PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE

À RENVOYER AU PLUS TARD LE 5 DÉCEMBRE 2023

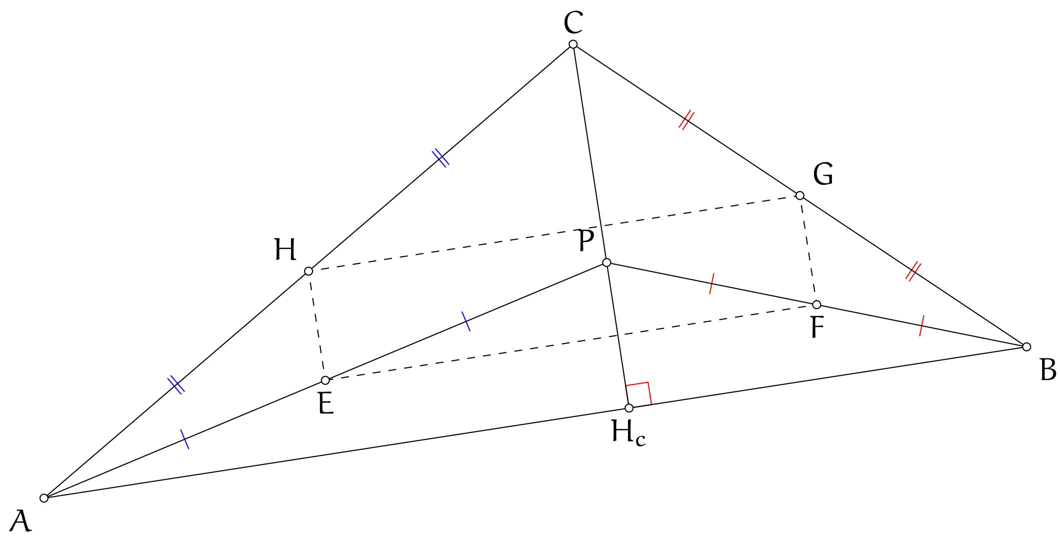
Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient ABC un triangle et H_C le pied de la hauteur issue de C. Soit P un point sur le segment $[CH_C]$ (autre que C), et soient E, F, G, H les milieux respectifs de $[AP]$, $[BP]$, $[BC]$, $[AC]$. Montrer que $EFGH$ est un rectangle.

Solution de l'exercice 1



Pour démontrer que $EFGH$ est un rectangle, nous allons montrer que c'est un parallélogramme qui possède un angle droit.

Considérons le triangle ACP. Les points E et H sont les milieux respectifs des côtés $[AP]$ et $[AC]$. Par le théorème de la droite des milieux, $(HE) \parallel (PC)$.
Considérons le triangle BCP. Les points F et G sont les milieux respectifs des côtés $[BP]$ et $[BC]$. Par le théorème de la droite des milieux, $(FG) \parallel (PC)$.
On a montré que les droites (FG) et (HE) sont toutes les deux parallèles à la droite (PC). Il s'ensuit que $(FG) \parallel (HE)$.

Considérons le triangle ABP. Les points E et F sont les milieux respectifs des côtés $[AP]$ et $[BP]$. Par le théorème de la droite des milieux, $(EF) \parallel (AB)$.
Considérons le triangle ABC. Les points H et G sont les milieux respectifs des côtés $[AC]$ et $[BC]$. Par le théorème de la droite des milieux, $(HG) \parallel (AB)$.
On a montré que les droites (EF) et (HG) sont toutes les deux parallèles à la droite (AB). Il s'ensuit que $(HG) \parallel (EF)$.

Par conséquent, $EFGH$ est un quadrilatère dont les côtés opposés sont parallèles deux à deux. Il s'ensuit que c'est un parallélogramme.

Par ailleurs, comme $(CH_c) \perp (AB)$ et $(EF) \parallel (AB)$, on a $(EF) \perp (CH_c)$.
De plus, $(CH_c) \parallel (EH)$. Il s'ensuit que $(EH) \perp (EF)$.

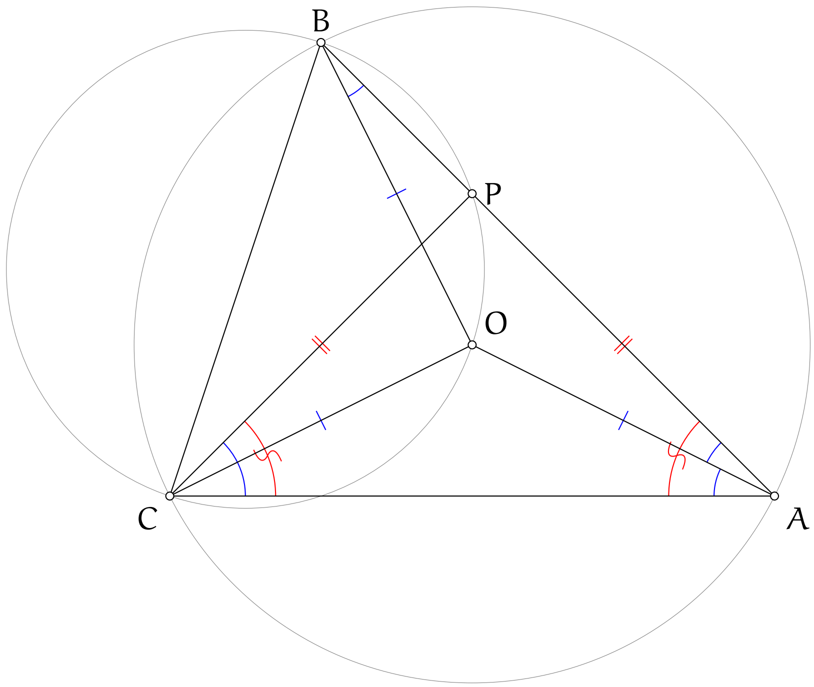
Le parallélogramme $EFGH$ possède donc un angle droit, ce qui démontrer que $EFGH$ est un rectangle.

