand et comparer les degrés.

Etape 5 : $P(x) = x^2+1$: calculs.

Etape 6 : $P(0)=1$ fonctionne faire des inégalités.

Etape 1 : Tout d'abord, si $-C$ est négatif, on cherche un polynôme simple tel que $P(0) = -C$ et l'inégalité $|y^2 - P(x)| > 2|x|$ pour tout x, y. On peut prendre un polynôme qui est strictement positif, pour que la valeur absolue disparaisse. L'inégalité de la moyenne nous incite à choisir $P(x) = -\left((1+\varepsilon)\frac{x^2}{C} + C\right)$. On a alors

$$|y^2 - P(x)| = y^2 + \left((1+\varepsilon)\frac{x^2}{C} + C\right) \geqslant \varepsilon\frac{x^2}{C} + 2|x|$$

avec égalité ssi $x=C$, de sorte que $|y-P(x)| > 2|x|$ et P vérifie l'équivalence.

Etape 2 :

On suppose désormais que $P(0) \geqslant 0$.

On montre que P est pair. Pour cela, on applique l'hypothèse aux couples (x, y) et $(-x, y)$ pour trouver

$$|y^2 - P(x)| \leqslant 2|x| \iff |y^2 - P(-x)| \leqslant 2|x|$$

On déduit notamment que

$$y^2 \leqslant P(x) + 2|x| \iff y^2 \leqslant P(-x) + 2|x|$$

Cette équivalence est intéressante seulement si $P(x) + 2|x| \geqslant 0$ pour une infinité de valeurs de x. On regarde pour cela proche de 0. Le raisonnement est : proche de 0, on a pour $P(x) + 2|x| \sim P(0) + P'(0)x + 2|x|$. Donc si $P'(0) \geqslant 2$, on trouve $P(x) \geqslant 0$ autour de 0, et si $P'(0) \leqslant 2$, on trouve $P(-x) \geqslant 0$ autour de 0.

La version rigoureuse étant : on dispose de $M > 0$ tel que $|P(x) - (P(0) + P'(0)x)| \leqslant Mx^2$ (car $P'(0)$ correspond au coefficient devant x de P). Ainsi, on a

$$P(x) = P(x) - (P(0) + xP'(0)) + (P(0) + xP'(0))$$

Pour x suffisamment petit, on a $|P(x) - (P(0) + xP'(0))| < Mx^2 < \frac{1}{2}|P(0) + xP'(0)|$ donc P est du signe de $P(0) + xP'(0)$. à partir de là, dépendant du signe de $P'(0)$, on retrouve bien que $P(x) + 2|x| \geqslant 0$ ou $P(-x) + 2|x|$ pour x suffisamment petit. En particulier, pour une infinité de x, l'équivalence ci-dessus n'est pas un énoncé vide, signifiant que pour une infinité de x, $P(x) + 2|x| = P(-x) + 2|x|$, impliquant que $P(x) = P(-x)$, donc P est pair.

Etape 3 :

Soit $t \neq 0$ tel que $P(t) = 0$. Comme le coefficient devant X dans P est nul, on a $P(x)/x \to 0$ pour x qui tend vers t, de sorte que $|P(x)| \leqslant 2|x|$ pour x dans un intervalle I contenant t. L'équivalence n'est pas vide pour $y = 0$ et on trouve $|x^2 - P(0)| = 0$ dès que $|P(x)| \leqslant 2|x|$, ce qui implique que $x^2 = P(0)$ pour x dans I, ce qui est absurde.

Ainsi, P n'a pas de racine non nulle. Supposons que $P(0) = 0$. On écrit alors $P(x) = x^2Q(x)$. Pour $y = 0$, on a toujours $|x^2 - P(0)| > 0$ pour x non nul de sorte que $|x^2Q(x)| > 2|x|$ ce qui est absurde pour x grand. On déduit que $P(0) > 0$.

Etape 4 : P est quadratique.

On suppose $\deg P \geqslant 4$. En prenant $y = \sqrt{P(x)}$, l'hypothèse n'est pas vide et on récupère $P(\sqrt{P(x)}) \leqslant x^2 + 2\sqrt{P(x)}$. Comme P est strictement positif et qu'il diverge en $+\infty$, c'est qu'il tend vers $+\infty$ en $+\infty$. Mais en comparant les degrés, on obtient une contradiction pour x suffisamment grand (le côté droit de l'inégalité croît plus vite que le côté gauche).

Etape 5 : $P(x) = x^2 + 1$.

On écrit $P(x) = ax^2 + b$. En prenant $y = \sqrt{a}x$, en prenant x grand, l'équivalence n'est pas vide et donne que $|(1 - a^2)x^2 - b| \leqslant 2\sqrt{a}x$, ce qui force $a = 1$. Pour obtenir b, on remplace y par $x + 1$ pour obtenir l'équivalence

$$|2x + 1 - b| \leqslant 2|x| \iff |2x + 1 + b| \leqslant 2|x + 1|$$

ce qui donne pour x suffisamment grand que $b \in [1, 4x + 1] \iff b \in [-4x - 3, 1]$. On déduit que $b = 1$ en prenant x tel que $b \in [-4x - 3, 4x + 1]$.

Ainsi, $P(x) = x^2 + 1$.

Etape 6 : Réciproquement, $P(x) = x^2 + 1$ vérifie l'équivalence.
On vérifie que

$$(y^2 - x^2 - 1)^2 \leqslant 4x^2 \iff ((x+y)^2 - 1)(1 - (x-y)^2) \iff (x^2 - y^2 - 1)^2 \leqslant 4y^2$$

Exercice 8
(USA TST 2014 P1) Soit n un entier pair et $c_1, \ldots, c_{n-1}$ des nombres réels tels que

$$\sum_{i=1}^{n-1} |c_i - 1| < 1$$

Montrer que le polynôme

$$2x^n - c_{n-1}x^{n-1} + c_{n-2}x^{n-2} - \ldots - c_1 x + 2$$

n'admet pas de racines réelles.

Solution de l'exercice 8
Soit $P(x)$ le polynôme de l'énoncé. Les coefficients et l'hypothèse invitent à considérer le polynôme

$$Q(x) = x^n - x^{n-1} + \ldots - x + 1$$

et à étudier $P(x) - Q(x)$.
D'une part, on a pour $x \leqslant 0$:

$$P(x) = 2x^n + \sum_{i=1}^{n} c_i \underbrace{(-1)^i x^i}_{\geqslant 0} + 2 \geqslant 2$$

donc les racines réelles de P sont nécessairement strictement positives.
On a ensuite :

$$P(x) = P(x) - Q(x) + Q(x) = x^n + 1 + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i - 1)x^i + \frac{x^{n+1} + 1}{x + 1}$$

Si $x \leqslant 1$, alors $|\sum_{i=1}^{n-1}(c_i - 1)x^i| < 1$ de sorte que $P(x) \geqslant 1 - 1 + \frac{x^{n+1}+1}{x+1} > 0$ pour $x \leqslant 1$.
Si $x > 1$, on se ramène à $x < 1$ avec, de même que précédemment,

$$x^n + 1 + \sum_{i=0}^{n}(c_i - 1)x^i = x^n \left(1 + (x^{-1})^n + \sum_{i=1}^{n-1}(c_i - 1)(x^{-1})^{n-i}\right) \geqslant 0$$

de sorte qu'à nouveau $P(x) > 0$.

6 TD Shortlists d'arithmétique (Vincent)

Exercices

Exercice 1
Soit x et y deux nombres réels. On note respectivement x_n et y_n les $n^{\text{èmes}}$ chiffres après la virgule de x et de y. On suppose que $y_n = x_{3^n}$ pour tout $n \geqslant 1$ et que x est un nombre rationnel. Démontrer que y est un nombre rationnel.

Exercice 2
Pour tout entier $d \geqslant 1$, on note $f(d)$ le plus petit entier naturel non nul possédant exactement d diviseurs. Démontrer, pour tout entier $k \geqslant 0$, que $f(2^k)$ divise $f(2^{k+1})$.

Exercice 3
On définit la fonction $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{R}$ par

$$f(n) = \frac{1}{n}\left(\left\lfloor \frac{n}{1} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \ldots + \left\lfloor \frac{n}{n} \right\rfloor\right).$$

a) L'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels $f(n+1) > f(n)$ est-il fini ?

b) L'ensemble des entiers $n \geqslant 1$ pour lesquels $f(n+1) < f(n)$ est-il fini ?

Exercice 4
Soit a et n des entiers naturels non nuls. On suppose, pour tout entier $k \geqslant 1$, que a est une puissance $n^{\text{ème}}$ modulo k. Démontrer que a est une puissance $n^{\text{ème}}$.

Exercice 5
Soit $a_0, a_1, a_2, \ldots$ une suite d'entiers naturels non nuls tels que $\mathsf{PGCD}(a_{i+1}, a_{i+2}) > a_i$ pour tout entier $i \geqslant 0$. Démontrer que $a_n \geqslant 2^n$ pour tout entier $n \geqslant 0$.

Exercice 6
Soit $f : \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ une fonction non constante telle que $f(b) - f(a)$ soit un multiple de $b - a$ pour tous les entiers a et b. Démontrer qu'il existe une infinité de nombres premiers qui divisent $f(c)$ pour au moins un entier c.

Exercice 7
Trouver tous les triplets d'entiers naturels (a, b, c) tels que $a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$.

Exercice 8
Soit a et b deux entiers naturels non nuls. On suppose, pour tout entier $n \geqslant 1$, que $2^n b + 1$ divise $a^{2^n} - 1$. Démontrer que $a = 1$.

Exercice 9
Soit $a \geqslant 1$ un entier. On dit qu'un entier $b \geqslant 1$ est a-nimatheur si $an + 1$ divise $\binom{an}{b} - 1$ pour tout entier $n \geqslant b/a$. Soit $b \geqslant 1$ un entier a-nimatheur tel que $b + 2$ ne soit pas a-nimatheur. Démontrer que $b + 1$ est un nombre premier.

Exercice 10
Soit a et b deux entiers naturels non nuls. Démontrer que l'entier

$$a^2 + \left\lceil \frac{4a^2}{b} \right\rceil$$

n'est pas un carré parfait.

Exercice 11
Soit n un entier naturel non nul. Démontrer que $2^n + 65$ ne divise pas $5^n - 3^n$.

Solutions

Solution de l'exercice 1
Puisque x est rationnel, il existe deux entiers p et q tels que $x_n = x_{n+p}$ pour tout $n \geqslant q$. Soit $\alpha = v_3(p)$, et $r = p/3^\alpha$. Alors $3^{n+\varphi(r)} \equiv 0 \equiv 3^n \pmod{3^\alpha}$ pour tout $n \geqslant \alpha$ et $3^{n+\varphi(r)} \equiv 3^n \pmod{r}$ pour tout $n \geqslant 0$. On en déduit que $y_{n+\varphi(r)} = y_n$ dès lors que $n \geqslant \alpha$ et $3^n \geqslant q$. Cela signifie que y est rationnel.

Solution de l'exercice 2
Soit $p_1^{\alpha_1} \cdots p_k^{\alpha_k}$ la décomposition d'un entier n en produit de facteurs premiers : le nombre de diviseurs de n est $d(n) = \prod_{i=1}^{k}(\alpha_i + 1)$. Par conséquent, $d(n)$ est une puissance de 2 si chaque entier α_i peut s'écrire sous la forme

$$\alpha_i = 2^{\beta_i} - 1 = 1 + 2 + \ldots + 2^{\beta_i - 1},$$

auquel cas on aura $d(n) = 2^{\beta_1 + \ldots + \beta_k}$.

En particulier, soit E l'ensemble des nombres de la forme p^{2^x}, où p est un nombre premier et x est un entier naturel. Si $d(n)$ est égal à une puissance 2^ℓ, alors n est le produit de ℓ éléments de E distincts deux à deux.

Réciproquement, soit $e_1 < e_2 < \ldots$ les éléments de E : nous allons démontrer que $f(2^\ell)$ est égal à l'entier $n = e_1 e_2 \cdots e_\ell$. En effet, il est clair que $n \leqslant f(2^\ell)$, et il nous suffit donc de montrer que $d(n) = 2^\ell$. Or, pour tout nombre premier p, et si k entiers parmi $e_1, e_2, \ldots, e_\ell$ sont des puissances de p, ces k entiers sont nécessairement $p, p^2, p^{2^2}, \ldots, p^{2^{k-1}}$, de sorte que $v_p(n) = 2^k - 1$. On en déduit comme souhaité que $d(n) = 2^\ell$, ce qui conclut.

Solution alternative
L'analyse déjà effectuée dans la solution précédente nous permet d'affirmer qu'il existe des entiers naturels α_i et β_i tels que $f(2^\ell) = \prod_i p_i^{2^{\alpha_i} - 1}$ et $f(2^{\ell+1}) = \prod_i p_i^{2^{\beta_i} - 1}$.

Soit j un entier pour lequel $\beta_j \geqslant 1$. Puisque l'entier $p_j^{-2^{\beta_j - 1}} f(2^{\ell+1})$ possède 2^ℓ diviseurs, on sait que $f(2^{\ell+1}) \geqslant p_j^{2^{\beta_j - 1}} f(2^\ell) \geqslant f(2^\ell)$. Ainsi, $f(2^{\ell+1}) > f(2^\ell)$, et il existe donc un entier i pour lequel $\beta_i > \alpha_i$.

Puisque l'entier $p_i^{2^{\alpha_i}} f(2^\ell)$ possède $2^{\ell+1}$ diviseurs, on sait que $p_i^{2^{\alpha_i}} f(2^\ell) \geqslant f(2^{\ell+1})$, tandis que $p_i^{-2^{\beta_i - 1}} f(2^{\ell+1})$ possède 2^ℓ diviseurs, de sorte que

$$f(2^{\ell+1}) \geqslant p_i^{2^{\beta_i - 1}} f(2^\ell) \geqslant p_i^{2^{\alpha_i}} f(2^\ell) \geqslant f(2^{\ell+1}).$$

Ces inégalités sont donc des égalités, et $f(2^{\ell+1}) = p_i^{2^{\alpha_i}} f(2^\ell)$ est bien un multiple de $f(2^\ell)$.

Solution de l'exercice 3

Dans la suite, on pose $g(n) = nf(n)$ et on note $d(n)$ le nombre de diviseurs positifs de n. Puisque

$$\lfloor (n+1)/k \rfloor - \lfloor n/k \rfloor = \begin{cases} 1 & \text{si } k \text{ divise } n+1\,; \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

on en déduit que

$$g(n+1) - g(n) = \sum_{k=1}^{n+1} \lfloor (n+1)/k \rfloor - \lfloor n/k \rfloor = d(n+1).$$

Cela signifie que

$$f(n) = \frac{g(n)}{n} = \frac{g(0) + d(1) + d(2) + \ldots + d(n)}{n} = \frac{d(1) + d(2) + \ldots + d(n)}{n}$$

pour tout $n \geqslant 1$.

En particulier, $f(n+1) - f(n)$ et $d(n+1) - f(n)$ sont de même signe. Par conséquent :

(a) Si a_n est le plus petit entier à au moins n diviseurs, $d(a_n) \geqslant n > f(a_n - 1)$, donc $f(a_n) > f(a_n - 1)$.

(b) Puisque $d(6) \geqslant d(4) \geqslant 3$ et $d(n) \geqslant 2$ pour tout $n \geqslant 2$, on sait que $f(n) > 2$ pour tout $n \geqslant 6$. Par conséquent, tout nombre premier $p \geqslant 7$ vérifie les inégalités $d(p) = 2 < f(p-1)$ et $f(p) < f(p-1)$.

Les deux ensembles étudiés sont donc infinis.

Solution alternative

Si l'on note H_n le $n^{\text{ème}}$ nombre harmonique, on constate tout d'abord que

$$f(n) \geqslant \frac{1}{n}\left(\sum_{k=1}^{n} \frac{n}{k} - n\right) = \sum_{k=2}^{n} \frac{1}{k} \geqslant \int_2^{n+1} \frac{\mathrm{d}t}{t} = \ln(n+1) - \ln(2).$$

Par conséquent, $f(n) \to +\infty$ lorsque $n \to \infty$, et l'ensemble étudié en question a) est infini.

En outre, si p est un nombre premier et si $2 \leqslant k \leqslant p-1$, la fraction p/k n'est pas un entière, donc $\lfloor p/k \rfloor = \lfloor (p-1)/k \rfloor$. On en déduit que $pf(p) - (p-1)f(p-1) = 2$. Or, si p est assez grand, on a montré ci-dessus que $2 < f(p-1)$. On en déduit que $f(p) < f(p-1)$, de sorte que l'ensemble étudié en question b) est lui aussi infini.

Solution de l'exercice 4

Supposons qu'il existe un nombre premier p pour lequel n ne divise pas $\alpha = v_p(a)$. Soit alors b un entier tel que $a \equiv b^n \pmod{p^{\alpha+1}}$, et soit $\beta = v_p(b)$. Si l'on pose $x = a/p^\alpha$ et $y = b/p^\beta$, alors $p^{\alpha+1}$ divise

$$p^\alpha x - p^{n\beta} y = \begin{cases} p^\alpha \left(x - p^{n\beta-\alpha} y\right) & \text{si } \alpha < n\beta\,; \\ p^{n\beta} \left(p^{\alpha-n\beta} x - y\right) & \text{si} \alpha > n\beta\,; \end{cases}$$

le cas $\alpha = n\beta$, étant impossible puisque n ne divise pas α.

Dans les deux cas, le facteur de droite est la différence de deux entiers dont un seul est multiple de p, donc n'est pas divisible par p. Par conséquent, $p^{\alpha+1}$ divise $p^{\min\{\alpha, n\beta\}}$, ce qui est absurde puisque $\alpha+1 > \min\{\alpha, n\beta\}$. Notre supposition initiale est donc invalide, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 5

Posons $d_i = \mathsf{PGCD}(a_i, a_{i+1})$, $b_i = a_i/d_i$ et $c_i = a_{i+1}/d_i$. Comme $a_{i+1} \geqslant d_{i+1} > a_i$ pour tout $i \geqslant 0$, la

suite $(a_i)_{i\geqslant 0}$ est strictement croissante. On en déduit déjà que $a_0 \geqslant 2^0$ et $a_1 \geqslant 2^1$, puis que $a_2 \geqslant a_1 + d_1 \geqslant a_1 + a_0 + 1 \geqslant 2^2$.

Supposons maintenant qu'il existe un entier $n \geqslant 3$ tel que $a_n < 2^n$. Sans perte de généralité, on choisit n minimal. Comme $c_{n-1} > b_{n-1}$, on sait déjà que $c_{n-1} \geqslant 2$. Par conséquent,

$$2b_{n-1}d_{n-1} = 2a_{n-1} \geqslant 2^n > a_n = c_{n-1}d_{n-1} \geqslant 2d_{n-1}$$

et

$$4d_{n-1} > 4a_{n-2} \geqslant 2^n > a_n = c_{n-1}d_{n-1},$$

de sorte que $1 < b_{n-1} < c_{n-1} < 4$. Cela signifie que $b_{n-1} = 2$ et $c_{n-1} = 3$.

On en déduit que

$$c_{n-2}d_{n-2} = a_{n-1} = 2d_{n-1} > 2a_{n-2} = 2b_{n-2}d_{n-2}$$

et

$$16d_{n-2} > 16a_{n-3} \geqslant 2^{n+1} > 2a_n = 3a_{n-1} = 3c_{n-2}d_{n-2},$$

de sorte que $2b_{n-2} < c_{n-2} < 6$, donc que $1 \leqslant b_{n-2} \leqslant 2$ et $3 \leqslant c_{n-2} \leqslant 5$. Mais alors

$$8b_{n-2}a_{n-2} \geqslant 2^{n+1}b_{n-2} > 2b_{n-2}a_n = 3b_{n-2}a_{n-1} = 3b_{n-2}c_{n-2}d_{n-2} = 3c_{n-2}a_{n-2} \geqslant 9a_{n-2},$$

de sorte que $b_{n-2} > 1$. Cela signifie que $b_{n-2} = 2$ et $c_{n-2} = 5$.

On conclut des égalités ci-dessus que

$$c_{n-3}d_{n-3} = a_{n-2} = 2d_{n-2} > 2a_{n-3} = 2b_{n-3}d_{n-3}$$

et

$$64d_{n-3} > 64a_{n-4} \geqslant 2^{n+2} > 4a_n = 6a_{n-1} = 15a_{n-2} = 15c_{n-3}d_{n-3},$$

de sorte que $2b_{n-3} < c_{n-3} < 5$, donc que $b_{n-3} = 1$ et $3 \leqslant c_{n-3} \leqslant 4$. Mais alors

$$32a_{n-3} \geqslant 2^{n+2} > 4a_n = 15c_{n-3}d_{n-3} = 15c_{n-3}a_{n-3} \geqslant 45a_{n-3},$$

ce qui est impossible. Notre supposition initiale était donc invalide, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 6

Supposons que l'ensemble E des nombres premiers divisant $f(c)$ pour au moins un entier c soit fini, et soit q le produit de tous les éléments de E. Puisque les seuls facteurs premiers de $f(0)$ appartiennent à E, il existe un entier α tel que $f(0)$ divise $q^{\alpha-1}$. Mais alors la fonction

$$g : n \mapsto \frac{f(q^\alpha n)}{f(0)}$$

est à valeurs entières, telle que $g(0) = 1$ et $a - b$ divise $g(a) - g(b)$ pour tous a et b.