Remarque. Une autre façon de prouver que $EFGH$ est un parallélogramme est d'utiliser que d'après le théorème de la droite des milieux, $(EH) \mathbin{/\mkern-6mu/} (CP) \mathbin{/\mkern-6mu/} (FG)$ et $EH = \frac{1}{2}CP = FG$. Donc $EFGH$ possède deux côtés opposés parallèles et de même longueur, c'est donc un parallélogramme.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice a été très bien réussi dans l'ensemble. Cependant pas mal d'élèves pourraient aller plus vite en utilisant les droites parallèles et perpendiculaires de la figure sans faire de chasse aux angles. Deplus, plusieurs élèves ont perdu des points car ils n'ont pas justifié pourquoi ils pouvaient appliquer le théorème de Thalès ou pourquoi le quadrilatère $EFGH$ avait un angle droit...

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus) avec $BA \neq BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite (AB) intersecte le cercle circonscrit à BOC une deuxième fois en $P \neq B$. Montrer que $PA = PC$.

Solution de l'exercice 2



Traçons la figure dans le cas où $BC < BA$, le cas $BC > BA$ étant totalement analogue. Il s'agit de montrer que $PA = PC$, c'est-à-dire que $\widehat{ACP} = \widehat{PAC} (= \widehat{BAC})$. Or on a :

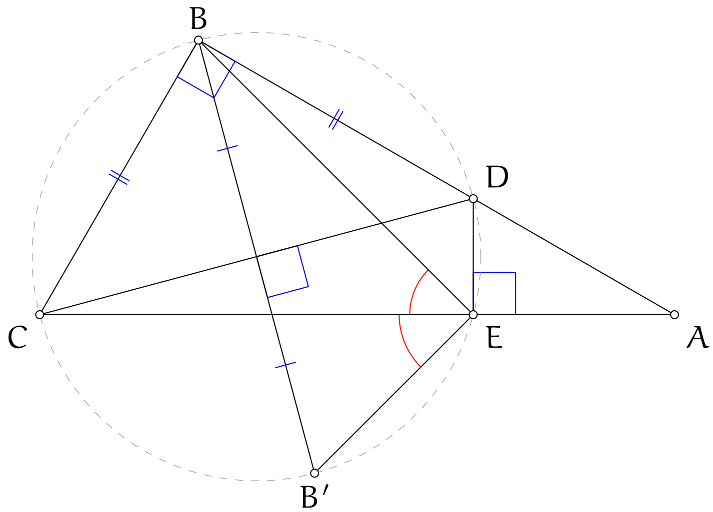
$$\begin{aligned} \widehat{ACP} &= \widehat{ACO} + \widehat{OCP} \\ &= \widehat{ACO} + \widehat{OBP} \text{ par angle inscrit} \\ &= \widehat{ACO} + \widehat{OBA}. \end{aligned}$$

Or, AOC est isocèle en O donc $\widehat{ACO} = \widehat{OAC} = \dfrac{180° - \widehat{COA}}{2} = 90° - \widehat{CBA}$ par angle au centre. De même $\widehat{OBA} = 90° - \widehat{ACB}$. Finalement, $\widehat{ACP} = 180° - \widehat{ACB} - \widehat{CBA} = \widehat{BAC} = \widehat{PAC}$, d'où $PA = PC$, comme voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi et beaucoup abordé, certaines solutions sont particulièrement efficaces dans leurs chasses aux angles.

Exercice 3. Soit ABC un triangle rectangle en B avec $BC < BA$. Soit D le point du segment $[AB]$ tel que $BD = BC$. La perpendiculaire à (AC) passant par D intersecte (AC) en E. Soit B' le symétrique de B par rapport à (CD). Montrer que (EC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BEB'}$.

Solution de l'exercice 3



On remarque que le cercle de diamètre $[CD]$ apparaît assez naturellement. En effet, on a des angles droits $\widehat{DB'C} = \widehat{CBD} = \widehat{DEC} = 90°$, les points B, B' et E sont sur le cercle de diamètre $[DC]$, autrement dit C, B, D, E, B' sont cocycliques.

Alors on a :

$$\begin{aligned}\widehat{BEC} &= \widehat{BDC} \text{ par angle inscrit}\\ &= 45° \text{ car } BC = BD \text{ et } \widehat{CBD} = 90°.\end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned}\widehat{CEB'} &= \widehat{CBB'} \text{ par angle inscrit}\\ &= 45° \text{ car } BC = BD \text{ et } \widehat{CBD} = 90°.\end{aligned}$$

On a donc bien $\widehat{BEC} = \widehat{CEB'}$, donc (EC) est la bissectrice de $\widehat{BEB'}$.

Solution alternative n°1

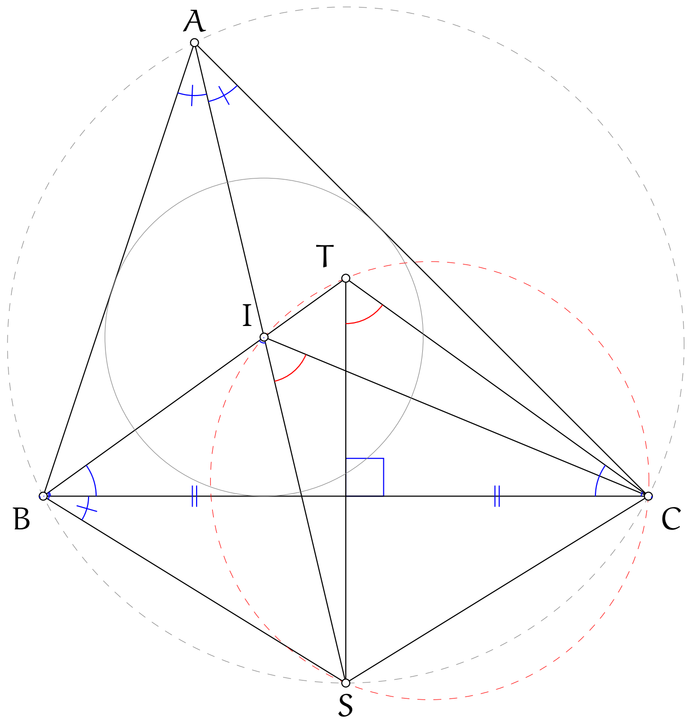
On pouvait aussi montrer directement $\widehat{BEC} = \widehat{CEB'}$ sans utiliser $BC = BD$. En effet :

$$\begin{aligned}\widehat{BEC} &= \widehat{BDC} \text{ par angle inscrit}\\ &= \widehat{CDB'} \text{ par symétrie}\\ &= \widehat{CEB} \text{ par angle inscrit.}\end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice est globalement très bien réussi. L'erreur la plus fréquente portait sur les conditions pour qu'un quadrilatère soit un carré.