En outre, q^α divise toujours $f(0)(g(n)-g(0))$, donc q divise $g(n)-g(0) = g(n)-1$. Comme $g(n)$ ne peut avoir de facteur premier en dehors de E, on en déduit que $g(n) = 1$, c'est-à-dire $f(q^\alpha n) = f(0)$, pour tout $n \geqslant 0$.

Soit maintenant k un entier quelconque. Puisque $q^\alpha n - k$ divise $f(0) - f(k)$ pour tout n, on en déduit que $f(0) = f(k)$, démontrant ainsi que f est constante. Cette contradiction invalide notre supposition initiale, et démontre donc que E est infini.

Solution de l'exercice 7

Supposons, sans perte de généralité, que $a \geqslant b \geqslant c \geqslant 1$. Puisque notre équation met en jeu des termes de degrés différents, on commence par regarder quelles inégalités on pourrait obtenir. Ici, on constate alors que :

- $3a^3 \geqslant a^3 + b^3 + c^3 = (abc)^2$, et donc que $3a \geqslant (bc)^2$;
- a^2 divise $(abc)^2 - a^3 = b^3 + c^3$, et donc que $a^2 \leqslant b^3 + c^3 \leqslant 2b^3$.

Ainsi, $b^3c^5 \leqslant (bc)^4 \leqslant 9a^2 \leqslant 18b^3$, donc $c^5 \leqslant 18 < 2^5$ et $c = 1$.

En reprenant les inégalités ci-dessus, on en déduit même que $b^4 \leqslant 9a^2 \leqslant 9(b^3 + 1)$. Mais alors, si $b \geqslant 10$, on a $0 \geqslant b^4 - 9(b^3 + 1) = b^3(b - 9) - 9 \geqslant b^3 - 9 \geqslant 991$, ce qui est faux. On en conclut que $1 \leqslant b \leqslant 9$.

Comme on sait que a^2 divise $b^3 + 1$, que $a \geqslant b$, et que b ne peut plus prendre que 9 valeurs distinctes, procéder brutalement doit donc être faisable. On s'empresse alors d'utiliser cette approche :

- si $b = 1$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 2$, donc $a = 1$;
- si $b = 2$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 3^2$, donc a divise 3, et $a = 3$;

Tous les cas suivants vont s'éliminer d'eux-mêmes car, à chaque fois, on conclura que a divise un entier naturel non nul n strictement plus petit que b :

- si $b = 3$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 2^2 \times 7$, donc a divise 2 ;
- si $b = 4$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 5 \times 13$, donc $a = 1$;
- si $b = 5$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 126 = 2 \times 3^2 \times 7$, donc a divise 3 ;
- si $b = 6$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 217$, qui n'est divisible par aucun nombre premier $p \leqslant 13$; comme $15^2 = 225 > 217$, on en conclut que 217 est premier, donc que $a = 1$;
- si $b = 7$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 344 = 2^3 \times 43$, donc a divise 2 ;
- si $b = 8$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 513$, qui n'est divisible par aucun nombre premier $p \leqslant 19$; comme $23^2 = 529 > 513$, on en conclut que 513 est premier, donc que $a = 1$;
- si $b = 9$, alors a^2 divise $b^3 + 1 = 730 = 2 \times 5 \times 73$, donc $a = 1$.

Les deux seuls triplets plausibles sont $(a, b, c) = (1, 1, 1)$ et $(a, b, c) = (3, 2, 1)$. On vérifie alors que $1^3 + 1^3 + 1^3 = 3 \neq 1 = (1 \times 1 \times 1)^2$ et $3^3 + 2^3 + 1^3 = 26 = (3 \times 2 \times 1)^2$, et on en conclut que les seules solutions sont $(a, b, c) = (3, 2, 1)$ et ses cinq permutations.

Solution de l'exercice 8

Sans perte de généralité, on suppose b impair. Soit p et n deux entiers tels que p divise $2^n b + 1$, et soit ω l'ordre multiplicatif de 2 modulo p. Si $p \equiv 3 \pmod 4$, alors ω divise $p - 1$ et 2^n, donc divise 2, de sorte que p divise $a^2 - 1$. Il suffit donc de démontrer que l'ensemble E des nombres premiers $p \equiv 3 \pmod 4$ divisant au moins un entier $2^n b + 1$ est infini.

Supposons au contraire que E soit fini. Alors $2^n b + 1 \equiv 3 \pmod 4$ si et seulement si $n = 1$. On considère alors F l'ensemble des éléments de E qui ne divisent pas $2b + 1$, puis on note q leur produit, et on pose $r = (2b + 1)^2 q$. Alors $2^{\varphi(r)+1} b + 1 \equiv 2b + 1 \pmod r$. On en déduit que $2^{\varphi(r)+1} b + 1$ est premier avec q et que $v_p(2^{\varphi(r)+1} b + 1) = v_p(2b + 1)$ pour tout facteur p de $2b + 1$. Par conséquent, $2^{\varphi(r)+1} b + 1$ s'écrit comme $2b + 1$ fois un produit de nombres premiers congrus à $1 \pmod 4$. On en conclut que

$$1 \equiv 2^{\varphi(r)+1} b + 1 \equiv 2b + 1 \equiv 3 \pmod 4,$$

ce qui est absurde. Notre hypothèse est donc invalide, ce qui conclut.

Solution de l'exercice 9

La première chose à faire est de réinterpréter l'énoncé et la notion d'entier a-nimatheur, qui est pour l'instant trop compliquée pour être exploitable.

Tout d'abord, si b est un entier a-nimatheur, on sait que

$$0 \equiv \left(\binom{an}{b} - 1\right) b! \equiv \prod_{k=0}^{b-1} (an-k) - b! \equiv \prod_{k=0}^{b-1} (-1-k) - b! \equiv ((-1)^b - 1)b! \pmod{an+1}$$

pour tout entier $n \geqslant b/a$.

En choisissant $n = 2b!$, on sait que $an + 1 \geqslant 3$ et que $\mathsf{PGCD}(an+1, b!) = 1$, et on en déduit donc déjà que $(-1)^b \equiv 1 \not\equiv -1 \pmod{an+1}$, et donc que b est pair. Réciproquement, si b est pair et si $\mathsf{PGCD}(an+1, b!) = 1$, on en conclut en effet que $an+1$ divise $\binom{an}{b} - 1$.

On s'intéresse maintenant à un éventuel nombre premier p qui diviserait $an+1$ et $b!$. Pour que b soit a-nimatheur, il faudrait que les valuations p-adiques des nombres $\binom{am}{b}$ soient nulles dès lors que p divise $am+1$, ce qui a peu de chances d'arriver. En pratique, on va même construire un contre-exemple au fait que b soit a-nimatheur.

Posons $\alpha = v_p(b!)$. Puisque a est inversible modulo p, soit m un entier tel que $am \equiv p-1 \pmod{p^{\alpha+1}}$. Puisque p divise $b!$, on sait que $p \leqslant b$. Cela nous assure que $p^{\alpha+1}$ divise $am - p$, donc divise aussi

$$\prod_{k=0}^{b-1} (am-k) \equiv \binom{am}{b} b!.$$

Ainsi, p divise $\binom{am}{b}$ et $am+1$, donc divise aussi $\binom{am}{b} - 1$, ce qui est absurde.

Notre éventuel nombre premier p n'existe donc pas, ce qui signifie en fait que tout nombre premier $p \leqslant b$ divise a. Dans ces conditions, on est bien assuré que $\mathsf{PGCD}(an+1, b!) = 1$ pour tout $n \in \mathbb{Z}$. Ainsi, les entiers a-nimatheurs sont les entiers b pairs pour lesquels tout nombre premier $p \leqslant b$ divise a.

Une fois acquise cette simplification de la notion d'entier a-nimatheur, la résolution du problème est aisée. En effet, si b est a-nimatheur, il est pair, donc $b+2$ est pair aussi. Puisque $b+2$ n'est pas a-nimatheur, il existe un nombre premier $p \leqslant b+2$ qui ne divise pas a. Puisque b est a-nimatheur, on sait en outre que $b < p$. Enfin, puisque $b+2$ est pair et supérieur ou égal à 3, on sait que $p \neq b+2$. On en conclut que $p = b+1$.

Solution de l'exercice 10

Procédons par l'absurde, et supposons qu'il existe un entier c tel que $a^2 + \lceil 4a^2/b \rceil = (a+c)^2$, c'est-à-dire pour lequel le couple $(c, 2a)$ est une solution dans $\mathbb{N}^*$ de la double inégalité

$$bx(x+y) \geqslant y^2 \geqslant bx(x+y) - b + 1. \tag{VII.1}$$

Or, à x fixé, cette double inégalité se réécrit comme

$$\frac{bx}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4}{b}}\right) \geqslant x \geqslant \frac{bx}{2}\left(1 + \sqrt{1 + \frac{4(bx^2+1-b)}{(bx)^2}}\right).$$

Puisque $1 + 4/b < 1 + 4/b + 4/b^2 = (1+2/b)^2$ et $bx^2 + 1 - b \geqslant b + 1 - b > 0$, on en déduit que $bx < y < bx + x$. On pose donc $z = y - bx$, ce qui nous permet de réécrire (VII.1) comme

$$bx(x-z) \geqslant z^2 \geqslant bx(x-z) - b + 1.$$

Comme $0 < z < x$, le couple $(x-z, z)$ est lui aussi une solution de (VII.1) dans $\mathbb{N}^*$.

En particulier, nulle solution (x, y) de (VII.1) dans $\mathbb{N}^*$ ne permet de minimiser x. Cela signifie que (VII.1) n'admet aucune solution dans $\mathbb{N}^*$, et donc que notre hypothèse initiale était invalide.

Solution de l'exercice 11
Supposons que l'on dispose d'un entier $n \geqslant 1$ pour lequel $5^n \equiv 3^n \pmod{2^n + 65}$. Si n est pair, $2^n + 65 \equiv 4^{n/2} - 1 \equiv 0 \pmod 3$, donc 3 divise $5^n - 3^n$, ce qui est impossible.

En outre, $n = 1$ n'est pas une solution, car 67 ne divise pas 2. Par conséquent, $n \geqslant 3$, donc $2^n + 65 \equiv 1 \pmod 8$. En utilisant des symboles de Jacobi, on en conclut que

$$-1 = \left(\frac{2^n + 65}{5}\right) = \left(\frac{5}{2^n + 65}\right) = \left(\frac{5^n}{2^n + 65}\right) = \left(\frac{3^n}{2^n + 65}\right) = \left(\frac{3}{2^n + 65}\right) = \left(\frac{2^n + 65}{3}\right) = 1,$$

ce qui est absurde.

7 Suites d'entiers (Théo)

L'objectif de la séance était de regarder des problèmes de suites d'entiers, en particulier des problèmes où apparaissent des problèmes de taille (des quantités croissent, décroissent, varient). L'objectif est de comprendre assez précisément des propriétés fines de ces suites pour réussir l'exercice.

Exercice 1
Soit $(p_k)_{k\geqslant 0}$ une suite de nombres premiers telle que p_{k+2} est le plus grand diviseur de $p_{k+1} + p_k + 2018$ pour tout $k \geqslant 0$. Montrer que la suite (p_k) prend un nombre fini de valeurs

Exercice 2
Soit a_0 un entier strictement positif. On définit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ telle que pour tout $n \geqslant 0$, a_{n+1} est le plus petit entier strictement positif tel que $a_{n+1} + a_n + \cdots + a_0$ est un multiple de $n + 1$. Montrer que la suite stationne.

Exercice 3
On définit la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ par $a_0 = 2$, et pour tout $n \geqslant 1$, $a_n = a_{n-1} + l(a_n)$ où $l(k)$ est le plus grand facteur premier divisant k. Déterminer tous les carrés qui sont des termes de la suite (a_n).

Exercice 4
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers prenant une infinité de valeurs positives, et une infinité de valeurs négatives. On suppose que pour tout $n \geqslant 1$, $a_1, \ldots, a_n$ ont tous des valeurs distinctes modulo n. Montrer que tout entier apparaît exactement une fois dans la suite $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$.

Exercice 5
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ deux suites d'entiers strictement positifs définies par $a_{n+1} = PGCD(a_n, b_n) + 1$ et $b_{n+1} = PPCM(a_n, b_n) - 1$. Démonter que la suite (a_n) est ultimement périodique.

Exercice 6
Soit p un nombre premier impair, on définit $d_p(n)$ le reste de la division euclidienne de n par p. On dit qu'une suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ est une p-suite si pour tout $n \geqslant 0$, $a_{n+1} = a_n + d_p(a_n)$.

— Existe-t-il une infinité de nombres p premiers pour lesquels il existe deux p-suites (a_n) et (b_n) telles que $a_n > b_n$ pour une infinité de n, et $a_n < b_n$ pour une infinité de n ?

— Existe-t-il une infinité de nombres p premiers pour lesquels il existe deux p-suites (a_n) et (b_n) telles que $a_0 < b_0$ mais $a_n > b_n$ pour tout $n \geqslant 1$?

Exercice 7
Déterminer toutes les suites d'entiers $(a_i)_{1\leqslant i\leqslant 2016}$ tels que $0 \leqslant a_i \leqslant 2016$ pour tout i, et telles que pour tout i, j, $i + j$ divise $ia_i + ja_j$.

Exercice 8
Soit P un polynôme de degré supérieur ou égal à 2 et $(q_n)_{n\geqslant 0}$ une suite de rationnels vérifiant $q_n = P(q_{n+1})$ pour tout $n \geqslant 0$. Démontrer que la suite (q_n) est périodique à partir d'un certain rang.

Exercice 9
Soit $a_1, \ldots, a_n$ n entiers distincts, avec $n \geqslant 3$. Montrer qu'il existe des entiers distincts i, j tels que $a_i + a_j$ ne divise aucun nombre parmi $3a_1, \ldots, 3a_n$.

Exercice 10
Soit $k \geqslant 3$ un entier. On définit la suite $(a_n)_{n\geqslant k}$ par $a_k = 2k$ et pour $n \geqslant k$, $a_{n+1} = a_n + 1$ si a_n et $n + 1$ sont premiers entre eux, sinon $a_{n+1} = 2(n + 1)$. Montrer qu'il existe une infinité de n tel que $a_{n+1} - a_n$ est premier.

Exercice 11
On définit une suite par $u_0 = M + \frac{1}{2}$ et $u_{n+1} = u_n\lfloor u_n\rfloor$. Déterminer tous les entiers $M \geqslant 1$ pour lesquels la suite prend une valeur entière.

Exercice 12
Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une suite d'entiers strictement positifs telle que pour k assez grand, $\frac{a_0}{a_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_0}$ soit entier. Montrer que la suite est stationnaire.

Solution de l'exercice 1

On souhaite montrer que la suite est majorée, puisque c'est équivalent au fait qu'elle prenne un nombre fini de valeurs : on aimerait donc avoir des inégalités sur p_{k+2} en fonction de p_{k+1} et p_k.

Si parmi p_{k+1}, p_k, un des nombres vaut 2, alors $p_{k+2} \leqslant p_{k+1} + p_k + 2018 \leqslant \max(p_{k+1}, p_k) + 2020$.

Si par contre ni p_{k+1} ni p_k ne vaut 2, alors p_{k+1} et p_k sont impairs, donc $p_{k+1} + p_k + 2018$ est pair. On sait ainsi que p_{k+2} est le plus grand diviseur premier de $\frac{p_{k+1}+p_k+2018}{2}$, donc vaut au plus $max(p_{k+1}, p_k) + 1009$.

Ainsi dans tous les cas $p_{k+2} \leqslant \max(p_{k+1}, p_k) + 2020$. Posons $a_k = \max(p_0, \dots, p_k)$. L'équation précédente nous donne que $a_{k+2} \leqslant a_{k+1} + 2020$. En effet, si $p_{k+2} = a_{k+2}$, l'inégalité est claire, et si $p_{k+2} < a_{k+2}$, alors $a_{k+2} = a_{k+1}$ et donc l'inégalité est aussi claire.

Ainsi la suite (a_k) est une suite croissante de nombres premiers, ne faisant jamais un saut de plus de 2020. Or en prenant $N > 2022$ et $N > p_0$, les nombres de $N! + 2$ à $N! + 2021$ ne sont pas premiers (car $N! + j$ est divisible par j maisdifférent de j si $2 \leqslant j \leqslant 2021$). On peut alors montrer par récurrence que $a_k < N! + 2$: en effet, $a_0 = p_0 \leqslant N < N! + 2$, et si pour un entier k on a $a_k < N! + 2$, alors $a_{k+1} < N! + 2022$, et comme a_{k+1} est premier, on ne peut pas avoir $N! + 2 \leqslant a_{k+1} \leqslant N! + 2021$. On a donc $a_{k+1} < N! + 2$, ce qui conclut la récurrence.

En particulier, la suite (a_k) est majorée, et comme pour tout entier k, $a_k \geqslant p_k$, la suite (p_k) est majorée, donc prend un nombre fini de valeurs.

Solution de l'exercice 2

Pour tout $n \geqslant 1$, on note k_n l'entier strictement positif tel que $a_0 + \cdots + a_n = k_n \times n$. Notons alors que $a_{n+1} \leqslant k_n$, car $a_0 + \cdots + a_n + k_n = k_n \times (n + 1)$ qui est divisible par $n + 1$. Ainsi $k_{n+1} \times (n + 1) = a_0 + \cdots + a_{n+1} \leqslant k_n \times (n + 1)$, donc $k_{n+1} \leqslant k_n$ pour tout $n \geqslant 1$. Ainsi la suite (k_n) est une suite d'entier positifs décroissante, elle est donc stationnaire.

Il existe donc deux entiers k, N tels que si $n \geqslant N$, $k_n = k$. En particulier si $n \geqslant N + 1$, $a_n = k_{n+1} \times (n + 1) - k_n \times n = k(n + 1) - kn = k$, donc la suite (a_n) stationne.

Solution de l'exercice 3

On calcule les valeurs au fur et à mesure : $2, 4, 6, 9, 12, 15, 20, 25, 30, 35, 42, 49, 56, 63, 70, 77$ etc. Notons $(p_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des nombres premiers par ordre croissant. On constate que les seuls carrés sont les nombres de la forme p^2, et que la suite peut être découper en période où elle passe de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1}p_{k+2}$ en augmentant de p_{k+1} à chaque fois.

Si à un moment la suite prend la valeur $p_k p_{k+1}$ (pour un k quelconque) au rang N, alors on montre par récurrence que $a_{N+a} = (p_k + a)p_{k+1}$ tant que $p_k + a$ n'est pas divisible par un facteur premier strictement plus grand que p_{k+1}. En particulier pour a dans $\{0, \dots, p_{k+2} - p_k\}$. Ainsi par récurrence, comme $a_2 = p_0 p_1$, la suite peut être découper en période où elle passe de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1}p_{k+2}$ en augmentant de p_{k+1} à chaque fois.

Maintenant essayons de répondre au problème. Parmi a_0, a_1, a_2, le seul carré est 4. Parmi chaque séquence où la suite va de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1}p_{k+2}$, comme la suite prend toutes les valeurs de la forme $(p_k + a)p_{k+1}$ avec $0 \leqslant a \leqslant p_{k+2} - p_k$, la suite prend la valeur p_{k+1}^2 (pour $a = p_{k+1} - p_k$). S'il existait un autre a tel que $0 \leqslant a \leqslant p_{k+2} - p_k$ et $(p_k + a)p_{k+1}$ est un carré parfait, alors on aurait que p_{k+1} divise $p_k + a$, donc $p_k + a \geqslant 2p_{k+1}$ (sinon on retombe sur le même carré). Or $p_k + a \leqslant p_{k+2} < 2p_{k+1}$ par le postulat de Bertrand, ce qui est une contradiction. Ainsi sur chacune des périodes où la suite passe de $p_k p_{k+1}$ à $p_{k+1}p_{k+2}$, la suite prend pour valeur un seul carré : p_{k+1}^2.

Ainsi de tout ceci on conclut que les carrés qui sont des termes de la suite sont exactement des carrés de nombre premiers.

Solution de l'exercice 4

On essaie de construire itérativement une suite vérifiant l'énoncé, pour voir quelles propriétés celle-ci doit avoir. Une fois a_1 fixé, on remarque que $|a_2 - a_1| = 1$. En effet, si p premier divise $|a_2 - a_1|$, alors l'hypothèse n'est pas vraie au rang p. Essayons de regarder les valeurs que peut prendre a_3. Posons m le minimum de a_2 et a_1, par l'observation précédente, $\{a_1, a_2\} = \{m, m+1\}$. Notons que si $a_3 = m + k$ avec $k \geqslant 3$, alors l'hypothèse n'est plus vraie au rang k puisque a_3 donne le même reste que a_1 ou a_2. Si $a_3 = m - k$ avec $k \geqslant 2$, alors l'hypothèse de l'énoncé n'est plus vraie au rang $k + 1$ car $a_3 \equiv m + 1 \pmod{k+1}$. Si $a_3 = m$ ou $m + 1$, alors l'hypothèse de l'énoncé n'est plus vérifiée au rang 3. Ainsi $a_3 = m + 2$ ou $m - 1$.

Il semble émerger la propriété suivante : pour tout $n \geqslant 1$, il existe α_n, β_n tels que $\{a_1, \dots, a_n\} = \{\alpha_n, \alpha_n + 1, \dots, \beta_n\}$, avec $\beta_n - \alpha_n = n - 1$. Prouvons là par récurrence. Pour $n = 1$, la propriété est claire. Supposons la propriété vraie au rang n, montrons là au rang $n + 1$. On se donne α_n, β_n tels que $\{a_1, \dots, a_n\} = \{\alpha_n, \alpha_n + 1, \dots, \beta_n\}$. Notons que :

— Si $a_{n+1} \in \{\alpha_n, \alpha_n + 1, \dots, \beta_n\}$, alors l'hypothèse de l'énoncé est fausse au rang $n + 1$.