Exercice 4. Soient ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La médiatrice de $[BC]$ coupe (AI) en S et (BI) et T. Montrer que C, I, S et T sont cocycliques.

Solution de l'exercice 4



Pour montrer que C, I, S et T sont cocycliques, nous allons montrer que $\widehat{SIC} = \widehat{STC}$.

On rappelle que les bissectrices intérieures d'un triangle ABC sont concourantes et que leur point d'intersection I est le centre du cercle inscrit dans le triangle. (AI) est donc la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$.

Par conséquent, S est défini comme le point d'intersection de la médiatrice de $[BC]$ et de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$. Le théorème du Pôle Sud assure que S appartient au cercle circonscrit au triangle ABC et que S est le centre du cercle antarctique du sommet A, ce qui assure que

$$SB = SI.$$

On voit donc que triangle SBI est isocèle en S ce qui assure que $\widehat{SBI} = \widehat{BIS}$.

Par ailleurs les points A, B, S et C sont cocycliques. On a donc

$$\widehat{SBC} = \widehat{SAC} = \frac{\widehat{BAC}}{2}.$$

Calculons désormais la valeur de l'angle $\widehat{SIC}$. On a

$$\begin{aligned}
\widehat{SIC} &= \widehat{BIC} - \widehat{BIS} \\
&= \widehat{BIC} - \widehat{SBC} - \widehat{CBI} \\
&= \widehat{BIC} - \frac{\widehat{BAC}}{2} - \frac{\widehat{CBA}}{2}.
\end{aligned}$$

Par ailleurs,

$$\begin{aligned}
\widehat{BIC} &= 180^\circ - \widehat{CBI} - \widehat{ICB} \\
&= 180^\circ - \frac{\widehat{CBA}}{2} - \frac{\widehat{ACB}}{2} \\
&= 180^\circ - \frac{\widehat{CBA} + \widehat{ACB}}{2} \\
&= 180^\circ - \frac{180^\circ - \widehat{BAC}}{2} \\
&= 90^\circ + \frac{\widehat{BAC}}{2}.
\end{aligned}$$

Il s'ensuit que $\widehat{SIC} = 90^\circ - \frac{\widehat{CBA}}{2}$.

Par ailleurs

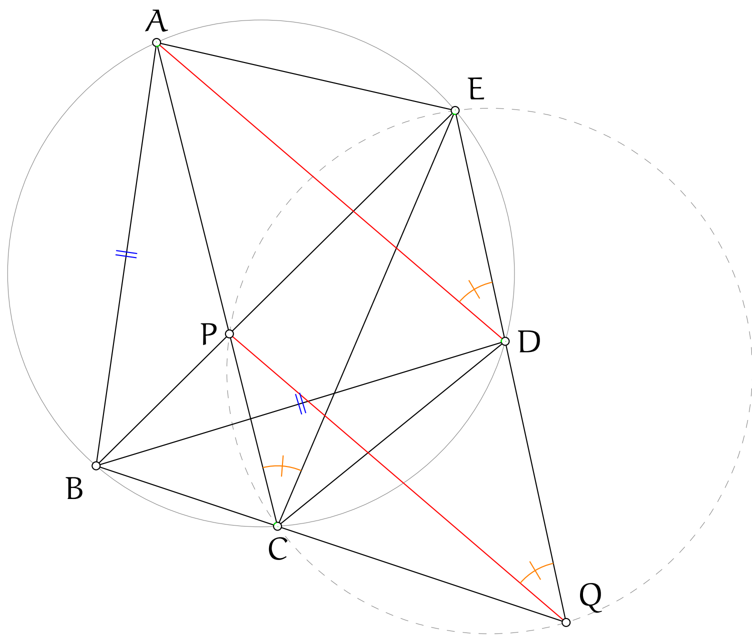
$$\begin{aligned}
\widehat{STC} &= 90^\circ - \widehat{TCB} \\
&= 90 - \widehat{CBI} \quad \text{Le triangle } BCT \text{ est isocèle en } T \\
&= 90^\circ - \frac{\widehat{CBA}}{2}.
\end{aligned}$$

On a donc montré que $\widehat{SIC} = \widehat{STC}$ ce qui assure que les points C, I, S et T sont cocycliques par la réciproque du théorème de l'angle inscrit.

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L´exercice est très bien réussi. Beaucoup d´élèves ont procédé à une lourde chasse aux angles alors que le théorème du Pôle Sud simplifiait grandement la résolution du problème.

Exercice 5. Soit $ABCDE$ un pentagone cyclique convexe tel que $AB = BD$. Soit P le point d'intersection des droites (EB) et (AC). Soit Q le point d'intersection des droites (BC) et (DE). Montrer que (PQ) et (AD) sont parallèles.