— Si $a_{n+1} = \beta_n + p$ avec $p \geqslant 2$, alors $a_{n+1} \equiv \alpha_n + p + (n - 1) \equiv \alpha_n \pmod{p + n - 1}$. Comme $p + n - 1 \geqslant n + 1$, l'hypothèse de l'énoncé n'est pas vérifiée au rang $p + n - 1$.

— Si $a_{n+1} = \alpha_n - p$ avec $p \geqslant 2$, alors $a_{n+1} \equiv \beta_n - p - (n - 1) \equiv \beta_n \pmod{p + n - 1}$. Comme $p + n - 1 \geqslant n + 1$, l'hypothèse de l'énoncé n'est pas vérifiée au rang $p + n - 1$.

Ainsi $a_{n+1} = \beta_n + 1$ ou $\alpha_n - 1$. Poser $\alpha_{n+1} = \alpha_n$ et $\beta_{n+1} = \beta_n + 1$ dans le premier cas, et $\alpha_{n+1} = \alpha_n - 1$ et $\beta_{n+1} = \beta_n$ donne le résultat : on a facilement $\{a_1, \dots, a_{n+1}\} = \{\alpha_{n+1}, \alpha_{n+1} + 1, \dots, \beta_{n+1}\}$ et $\beta_{n+1} - \alpha_{n+1} = \beta_n - \alpha_n + 1 = n$).

Ceci conclut la récurrence. Ainsi il existe deux suites $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ et $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ telles que pour tout n, $\{a_1, \dots, a_n\} = \{\alpha_n, \alpha_n + 1, \dots, \beta_n\}$ et $\beta_n - \alpha_n = n - 1$. Ceci montre que pour tout n, l'ensemble $\{a_1, \dots, a_n\}$ a n valeurs distinctes. En particulier, la suite $(a_n)_{n\geqslant 0}$ ne prend que des valeurs distinctes : chaque entier apparaît au plus une fois dans la suite.

De plus, comme $\{a_1, \dots, a_n\} \subset \{a_1, \dots, a_{n+1}\}$, on en déduit que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ est décroissante, et la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ croissante. Ainsi la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ est soit convergente et donc stationnaire, soit tend vers $+\infty$. Si la suite stationne à une certaine valeur b, alors on a $\beta_n \leqslant b$ pour tout n, donc $a_k \leqslant b$ pour tout k. Comme la suite ne prend chaque valeur au plus une fois, la suite prend au plus $b + 1$ valeurs positives, ce qui contredit l'énoncé. Ainsi la suite $(\beta_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $+\infty$. De même on montre que la suite $(\alpha_n)_{n\geqslant 0}$ tend vers $-\infty$.

En particulier si on fixe k un entier, on a $\alpha_n \leqslant k\beta_n$ pour n assez grand, donc $k \in \{a_1 \dots, a_n\}$, donc k est un terme de la suite. Ainsi la suite tout entier apparaît une unique fois dans la suite.

Solution de l'exercice 5

Notons déjà que $a_{n+1} \leqslant a_n + 1$, avec égalité si et seulement si a_n divise b_n. En testant des petits cas, on voit que la suite a_n tend à avoir des phases de montées puis de descente. Essayons de formaliser cela : on dit que n est une descente si $a_{n+1} \leqslant a_n$ (ou de manière équivalente a_n ne divise pas b_n). Notons que pour tout k, il existe $n \geqslant k$ tel que n soit une descente : en effet, si pour un k cela s'avérait faux, on aurait pour tout $n \geqslant k$, a_n divise b_n, donc $a_{n+1} = a_n + 1$ et $b_{n+1} = b_n - 1$. En particulier, $b_{k+b_k} = b_k - b_k = 0$ ce qui est absurde.

On remarque sur plusieurs exemples que les a_n lorsque n est une descente décroissent : essayons de le prouver. Pour cela, notons $(n_k)_{k\geqslant 0}$ la suite des descentes, ordonnée de manière croissante. On va montrer que $a_{n_k} \geqslant a_{n_{k+1}}$.

Comme n_k est une descente, on sait que a_n ne divise pas b_n. Posons $d = PGCD(a_n, b_n)$, et $a_n = du$ et $b_n = dv$ avec u et v premiers entre eux et $u \geqslant 1$. On a alors $a_{n_k+1} = d+1$ et $b_{n_k+1} = duv-1$. Notons $a = n_{k+1} - n_k$, on a alors par récurrence immédiate $a_{n_k+a} = d + a$ et $b_{n_k+a} = duv - a$ pour tout a vérifiant $1 \leqslant a \leqslant n_{k+1} - n_k$, car les termes de la suite (a_n) augmente de 1 entre chaque descente. Supposons par l'absurde que $a_{n_{k+1}} > a_{n_k} = du$. On a alors $n_{k+1} - n_k > d(u-1)$, donc pour $a = d(u-1)$, $a_{n_k+d(u-1)} = d + d(u-1) = du$, et $b_{n_k+d(u-1)} = duv - du + d = du(v-1) + d$. En particulier $a_{n_k+d(u-1)} = du$ ne divise pas $du(v-1) + d = b_{n_k+d(u-1)}$, donc $n_k + d(u-1)$ est une descente, et est strictement inférieur à n_{k+1}, ce qui est absurde.

Ainsi on a $a_{n_{k+1}} \leqslant a_{n_k}$ pour tout entier positif k, donc la suite $(a_{n_k})_{k\geqslant 0}$ est bornée par un certain entier strictement positif M (car elle est décroissante et positive). En particulier, pour tout entier positif m, en notant n_k la première descente telle que $n_k \geqslant m$, on a $a_m \leqslant a_{n_k} \leqslant M$. La suite (a_n) est donc bornée !

Il reste à montrer que la suite est ultimement périodique. Si la suite (b_n) était elle aussi bornée, ce serait facile : en effet, le couple (a_n, b_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, et comme (a_n, b_n) détermine (a_{n+1}, b_{n+1}), dès que la suite prend deux valeurs identiques, elle boucle donc est ultimement périodique. Sauf qu'ici, à chaque montée on peut montrer que $a_n + b_n$ augmente. La suite (a_n) étant bornée, (b_n) ne le sera pas. Néanmoins, vu la relation de récurrence utilisée, seul le reste de (b_n) modulo $M!$ semble utile pour calculer a_n.

Posons alors b'_n le reste dans $\{1, \dots, M!\}$ de b_n modulo $M!$ pour tout $n \geqslant 0$. On a alors que $a_{n+1} = PGCD(a_n, b_n) + 1 = PGCD(a_n, b'_n) + 1$. On a également l'égalité suivante :

$$b_{n+1} = \frac{a_n b_n}{PGCD(a_n, b_n)} - 1 = \frac{a_n}{PGCD(a_n, b'_n)} b_n + 1$$

En passant l'égalité précédente mod $M!$, $b'_{n+1} \equiv \frac{a_n}{PGCD(a_n, b'_n)} b'_n + 1 \equiv PPCM(a_n, b'_n) + 1 \pmod{M!}$. Ainsi (a_{n+1}, b'_{n+1}) ne dépend que de (a_n, b'_n), et comme (a_n, b'_n) ne prend qu'un nombre fini de valeurs, (a_n, b'_n) est ultimement périodique, donc (a_n) aussi.

Solution de l'exercice 6

Déjà essayons de comprendre le comportement d'une p-suite. Soit $(a_n)_{n\geqslant 0}$ une p-suite, notons que $a_{n+1} \equiv 2a_n \pmod{p}$. En particulier, par récurrence immédiate, $a_n \equiv 2^n a_0 \pmod{p}$. Notons ω l'ordre de 2 modulo p, on en déduit que $a_{n+w} = a_n + \sum_{j=0}^{w-1} d_p(2^j a_0)$. En effet, les nombres de la forme $a_n, \dots, a_{n+\omega-1}$ (donc $2^n a_0, \dots, 2^{n+\omega-1} a_0$) sont égaux à permutations près à $2^0 a_0, \dots, 2^j a_0$ par propriété de l'ordre. Posons $S(a_0) := \sum_{j=0}^{w-1} d_p(2^j a_0)$

En particulier si on prend $(b_n)_{n\geqslant 0}$ une autre p-suite, on aura $b_{n+\omega} = b_n + S(b_0)$. Notons que $a_{r+kw} - b_{r+kw} = a_r - b_r + k(S(a_0) - S(b_0))$. Ainsi si par exemple $S(a_0) > S(b_0)$, pour tout r entre 0 et $w-1$, pour k assez grand, $a_{r+k\omega} - b_{r+k\omega} > 0$, donc pour n assez grand $a_n > b_n$.

Ceci semble être une bonne piste pour la seconde partie de la question. Essayons de montrer que pour une infinité de premiers p, il existe $a_0 \neq b_0$ tels que $S(a_0) \neq S(b_0)$. Pour cela prenons $p > 2$ quelconque, et supposons que quelque soit x, $S(x) = S(1)$. Notons que $S(1) + \dots S(p-1) = \omega(1 + \dots + p - 1)$ car l'application qui à x associe $2^k x$ est une bijection des éléments non nuls modulo p. Ainsi, on a que $\omega \frac{(p-1)p}{2} = (p-1)S(1)$, donc $p\omega = 2S(1)$. En particulier ω est pair.

Par contraposée, si on prend p un diviseur d'un nombre de la forme $2^q - 1$ pour q premier impair, on a $\omega = q$ qui est impair, donc il existe x, y deux entiers strictement positifs tels que $S(x) \neq S(y)$. Par symétrie on suppose $S(x) > S(y)$, et on prend $(c_n)_{n\geqslant 1}$ la p-suite avec $c_0 = x$, et $(d_n)_{n\geqslant 1}$ la p-suite avec $d_0 = y + xp > x$. Comme $S(c_0) > S(d_0)$, pour n assez grand $c_n > d_n$. Notons $N \geqslant 0$ le plus grand entier tel que $c_N \leqslant d_N$ (qui existe car $c_0 \leqslant d_0$). Notons que $c_N = d_N$ est impossible, sinon on aurait $c_{N+1} = d_{N+1}$ ce qui est absurde. Ainsi $c_N < d_N$, et $c_k > d_k$ si $k > N$. Prendre $a_n = c_{N+n}$ et $b_n = d_{N+n}$ pour tout $n \geqslant 0$ donne deux p-suites, et montre que la réponse à la seconde partie de la question est oui pour ce nombre p. Par Zygmondy, pour chaque q premier impair, on a un facteur p primitif divisant $2^q - 1$, donc on a une infinité de facteurs premiers pour lesquels cela est vrai.

Pour la première partie de la question, on cherche deux p suites $(a_n)_{n\geqslant 0}$ et $(b_n)_{n\geqslant 0}$ qui vérifient en particulier $S(a_0) = S(b_0)$, sinon on aurait $a_n < b_n$ pour n grand, ou l'inverse. Idéalement, on souhaiterait avoir $a_0 > b_0$ et $a_1 < b_1$: en effet, on aurait alors $a_{k\omega} = a_0 + kS(a_0) > b_0 + S(b_0) = b_{k\omega}$ et $a_{k\omega+1} = a_1 + kS(a_0) < b_1 + S(b_0) = b_{k\omega+1}$ pour tout $k \geqslant 1$, ce qui donnerait deux p-suites vérifiant la première condition de l'énoncé.

Une possibilité est de poser $a_0 = p + 1$ et $b_0 = p - 1$ pour avoir $a_0 > b_0$, ce qui donnerait $a_1 = p + 2 < 2p - 2 = b_1$ pour $p > 4$. Il reste alors à vérifier si on peut avoir $S(p + 1) = S(p - 1)$ pour une infinité de p, soit $S(1) = S(p - 1)$.

Or si -1 est une puissance de 2 modulo p, l'ensemble $\{2^0, \dots, 2^{\omega-1}\}$ et l'ensemble $\{(p - 1)2^0, \dots, (p - 1)2^{\omega-1}\}$ sont égaux modulo p par définition de l'ordre. Il suffit donc de prendre p un facteur d'un nombre de la forme $2^q + 1$ avec q premier : dans ce cas $2^q \equiv -1 \pmod{p}$. Le théorème de Zygmondy nous donne encore une fois l'infinité des nombres premeirs p pour lequel cela est vérifié.

Ainsi dans les deux cas, on a bel et bien une infinité de nombres p qui conviennent, donc la réponse est oui aux deux questions.

Solution de l'exercice 7

Déjà notons que la condition de l'énoncé implique que $i + j$ divise $ia_i + ja_j - (i + j)a_i = j(a_j - a_i)$. Si i est premier avec j, $i + j$ et j sont premiers entre eux, donc $i + j$ divise $a_j - a_i$. Pour $i = 2015$ et $k = 2016$, on a que 4031 divise $a_{2015} - a_{2016}$ qui est entre 2016 et -2016, donc $a_{2015} = a_{2016}$.

Montrons par récurrence descendante forte sur n que $a_n = a_{2016}$. Soit $n \in \{1, \dots, 2016\}$. Pour cela, posons $i = n$, et $j = kn + 1$ tel que $kn + 1 \leqslant 2016 < (k + 1)n + 1$, on a alors que $(k + 1)n + 1$ divise $a_n - a_{kn+1}$ qui est entre -2016 et 2016, donc $a_n = a_{kn+1} = a_{2016}$.

Ainsi la suite (a_n) est constante, et réciproquement une telle suite convient clairement.

Solution de l'exercice 8

On va déjà montrer que $(q_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée. Comme P est de degré au moins 2, il existe M tel que si $|x| \geqslant M$, $|P(x)| > |x|$. Quitte à augmenter M, on peut supposer $M > |q_0|$. Si pour un entier n, on a $|y_n| > M$, alors $|q_{n-1}| = |P(q_n)| > |q_n| > M$. Par récurrence immédiate, on obtient $|q_0| > M$ ce qui est absurde. Ainsi pour tout $n \geqslant 0$, $|q_n| \leqslant M$: la suite est bornée.

Posons pour tout $n \in \mathbb{N}$, $q_n = \dfrac{a_n}{b_n}$ avec a_n et b_n premiers entre eux. Posons $P = \sum_{k=0}^{d} c_k X^k$. On a alors pour tout $n \in \mathbb{N}$,

$$a_n b_{n+1}^d = \sum_{k=0}^{d} c_k a_{n+1}^k b_n b_{n+1}^{d-k}.$$

En particulier, pour p premier divisant b_{n+1}, si $V_p(c_d) < V_p(b_{n+1})$, alors

$$V_p\left(\sum_{k=0}^{d} c_k a_{n+1}^k b_n b_{n+1}^{d-k}\right) = V_p\left(c_d a_{n+1}^d b_n\right) = V_p(b_n) + V_p(c_d).$$

Or $V_p(a_n b_{n+1}^d) \geqslant dV_p(b_{n+1}) > V_p(b_{n+1}) + V_p(c_d)$, donc on a une contradiction.

Ainsi pour tout p premier divisant b_{n+1}, $V_p(b_{n+1}) \leqslant V_p(c_d)$ donc b_{n+1} divise c_d. Ainsi la suite b_{n+1} est bornée.

En particulier, la suite (q_n) a ses dénominateur bornés, donc $(a_n) = (q_n b_n)$ est bornée. Ainsi les suites (a_n) et (b_n) prennent un nombre fini de valeurs. Il existe donc un rationnel q pour lequel la suite q_n prend une infinité de fois la valeurs q. Notons $n_1 < n_2 < \dots$ la suite des entiers n tels que $q_{n_k} = q$. On a alors $P^{\circ(n_k - n_{k-1})}(q) = q$ pour tout $k \geqslant 2$, et $P^{\circ j}(q) \neq q$ si $j < n_k - n_{k-1}$. Ainsi pour tout k, $n_k - n_{k-1}$ est le plus petit entier $\ell > 0$ tel que $P^{\circ \ell}(q) = q$, donc $n_k - n_{k-1}$ est constant valant ℓ. On a alors $n_i = n_1 + (i-1)\ell$ pour tout $i \geqslant 1$. Soit $n \geqslant 0$, posons $n = k\ell - r$ avec $r \in \{0, \dots, \ell\}$, on a $q_{n_1+n+\ell} = q_{n_1+(k+1)\ell-r} = P^{\circ r}(q_{n_{k+1}}) = P^{\circ r}(q_{n_k}) = q_{n_1+k\ell-r} = q_{n_1+n}$. Ainsi la suite est ultimement ℓ périodique.

Solution de l'exercice 9

Quitte à renommer les a_i, suppsons $a_1 < \dots < a_n$. Supposons que pour tout $i \neq j$, $a_i + a_j$ divise un nombre parmi $3a_1, \dots, 3a_n$. Pour $j = n$, on obtient que pour tout $i \in \{1, \dots, n-1\}$, il existe $m(i)$ tel que $a_i + a_n$ divise $3a_{m(i)}$. En particulier, comme $3a_{m(i)} < 3(a_i + a_n)$, on a soit $a_i + a_n = 3a_{m(i)}$, soit $2(a_i + a_n) = 3a_{m(i)}$. Dans le second cas, $a_{m(i)} > \frac{2}{3}a_n$, dans le premier cas $3a_{m(i)} < 2a_n$ donc $3a_{m(i)} < 2a_n$.

Notons que si $a_n > a_i > \frac{2}{3}a_n$, on ne peut avoir $2(a_i + a_n) = 3a_{m(i)}$, car cela impliquerait que $3a_n \geqslant 3a_{m(i)} = 2(a_i + a_n) > \frac{10}{3}a_n$. Ainsi $a_{m(i)} > \frac{2}{3}a_n$. De plus, $a_{m(i)} \neq n$, sinon on aurait $2a_i + 2a_n = 3a_{m(i)} = 3a_n$, donc $a_i = \frac{a_n}{2}$ ce qui contredit la première inégalité.

Ainsi s'il existe i tel que $a_n > a_i > \frac{2}{3}a_n$, on a de même $a_n > a_{m(i)} > \frac{2}{3}a_n$. Or $a_{m(i)} = \frac{2(a_n+a_i)}{3} \geqslant \frac{4a_i}{3}$, donc $m(i) > i$. En considérant la suite $(m^{\circ k}(i))_{k \geqslant 0}$, on obtient que par récurrence que la suite est strictement croissante, et $n > m^{\circ k}(i) > i$, ce qui est absurde.

En particulier si $1 \leqslant i \leqslant n-1$, on a $a_i \leqslant \frac{2}{3}a_n$. Si pour un certain i, on a $2(a_i + a_n) = 3a_{m(i)}$, comme $a_{m(i)} > \frac{2}{3}a_n$, on a $m(i) = n$, donc $a_i = \frac{a_n}{2}$. Dans ce cas, on a également $a_i + a_n = 3a_i$, donc quitte à changer $m(i)$, on peut supposer qu'on a toujours $a_i + a_n = 3a_{m(i)}$. On a donc que $m(i) \neq n$ pour tout i, et que m est strictement croissante, donc pour tout i on a $m(i) = i$, soit $a_i = \frac{a_n}{2}$ ce qui est impossible car $n > 2$.

Ainsi on a obtenu une absurdité, donc il existe bien $i \neq j$ tel que $a_i + a_j$ ne divise aucun des nombres de la forme $3a_k$ pour $1 \leqslant k \leqslant n$.

Solution de l'exercice 10

Posons $b_m = a_m - (m+1)$ pour tout $m \geqslant k$. Notons que a_m est premier avec $m+1$ si et seulement si a_m et b_m sont premiers entre eux, et que si c'est le cas, $b_{m+1} = b_m$ et sinon, $b_{m+1} = m$. Au départ, on a $b_k = k - 1 \geqslant 2$. En regardant la suite, il semble que b_k reste constante, puis augmente une fois, puis reste constante, etc.

Fixons un m tel que $a_m = 2m$, dans ce cas on a $b_m = m - 1$. Alors on a $a_{m+i} = 2m + i = 2(m-1) + 2 + i$ et $b_{m+i} = b_m = m - 1$ jusqu'à avoir un terme non premier avec $m - 1$, c'est à

dire un i tel que $2+i$ et $m-1$ ne sont pas premiers entre eux. Ainsi, on a cela pour $0 \leqslant i \leqslant p_{m-1}-2$, où p_{m-1} est le plus petit facteur premier de $m-1$. Ensuite comme p_{m-1} divise à la fois $m-1 = b_{m+p_{m-1}-2}$ et divise $a_{m+p_{m-1}-2} = 2(m-1)+p_{m-1}$. Donc on a $a_{m+p_{m-1}-1} = 2(m+p_{m-1}-1)$, et $a_{m+p_{m-1}-1} - a_{m+p_{m-1}-2} = 2(m+p_{m-1}-1) - (2(m-1)+p_{m-1}) = p_{m-1}$.

Ainsi pour chaque m pour lequel $a_m = 2m$, on peut trouver $m' > m$ tel que $a_{m'} - a_{m'-1}$ est premier, et $a_{m'} = 2m'$. Par récurrence immédiate, on a une infinité de m' tels que $a_{m'} - a_{m'-1}$ est premier.

Solution de l'exercice 11

Essayons de regarder à quelle condition u_1 est entier, puis si u_1 est non entier, à quelle condition u_2 est entier pour comprendre ce qui se passe. On a $u_1 = (M+\frac{1}{2})M$ qui est un entier si et seulement si M est pair.

Si M est impair, posons $M = 2k+1$, on a $u_1 = M^2+k+\frac{1}{2}$. On a alors $u_2 = (M^2+k)(M^2+k+\frac{1}{2})$ qui est entier si et seulement si M^2+k est pair. Or $M^2+k = 4k^2+4k+1$, donc si et seulement si k est impair. Ainsi si M est congru à 3 modulo 4, u_2 est entier, sinon u_2 ne l'est pas.

Il semble qu'à chaque fois le cas problématique soit $M \equiv 1 \pmod{2^k}$. En se rappelant pleins d'exos fonctionnant similairement (P2 Test français novembre 2020, BMO 2021 etc), on pose pour $M > 1$, $M = 1+2^k\alpha$ avec α impair. Notons que si un entier x est de la forme $1+2^\ell\beta$ avec β impair et $\ell \geqslant 1$, on a :

$$(x+\frac{1}{2})\lfloor (x+\frac{1}{2})\rfloor = (1+2^\ell\beta)^2 + \frac{1}{2}(1+2^\ell\beta) = \frac{1}{2}+1+2^{\ell-1}(\beta+4\beta+2^{\ell+1}\beta^2)$$

en posant $\beta' = \beta+4\beta+2^{\ell+1}\beta^2$ qui est impair, on a $(x+\frac{1}{2})\lfloor (x+\frac{1}{2})\rfloor = \frac{1}{2}+1+2^{\ell-1}\beta'$

Ainsi comme $u_0 = \frac{1}{2}+1+2^k\alpha$, l'observation précédente montre par récurrence immédiate que pour tout $k \leqslant n$, il existe un entier α_k impair que $u_k = \frac{1}{2}+1+2^{n-k}\alpha_k$. Pour $k=n$, on obtient que $u_n = \frac{1}{2}+1+\alpha_n$, donc $u_{n+1} = (1+\alpha_n)(\frac{1}{2}+1+\alpha_n)$ est entier car $1+\alpha_n$ est pair. Ainsi si $M > 1$ la suite prend une valeur entière.

Si $M = 1$, on a $u_0 = \frac{3}{2}$, et en calculant $u_1 = \frac{3}{2}$. Par récurrence immédiate pour tout entier $n \geqslant 0$, $u_n = \frac{3}{2}$ donc la suite ne prend jamais de valeurs entières.

Ainsi la suite prend une valeur entière si et seulement si $M > 1$.

Solution de l'exercice 12

¨Posons pour tout $k \geqslant 0$ $S_k = \frac{a_0}{a_1} + \cdots + \frac{a_{k-1}}{a_k} + \frac{a_k}{a_0}$. Il existe un entier positif M tel que pour $k \geqslant M$, S_k est entier. Ainsi pour $k \geqslant M$ assez grand, $S_{k+1} - S_k = \frac{a_k}{a_{k+1}} + \frac{a_{k+1}}{a_0} - \frac{a_k}{a_0}$ est entière, donc $\frac{a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}}{a_0 a_{k+1}}$ est entier. Ainsi $a_0 a_{k+1}$ divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$.

Regardons ce que cela implique :

— Si un nombre premier p divise a_{k+1}, il divise $a_0 a_{k+1}$ et $a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$, donc p divise $a_k a_0$. Ainsi tout facteur premier de a_{k+1} divise a_0 ou a_k. De ceci, on tire par récurrence immédiate que pour tout $\ell \geqslant M$, les facteurs premiers de a_ℓ divise a_M ou a_0. Notons $p_1, \ldots, p_j$ les facteurs premiers divisant a_M ou a_0.

(i) Si $V_{p_i}(a_k) < V_{p_i}(a_0)$, alors $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_0 a_{k+1}$, donc divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$. Or $V_{p_i}(a_k a_0) < V_{p_i}(a_{k+1}) + V_{p_i}(a_k)$. Donc parmi $a_k a_0, a_{k+1}^2, a_k a_{k+1}$ deux termes ont la même

valuation p_i adique, sinon la valuation est celle du minimum, donc au plus celle de $a_k a_{k+1}$ ce qui est absurde. Le cas $V_{p_i}(a_{k+1}^2) = V_{p_i}(a_k a_{k+1})$ donne $V_{p_i}(a_{k+1}) = V_{p_i}(a_k)$. Le cas $V_{p_i}(a_k a_0) = V_{p_i}(a_k a_{k+1})$ donne $V_{p_i}(a_{k+1}) = V_{p_i}(a_0)$ et le dernier cas $V_{p_i}(a_k a_0) = V_{p_i}(a_{k+1}^2)$ donne $V_{p_i}(a_{k+1}) = \frac{V_{p_i}(a_0)+V_{p_i}(a_k)}{2}$, donc $V_{p_i}(a_k) < V_{p_i}(a_{k+1}) < V_{p_i}(a_0)$.

(ii) Si $V_{p_i}(a_k) \geqslant V_{p_i}(a_0)$, alors $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_0 a_{k+1}$, donc divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2 - a_k a_{k+1}$. Or $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_k a_{k+1}$, donc divise $a_k a_0 + a_{k+1}^2$. Si $V_{p_i}(a_{k+1}) > V_{p_i}(a_k)$, $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise a_{k+1}^2, donc divise $a_k a_0$, donc $V_{p_i}(a_{k+1}) \leqslant V_{p_i}(a_k)$ ce qui est absurde. Ainsi $V_{p_i}(a_{k+1}) \leqslant V_{p_i}(a_k)$, donc $p^{V_{p_i}(a_{k+1})+V_{p_i}(a_0)}$ divise $a_0 a_k$, donc divise a_{k+1}^2. Ainsi $V_{p_i}(a_{k+1}) \geqslant V_{p_i}(a_0)$. Ainsi $V_{p_i}(a_k) \geqslant V_{p_i}(a_{k+1}) \geqslant V_{p_i}(a_0)$

Ainsi pour tout p_i, soit il existe $k \geqslant M$ tel que $V_{p_i}(a_k) \geqslant V_{p_i}(a_0)$. Dans ce cas, par le point (ii), par récurrence immédiate, la suite $(V_{p_i}(a_j))_{j \geqslant k}$ est décroissante et minorée par $V_{p_i}(a_0)$, donc elle stationne. Soit pour tout $k \geqslant M$, $V_{p_i}(a_k) < V_{p_i}(a_0)$. Dans ce cas on est toujours dans le cas (i), et pour tout $k \geqslant M$, dans tous les cas on a $V_{p_i}(a_k) \leqslant V_{p_i}(a_{k+1})$. Ainsi la suite $(V_{p_i}(a_j))_{j \geqslant k}$ est croissante et majorée par $V_{p_i}(a_0)$, donc elle stationne.

Ainsi chaque a_k pour $k \geqslant M$ a ses diviseurs parmi un nombre fini de p_i, et chacune de ses valuation stationne donc la suite (a_k) stationne.

8 Graphes (Xavier)

Exercice 1 (Nordic MO 2022, P1)
Au Pays des Merveilles, n villes sont reliées par des routes (deux villes sont reliées par au plus une route). Il y a en tout a routes. On suppose que, si deux villes sont reliées par une route directe, il existe toujours un chemin (ie une suite de routes) indirect pour aller de l'une à l'autre. La Reine de Cœurs ayant décidé que désormais un nombre pair de routes partirait de chaque ville, son ministre lui propose la liste de tous les systèmes possibles, au nombre de r, obtenus en supprimant certaines des routes existantes. Quel est le nombre total de routes apparaissant sur cette liste (en comptant chaque route autant de fois qu'elle apparaît) ?

Solution de l'exercice 1
Soit e une route, et soit C un cycle la contenant, qui existe par hypothèse. On obtient une bijection naturelle entre les systèmes contenant e et ceux ne contenant pas e en inversant toutes les routes de C. Donc e est dans exactement la moitié des systèmes, et la réponse est $\frac{nr}{2}$.

Exercice 2
Existe-t-il un polyèdre dont toutes les faces sont des triangles, sauf une qui est un pentagone, et dont tous les sommets sont de degré pair ?

Solution de l'exercice 2
On voit qu'on peut colorier alternativement les faces en blanc et en noir, de sorte que deux faces partageant une arête soient de couleur différente (en effet le graphe dual n'a pas de cycle impair, donc est biparti, donc bicoloriable). Supposons que le pentagone est noir, et notons f_b (resp. f_n) le nombre de faces blanches (resp. noires). Alors, par double comptage des arêtes : $a = 3f_b$ et $a = 3(f_n - 1) + 5$. Mais alors $3 \mid a$, puis $3 \mid 5$: absurde.

Exercice 3
Alice a colorié certaines cases d'une grille $n \times n$ de sorte qu'il y ait exactement k cases coloriées

sur chaque ligne et chaque colonne. Montrer qu'elle peut choisir n cases coloriées de façon à ce qu'il y en ait une par ligne et par colonne.

Solution de l'exercice 3
On regarde le graphe biparti dont les sommets sont les lignes et les colonnes, une ligne étant reliée à une colonne si et seulement si la case à leur intersection est coloriée. On cherche un mariage entre les lignes et les colonnes. La condition du théorème de Hall est clairement vérifiée, donc ceci existe.

Exercice 4 (Théorème de Dirac)
Soit G un graphe à n sommets dont tous les sommets sont de degré au moins $\frac{n}{2}$. Montrer que G possède un cycle hamiltonien.

Solution de l'exercice 4
G est clairement connexe. Soit $x_0 \dots x_k$ un chemin de taille maximale. La condition de degré assure qu'il existe $1 \leqslant i \leqslant n-1$ tel que x_0 est relié à x_{i+1} et x_k est relié à x_i. Alors $x_0x_1 \dots x_ix_kx_{k-1} \dots x_{i+1}x_0$ est un cycle. S'il ne contient pas tous les sommets, par connexité, on peut trouver un sommet du cycle relié à un sommet extérieur au cycle, ce qui permet de trouver un chemin plus long, contradiction.

Exercice 5
Dans un pays, il y a $n \geqslant 5$ villes, desservies par deux compagnies aériennes. Toute paire deux villes est éventuellement reliée par une de ces compagnies. Cependant, chaque compagnie a interdiction de proposer un cycle de longueur strictement inférieure à 6. Montrer que les compagnies ont à elles deux moins de $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ vols.

Solution de l'exercice 5
On regarde le graphe naturel, dont certaines arêtes sont bleues et d'autres rouges. En raisonnant par l'absurde, Turan donne l'existence d'une 4-clique. Puis en utilisant la condition, on voit que les arêtes de la 4-clique forment un Z rouge et un Z bleu. Ensuite, on regarde ce qui se passe pour les sommets extérieurs à la 4-clique, et on trouve qu'ils sont reliés à au plus deux sommets de la 4-clique (sinon, il y a deux arêtes de la même couleur, ce qui fait apparaître un cycle). On en déduit que le nombre d'arêtes est au plus $6 + 2(n-4) +$ nombres d'arêtes reliant deux sommets hors de la clique. Ceci donne le résultat pour $5 \leqslant n \leqslant 8$, et on raisonne ensuite par récurrence : on sait que le complémentaire de la clique vérifie toujours la condition, et donc le nombre d'arêtes reliant deux sommets hors de la clique est au plus $\frac{(n-4)^2}{3}$. Donc le nombre total d'arêtes est au plus $6 + 2(n-4) + \frac{(n-4)^2)}{3}$. Si $n \geqslant 5$, on voit que c'est inférieur à $\frac{n^2}{3}$.

Exercice 6
Un physicien fou a découvert une particule appelée imon. Certaines paires de ses particules sont intriquées. Le physicien parvient à faire les deux opérations suivantes, une seule à la fois :

— Si un imon est intriqué avec un nombre impair d'autres imons, alors il peut le supprimer.

— Il peut doubler l'ensemble des imons qu'il possède, en copiant chaque imon. Les copies de deux imons intriqués sont eux mêmes intriqués, et chaque imon est intriqué avec sa copie. Aucune autre intrication d'apparaît.

Montrer que quelque soit la configuration initiale, le physicien peut s'assurer de n'avoir, après un certain nombre d'opérations, aucune paire d'imons intriqués.

Solution de l'exercice 6
Montrer qu'on peut ramener le nombre chromatique à 1. Pour cela, on supprime des sommets jusqu'à ce qu'ils soient tous de degré pair, on prend un coloriage du graphe avec un nombre minimal de couleurs $c_1, \dots, c_k$, puis on fait (ii) et on colorie les sommets copies d'un sommet de couleur c_i en c_{i+1} ($c_{k+1} = c_1$), puis on supprime tous les sommets de couleur c_k.

Exercice 7 (Shortlist IMO 2021, C4)
Dans les Alpes Maritimes, n villes sont reliées par des routes, de sorte qu'entre deux villes distinctes, il y a toujours exactement une route, à sens unique. On note N_{AV} (resp. N_{VA}) la taille maximale d'une famille de chemins d'Antibes à Valbonne (resp. de Valbonne à Antibes) tels que deux chemins distincts de la famille ne passent jamais par la même route. Montrer que $N_{AV} = N_{VA}$ si et seulement s'il y a autant de routes partant d'Antibes que de Valbonne.

Solution de l'exercice 7
Supposons que la route directe entre Antibes (A) et Valbonne (V) soit $A \to V$. On divise les autres villes en 4 ensemble : X est celui des villes du type $A \to x \to V$, Y celui des villes du type $V \to x \to A$, S celui des villes du type $s \to A, s \to V$ et T celui des villes du type $A \to t, V \to t$. On voit aisément qu'une famille maximale de chemins ayant la propriété souhaité peut toujours être choisie comme contenant les $A \to x \to V$ (ou les $V \to y \to A$ dans l'autre sens). Et ensuite, les autres chemins de A à V, de la forme $A \to t \to \dots \to s \to V$, peuvent être changés en chemins de V à A, de la forme $V \to t \to \dots \to s \to A$ (sans changer ce qui se passe entre t et s). Ceci montre que $N_{AV} = N_{VA}$ si et seulement si $1 + |X| = |Y|$, ce qui donne l'équivalence désirée.

Exercice 8 (IMO shortlist 2019, C8)
Le réseau routier des Alpes Maritimes est le même qu'à l'exercice précédent. Un élève qui ne connaît pas l'orientation des routes cherche à déterminer s'il existe une ville dont part au plus une route. Pour cela, il pose des questions à votre animatheur préféré. Chaque question est de la forme "dans quelle direction va la route entre A et B ?" Montrer qu'il peut trouver ce qu'il cherche en strictement moins de $4n$ questions.

Solution de l'exercice 8
Il commence par construire un arbre (ce qui représentre $n-1$ questions), de la façon suivante : il va dans une ville A. Puis, à chaque étape, s'il est dans la ville B et qu'il y a une ville C qui n'est pas encore dans l'arbre, il demande dans quel sens va la route entre B et C. Si elle va de B à C, il va en C, sinon, il reste en B.

À l'issue de cette étape, tous les sommets ont degré sortant 1, sauf un (notons-le A), de degré sortant 0. Il teste alors, pour voir si A ne serait pas de degré sortant au plus 1, de la façon suivante : tant qu'il a au plus une route sortant de A et qu'il n'a pas testé toutes les routes, il choisit $B \neq A$ tel qu'il n'a pas encore posé de question sur AB. Si AB va de A vers B, alors le degré sortant de A augmente de 1. Sinon, celui de B se met à valoir 2.

Après k questions, soit A convient, soit il est de degré sortant 2. On a alors aussi éliminé $k-2$ sommets. Il reste donc $n-k+1$ sommets, tous a priori de degré sortant 1. On les élimine peu à peu, de la façon suivante : tant qu'il existe une liaison non testée entre deux sommets non éliminés, on prend une telle liaison et on la teste, ce qui aboutit à l'élimination d'un des sommets. À la fin, les sommets non éliminés forment un graphe complet. Mais ils sont de

degré sortant au plus 1, donc il en reste au plus 3. Mais en fait, s'il en reste 3, ils doivent former un cycle, et rien ne doit en sortir. Or par construction il devrait être possible d'en sortir pour aller jusqu'en A. Donc il ne reste en fait qu'au plus deux sommets, et cette étape (où on éliminait un sommet à chaque question) a représenté $n-k-1$ questions.

Reste encore à poser les questions qui manquent, soit au plus $n-1$ questions pour chacune des deux villes restantes. Soit, en tout, $n-1+k+n-k-1+2(n-1)=4n-4$ questions au plus (en fait un peu moins...).

Exercice 9 (IMO 2019, P3)
Un stage de Valbonne a 91 participants, dont certains sont amis. Chaque jour, si cela est possible, on choisit trois participants A, B, C tels que A est ami avec B et C, mais B et C ne sont pas amis, et on supprime les liens d'amitié AB et AC, avant de rajouter un lien d'amitié entre B et C. Au départ, 45 participants ont 46 amis et 46 participants en ont 45. Les organisateurs du stage veulent qu'à la fin, chaque participant ait au plus un ami. Cela est-il possible ?

Solution de l'exercice 9
On voit tout d'abord que la parité des degrés ne change jamais et que les composantes connexes peuvent être traitées séparément. On en déduit que les deux configurations suivantes sont perdantes : "il y a une composante connexe (non réduite à un sommets) dont tous les sommets sont de degré pair", et "il y a une composante connexe complète à au moins 3 sommets". Au départ, on vérifie facilement que le graphe est connexe (deux participants dont au moins un a 46 amis sont amis ou ont un ami commun), donc on n'est pas dans une de ces configurations. Supposons maintenant effectuer une chaîne d'opérations de longueur maximale, en s'arrêtant dès qu'on arrive dans une des deux configurations décrites précédemment. Supposons que cette chaîne ne nous fasse pas gagner ; on va alors chercher à contredire la maximalité, en revenant une étape en arrière et en montrant qu'on aurait pu éviter de s'arrêter.

Premier cas : la dernière opération a fait apparaître une composante connexe complète C à au moins 3 sommets. Soient A, B, C les derniers sommets touchés, comme dans l'énoncé. Supposons tout d'abord que $A \in C$. Alors $B, C \notin C$. Soient D, E deux sommets de C distincts de A. On choisit de toucher A, B, D plutôt que A, B, C. C'est possible : A et B sont reliés par hypothèse, de même que A et D. En revanche, B et D ne sont pas reliés. Après le changement, B est relié à D, D à E, E à A, A à C, et C n'est pas relié à B. Finalement, on n'a pas changé les composantes connexes, donc il n'y a toujours pas de composante connexe dont tous les sommets sont de degré pair, et on n'a pas créé de composante connexe complète. Contradiction.

Supposons à présent que $A \notin C$. Alors $B, C \in C$. Supposons également que C compte au moins 4 sommets (si elle en compte 3, on pourra la traiter dans le cas suivant). Soient D, E deux sommets de C distincts de B et C. On voit, de même que dans le cas précédent, que toucher B, A et D convient.

Deuxième cas : la dernière opération fait apparaître une composante connexe dont tous les sommets sont de degré pair. On va ici avoir besoin d'un petit lemme :

Lemme 1.
Soit G un graphe dont tous les sommets sont de degré pair, et soit $g \in G$ un sommet. Soient $C_1, \ldots, C_n$ les composantes connexes de $G \setminus \{g\}$. Alors chaque composante C_i possède un nombre pair de sommets reliés à g. En particulier, ce nombre n'est pas 1.

Démonstration. Une composante connexe d'un graphe possède un nombre pair de sommets de degré impair. □

Soient A, B, C les derniers sommets touchés, et C la composante connnexe en question. Supposons tout d'abord que A soit dans C. Alors $B, C \notin C$. Soient D, E deux sommets de C reliés à A qui figurent dans la même composante connexe de $C \setminus \{A\}$. On choisit de toucher A, B, D. Alors B est relié à D, D (indirectement) à E, E à A, A à C, et donc les composantes connexes n'ont pas bougé, c'est ce qu'on voulait.

Finalement, si $A \notin C$, alors $B, C \in C$. Soient D, E deux sommets distincts de C reliés à B qui seraient dans la même composante connexe si on retirait B (on traite ensuite le cas où il n'y a pas de tels D, E). On touche alors B, A, D. A est donc relié à D, D (indirectement) à E, E à B, et d'autre part C est relié à A. Ainsi les composantes connexes n'ont pas bougé, c'est encore ce qu'on voulait.

Si on ne pouvait pas trouver D et E, cela signifie que B est relié à un unique sommet distinct de A, noté D. On touche alors B, A, D. B devient un sommet isolé, et le reste des composantes connexes ne bouge pas, comme souhaité (on ne peut pas obtenir une composante complète, car notre composante contient des sommets de degré pair et d'autres de degré impair).

Exercice 10 (RMM 2023 P6)
Soit G un graphe connexe à $n+1$ sommets dont les arêtes sont coloriées de trois couleurs différentes : rouge, vert et bleu. Soient r, v, b trois entiers naturels tels que $r+v+b = n$. On suppose que G possède un arbre couvrant avec exactement r arêtes rouges, un avec exactement v arêtes vertes et un avec exactement b arêtes bleues. Montrer qu'il possède un arbre couvrant avec exactement r arêtes rouges, v arêtes vertes et b arêtes bleues.