Solution de l'exercice 5



Sur la figure, il semble que $EPCQ$ est un quadrilatère cyclique. On le montre :

$$\begin{aligned}
\widehat{QCP} &= 180° - \widehat{PCB} \\
&= 180° - \widehat{ACB} \\
&= 180° - \widehat{ADB} \text{ par angle inscrit} \\
&= 180° - \widehat{BAD} \text{ car } AB = BD \\
&= 180° - \widehat{BED} \\
&= 180° - \widehat{PEQ}.
\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que $\widehat{QCP} + \widehat{PEQ} = 180°$. Dès lors, par réciproque de l'angle inscrit, $EPCQ$ est cyclique, ce qu'on voulait démontrer.
Maintenant, pour montrer que (AD) et (PQ) sont parallèles, on va essayer de trouver des angles correspondants. Or on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{EQP} &= \widehat{ECP} \text{ par angle inscrit} \\
&= \widehat{ECA} \\
&= \widehat{EDA} \text{ par angle inscrit.}
\end{aligned}$$

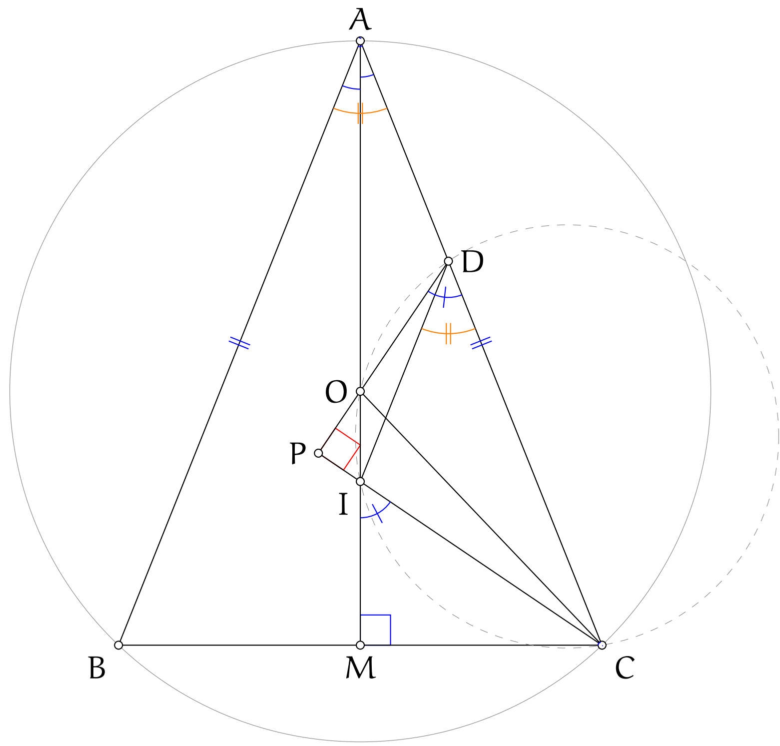
Comme $\widehat{EQP} = \widehat{EDA}$ et Q, D, E sont alignés (dans cet ordre), par angle correspondant les droites (PQ) et (AD) sont bien parallèles.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été bien traité par les personnes qui l'ont abordé. Quasiment tous les élèves ont pensé à traduire l'égalité de longueur en égalité d'angle, ce qui était le bon point de départ pour pouvoir ensuite faire une chasse aux angles. Ensuite, il fallait observer que le quadrilatère

$EPCQ$ est cyclique pour continuer, ce qui en a bloqué certains. Certains qui n'ont pas vu cela ont réussi à s'en sortir avec une chasse aux angles plus lourde, d'autres ont réussi à appliquer le théorème de Thalès en introduisant un nouveau point.

Exercice 6. Soient ABC un triangle isocèle en A, O le centre de son cercle circonscrit et I le centre de son cercle inscrit. La parallèle à (AB) passant par I coupe (AC) en D. Montrer que (CI) et (DO) sont perpendiculaires.

<u>*Solution de l'exercice 6*</u>



Premièrement, comme $AB = AC$, A, O, I sont alignés et la droite (AI) coupe $[BC]$ en son milieu M. On pose P l'intersection des droites (DO) et (CI).

Par chasse aux angles, on montre que I, O, D, C sont cocycliques, en montrant que $\widehat{IOC} = \widehat{IDC}$. En effet :

$$\begin{aligned}\widehat{IOC} &= \widehat{MOC}\\ &= \frac{1}{2}\widehat{BOC} \text{ car } OB = OC\\ &= \widehat{BAC} \text{ par angle au centre}\\ &= \widehat{IDC} \text{ car } (BA) \mathbin{/\!/} (ID).\end{aligned}$$

Donc par réciproque du théorème de l'angle inscrit, I, O, D, C sont cocycliques.

Montrons à présent que $\widehat{CPD} = 90°$. Pour cela, on va montrer que $\widehat{PDC} + \widehat{DCP} = 90°$ (puisque $\widehat{CPD} = 180° - \widehat{PDC} - \widehat{DCP}$). On a :

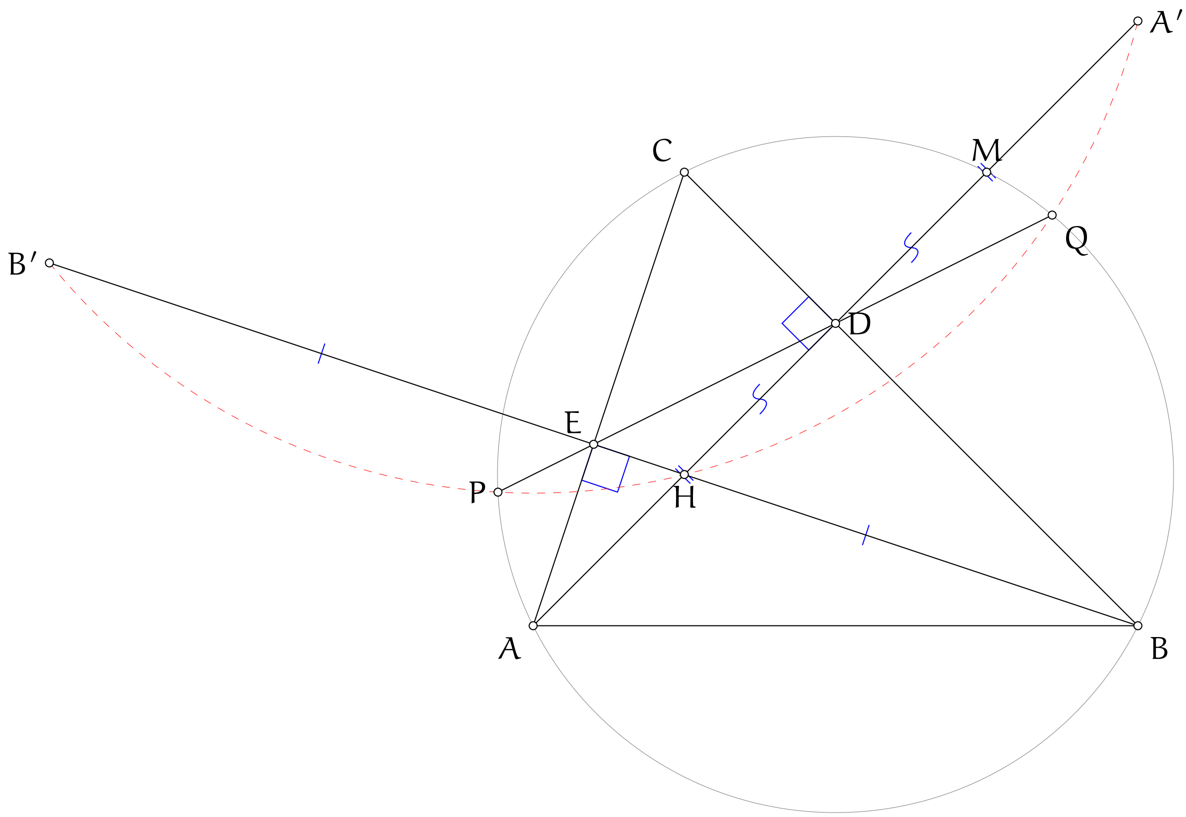
$$\begin{aligned}\widehat{PDC} + \widehat{DCP} &= \widehat{ODC} + \widehat{DCI}\\ &= (180° - \widehat{CIO}) + \widehat{ICB} \text{ par cocyclicité et bissectrice}\\ &= \widehat{CIM} + \widehat{ICM}\\ &= 90° \text{ car } (AI) \perp (BC).\end{aligned}$$

Donc $\widehat{CPD} = 90°$, ce qui prouve bien que les droites (CI) et (DO) sont perpendiculaires.

Commentaire des correcteurs : Exercice bien réussi dans l'ensemble. La plupart des copies rendues contenait une solution correcte.

Exercice 7. Soient ABC un triangle, D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. La droite (DE) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q. Soient A' et B' les symétriques de A et B par rapport à (BC) et (AC) respectivement. Montrer que A', B', P, Q sont cocycliques.

<u>*Solution de l'exercice 7*</u>



Sur la figure, il semble que H l'orthocentre se situe sur le cercle en question. On va donc adopter la stratégie suivante : on va montrer que A' et B' sont sur le cercle circonscrit de PQH. De cette manière on aura bien A', B', P, Q cocycliques.

Soit M le symétrique de H par rapport à (BC) : alors on sait que M est sur le cercle circonscrit à ABC. Alors on a :

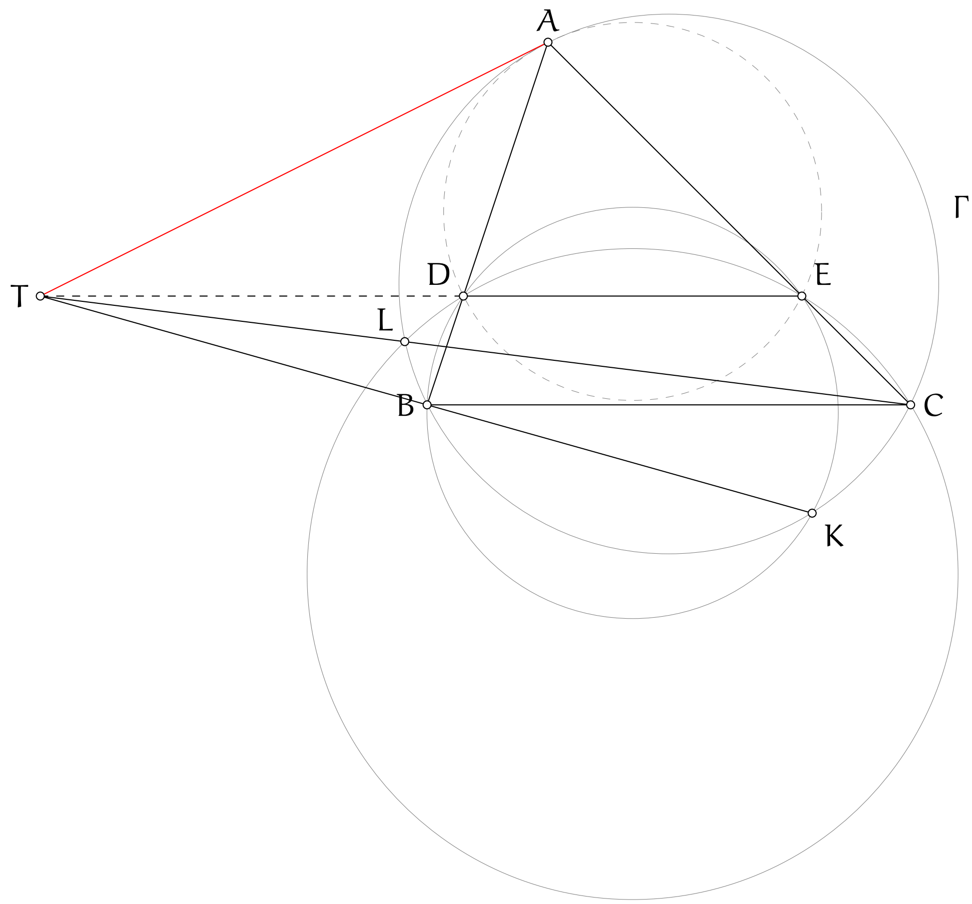
$$\begin{aligned} DA' \times DH &= DA \times DM \text{ par symétrie} \\ &= DP \times DQ \text{ par puissance de } D \text{ dans le cercle } (ABC). \end{aligned}$$

Alors par réciproque de la puissance d'un point, P, Q, H, A' sont cocycliques. De façon totalement analogue, P, Q, H, B' sont également cocycliques. Ainsi A', B', P, Q sont cocycliques, sur le cercle (PQH).