Solution de l'exercice 10
Soient G_r, G_v, G_b respectivement trois sous-graphes de G obtenus en prenant les trois arbres couvrant donnés et en retirant les deux autres couleurs. Soit Γ le sous-graphe à n arêtes obtenu par l'union de G_r, G_v et G_b. On va modifier Γ petit à petit, sans changer le nombre d'arêtes de chaque couleur, en faisant en sorte qu'il vérifie toujours la propriété que l'ensemble des arêtes de la couleur X peut être étendu en un arbre couvrant sans ajouter une seule arête de la couleur X. Supposons qu'il y ait des cycles avec des arêtes de chaque couleur. On peut alors ajouter une arête reliant deux composantes connexes distinctes de Γ, puis retirer une arête de la même couleur et qui figure dans un cycle. Supposons à présent qu'il n'y ait pas de cycle avec des arêtes rouges. S'il n'y a pas non plus de cycle avec des arêtes vertes, un éventuel cycle ne comprendrait que des arêtes bleues, absurde. Donc on a un graphe acyclique à n arêtes et $n+1$ sommets, ie un arbre. Sinon, il y a un cycle, qui possède des arêtes bleues et vertes. Regardons l'arbre couvrant A_r associé au rouge, et deux composantes connexes C_1 et C_2 de Γ. Toute arête de A_r reliant un sommet de C_1 à un sommet de C_2 est bleue ou verte (si elle était rouge, elle serait dans Γ). On choisit une de ces arêtes, on l'ajoute à Γ, et on retire de Γ une arête de la même couleur qui faisait partie d'un cycle.

À chaque étape, le nombre de composantes connexes diminue de 1, ce qui démontre que le processus aboutit.

Il reste à prouver que l'invariant est maintenu. Pour cela, supposons qu'on retire de Γ une arête rouge e et qu'on ajoute f, et soit A_r l'arbre couvrant initialement associé aux arêtes rouges de Γ. Si f ne crée pas de cycle, on récupère un arbre sans rien faire. Si f crée un cycle, une des arêtes de ce cycle est bleue ou verte (sinon f créerait un cycle d'arêtes rouges dans A_r, donc créerait un cycle dans Γ). De plus, les deux composantes connexes de $A_r \setminus \{e\}$ sont reliées dans Γ (puisque e était dans un cycle), donc il existe une arête bleue ou verte qui les

relie. On retire donc une arête bleue ou verte qui créait un cycle et on en rajoute une qui relie les composantes ; on a récupéré un arbre.

Exercice 11 (RMM 2020 P3)
Au Pays des maths, $n \geqslant 3$ villes sont reliées par n compagnies aériennes. Chaque compagnie aérienne propose des liaisons à double sens, en suivant un cycle de longueur impaire : il existe pour chaque compagnie un entier impair m et des villes $v_1, \ldots, v_m$ telles que les liaisons proposées sont exactement $v_1v_2, \ldots, v_{m-1}v_m, v_mv_1$. Montrer qu'il est possible, lors d'un voyage, de visiter un nombre impair de villes et de ne jamais prendre deux fois un avion de la même compagnie.

Solution de l'exercice 11
On veut montrer qu'il est possible de choisir une arête pour chaque compagnie et d'obtenir un graphe possédant un cycle de longueur impaire. On commence par choisir une arête pour chaque compagnie, de façon à minimiser le nombre de composantes connexes. Il y a n arêtes (dont éventuellement des multiarêtes) et n sommets, donc il y a un cycle. Soit e une arête dans un cycle, correspondant à la compagnie i. Soit C la composante connexe dans laquelle se trouve e. Alors toutes les villes desservies par la compagnie i (dans le graphe d'origine) se trouvent dans cette composante connexe. En effet, sinon, il existe une arête f de la compagnie i reliant un sommet de C à une autre composante. En remplaçant e par f, on réduit le nombre de composantes connexes, ce qui est absurde.

Retirons l'arête e à C ; le résultat est un graphe connexe, dans lequel deux arêtes distinctes correspondent à deux compagnies distinctes, et qui ne sont jamais i. Si ce graphe ne possède pas de cycle de longueur impaire, il est biparti. Colorions ses sommets en rouge et bleu. Comme le cycle de la compagnie i ne passe que par des sommets de ce graphe et est de longueur impaire, il existe une arête f de la compagnie i qui relie deux sommets de la même couleur (disons u et v). Dans C, il y a un chemin reliant u à v. Ce chemin est nécessairement de longueur paire. Ainsi, en concaténant ce chemin avec f, on obtient un cycle de longueur impaire.

4 Entraînement de fin de parcours

Énoncés

Exercice 1
Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Soit E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. Soit X un point de la droite (BC). Le cercle circonscrit au triangle BEX recoupe la droite (AB) en Y. Le cercle circonscrit au triangle CFX recoupe la droite (AC) en Z. Montrer que la droite (AH) est tangente au cercle circonscrit au triangle AYZ.

Exercice 2
Une fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\{1, \ldots, 1000\}$ est dite *intéressante* si pour tous les entiers x et y, on a

$$\text{pgcd}(f(x), f(y)) = \text{pgcd}(f(x), x - y)$$

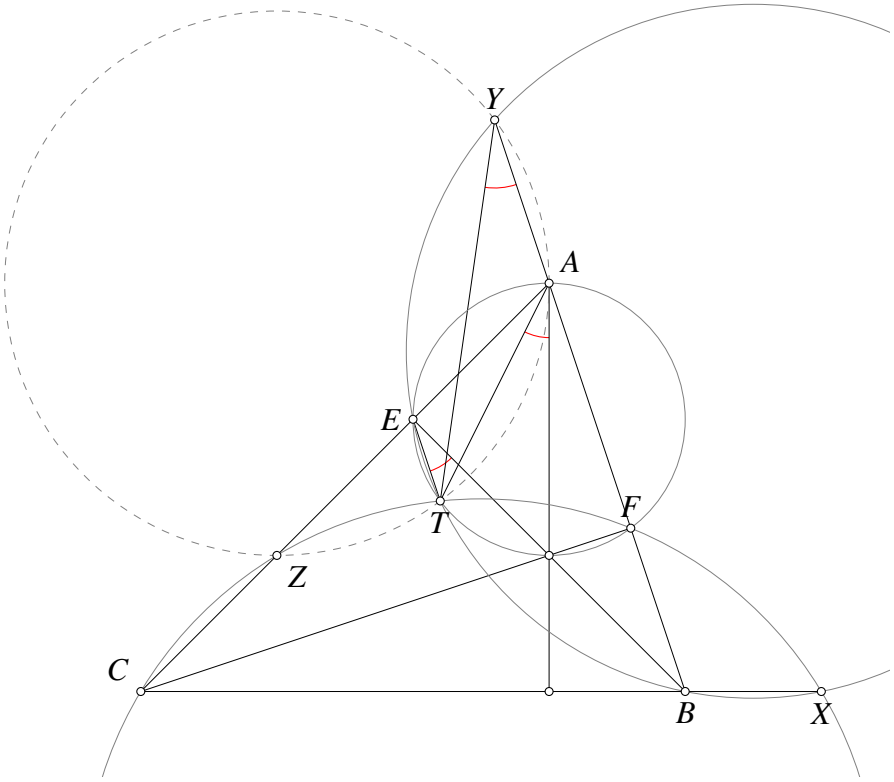
Combien existe-t-il de fonctions intéressantes ?

Exercice 3
Soit G un graphe connexe avec k arêtes. Montrer qu'il y a au moins k façons différentes de partitionner les sommets en deux groupes (non vides) de sorte que les sous-graphes induits soient connexes.

Solutions

Exercice 1
Soit ABC un triangle et H son orthocentre. Soit E le pied de la hauteur issue de B et F le pied de la hauteur issue de C. Soit X un point de la droite (BC). Le cercle circonscrit au triangle BEX recoupe la droite (AB) en Y. Le cercle circonscrit au triangle CFX recoupe la droite (AC) en Z. Montrer que la droite (AH) est tangente au cercle circonscrit au triangle AYZ.

Solution de l'exercice 1



On traite le cas où X est sur la demi-droite $[CB)$ mais pas dans le segment $[BC]$ (la preuve s'adaptant aux autres cas). Commençons par noter que $\widehat{HEA} = 90° - \widehat{HFA}$ de sorte que les points A, E, F et H sont cocycliques.

On note T le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles CFX et BEX.

$$\begin{aligned}
\widehat{YTZ} &= 360° - (\widehat{ZTX} + \widehat{XTY}) \\
&= 180° - \widehat{ZTX} + 180° - \widehat{XTY} \\
&= 180° - \widehat{ZCX} + 180° - \widehat{YBX} \\
&= 180° - \widehat{ACB} + 180° - \widehat{ABC} \\
&= 180° - \widehat{BAC}
\end{aligned}$$

de sorte que T est sur le cercle circonscrit au triangle AYZ.
On a également

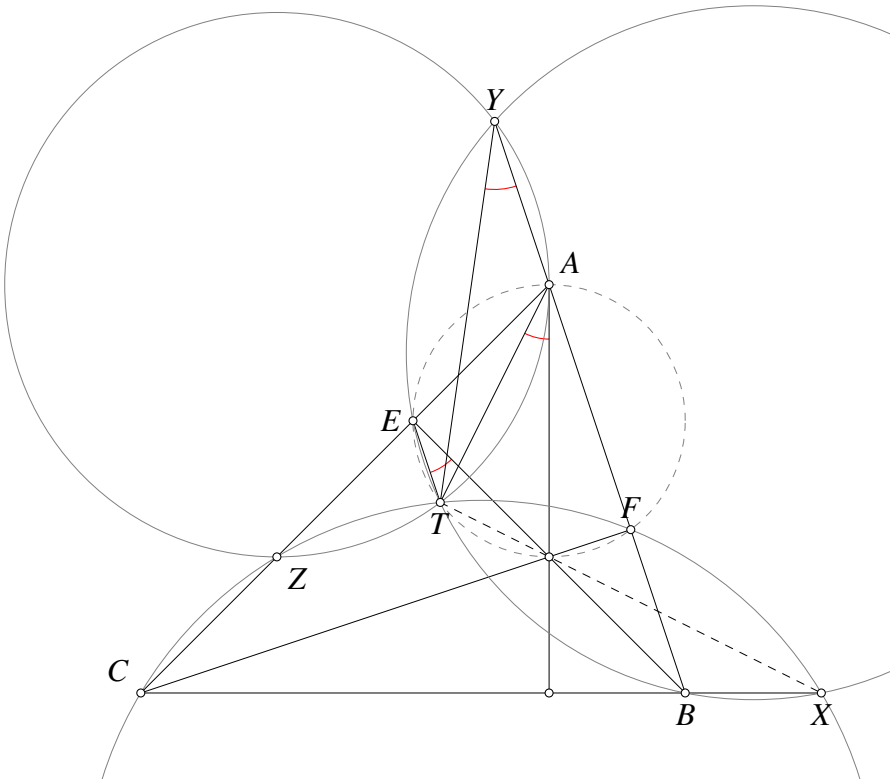
$$\widehat{ETF} = \widehat{ETX} - \widehat{XTF} = \widehat{EBX} - \widehat{XCF} = \widehat{CHB} = \widehat{EHF}$$

On déduit que

$$\widehat{TYA} = \widehat{TYB} = \widehat{TEH} = \widehat{TAH}$$

ce qui conclut.

Solution alternative :



On propose une deuxième preuve du fait que le point T est sur le cercle circonscrit au triangle EHF.

Puisque $\widehat{BEC} = 90^\circ = \widehat{CFB}$, les points E et F sont sur le cercle de diamètre $[BC]$, si bien qu'en considérant la puissance du point H par rapport au cercle de diamètre $[BC]$ $HE \times HB = HF \times HC$. On déduit que H est sur l'axe radical des cercles circonscrits aux triangles BEX et CFX. Il est donc aligné avec T et X. On a alors

$$180^\circ - \widehat{ETH} = 180^\circ - \widehat{ETX} = 180^\circ - \widehat{EBX} = \widehat{EBC} = \widehat{EAH}$$

de sorte que T est sur le cercle circonscrit au triangle AEH. On conclut que

$$\widehat{TYA} = \widehat{TYB} = \widehat{TEH} = \widehat{TAH}$$

ce qui conclut.

Exercice 2
Une fonction f de $\mathbb{Z}$ dans $\{1,\dots,1000\}$ est dite *intéressante* si pour tous les entiers x et y, on a

$$\gcd(f(x),f(y)) = \gcd(f(x),x-y)$$

Combien existe-t-il de fonctions intéressantes ?

Solution de l'exercice 2
Soit f une fonction intéressante éventuelle, puis n le PPCM des entiers $f(x)$, et

$$n = \prod_{i=1}^{r} p_i^{\alpha_i}$$

une factorisation de n en produit de facteurs premiers. Pour tout entier $i \leqslant r$, on se donne un entier x_i tel que p^{α_i} divise $f(x_i)$. Le théorème des restes chinois indique qu'il existe un résidu n modulo n tel que $m \equiv x_i \pmod{p_i^{\alpha_i}}$ pour tout i. On vérifie alors que $p_i^{\alpha_i}$ divise $\mathsf{PGCD}(f(x_i), x_i - m) = \mathsf{PGCD}(f(x_i), f(m))$, de sorte que $f(m)$ est divisible par chacun des facteurs $p_i^{\alpha_i}$, donc par n lui-même.

Par conséquent, pour tout entier x, et puisque $f(x)$ divise $n = f(m)$, on sait que

$$f(x) = \mathsf{PGCD}(f(m),f(x)) = \mathsf{PGCD}(f(m),m-x) = \mathsf{PGCD}(n,x-m).$$

Réciproquement, si l'on note $f_{m,n}$ la fonction définie par $f_{m,n}\colon x \mapsto \mathsf{PGCD}(n,x-m)$, on constate que

$$\mathsf{PGCD}(f_{m,n}(x),f_{m,n}(y)) = \mathsf{PGCD}(n,x-m,y-m) = \mathsf{PGCD}(n,x-m,x-y) = \mathsf{PGCD}(f(x),x-y).$$

Ainsi, chaque fonction $f_{m,n}$ est intéressante.

Enfin, si deux fonctions $f_{m,n}$ et $f_{m',n'}$ coïncident, on sait que n et n' sont tous deux égaux au PPCM des entiers $fm,n(x) = f_{m',n'}(x)$ obtenus lorsque $x \in \mathbb{Z}$, de sorte que $n = n'$. Mais alors $n = f_{m,n}(n) = f_{m',n}(n) = \mathsf{PGCD}(n,m-m')$, donc n divise $m-m'$; réciproquement, si n divise $m-m'$, les fonctions $f_{m,n}$ et $f_{m',n}$ coïncident.

On a donc autant de fonctions intéressantes distinctes que de couples (n,m) avec $n \in \{1,\dots,1000\}$ et $m \in \{1,\dots,n\}$, ce qui nous fait un total de

$$\sum_{n=1}^{1000} n = \frac{1000\times 1001}{2} = 500500$$

fonctions intéressantes.

Solution alternative :
Nous allons tout d'abord démontrer que, pour tous les entiers u et v, il existe un entier w tel que $\mathsf{ppcm}(f(u),f(v))$ divise $f(w)$. En effet, soit $d = \mathsf{pgcd}(f(u),f(v))$, puis $x = f(u)/d$ et $y = f(v)/d$. Puisque $d = \mathsf{pgcd}(f(u),v-u) = \mathsf{pgcd}(f(v),v-u)$, il existe un entier z, premier avec x et y, tel que $v-u = dz$.

Le théorème chinois indique qu'il existe un entier s tel que $s \equiv 0 \pmod{x}$ et $s \equiv z \pmod{y}$. Si l'on pose $w = u + ds$, on constate alors que

$$\begin{cases} \mathsf{pgcd}(f(u),f(w)) = \mathsf{pgcd}(dx,w-u) = \mathsf{pgcd}(dx,ds) = dx \text{ et} \\ \mathsf{pgcd}(f(v),f(w)) = \mathsf{pgcd}(dy,w-v) = \mathsf{pgcd}(dy,d(s-z)) = dy. \end{cases}$$

Ainsi, $f(w)$ est divisible par dx et par dy, c'est-à-dire par $\mathsf{ppcm}(f(u), f(v))$.

Désormais, soit a un entier pour lequel $f(a)$ est maximal. Pour tout entier b, l'image de f contient un multiple de $\mathsf{ppcm}(f(a), f(b))$, et ce multiple est à la fois divisible et majoré par $f(a)$, donc il est égal à $f(a)$. Ainsi, $f(b)$ divise $f(a)$, et l'image de $\mathbb{Z}$ par f ne contient que des diviseurs de $f(a)$. En particulier, pour tout entier x,

$$f(x) = \mathsf{pgcd}(f(a), f(x)) = \mathsf{pgcd}(f(a), x - a),$$

et les entiers x pour lesquels $f(x) = f(a)$ sont ceux tels que $x \equiv a \pmod{f(a)}$. Ainsi, $f(a)$ admet un unique antécédent par f dans $\{1, 2, \ldots, f(a)$, et f se caractérise par la donnée de $f(a)$ et de cet antécédent.

Réciproquement, toute fonction de cette forme convient, car

$$\begin{aligned}
\mathsf{pgcd}(f(x), f(y)) &= \mathsf{pgcd}(\mathsf{pgcd}(f(a), f(x)), \mathsf{pgcd}(f(a), f(y))) \\
&= \mathsf{pgcd}(\mathsf{pgcd}(f(a), x - a), \mathsf{pgcd}(f(a), y - a)) \\
&= \mathsf{pgcd}(f(a), x - a, y - a) \\
&= \mathsf{pgcd}(f(a), x - a, x - y) \\
&= \mathsf{pgcd}(\mathsf{pgcd}(f(a), x - a), x - y) \\
&= \mathsf{pgcd}(\mathsf{pgcd}(f(a), f(x)), x - y) \\
&= \mathsf{pgcd}(f(x), x - y).
\end{aligned}$$

En conclusion, quand on souhaite construire une fonction intéressante, on a 1000 choix pour $f(a)$, puis $f(a)$ choix pour le plus petit entier $a \geqslant 1$ possible, ce qui nous donne un total de

$$\sum_{k=1}^{1000} k = 1000 \times 1001/2 = 500500$$

fonctions intéressantes.

Exercice 3
Soit G un graphe connexe avec k arêtes. Montrer qu'il y a au moins k façons différentes de partitionner les sommets en deux groupes (non vides) de sorte que les sous-graphes induits soient connexes.

Solution de l'exercice 3
Si $k = 0$, il n'y a rien à faire. Sinon, soit (a, b) une arête de G, et Δ le nombre de sommets de G connectés à la fois à a et à b.

Soit aussi G' le graphe à $k - (\Delta + 1)$ arêtes obtenu à partir de G en contractant l'arête (a, b), c'est-à-dire en identifiant les sommets a et b. Par hypothèse de récurrence, ce graphe admet au moins $k - (\Delta + 1)$ partitions $U \sqcup V$ en ensembles connexes. On étend chacune de ces partitions en une partition de G en remplaçant le sommet $\{a, b\}$ par les deux sommets a et b.

En outre, on peut construire 2^Δ partitions de G pour lesquelles a et b sont séparés l'un de l'autre : il suffit de séparer a et b, puis d'insérer arbitrairement chacun de leurs Δ voisins communs dans la partie de a ou de b, et enfin d'étendre chacune de ces partitions en une partition adéquate de G. Les 2^Δ partitions ainsi obtenues diffèrent toutes, et diffèrent également des $k - (\Delta + 1)$ partitions précédemment construites.

On dispose donc bien d'un total de $k - (\Delta + 1) + 2^\Delta \geqslant k$ partitions de G en parties connexes.

Solution alternative numéro 1 :

On construit un arbre couvrant de G. tel que chaque sommet $v \neq r$ situé à une distance $k \geqslant 1$ de r ait une arête qui le relie à un sommet v' situé à distance $k - 1$ de r ; on note $\mathcal{T}$ cet arbre, et on dit que v' est le *père* de v. En particulier, les distances de r à chaque sommet sont identiques dans G et dans $\mathcal{T}$.

À toute arête (a, b) de $\mathcal{T}$, pour laquelle a est le père de b, on associe la partition $A \sqcup B$ pour laquelle B est constitué des descendants de b. Ce faisant, on scinde $\mathcal{T}$ en deux sous-arbres de racines r et b, donc G en deux parties connexes.

Ensuite, pour toute arête (a, b) de G mais pas de $\mathcal{T}$, on remarque que b ne descend pas de a. En effet, b ne peut être un fils de a (car (a, b) n'est pas dans $\mathcal{T}$), et la distance $\mathsf{d}(a, r)$ ne dépasse pas $\mathsf{d}(b, r) + 1$. De même, a ne descend pas de b.

On associe alors à une telle arête la partition $A \sqcup B$ pour laquelle B est constitué des descendants de a ou b. Ce faisant, on scinde $\mathcal{T}$ en trois sous-arbres de racines r, a et b, mais l'arête (a, b) connecte ces deux derniers sous-arbres dans G.

En conclusion, on a bien construit k partitions de G en parties connexes, qui scindent $\mathcal{T}$ en deux ou trois sous-arbres dont les racines permettent de caractériser l'arête dont on est parti, de sorte que ces partitions sont deux à deux distinctes.

Solution alternative numéro 2 :

Soit $\mathcal{T}$ un arbre couvrant de G, enraciné en un sommet r. On associe à toute arête (a, b) de $\mathcal{T}$ pour laquelle a est le père de b la partition $A \sqcup B$ telle que B est composé de b et de ses descendants. De la sorte, on coupe bien G en deux parties connexes non vides, et (a, b) est la seule arête de $\mathcal{T}$ coupée lors de cette partition.

De même, à toute arête (a, b) n'appartenant pas à $\mathcal{T}$ et pour laquelle ni a ni b n'est un ancêtre de l'autre, on associe la partition $A \sqcup B$ telle que B est composé des descendants de a et des descendants de b. Les deux parties A et B sont non vides, et induisent un découpage de $\mathcal{T}$ en trois parties connexes : une pour A, qui contient r car r est un ancêtre de tout le monde, donc diffère de a et de b ; et deux pour B, qui est malgré tout connexe car ces parties

contiennent respectivement les sommets a et b, que relie l'arête (a, b). En outre, les arêtes reliant a et b à leurs parents sont les deux seules arêtes de $\mathcal{T}$ coupées lors de cette partition ; aucune des deux n'est un ancêtre de l'autre.