<u>**Commentaire des correcteurs :**</u> L'exercice a été bien résolu. Cependant pas mal d'élèves pourraient aller plus vite en utilisant la puissance d'un point, plutôt que d'utiliser les triangles semblables associés à 4 points cocycliques et reprouver la puissance d'un point.

Exercice 8. Soient ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, D un point sur (AB) et E un point sur (AC) tel que (DE) et (BC) sont parallèles. Le cercle circonscrit à ABC rencontre le cercle circonscrit à BDE une seconde fois en K et le cercle circonscrit à CDE une seconde fois en L. Soit T le point d'intersection de (BK) et (CL). Montrer que (TA) est tangente au cercle Γ.

<u>*Solution de l'exercice 8*</u>



On reconnaît ici une situation classique :
- $KBDE$ cyclique,
- $KBLC$ cyclique,
- $CLDE$ cyclique.

On sait que dans cette situation, les droites (KB), (CL), (ED) sont concourantes (il s'agit ici du fait que les axes radicaux de 3 cercles sont concourants). Or les droites (BK) et (CL) se coupent en T. Il suit que T, D, E sont alignés.

On sait alors, en exprimant la puissance de T par rapport aux trois cercles, que :

$$TD \times TE = TL \times TC = TB \times TK.$$

Le fait de connaître le produit $TD \times TE$ incite à considérer un cercle passant par D, E, et comme on souhaite une propriété sur (TA), il est naturel d'introduire le cercle circonscrit à ADE.

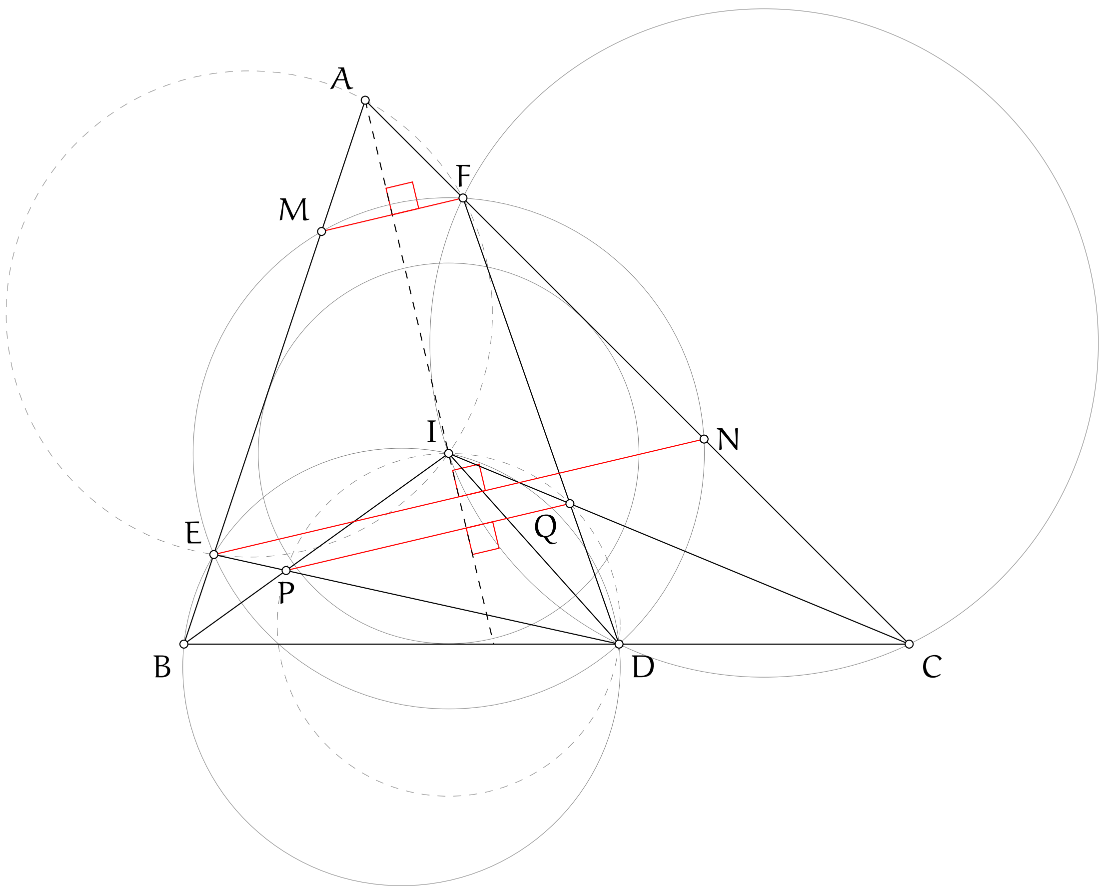
Comme $TD \times TE = TL \times TC$, T a la même puissance par rapport aux cercles circonscrits à ABC et ADE. Il est donc sur leur axe radical. Mais comme (DE) est parallèles à (BC), les deux cercles sont tangents en A d'axe radical la tangente commune à ces deux cercles en A. On peut le voir simplement par angle tangentiel (en utilisant que $\widehat{AED} = \widehat{ACB}$), autrement on peut le voir en considérant l'homothétie de centre A envoyant D sur B : elle envoie E sur C donc elle envoie le cercle (ADE) sur (ABC), et donc ces cercles sont bien tangents.

On en déduit que T est sur la tangente à Γ passant par A, autrement dit que (TA) est tangente à Γ, comme voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a pas été beaucoup abordé, mais la totalité des élèves qui ont abordé l'exercice ont eu des très bonnes idées, y compris ceux qui n'ont pas abouti à une solution. Notamment, tous les élèves ont remarqué que les points T, D, E sont alignés, ce qui était la première idée à avoir pour avancer dans l'exercice. Il fallait ensuite réussir à exploiter le parallélisme de (DE) et (BC), et là les élèves qui ont abouti utilisaient essentiellement deux approches différentes : soit justifier que les cercles circonscrits à ADE et ABC sont tangents en A pour se ramener à montrer la tangence au cercle (ADE), soit par chasse aux angles en trouvant d'autres quadrilatères cycliques sur la figure.