Enfin, à toute arête (a, b) n'appartenant pas à $\mathcal{T}$ et pour laquelle a est un ancêtre de b, a n'est pas le père de b. Le chemin allant de a à b contient donc au moins un sommet différent de a et de b. On associe alors (a, b) à la partition $A \sqcup B$ pour laquelle B est composé des sommets qui descendent d'un sommet de notre chemin mais pas de b. Cette partition induit un découpage de $\mathcal{T}$ en trois parties connexes ; une pour A, qui contient le père de b ; et deux pour B, qui est malgré tout connexe car ces parties contiennent respectivement les sommets a et b, que relie l'arête (a, b). Enfin, les arêtes reliant a et b au chemin reliant a à b sont les deux seules arêtes de $\mathcal{T}$ coupées lors de cette partition ; l'une est un ancêtre de l'autre.

On a donc associé toute arête à une partition de G idoine, et ces partitions diffèrent deux à deux, car identifier la ou les arêtes de $\mathcal{T}$ que coupe la partition, puis vérifier si l'une de ces arêtes est ancêtre de l'autre, permet de retrouver l'arête (a, b) dont on était parti.

Solution alternative numéro 3 :

On procède comme précédemment, sauf que notre arbre couvrant est issu d'un parcours en largeur. Plus précisément, chaque sommet situé à une distance $k \geqslant 1$ de r se voit attribuer un père situé à un sommet à distance $k - 1$ de r. Lorsqu'une arête de G relie un sommet a à un de ses descendants dans $\mathcal{T}$, disons b, ce descendant est nécessairement un fils de a, et le troisième cas étudié ci-dessus est donc impossible. Cette observation permet de réduire à deux cas la procédure visant à associer une partition à chaque arête, et de simplifier l'observation selon laquelle les partitions obtenues diffèrent deux à deux.

Solution alternative numéro 4 :

Supposons qu'il existe un sommet s de G pour lequel $G \setminus \{s\}$ est déconnecté en ℓ parties $P_1, P_2, \ldots, P_\ell$. Soit $p_i \leqslant k - 1$ le nombre d'arêtes du sous-graphe G_i de G engendré par $P_i \cup \{s\}$. L'hypothèse de récurrence nous assure que G_i admet p_i partitions en ensembles connexes.

Partant d'une telle partition, on ajoute alors chaque P_j tel que $i \neq j$ dans la partie contenant s ; on dit que l'on a obtenu une partition d'*ordre i*. De la sorte, on a partitionné G en ensembles connexes. De plus, l'ordre d'une partition est le seul entier i pour lequel $P_i \cup \{s\}$ n'est pas inclus dans le même ensemble, et les partitions d'un même ordre diffèrent deux à deux. On a donc bien récupéré $p_1 + p_2 + \cdots + p_\ell = k$ partitions de G.

On se place donc désormais dans le cas où, pour tout sommet s de G, le graphe $G \setminus \{s\}$ est connexe.

Supposons maintenant qu'il existe une arête (a, b) pour laquelle $G \setminus \{a, b\}$ est déconnecté en ℓ parties $P_1, P_2 \ldots, P_\ell$. Soit $p_i \leqslant k - 1$ le nombre d'arêtes du sous-graphe G_i de G engendré par $P_i \cup \{a, b\}$. L'hypothèse de récurrence nous assure que G_i admet p_i partitions en ensembles connexes.

Partant d'une telle partition, on ajoute chaque P_j tel que $i \neq j$ dans la partie contenant a ; on dit que l'on a obtenu une partition d'*ordre i*. Or, chaque partie P_j est reliée à a par une arête, ce sans quoi $G \setminus \{b\}$ ne serait pas connexe. On a donc partitionné G en ensembles connexes.

De plus, en règle générale, l'ordre d'une partition est le seul entier i pour lequel $P_i \cup \{a\}$ n'est pas inclus dans le même ensemble, deux partitions de même ordre étant ensuite distinctes ; la seule exception est la partition en $\{b\}$ et $G \setminus b$, que l'on obtient à partir de tout

ordre, et que l'a donc pu obtenir ℓ fois. On a donc bien récupéré $p_1 + p_2 + \cdots + p_\ell - (\ell - 1) = k$ partitions de G.

On se place donc désormais dans le cas où, pour toute arête (a, b) de G, le graphe $G \setminus \{a, b\}$ est connexe.

On peut donc considérer toutes les partitions obtenues en mettant un sommet ou une arête de côté. Pour $n = 2$, séparer nos deux sommets nous fournit une partition, ce qui suffit car $k = 1$. Pour $n = 4$, on construit au plus $k/2$ partitions en ensembles de taille 2 (obtenues en mettant une arête de côté, chacune étant obtenue au plus deux fois) et n partitions en ensembles de tailles 1 et 3 (obtenues en mettant un sommet de côté) ; puisque $k \leqslant 6$, on en conclut que $k \leqslant k/2 + 3 \leqslant k/2 + n$. Enfin, pour $n = 3$ et $n \geqslant 5$, on construit k partitions (obtenue chacune une fois, en mettant une arête de côté).

VIII. La Muraille

Instructions

Les exercices 1 à 42 sont dits de Niveau 1.
Les exercices 43 à 96 sont dits de Niveau 2.
Les exercices au-delà de 97 sont dits de de Niveau 3.
Un exercice est décoré de *n* étoiles lorsqu'il est resté sans solution à la muraille de *n* stages.
Les élèves des groupes A et B cherchent les exercices de Niveau 1 (ou au-dessus). Les élèves du groupe C cherchent les exercices de Niveau 2 (ou au-dessus). Les élèves des groupes D et E cherchent les exercices de Niveau 3.
- Une fois un exercice résolu, la solution doit être rédigée et donnée à une animatrice ou un animateur. Le nom de la personne ayant résolu un exercice sera écrit dans le polycopié.
- Il est possible de résoudre les exercices à plusieurs, le but est d'avoir tout résolu à la fin du stage !

Les prix de la muraille

À la fin du stage, quatre Grand Prix Mystère seront décernés aux quatre élèves ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille dans chacun des cinq groupes A, B, C, D, E.
À la fin du stage, un autre Grand Prix Mystère sera décerné à l'équipe (constituée d'au moins deux élèves et d'au plus quatre élèves) ayant obtenu le plus de points en résolvant des exercices de la Muraille.

Barème : Un exercice à x étoiles résolu rapporte $x + 1$ points. Dans une équipe, on prend en compte le groupe de l'élève le plus avancé.

Exercice 1 ⋆

Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Que vaut le reste de la division euclidienne de $10^{(10^n)}$ par 7 ?

Résolu par Nathanaël LEE et Mohamed-Amine EL OUSSAIDI

Exercice 2 ⋆⋆

Soit k un entier strictement positif. On considère k nombres premiers (pas forcément distincts) tels que leur produit vaut 10 fois leur somme. Déterminer toutes les valeurs de k possibles.

Résolu par Arthur BLANC-PETAVY et Antoine BOREL

Exercice 3

Soit ABC un triangle. Soit M le milieu de $[BC]$ et D le second pour d'intersection de la droite (AM) avec le cercle circonscrit ABC. Le cercle circonscrit au trinagle CMD recoupe la droite (AC) en E. Le cercle circonscrit au triangle AEM recoupe la droite (AB) au point F. Montrer que (CF) est une hauteur du triangle ABC.

Résolu par Aymeric ARNAUD DE FORGES

Exercice 4 ⋆⋆

N nombres entiers distincts strictement positifs sont écrits au tableau. Si a et b sont deux entiers distincts écrits au tableau, $a + b$ est une puissance de 2. Trouver la valeur maximale possible pour N.

Résolu par Bastien PUYOU

Exercice 5 ⋆

Sur les côtés AB, BC et CA d'un triangle ABC, se trouvent respectivement les points A_1, A_2, A_3 et B_1, B_2, B_3, B_4 et C_1, C_2, C_3, C_4, C_5. On note que ces points ne sont pas confondus entre eux, ni avec les sommets du triangle ABC. Deux triangles sont considérés comme identiques si chaque sommet d'un triangle est aussi un sommet de l'autre.

Indiquez le nombre de triangles non-plats qui peuvent être formés à partir de tous ces points (y compris les sommets A, B, C)

Exercice 6 ⋆⋆

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique. On note O le centre de son cercle circonscrit. On suppose de plus que les diagonales de ce quadrilatère sont perpendiculaires. Montrer que la ligne brisée AOC (composée des segments $[AO]$ et $[OC]$) coupe le quadrilatère $ABCD$ en deux portions d'aires égales.

Résolu par Arthur DUSOULIER

Exercice 7 ⋆

Sur un échiquier de taille $n \cdot n$, les cases sont coloriés soit en blanc, soit en noir. Trois des coins de l'échiquier sont blancs, et un est noir. Montrer qu'il y a un carré de taille $2 \cdot 2$ avec un nombre impair de cases blanches.

Résolu par Amaël GIBOULOT

Exercice 8 ⋆

Résoudre dans $\mathbb{N}^*$:

$$1005^x + 2011^y = 1006^z$$

Résolu par Alexandre ROUX

Exercice 9 ⋆⋆⋆

On a un polyèdre convexe, dont les faces sont des triangles. Les sommets du polyèdre sont coloriés avec trois couleurs.

Montrer que le nombre de triangles dont les sommets ont trois couleurs distinctes est pair.

Résolu par Mona MULLER

Exercice 10 ⋆⋆⋆

Trouver tous les triplets d'entiers naturels $\{x, y, z\}$ pour lesquels :

$$x^4 + y^3 = z! + 7$$

Résolu par Alexandre Roux

Exercice 11 ⋆⋆

Soit E un ensemble de 2021 réels tels que pour tout couple d'éléments distincts $(a, b) \in E^2$, on ait $a^2 + b\sqrt{2}$ rationnel. Montrer que si $a \in E$, alors $a\sqrt{2} \in \mathbb{Q}$.

Exercice 12 ⋆

Soit ABC un triangle. Son cercle inscrit touche $[AB]$ en F et $[AC]$ en E. Soit P le projeté orthogonal de C sur la bissectrice issue de B dans ABC. Montrer que E, F, P sont alignés.

Résolu par Bastien PUYOU

Exercice 13 ⋆⋆⋆

Soit n un entier naturel. On souhaite choisir n entiers du tableau ci-dessous en en prenant exactement 1 par ligne et 1 par colonne.

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \cdots & n-1 \\ n & n+1 & \cdots & 2n-1 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (n-1)n & (n-1)n+1 & \cdots & n^2-1 \end{array}$$

Déterminer la valeur maximale du produit de ces n nombres.

Exercice 14 ⋆⋆⋆

Six cercles sont concourrants en un même point.

Montrer que l'un de ces cercles contient le centre d'un autre.

Exercice 15 ⋆⋆

Un roi se déplace sur un plateau d'échec. Il peut se déplacer d'une case dans n'importe quelle direction pour se rendre sur une case adjacente. Il parcourt une unique fois chaque case du plateau puis revient à sa case de départ. Montrer qu'il s'est déplacé en diagonale un nombre pair de fois au cours de son parcours.

Résolu par Arthur Blanc-Petavy et Antoine Borel

Exercice 16 ⋆⋆⋆
Soixante-dix employés travaillent pour une entreprise internationale. Si X et Y sont deux quelconques d'entre eux, il y a une langue parlée par X et non parlée par Y, et une langue parlée par Y mais pas par X.

Quel est le nombre minimum total de langues parlées par les employés ?

Exercice 17 ⋆⋆⋆
Chaque sous-ensemble à k éléments de $\{1, 2, \dots n\}$ possède un plus petit élément. Calculer la moyenne de ces plus petits éléments.

Résolu par Alexandre ROUX

Exercice 18
On dispose d'un 50-gone dont les sommets se trouvent sur un cercle. On suppose que les arcs reliant deux points consécutifs sur le cercle ont pour valeur 1, 2, 3, ..., 50 dans un certain ordre. On suppose de plus que la différence de longueur entre deux arcs opposés (pour le polygone) vaut toujours 25. Montrer que le 50-gone a nécessairement deux côtés parallèles.

Exercice 19 ⋆⋆⋆
On considère 4 cercles concentriques du plan. On suppose que leurs rayons forment une progression arithmétique strictement croissante.

Montrer qu'il est impossible d'avoir un carré dont chacun des 4 sommets appartient à un cercle différent.

Exercice 20
Montrer que pour tous $a, b, c > 0$:

$$\left(a^2 + \frac{b^2}{c^2}\right)\left(b^2 + \frac{c^2}{a^2}\right)\left(c^2 + \frac{a^2}{b^2}\right) \geqslant abc\left(a + \frac{1}{a}\right)\left(b + \frac{1}{b}\right)\left(c + \frac{1}{c}\right)$$

Résolu par Aymeric ARNAUD DE FORGES

Exercice 21 ⋆⋆⋆⋆
Trouver tous les nombres premiers distincts p, q, r tels que :

$$\begin{aligned} p|qr - 1 \\ q|pr - 1 \\ r|pq - 1 \end{aligned}$$

Résolu par Arthur BLANC-PETAVY et Antoine BOREL

Exercice 22 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆
On inscrit 100 entiers sur un cercle. Leur somme vaut 1. On appelle séquence positive une suite de nombres consécutifs sur le cercle telle que leur somme soit strictement positive. Combien y a-t-il de séquences positives sur le cercle ?

Résolu par Alexandre ROUX

Exercice 23
Pour quels entiers a existe-t-il un entier n strictement positif vérifiant $7an - 3n! = 2020$?

Exercice 24 ⋆
Soit f une fonction de $N^\star$ dans Z telle que $f(1) = 0$, $f(p) = 1$ si p premier et $f(xy) = xf(y)+yf(x)$. Déterminer le plus petit $n \geqslant 2015$ tel que $f(n) = n$.

Exercice 25 ⋆⋆
Aurélien dispose n lampes en ligne. Toutes les minutes, il éteint les lampes déjà allumées. Il allume également les lampes éteintes qui étaient à côté d'exactement une lampe déjà allumée. Pour quels n existe-il une configuration initiale telle qu'il y ait toujours au moins une lampe allumée ?

Exercice 26 ⋆
Trouver tous les nombres premiers p pour lesquels il existe des entiers naturels x et y tels que :

$$x(y^2 - p) + y(x^2 - p) = 5p$$

Exercice 27 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Alice et Bob jouent au jeu suivant : Alice part du nombre 2 et les joueurs jouent chacun leur tour. A chaque tour, en notant n le nombre atteint par le joueur précédent, on ajoute un nombre m tel que m divise n, $m \neq n$, et $m + n \leqslant 2016$. Le premier joueur à ne plus pouvoir jouer a perdu. Quel joueur peut s'assurer la victoire ?

Résolu par Michael ZHOU

Exercice 28 ⋆⋆⋆⋆
Soit n un entier strictement positif. On dit qu'un sous ensemble A de $\{1, 2, ..., n\}$ est "*fade*" si pour tout x, y dans A, $x + y$ n'est pas dans A. Selon la valeur de n, quel est le cardinal du plus grand ensemble *fade* ?

Exercice 29 ⋆⋆⋆
Soient $x, y > 0$, et soit $s = min(x, y + \frac{1}{x}, \frac{1}{y})$.

Quelle est la valeur maximale possible de s ?
Pour quels x, y est-elle atteinte ?

Résolu par Aymeric ARNAUD DE FORGES

Exercice 30 ⋆
Soit p un nombre premier, $a_1, \ldots, a_p$ et $b_1, \ldots, b_p$ des entiers (pas forcément distincts) de $\{1, \ldots, p - 1\}$. Montrer qu'il existe deux entiers i et j tels que p divise $a_i b_j - a_j b_i$.

Exercice 31 ⋆⋆⋆
Est-il possible de découper un triangle équilatéral en 4 pièces de sorte qu'il soit possible de les réassembler pour former un carré ?

Exercice 32 ⋆

Montrer que pour tout n il existe n entiers strictement positifs distincts $x_1, \ldots, x_n$ tels que

$$\frac{1}{x_1} + \ldots + \frac{1}{x_n} = 1$$

Résolu par Michael ZHOU

Exercice 33 ⋆⋆⋆

Quelle est la plus grande valeur que peut prendre le produit d'entiers strictement positifs de somme n ?

Exercice 34

Soient x, y et z des réels strictement positifs tels que $x \geqslant y + z$. Montrer que

$$\frac{x+y}{z} + \frac{z+x}{y} + \frac{y+z}{x} \geqslant 7$$

Résolu par Arthur DUSOULIER

Exercice 35 ⋆⋆⋆⋆

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ une suite d'entiers strictement positifs tels que pour tout $i \neq j \geq 1$ entiers on ait :

$$pgcd(a_i, a_j) = pgcd(i, j)$$

Montrer que $a_i = i$ pour tout $i \geq 1$.

Résolu par Alexandre ROUX

Exercice 36 ⋆

Soit ABC un triangle avec $AC > AB$. Soit P le point d'intersection de la médiatrice du segment $[BC]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Soit X le projeté orthogonal de P sur (AB) et Y le projeté orthogonal de P sur (AC). La droite (XY) coupe (BC) en Z. Déterminer

$$\frac{BZ}{ZC}$$

.

Résolu par Arthur DUSOULIER

Exercice 37 ⋆⋆⋆

Quarante et une équipes s'affrontent à *l'open de pétanque du stage de Valbonne*. Chaque équipe affronte successivement chaque autre lors de différents *matchs* (en 13 points, comme il se doit). Chaque match se conclut par une victoire pour une équipe, et une défaite pour l'autre, il n'y a pas de match nul.

Lors de la proclamation des résultats, Mathieu affirme : « *Difficile de dire quelle équipe a gagné. Non seulement chaque équipe a au moins perdu un match, mais pire, à chaque fois que l'on choisit deux équipes, on peut trouver une troisième équipe qui a battu chacune des deux premières équipes.* »
Est-ce possible, autrement dit, un tel tournoi existe-t-il ?

Exercice 38 ⋆⋆

Soient a, b, c, d des réels tels que $a \geq b$ et $c \geq d$, montrer que le polynôme suivant est à racines réelles :

$$P(x) = (x + a)(x + d) + (x + c)(x + b)$$

Exercice 39 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle actuangle. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ coupe BC en D et le cercle circonscrit à ABC en E. La tangente au cercle circonscrit à ABC en B coupe AD en F. On suppose que $AD^2 = 2CD^2$. Montrer que E est le milieu de $[AF]$.

Résolu par Bastien PUYOU

Exercice 40 ⋆⋆⋆⋆⋆

On donne un nombre n plus grand que 10^{2018}. Quel est le premier chiffre après la virgule dans l'écriture décimale de la racine carrée de $(n^2 + n + 200)$?

Résolu par Michael ZHOU

Exercice 41 ⋆⋆⋆⋆⋆

Mathieu joue au billard sur un billard rectangulaire de 2,03 m sur 3,03 m. Sa boule, de 6 cm de diamètre, est placée au milieu d'un grand côté du billard et Mathieu la fait rouler, sans effet, selon un angle de 45 degré par rapport au côté du billard. En supposant que Mathieu lui ait donné suffisamment de force, à quelle distance du point de départ le centre de la boule sera-t-il au moment du 59e rebond ?

Exercice 42 ⋆

Soit ABC un triangle et D le pied de la bissectrice issue de A. On considère les centres des cercles circonscrits aux trois cercles (ABD), (ADC) et (ABC). Montrer que le triangle formé par ces centres est isocèle.

Exercice 43 ⋆⋆⋆

On fixe n un entier pair. Étant donné un sous-ensemble S des entiers $\{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\}$, on va définir $D(S)$ l'ensemble des différences d'éléments de S, prises modulo n et regardées avec leurs multiplicité. Par exemple, si $n = 6$, et $S = \{1, 2, 5\}$, alors $D(S) = \{0, 0, 0, 1, 2, 3, 3, 4, 5\}$.

On note $\overline{S} = \{0, 1, 2, \ldots, n-2, n-1\} \backslash S$ le complémentaire de S.
Montrer que si S a exactement $\frac{n}{2}$ éléments, alors $D(S) = D(\overline{S})$.

Résolu par Anton AVILOV

Exercice 44 ⋆⋆

Soit (p_k) la suite croissante des nombres premiers. Démontrer que

$$p_1^m + \ldots + p_n^m > n^{m+1}$$

pour tous les entiers positifs m et n.

Résolu par Alexandre ROUX

Exercice 45

Pour quels entiers $n \geqslant 1$ existe-t-il une bijection

$$\sigma : \{1, 2, \ldots, n\} \to \{1, 2, \ldots, n\},$$

de sorte que $|\sigma(i) - i| \neq |\sigma(j) - j|$ si $i \neq j$?

Exercice 46 ⋆⋆⋆⋆⋆

Martin et Savinien jouent à un jeu : une droite est tracée dans le plan. Martin choisit une caractéristique parmi "médiatrice", "médiane", "hauteur", "bissectrice intérieure". Savinien trace ensuite une deuxième droite coupant la première en un point P. Martin trace alors une troisième droite sécante aux deux autres en P. Si Savinien parvient à dessiner un triangle dont les trois droites remarquables à la caractéristique choisie sont les trois droites dessinées, il gagne. Sinon c'est Martin qui l'emporte. Qui a une stratégie gagnante ?

Résolu par Clémentine PIALOUX, Mara MÉDECIN, Charlie DANG

Exercice 47

Soit ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. Soit A_1 le symétrique de A par rapport à (BI) et (B_1) le symétrique de B par rapport à (AI). Soit M le milieu de $[AB]$ et N le milieu de $[A_1B_1]$. Montrer que $IM < IN$.

Exercice 48 ⋆⋆

Les polynômes F et G satisfont

$$F(F(x)) > G(F(x)) > G(G(x))$$

pour tout x. Montrer que $F(x) > G(x)$ pour tout x.

Résolu par Malo EAV

Exercice 49 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Soit P un point de l'espace et $r > 0$. Montrer qu'il existe 8 sphères disjointes de même rayon r qui cachent le point P, c'est-à-dire que toute demi-droite issue de P rencontre au moins l'une des sphères. On supposera que les centres des sphères sont tous à des distances $> r$ de P.

Exercice 50 ⋆

On se donne deux entiers $1 \leq k_1 \leq k_2$ et $n \geq k2$ points sur une droite, dont les abscisses sont exactement les entiers de 1 à n. On veut colorier ces points de sorte que deux points espacés d'exactement k_1 ou k_2 soient toujours de la même couleur. Quel est le nombre maximal de couleurs que l'on pourra utiliser ?

Exercice 51 ⋆⋆

Montrer que l'entier $p^p - 1$ admet un facteur premier strictement plus grand que p.

Résolu par Malo EAV

Exercice 52 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 1$ un entier. Une suite $a_1, a_2, ..., a_n$ d'entiers est dite "*élégante*" si elle respecte les deux conditions suivantes :

• $a_i = 1$ ou $a_i = 0$ pour tout i tel que $1 \leq i \leq n$

• Il n'existe aucune sous suite de (a_n) se répétant trois fois consécutivement. Par exemple, (a_n) ne peut pas contenir les nombres $1, 0, 1, 1, 0, 1, 1, 0, 1$ consécutivement puisque la sous-suite $(1, 0, 1)$ est répétée trois fois consécutivement.

Montrer qu'il existe des suites *élégantes* de taille arbitrairement grande.

Résolu par Anton AVILOV

Exercice 53 ⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle, l une droite et L, M, N les pieds des perpendiculaires à l passant par A, B, C respectivement. Les perpendiculaires aux droites $(BC), (CA), (AB)$ passant par L, M, N respectivement sont notées a, b, c.

Montrer que a, b, c sont concourantes.

Exercice 54 ⋆

Matthieu se trouve devant une forêt très particulière. Il sait que les arbres sont tous identiques, ponctuels et que leurs positions sont données exactement par l'ensemble des points du plan de coordonnées entières strictement positives. Il se place à l'origine $(0, 0)$ et observe la forêt : il remarque que certains arbres sont visibles depuis son point de vue, mais que d'autres sont masqués par d'autres arbres. Montrer que pour tout entier $r \geq 1$, il existe un carré de côté r (c'est-à-dire un ensemble d'arbres de coordonnées (x, y) avec $a+1 \leq x \leq a+r$ et $b+1 \leq y \leq b+r$ pour certains entiers a et b) dont Matthieu ne voit aucun arbre.

Exercice 55 ⋆

On dit qu'un nombre premier p divise le polynôme P de $\mathbb{Z}[X]$ lorsqu'il existe un entier n tel que p divise $P(n)$. Montrer que tout polynôme non constant de $\mathbb{Z}[X]$ admet une infinité de diviseurs.

Exercice 56

Déterminer s'il existe une fonction f de $\mathbb{R}_+^\star$ dans $\mathbb{R}_+^\star$ telle que pour tous $x, y > 0$, on a

$$f(x + y) \geqslant yf(x) + f(f(x))$$

Exercice 57 ⋆⋆

Un mot est une suite de 123 caractères parmi A, B et C contenant 42 consonnes (B et C) et 81 voyelles (A). Au maximum, combien peut-on prendre de mots distincts de telle manière que chaque paire de mots choisis admet une position où l'un des deux mots contient un B et l'autre un C.

Exercice 58 ⋆

Soit ABC un triangle dont le centre du cercle circonscrit est O. Soit X et Y sur AB et AC respectivement tels que le cercle circonscrit au triangle X, Y, O passe par A. Montrer que l'orthocentre de ce triangle est sur (BC).

Exercice 59 ⋆⋆

Pour tout entiers $n \in \mathbb{N}^*$, on note d_n son plus grand diviseur strict. Montrer qu'il existe une infinité d'entiers n pour lesquels $d_n + d_{n+1}$ est un carré parfait.

Résolu par Michael ZHOU

Exercice 60 ⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle, H son orthocentre, O son centre du cercle circonscrit et R son rayon. Soient A', B', C' les symmétriques de A, B, C par rapport au droites $(BC), (CA), (AB)$ respectivement.

Montrer que A', B', C' sont alignés si et seulement si $OH = 2R$.

Exercice 61
Déterminer tous les couples de polynômes non constants P et Q unitaires, de degré n et admettant n racines positives ou nulles (non nécessairement distinctes) tels que

$$P(x) - Q(x) = 1.$$

Exercice 62 ⋆⋆⋆⋆
Montrer que pour tout réels positifs $x_1, x_2, ..., x_n$ on a :

$$\frac{1 + x_1^2}{1 + x_1x_2} + \frac{1 + x_2^2}{1 + x_2x_3} + \cdots + \frac{1 + x_n^2}{1 + x_nx_1} \geqslant n$$

Exercice 63 ⋆⋆⋆⋆
Soit c un entier. Existe-t-il un polynôme P à coefficients entiers vérifiant les conditions suivantes ?

• $P(0) = 1$

• Soit $(x_n)_{n\in\mathbb{N}^*}$ la suite définie par $x_0 = 0$ et $x_{n+1} = P(x_n)$ (pour tout $n \geq 0$). Il existe un entier N tel que pour tout $n > N$ on ait $\text{pgcd}(x_n, n + c) > 1$.

Exercice 64 ⋆
Soient 5 droites a, b, c, d, e dans le plan, jamais 2 parallèles, jamais 3 concourantes. Les cercles circonscrits aux triangles (a, b, c), (b, c, d), (c, d, e), (d, e, a) et (e, a, d) sont nommés respectivement B, C, D, E, A. Les cercles B, C se coupent une fois sur les 5 droites de départ et une fois en un autre point, nommé U. On définit de même V, X, Y, Z seconde intersection de (C, D), (D, E), (E, A), (A, B) respectivement. Montrer que $UVXYZ$ sont cocycliques.

Exercice 65 ⋆
Soit ABC un triangle et P un point à l'intérieur. Le projeté de P sur (BC) s'appelle A_1 et celui sur la hauteur issue de A dans ABC est A_2. On définit de même B_1, B_2, C_1, C_2. Montrer que $(A_1A_2), (B_1B_2), (C_1C_2)$ sont concourrantes.

Exercice 66 ⋆⋆
Martin et Rémi jouent à cache cache. Initialement, Martin choisit un point A dans un carré 1×1. Rémi choisit ensuite consécutivement $P_0, ..., P_N$ des points de ce carré. Pour $k \geq 1$, une fois que Rémi a placé le point P_k, Martin lui dit "tu chauffes" si P_k est plus proche de A que P_{k-1} et "tu refroidis" sinon. Après la dernière réponse de Martin (pour le point P_N), Rémi choisit

un point B sur le carré. Rémi gagne si et seulement si $AB \leq \frac{1}{2020}$. Montrer que si $N = 18$, Rémi ne peut pas être sur de gagner.

Exercice 67
Soit n un entier strictement positif. Montrer que

$$\sum_{n \leqslant p \leqslant n^2} \frac{1}{p} < 2$$

Exercice 68 ⋆⋆⋆
Soit $n \in \mathbb{N}^*$. Trouver tous les réels non nuls $a_1, a_2, \ldots, a_n$ tels que :

$$\begin{cases} a_1 a_2 \ldots a_n &= (a_1 + a_2)(a_2 + a_3) \ldots (a_{n-1} + a_n)(a_n + a_1) \\ a_1^3 a_2^3 \ldots a_n^3 &= (a_1^3 + a_2^3) \ldots (a_{n-1}^3 + a_n^3)(a_n^3 + a_1^3) \end{cases}$$

Exercice 69 ⋆⋆⋆
Soient ω_1 et ω_2 deux cercles, (AB) et (CD) leurs tangentes communes (A, C sur ω_1 et B, D sur ω_2). Soit M le milieu du segment $[AB]$. Les tangentes issues de M aux cercles ω_1 et ω_2 coupent (CD) en X et Y. Soit I le centre du cercle M-exinscrit au triangle MXY.

Montrer que $IC = ID$.

Exercice 70 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle équilatéral de côté a et P un point à l'intérieur de ce triangle. On construit un triangle XYZ de côtés de longueur PA, PB et PC et on note F son point de Fermat. Montrer que $FX + FY + FZ = a$.

Exercice 71 ⋆⋆⋆
Soit $[EF]$ un segment inclus dans le segment $[BC]$ tel que le demi-cercle de diamètre $[EF]$ est tangent à $[AB]$ en Q et à $[AC]$ en P.

Prouver que le point d'intersection K des droites (EP) et (FQ) appartient à la hauteur issue de A du triangle ABC.

Exercice 72 ⋆⋆
Dans une grille $n \times n$, chaque case est soit bleue soit rouge. On place certains dominos sur la grille, chaque domino couvrant deux cases (pas de recouvrement). Un domino est dit "uniforme" s'il couvre deux cases bleues ou deux cases rouges, "coloré" sinon. Trouver le plus grand entier positif k tel que, quelque soit le coloriage initial, on peut toujours avoir k dominos uniformes ou k dominos colorés.

Exercice 73 ⋆⋆
On définit la suite $(a_n)_{n \geq 3}$ par :

$$a_n = \prod_{k=3}^{n} \frac{(k^3 + 3k)^2}{k^6 - 64}$$

Calculer la limite de (a_n).

Résolu par Michael ZHOU

Exercice 74 ⋆⋆⋆

On commence par 2 points du plan A et B. On construit le cercle de centre A passant par B et le cercle de centre B passant par A. On note C l'une des deux intersections obtenues. On trace le cercle de centre C passant par B. On note D l'une des deux intersections des cercles de centres B, C puis on trace le cercle de centre D passant par B. On note E l'une des deux intersections des cercles de centres B, D puis on trace le cercle de centre E passant par C et le cercle de centre A passant par E. On note F, G les points d'intersection de ces deux cercles. On contruit le cercle de centre F passant par E et de centre G passant par E. On note M leur deuxième intersection.

Montrer que M est le milieu de $[AB]$.
Sur le cercle de centre B, A, C, D, E sont ordonnés ainsi, dans le sens des aiguilles d'une montre.

Exercice 75 ⋆⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle. Les médianes AM_A, BM_B, CM_C du triangle ABC s'intersectent en M. Soit Ω_A un cercle passant par le milieu de AM et tangent à BC en M_A. On construit similairement Ω_B et Ω_C .
Prouver que Ω_A, Ω_B et Ω_C s'intersectent en un même point.

Exercice 76 ⋆⋆

Montrer que pour tout n il existe un entier m multiple de n dont la somme des chiffres vaut n.

Résolu par Matthieu Dubois

Exercice 77 ⋆⋆⋆⋆

Théo et Paul jouent à un jeu. Théo a face à lui n enveloppes indistingables et fermées. L'une d'elles contient n roubles. Théo choisit une enveloppe. Pour aider Théo, Paul ouvre une enveloppe (autre que celle de Théo) ne contenant rien si il y a au moins 3 enveloppes non ouvertes sur la table. Théo peut alors choisir soit d'ouvrir son enveloppe, soit de recommencer le même processus avec une nouvelle enveloppe (potentiellement la même) mais en enlevant 1 rouble de l'enveloppe contenant de l'argent. Soit E_n l'espérance du gain de Théo en jouant optimalement.
Calculer $\lim_{n\to\infty}(E_n)$

Exercice 78 ⋆⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle acutangle. On note I_A le centre du cercle A-exinscrit de ABC. Soit M le symétrique de I_A par rapport à BC. Montrer que (AM) est parallèle à la droite passant par l'orthocentre et le centre du cercle circonscrit à I_ACB.

Exercice 79 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Soit $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ un ensemble fini de réels dont toutes les fonctions symétriques élémentaires sont strictement positives. Les éléments a_i sont-ils également strictement positifs ?

Note : La k-ème fonction symétrique élémentaire, notée σ_k, est la somme des produits k par k. Ainsi $\sigma_1 = a_1 + a_2 + \ldots + a_n$, $\sigma_2 = a_1a_2 + a_1a_3 + a_2a_3 + \ldots$, et plus généralement, $\sigma_k = \sum_{1\leqslant i_1<\ldots<i_k\leqslant n} a_{i_1}a_{i_2}\ldots a_{i_k}$.

Exercice 80 ⋆

Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1/2$ et $x_{k+1} = x_k + x_k^2$.

On pose

$$A = \frac{1}{x_1 + 1} + \frac{1}{x_2 + 1} + \ldots + \frac{1}{x_{100} + 1}$$

Déterminer $\lfloor A \rfloor$.

Exercice 81 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Trouver tous les polynômes P à coefficients réels tels que, pour tout $n \in \mathbb{N}$, il existe un rationnel r tel que $P(r) = n$.

Résolu par Malo EAV

Exercice 82 ⋆⋆

On considère une configuration de n jetons dans le plan, pas forcément à des positions distinctes. On s'autorise l'opération suivante : on choisit deux jetons A et B et on les déplace tous les deux vers l'emplacement du milieu du segment joignant les jetons A et B. On dit qu'une configuration *collisionne* s'il est possible, après une suite finie d'opérations, que tous les jetons se retrouvent au même emplacement. Montrer que toutes les configurations à n jetons collisionnent si et seulement si n est une puissance de 2.

Résolu par Tom MARTINAL

Exercice 83 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆

On construit la suite (u_n) de la façon suivante : on pose $u_0 = 0$, et pour tout $n \in \mathbb{N}^*$, on choisit u_n de sorte que $|u_n| = |u_{n-1} + 1|$. Quelle est la plus petite valeur que puisse prendre

$$|u_1 + u_2 + \ldots + u_{2017}| \ ?$$

Exercice 84 ⋆⋆

Soient a, b, c les longueurs des côtés d'un triangle de périmètre égal à 3. Montrer qu'on a l'inégalité suivante :

$$\frac{1}{\sqrt{a+b-c}} + \frac{1}{\sqrt{a+c-b}} + \frac{1}{\sqrt{b+c-a}} \geq \frac{9}{ab+ac+bc}$$

Exercice 85 ⋆⋆⋆⋆

Soit A une partie de $\mathbb{N}^*$ de cardinal 2^k. On dit qu'une partie $B \subseteq A$ est admissible si B est telle que la somme de deux de ses éléments n'est jamais dans A. Montrer qu'il existe un sous ensemble de A de cardinal $k+1$ qui est admissible.

Exercice 86 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

Soit ABC un triangle acutangle, avec $AC > BC$. On note H son orthocentre, O le centre de son cercle circonscrit et M le milieu de $[AC]$. Soit F le pied de la hauteur issue de C, et P le symétrique de A par rapport à F. On note X l'intersection de (PH) avec (BC), Y l'intersection de (FX) avec (OM), et Z l'intersection de (OF) avec (AC). Montrer que F, M, Y et Z sont cocycliques.

Exercice 87 ⋆⋆

Soit ABC un triangle équilatéral de centre O et soit M un point de $[BC]$. Soient K et L les projections de M sur (AB) et (AC) respectivement. Montrer que (OM) passe par le milieu de $[KL]$.

Exercice 88 ⋆⋆⋆⋆⋆

Soient p et q des entiers premiers entre eux. Montrer que

$$\sum_{k=0}^{pq-1}(-1)^{\left\lfloor \frac{k}{p}\right\rfloor+\left\lfloor \frac{k}{q}\right\rfloor} = \begin{cases} 0 \text{ si } pq \text{ est pair,} \\ 1 \text{ sinon.} \end{cases}$$

Résolu par Michael ZHOU

Exercice 89 ⋆⋆⋆⋆

On dit qu'un entier positif n est *sympa* si il existe des entiers $a_1, a_2, ..., a_n$ tels que :

$$a_1 + a_2 + ... + a_n = a_1 \cdot a_2 \cdot ... \cdot a_n = n$$

Trouver tous les entiers *sympas*.

Résolu par Malo EAV

Exercice 90 ⋆⋆

Déterminer s'il existe des fonctions $f : \mathbb{R}_+^* \to \mathbb{R}_+^*$ vérifiant pour tous $x, y > 0$:

$$f(x + y) \geq yf(x) + f(f(x))$$

Exercice 91 ⋆⋆⋆⋆⋆

Pour un entier n, soit $f(n)$ le nombre obtenu en inversant les 0 et les 1 de l'écriture binaire de n. Par exemple, l'écriture binaire de 23 est 10111. En inversant les 0 et les 1, on obtient 01000, ce qui correspond au nombre 8. Ainsi $f(23) = 8$. Montrer que

$$\sum_{k=1}^{n} f(k) \leqslant \frac{n^2}{4}.$$

Pour quelles valeurs de n y a-t-il égalité ?

Résolu par Michael ZHOU

Exercice 92 ⋆⋆⋆⋆⋆⋆⋆

On se donne un certain nombre de polynômes unitaires de degré 2 de même discriminant. On suppose que la somme de deux quelconques de ces polynômes a toujours deux racines réelles distinctes. Montrer qu'il en est de même de la somme de tous les polynômes considérés.

Exercice 93 ⋆⋆

Trouver le plus petit premier p qui ne peut pas s'écrire sous la forme $|3^a - 2^b|$ avec $a, b \geq 0$ deux entiers positifs.

Exercice 94 ⋆⋆

Est-il possible de colorier le plan en 7 couleurs de sorte à ce que deux points à distance 1 soient toujours de couleur différente ?

Exercice 95 ⋆⋆⋆

On dit que deux carré *se touchent* s'ils ont au moins un point de leurs bords respectifs en commun. Autour d'un carré de côté 1, il est possible de placer 8 autres carrés de côté 1 touchant le premier, sans jamais que deux carrés ne se superposent. Il suffit de placer les carrés comme dans un échiquier.

Est-il possible d'en placer 9 ?

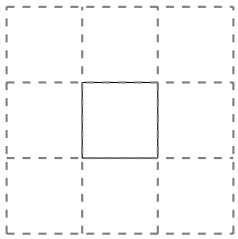


FIGURE 1 – Exemple : 8 carrés qui *touchent* le carré central sans se superposer

Exercice 96 ⋆⋆

On considère une grille 2021×2021, et on place un point noir sur le centre de n cases de la grille. Trouver la plus grande valeur de n pour laquelle il est possible de placer n point tel que 3 points ne forment jamais un triangle rectangle.

Exercice 97 ⋆⋆⋆⋆

On pose $P(x)$ un polynôme non constant à coefficients réels. Pour tout entier naturel n, posons :

$$Q_n(x) = (x+1)^n P(x) + x^n P(x+1)$$

Montrer qu'il n'existe qu'un nombre fini d'entiers n pour lesquels toutes les racines de $Q_n(x)$ sont réelles.

Exercice 98 ⋆⋆⋆⋆

Soit $n \geq 2$ un entier. On considère n droites du plan en position générale. Montrer qu'on peut trouver un polygone non croisé à n côtés tel que chaque côté soit sur exactament une droite et que chaque droite contienne exactement un côté.

Exercice 99

Soit $ABCD$ un quadrilatère cyclique dans lequel $AB < BC$ et $AD < DC$. Soit E un point sur le segment $[BC]$ tel que $AB = BE$ et F un point sur le segment $[CD]$ tel que $AD = DF$. Soit M le milieu du segment $[EF]$. Montrer que $\widehat{BMD} = 90°$.

Résolu par Auguste RAMONDOU et Anatole BOUTON ; David LEI

Exercice 100

Déterminer toutes les suites d'entiers strictement positifs vérifiant pour tout $n \geqslant 1$:

$$a_{n+1}^2 = 1 + (n + 2021)a_n$$

Résolu par Auguste RAMONDOU et Anatole BOUTON

Exercice 101
Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{Z}$ surjectives et telles que, pour tous $x, y, z \in \mathbb{Z}$:

$$f(xyz + xf(y) + yf(z) + zf(x)) = f(x)f(y)f(x)$$

Exercice 102
Dans un pays il y a $n \geqslant 5$ villes, desservies par deux compagnies aériennes. Toute paire de villes est reliée par zéro, une ou par les deux compagnies. Cependant chaque compagnie a interdiction de proposer un cycle de longueur inférieur strictement à 6. Montrer que les deux compagnies ont à elles deux moins de $\lfloor \frac{n^2}{3} \rfloor$ vols.

Exercice 103
Soit $ABCD$ un trapèze dans lequel (AB) et (CD) sont parallèles. Soit T un point à l'intérieur du trapèze tel que $\widehat{ATD} = \widehat{BTC}$. La droite (AT) recoupe le cercle circonscrit au triangle ACD au point K. La droite (BT) recoupe le cercle circonscrit au triangle BCD au point L. Montrer que les droites (AB) et (KL) sont parallèles.

Exercice 104 ⋆⋆⋆
Alice et Bob jouent au jeu suivant :

— D'abord, Bob dessine un triangle ABC et un point P à l'intérieur.

— Ensuite ils choisissent chacun à leur tour, une permutation $\sigma_1, \sigma_2, \sigma_3$ du triplet $\{A, B, C\}$, de telle sorte qu'Alice choisisse les permutations σ_1 et σ_3, c'est-à-dire qu'elle commence.

— Alice trace enfin un triangle $V_1V_2V_3$.