Exercice 9. Soient ABC un triangle non-isocèle et I le centre de son cercle inscrit. Soit D un point sur $[BC]$ (autre que B et C). Le cercle circonscrit à DIB coupe (AB) une deuxième fois en $E \neq B$, et le cercle circonscrit à DIC coupe (AC) une deuxième fois en $F \neq C$. Le cercle circonscrit à DEF rencontre (AB) et (AC) une deuxième fois en M et N respectivement. Les droites (IB) et (DE) s'intersectent en P et les droites (IC) et (DF) s'intersectent en Q. Montrer que les droites (EN), (FM) et (PQ) sont parallèles.

Solution de l'exercice 9



Sur la figure, il semble que I est le centre du cercle (DEF), et que les droites $(MF), (EN), (PQ)$ sont toutes perpendiculaires à (AI) : c'est donc la stratégie qu'on va utiliser pour résoudre l'exercice.

• **Lemme 1 :** Le point I est le centre du cercle circonscrit à DEF.

Preuve : Comme I est sur la bissectrice de $\widehat{DBE}$ et sur le cercle circonscrit de DBE, c'est le pôle Sud (par rapport à B) dans ce triangle. Donc $ID = IE$. De même dans FCD, on obtient $ID = IF$. Donc $ID = IE = IF$: I est bien le centre du cercle circonscrit de DEF.

• **Lemme 2 :** Le quadrilatère $PQID$ est cyclique.

Preuve : En effet, on a :

$$\begin{aligned}
\widehat{QDP} &= \widehat{QDI} + \widehat{IDP} \\
&= \widehat{FDI} + \widehat{IDE} \\
&= \widehat{FCI} + \widehat{IBE} \text{ par angle inscrit} \\
&= \widehat{ICB} + \widehat{CBI} \text{ par bissectrices} \\
&= 180^\circ - \widehat{BIC} \\
&= 180^\circ - \widehat{PIQ}.
\end{aligned}$$

Donc $\widehat{PIQ} + \widehat{QPD} = 180°$, d'où le fait que $PIDQ$ est cyclique.

Lemme 3 : Les droites (PQ) et (AI) sont perpendiculaires.
Preuve : En effet $\widehat{QPI} = \widehat{QDI} = \widehat{FDI} = \widehat{FCI} = \frac{1}{2}\widehat{ACB}$ par angle inscrit. De plus :

$$\begin{aligned}\widehat{AIB} &= 180° - \widehat{IBA} - \widehat{BAI} \\ &= 180° - \frac{\widehat{CBA} + \widehat{BAC}}{2} \\ &= 180° - \frac{180° - \widehat{ACB}}{2} \\ &= 90° + \frac{1}{2}\widehat{ABC}.\end{aligned}$$

On en déduit que (AI) et (PQ) sont bien perpendiculaires.

• **Lemme 4 :** La quadrilatère $AEIF$ est cyclique.
Preuve : En effet $BDIE$ et $CFID$ sont cycliques, donc d'après le théorème de Miquel, $AEIF$ l'est aussi.

• **Lemme 5 :** Les droites (MF) et (EN) sont perpendiculaires à (AI).
Preuve : D'abord $\widehat{IEM} = \widehat{IEA} = 180° - \widehat{AFI} = \widehat{IFN}$ par angle inscrit. De plus $IE = IM = IF = IN$ (par le lemme 1), donc IEM et IFN sont deux triangles isocèles en I avec même angle de base : d'où IEM semblable à IFN. Mais comme $IE = IF$: ils sont même isométriques. On en déduit que $EM = FN$. Comme $EMFN$ est cyclique, c'est un trapèze isocèle. On en déduit que (MF) et (EN) sont parallèles, toutes les deux perpendiculaires à (AI) (car I est le centre du cercle circonscrit et A l'intersection des côtés, donc (AI) est axe de symétrie du trapèze isocèle).

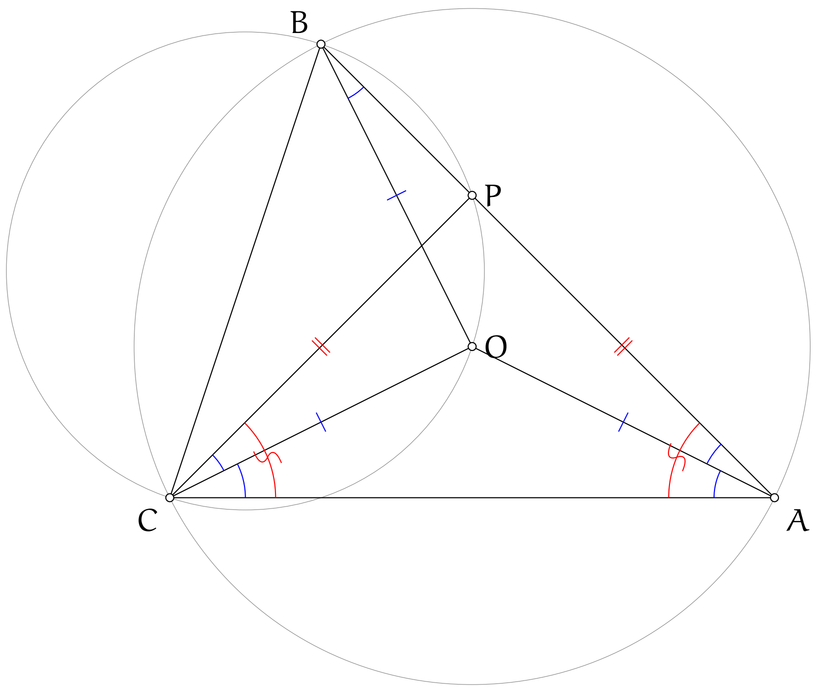
• Finalement, (EN), (FM), (PQ) sont toutes les trois perpendiculaires à (AI), elle sont donc parallèles.