Pour $i = 1, 2, 3$, soit ψ_i la similitude qui envoie $\sigma_i(A), \sigma_i(B), \sigma_i(C)$ sur V_i, V_{i+1} et X_i tel que le triangle $V_iV_{i+1}X_i$ soit à l'extérieur du triangle $V_1V_2V_3$ (on note que $V_4 = V_1$). Soit enfin $Q_i = \psi_i(P)$. Alice gagne si le triangle $Q_1Q_2Q_3$ est semblable au triangle ABC, Bob gagne sinon.

Qui dispose d'une stratégie gagnante ?

Exercice 105 ⋆
Montrer que pour tout entier naturel n on a

$$(n+1) \cdot \text{ppcm}\left\{ \binom{n}{i} | 0 \leq i \leq n \right\} = \text{ppcm}(1, 2, ..., n+1)$$

Résolu par Maxime CHEVALIER

Exercice 106 ⋆
Trouver tous les polynômes P de $\mathbb{R}[X]$ tels que $P(\mathbb{Q}) = \mathbb{Q}$.

Résolu par Solal PIVRON DJEDDI et An Pha DANG

Exercice 107 ⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle tel que $\widehat{BAC} = 60°$. Le point K est tel que le triangle ABK est équilatéral et les points C et K ne sont pas dans le même demi-plan délimité par la droite (AB). Le point L est tel que le triangle ACL est équilatéral et les points B et L ne sont pas dans le même

demi-plan délimité par la droite (AC). Les droites (AB) et (CK) se coupent un point S. Les droites (AC) et (BL) se coupent en un point R. Les droites (BL) et (CK) se coupent un point T.

Montrer que le centre radical des cercles circonscrits aux triangles BSK, CLR et BTC appartient à la médiane issue du sommet A dans le triangle ABC.

Résolu par Solal PIVRON DJEDDI et An Pha DANG

Exercice 108 ⋆⋆⋆⋆

On considère 10 points distincts du plan. Montrer qu'on peut les recouvrir par des disques disjoints de rayon 1.

Exercice 109 ⋆⋆⋆⋆

Soit $r > 1$ un entier et soit F une famille infinie d'ensembles différents de cardinal r telle que deux ensembles de cette famille ne soient jamais disjoints. Montrer qu'il existe un ensemble de cardinal $r - 1$ qui intersecte tous les ensembles de la famille F.

Exercice 110 ⋆

Trouver tous les entiers naturels non nuls a, b et c deux à deux distincts et tels que

$$a^b + b^c + c^a = a^c + b^a + c^b.$$

Exercice 111 ⋆

Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe tel que (AB) est tangente au cercle diamètre $[CD]$, et (CD) est tangente au cercle de diamètre $[AB]$. Montrer que les deux points d'intersection de ces cercles sont alignés avec le point d'intersection de (AC) et (BD)

Résolu par Solal PIVRON DJEDDI et An Pha DANG

Exercice 112 ⋆⋆⋆⋆

Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles inscrits aux triangles ABD et ACD respectivement. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BF) et (CE). Les droites (BE) et (BF) coupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits à PQX et RSX. Montrer que Y est sur (AD).

Résolu par Auguste RAMONDOU et Anatole BOUTON

Exercice 113

Des réels a, b et c strictement positifs vérifient le système

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + ab &= 11^2 \\ b^2 + c^2 + bc &= 13^2 \\ c^2 + a^2 + ac &= 20^2 \end{aligned}$$

Exercice 114

Soit ABC un triangle aux angles aigus et soit I le centre de son cercle inscrit. On note A_1 le

point de contact du cercle $A-$exinscrit avec $[BC]$. On définit de façon analogue les points B_1 et C_1. Montrez que les trois cercles circonscrits aux triangles AIA_1, BIB_1 et CIC_1 se recoupent en un même point distinct de I.

Exercice 115 ⋆

Déterminer toutes les fonctions f allant de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{Z}$ telles que pour tout (m, n) :

$$\left\lfloor \frac{f(mn)}{n} \right\rfloor = f(m)$$

Exercice 116

Une bande d'épaisseur w est l'ensemble des points compris entre deux droites parallèles à distance w l'une de l'autre. On suppose qu'un ensemble de n points S est tel que pour chaque triplet de point on puisse trouver une bande d'épaisseur 1 qui les recouvrent. Montrer qu'il existe une bande d'épaisseur 2 qui recouvre tous les points de S.

Exercice 117 ⋆

Théo t'es où ?! Une maison de laquelle Théo et Corentin ne peuvent sortir (mais que les deux connaissent bien) est représentée par un graphe, où les pièces sont des sommets et les portes des arêtes. Il est toujours possible de trouver un chemin entre deux pièces quelconques de la maison, et le nombre de pièces est dénombrable(1).

Chaque jour, Corentin essaye de retrouver Théo en visitant une pièce précise de la maison pour vérifier s'il n'y est pas, pour lui demander de l'aider avec les corrections ; avant de retourner à ses occupations s'il n'est pas ici. Il peut vérifier la même pièce plusieurs fois d'affilée.

Théo, lui, reste toute la journée dans la pièce sur son ordinateur pour faire cours en visio à ses élèves. Mais la nuit, il décide de se déplacer dans une pièce adjacente pour le jour prochain, de façon à éviter de s'ennuyer. Et il fait cela toutes les nuits.

Pour quelles maisons Corentin possède-t-il une stratégie(2) trouvant toujours Théo, quelle que soit la position initiale de Théo et les portes qu'il décide d'emprunter ?

Une stratégie est une suite prédéfinie (potentiellement infinie) de pièces dans laquelle Corentin va s'il n'a pas trouvé Théo à la pièce précédente (terme précédent de la suite), où le terme initial est la première pièce où il cherche.

Exercice 118 ⋆⋆

Soit ABC un triangle, E un point sur le segment $[AC]$ et F un point sur le segment $[AB]$. Les cercles circonscrits aux triangles ABC et AEF se recoupent au point X. Les cercles circonscrits aux triangles AEB et AFC se recoupent au point K. La droite (AK) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point M. Soit N le symétrique du point M par rapport au segment $[BC]$. La droite (XN) recoupe le cercle circonscrit au triangle ABC au point S. Montrer que les droites (BC) et (SM) sont parallèles.

Résolu par Akin DÜRRÜOGLU et Solal PIVRON-DJEDDI ; Anatole BOUTON et Auguste RAMONDOU

Exercice 119 ⋆⋆⋆
f et g sont des fonctions de $\mathbb{N}$ dans $\mathbb{N}$ telles que pour tout entier naturel n, on ait :

$$f(g(n)) = f(n) + 1 \text{ et } g(f(n)) = g(n) + 1$$

Montrer que $f = g$.

Exercice 120 ⋆⋆⋆⋆⋆
Soit Γ un cercle et A, B et C trois points à l'extérieur de Γ. Soient C_1 et C_2 les deux cercles passant par B et C et tangent à Γ. On note X et X' les points de tangence de ces cercles avec Γ. On définit de manière cyclique les points Y, Y', Z et Z'. Montrer que les cercles circonscrits à AXX', BYY' et CZZ' sont coaxiaux.

Exercice 121
Soit ABC un triangle et D, E et F des points tels que $DB = DC, EC = EA, FA = FB$ et $\widehat{BDC} = \widehat{CEA} = \widehat{AFB}$. Soit Ω_D le cercle de centre D passant par B et C. On définit de façon similaire les cercles Ω_E et Ω_F. Montrer que le centre radical des cercles Ω_D, Ω_E et Ω_F appartient à la droite d'Euler du triangle DEF.

Exercice 122 ⋆
Pour un ensemble A, on note $|A|$ le nombre d'éléments de l'ensemble (aussi appelé cardinal) et $s(A)$ la somme des éléments de A. Si $A = \emptyset$, alors $|A| = s(A) = 0$.

On note S l'ensemble d'entiers positifs tel que :

— il y a deux nombres $x, y \in S$ tel que $x \wedge y = 1$

— pour tout couple $(x, y) \in S^2$, $x + y \in S$.

On note T l'ensemble des entiers positifs n'appartenant pas à S. Montrez que $s(T) \leq |T|^2 < +\infty$

Exercice 123
Déterminer toutes les fonctions f injectives de $\mathbb{N}^\star$ dans $\mathbb{N}^\star$ telles que, pour tout ensemble fini S d'entiers strictement positifs tel que $\sum_{s\in S} \frac{1}{s}$ est entier, le nombre $\sum_{s\in S} \frac{1}{f(s)}$ est également entier.

Exercice 124 ⋆⋆⋆
Déterminer s'il existe une suite strictement croissante (a_n) d'entiers strictement positifs telle que pour tout n, $a_n \leqslant n^3$ et tout entier strictement positif peut être écrit d'une unique façon comme différence de deux entiers de la suite.

Exercice 125 ⋆⋆⋆
Soit ABC un triangle et D, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[BC]$, $[CA]$ et $[AB]$. Soit H le pied de la hauteur issue du sommet D dans le triangle DEF. On suppose que les droites (AH) et (BC) sont perpendiculaires.

Montrer que H est l'orthocentre du triangle ABC.

Résolu par Solal PIVRON DJEDDI et An Pha DANG

Exercice 126 ⋆

Dans tout cet exercice, les cas particuliers ayant une probabilité nulle de se produire (droites concourantes par ex) pour des droites prises au hasard pourront être ignorés. Montrer qu'on peut associé, à chaque famille de $2n + 1$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ en position générale, un cercle, et à chaque famille de $2n$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ droites un point de manière que les propriétés suivantes soient vérifiées.

— Le point associé à deux droites est leur point d'intersection.

— Le cercle associé à $2n + 1$ droites passe par les $2n + 1$ points associés à chaque sous-ensemble de $2n$ de ces droites.

— Le point associé à $2n + 2$ droites est sur chacun des $2n + 2$ cercles associés à chaque sous-ensemble de $2n + 1$ de ces droites.

Exercice 127

Soit ABC un triangle et H, I et O respectivement l'orthocentre, le centre du cercle inscrit et le centre du cercle circonscrit du triangle ABC. Soit M le second point d'intersection du cercle passant par H et tangent à (OI) en I avec le cercle passant par O et tangent à (IH) en I. Montrer que M est sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Exercice 128

Soit n un entier. Dans les lignes d'un tableau de 2^n lignes et n colonnes on place tous les n-uplets formés de 1 et de -1. Ensuite, on efface certains de ces nombres, et on les remplace par des 0.

Prouver que l'on peut trouver un ensemble de lignes dont la somme est nulle (i.e., tel que, pour tout i, la somme des nombres appartenant à la colonne i d'une ligne de notre ensemble soit nulle).

Exercice 129 ⋆⋆⋆

Soit k un entier strictement positif.

Montrer qu'il existe un entier strictement positif l satisfaisant la propriété suivante : pour tous entiers n et m premiers avec l tels que $m^m \equiv n^n \mod l$, on a $m \equiv n \mod k$.

Exercice 130

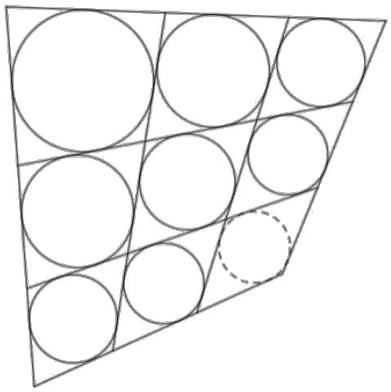
Soit ABC un triangle. On construit, à l'extérieur du triangle ABC, des carrés dont les bases sont les côtés du triangle et dont les centres sont respectivement notés O_A, O_B et O_C. On suppose que le point A appartient au cercle passant par O_A, O_B et O_C. Montrer que le centre de ce cercle est sur l'un des côtés du triangle ABC.

Exercice 131 ⋆⋆⋆

Dans une classe, un groupe d'élèves est dit dominant si chaque élève de la classe possède un ami dans ce groupe. On sait qu'il y a au moins 100 groupes dominants différents dans la classe.

Montrer qu'il y a en fait au moins 101 groupes dominants dans la classe.

Exercice 132 ****
On considère une grille 3×3 (cf. figure) telle toutes les cases sauf un coin soient circonscriptibles. Montrer que cette dernière case est circonscriptible.



Exercice 133 **
Soit ABC un triangle. Soient E et F des points sur les segments $[AB]$ et $[AC]$ tels que

$$BC^2 = BA \times BF + CA \times CE$$

Montrer que pour tout tel choix de E et F, le cercle circonscrit au triangle AEF passe par un point fixe.

Résolu par Auguste Ramondou et Anatole Bouton

Exercice 134 *
Une grille 1000×1000 est remplie avec des 0 ou des 1. Montrer qu'il existe soit un ensemble de 10 lignes telles que chaque colonne ait un 1 parmi ces lignes ou un ensemble de 10 colonnes telles que chaque ligne ait un 0 parmi ces 10 colonnes.

Exercice 135
Soient $a, b, c > 0$ des nombres réels tels que $a + b + c = 3$. Prouver que :

$$\frac{ab}{b^3+1} + \frac{bc}{c^3+1} + \frac{ca}{a^3+1} \leq \frac{3}{2}.$$

Exercice 136 *
Soit P un polynôme de degré 20 à coefficients entiers. Trouver le nombre maximal de nombres entiers dont l'image est un entier entre 0 et 10 inclus.

Exercice 137
Aurélien et Baptiste jouent à un jeu dans lequel Aurélien choisit un entier $n \in \{1, 2, \ldots, 1001\} =$

S. Baptiste doit alors deviner la valeur de n. Pour cela, il dispose de trois manches. Lors de la i−ème manche, il choisit k_i sous-ensembles de S et Aurélien lui indique combien de ces sous-ensembles ont n comme éléments.

Quelle est la plus petite valeur de $k_1 + k_2 + k_3$ telle que Baptiste dispose d'une stratégie pour déterminer l'entier choisi par Aurélien ?

Exercice 138 ⋆⋆

Raphaël et Yaël jouent à un jeu sur un échiquier infini, chaque case étant repérée par deux coordonnées entières (x, y). Initialement Raphaël pose une bille sur la case de coordonnées $(0, 0)$. A chaque coup, si la bille se trouve sur un point de coordonnées (x, y), Raphaël peut la déplacer sur une case de coordonnées $(x+1, y+k)$ avec $k \in [\![-2021, 2021]\!]$. Pour l'en empêcher, à chaque fois que Raphaël déplace sa bille, Yaël peut choisir de *bloquer* une case, qui ne sera plus jamais accessible pour Raphaël. Yaël peut-il faire en sorte que Raphaël ne puisse plus déplacer sa bille ?

Exercice 139 ⋆⋆

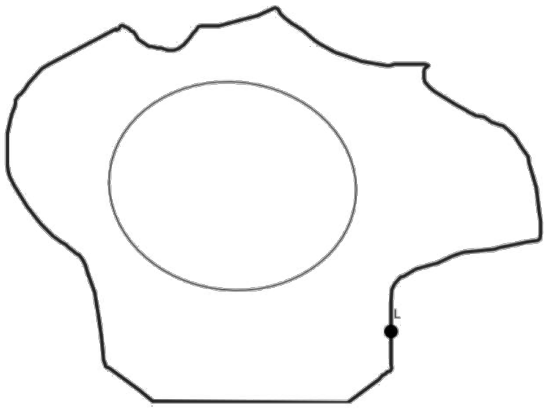
Soient $a, b, c > 0$ des réels, monter l'inégalité suivante :

$$(a^5 - a^2 + 3)(b^5 - b^2 + 3)(c^5 - c^2 + 3) \geq (a + b + c)^3$$

Résolu par Solal PIVRON DJEDDI et An Pha DANG

Exercice 140 ⋆⋆⋆⋆

Timothée a attaché son léopard noté L à un poteau en forme d'ellipse. La laisse du léopard est une boucle de longueur fixée qui fait le tour du poteau. Montrer que la limite de la zone que peut parcourir le léopard est aussi une ellipse.



Exercice 141 ⋆⋆

Soit $(q_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'entiers vérifiant $m - n \mid q_m - q_n$ pour tous entiers $m, n \geq 0$. On suppose également qu'il existe un polynôme P tel que pour tout $n \in \mathbb{N}$ on ait $|q_n| \leq P(n)$. Montrer qu'il existe un polynôme Q tel que $q_n = Q(n)$ pour tout entier $n \geq 0$.

Exercice 142 $\star\star$

Alice et Bob jouent coopérativement à un jeu. Sur un collier se trouvent $6n$ perles. $3n$ perles sont blanches et $3n$ perles sont noires, de sorte que 3 perles consécutives ne sont jamais toutes de la même couleur. Tour à tour Alice et Bob enlèvent 3 perles consécutives du collier. Alice peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *noir-blanc-noir* et Bob peut enlever 3 perles consécutives si et seulement si elles se trouvent dans l'ordre *blanc-noir-blanc*. Montrer que si Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Alice commence, alors Alice et Bob peuvent enlever toutes les perles si Bob commence.

Exercice 143 $\star$

11 piles de 10 cailloux sont disposées. Aurélien et Rémi s'affrontent dans le jeu suivant : chacun leur tour en commençant par Aurélien, il vont prendre 1, 2 ou 3 cailloux, Aurélien devant tous les prendre dans la même pile et Rémi ne pouvant en prendre au plus un par pile. Celui qui ne peut plus jouer perd. Qui gagne ?

IX. Citations mémorables

— *Georges* : « Est-ce qu'on est obligé de parler aux gens ? »

— *Félix* : « Je crois que Fermat avait un vrai travail à côté (autre que chercheur) »

— *Georges* : « Moi je suis déjà allé chez le médecin pour voir si j'avais une calivitie »

— *Apollinaire* : « Akram on va voir si t'es fort en maths, ça fait quoi 40 + 50 ? »
Akram : « Nonante »

— *Anatole, sur la copine de Justin* : « Mais elle l'a déjà vu en vrai ? »

— *Maryam* : « GOBBIT ! ! »

— *Martin, lisant une copie d'élève* : « Ça se lit dans quel sens ? »

— *Aurélien* : « Le droit à la débilité est une liberté fondamentale »

— *Aline* : « Antoine ça a l'air d'être quelqu'un qui mange beaucoup »

— *Iris* : « Pourquoi ça s'appelle un château de cartes, un château c'est censé être solide ! »

— *Aurélien, à Auguste* : « Non mais ça va pas d'écrire des gros mots dans ta copie ? »
Théo : « Au moins il l'a fait sans fautes d'orthographe »

— *Anonyme* : « C'est bien Valbonne, on peut parler avec des gens, on peut pécho »

— *Théo* : « Dans une poubelle il y a toujours quelque chose à ramasser »

— *Lilas, à une cuisinière* : « Je vais prendre le steak chelou »

— *Maryam* : « GOBBIT ! ! »

— *Lancelot pendant le TD petites idées simples* : « En dynamique j'ai 33 cas à vérifier.. »

— *Savinien* : « De toute façon je suis pas ici pour faire des maths »

— *Vincent* : « En théorie il y a pas de différence entre la théorie et la pratique, mais en pratique si. »

— *Rémi* : « Le niveau supérieur du charisme c'est d'arriver à envoyer au lit des élèves avec un crocodile gonflable d'un mètre 50 sous le bras »

— *Raphael* : « Imaginez-vous au XIX^{e}, sans électricité, sans avion, sans internet »
Pierre-Marie : « À l'époque de Vincent Jugé quoi »

— *Gaëtan* : « Mais si Rémi tu m'intéresses »
Rémi : « C'est ta grand-mère qui m'intéresse »

— *Antoine* : « Mais on a vraiment pas beaucoup de citations »
Martin : « En même temps on n'écoute pas quand je parle »

— *Maryam* : « GOBBIT ! ! »

— *Camille* : « En vrai Aurélien si tu deviens mon beau-frère... »

— *Anonyme* : « Bah oui faut que je me recoiffe, le but c'est de pécho... »

— *Rémi* : « Petit Martin, il faut aller dormir »
Martin, en train de travailler sur son ordi : « Oui c'est ce que je suis en train de faire »

— *Vincent* : « Le saviez-vous ? Du temps d'Adam et Ève, être dur de la feuille avait un sens complètement différent ! »
Georges : « Je comprends jamais rien aux blagues... »

— *Nathan* : « Ils sont où Rahif et Vianney ? »
Vianney : « Je suis là, c'est moi Rahif »

— *Maryam* : « GOBBIT ! ! »

— *Georges* : « Moi en sport quand on m'a demandé de danser j'ai fait la danse de Rabbi Jacob »

— *Louise* : « C'est vrai que théoriquement il est un peu isocèle ce triangle en fait. »

— *Rémi* : « Ça c'est de la rédaction, c'est pas important »

— *Pierre-Marie* : « C'est pas parce qu'on est petit qu'on est pas chiant »

— *Pierre-Marie* : « J'espère que vous aimez la magie, Harry Potter à côté ce sera de la gnognotte ! »

— *Pierre-Marie* : « J'ai jamais dit 1991 autant de fois dans ma vie, et c'est même pas une année intéressante ! »

— *Maryam* : « GOBBIT ! ! »

— *Rémi* : « Tais-toi et ponds des cubes »

— *Rémi* : « Ça peut être utile dans n'importe quelle situation de la vie courante, enfin peut-être pas à la boulangerie, mais aux IMO oui. »

— *Théo* : « On développe tout comme un bourrin, et inch'allah ça passe »

— *Anonyme* : « T'as pas besoin d'aller aux toilettes, on va à la piscine. »
Autre anonyme (un peu plus tard) : « T'as pas besoin d'aller boire, on va à la piscine. »

— *Maryam* : « GOBBIT ! ! »