Commentaire des correcteurs : L'exercice n'a pas été beaucoup traité, mais la quasi totalité des élèves qui l'ont traité l'ont résolu. On notera qu'il y avait plusieurs configurations possibles dans la figure(ordre des points E, M et F, N sur les droites (AB) et (AC).), bien qu'il ne soit pas demandé de traiter toutes les configurations. Attention à ne pas s'emmêler les pinceaux des les utilisations des théorèmes des angles inscrits, notamment dans le cas des angles supplémentaires.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus) avec $BA \neq BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite (AB) intersecte le cercle circonscrit à BOC une deuxième fois en $P \neq B$. Montrer que $PA = PC$.

Solution de l'exercice 10



Traçons la figure dans le cas où $BC < BA$, le cas $BC > BA$ étant totalement analogue. Il s'agit de montrer que $PA = PC$, c'est-à-dire que $\widehat{ACP} = \widehat{PAC} (= \widehat{BAC})$. Or on a :

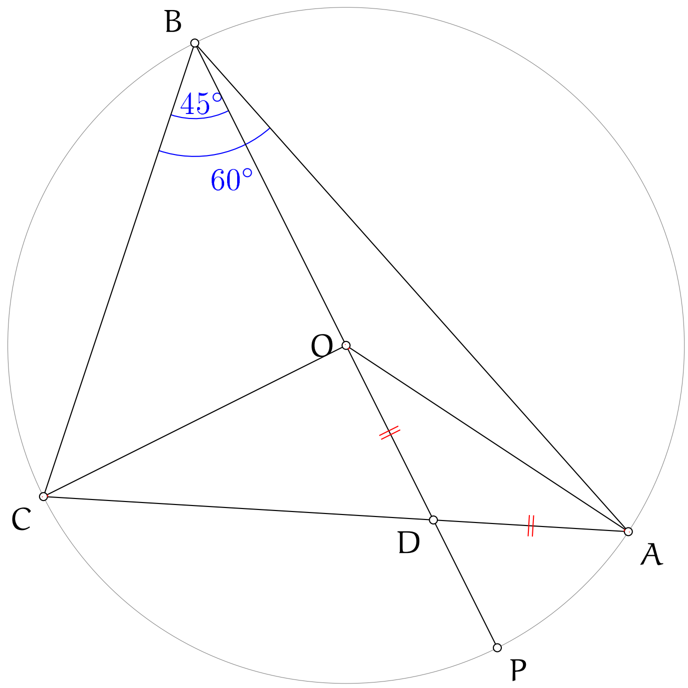
$$\begin{aligned}\widehat{ACP} &= \widehat{ACO} + \widehat{OCP}\\ &= \widehat{ACO} + \widehat{OBP} \text{ par angle inscrit}\\ &= \widehat{ACO} + \widehat{OBA}.\end{aligned}$$

Or, AOC est isocèle en O donc $\widehat{ACO} = \widehat{OAC} = \dfrac{180° - \widehat{COA}}{2} = 90° - \widehat{CBA}$ par angle au centre. De même $\widehat{OBA} = 90° - \widehat{ACB}$. Finalement, $\widehat{ACP} = 180° - \widehat{ACB} - \widehat{CBA} = \widehat{BAC} = \widehat{PAC}$, d'où $PA = PC$, comme voulu.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a éte globalement tres bien reussi !

Exercice 11. Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit. On suppose que $\widehat{CBA} = 60°$ et $\widehat{CBO} = 45°$. Soit D le point d'intersection des droites (AC) et (BO). Montrer que $AD = DO$.

Solution de l'exercice 11



Pour montrer que $AD = DO$ (c'est-à-dire que ADO est isocèle en D), nous allons montrer que $\widehat{DOA} = \widehat{OAD}$. Introduisons P le point d'intersection (autre que B) de (BO) avec le cercle circonscrit de ABC.

D'une part, $\widehat{DOA} = \widehat{POA} = 2\widehat{PBA} = 2(60° - 45°) = 30°$ d'après le théorème de l'angle au centre.

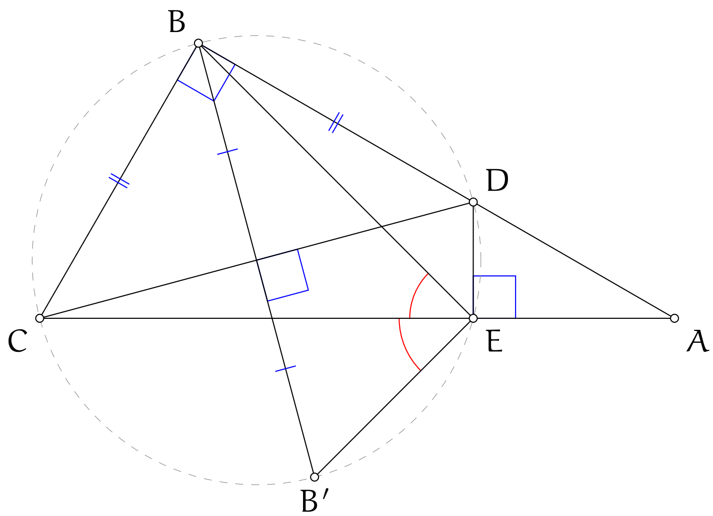
D'autre part, $OC = OA$ donc $\widehat{OAD} = \widehat{OAC} = \widehat{ACO} = \dfrac{180° - \widehat{COA}}{2}$. Or d'après le théorème de l'angle au centre, $\widehat{COA} = 2\widehat{CBA} = 120°$. D'où $\widehat{OAD} = 30°$.

Finalement, $\widehat{DOA} = 30° = \widehat{OAD}$, donc on a bien montré que $AD = DO$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice à été vraiment très bien réussi par tous ceux qui l'ont abordé. Cependant, pour des exercices dont la solution tient sur quelques lignes, il vaut mieux bien justifier sa chasse aux angle, ce qui peut éviter des erreurs de calculs/ de recopiage. De plus, pas mal de copies auraient pu être raccourcies, les élèves faisant des détours conséquents dans leurs calculs.

Exercice 12. Soit ABC un triangle rectangle en B avec $BC < BA$. Soit D le point du segment $[AB]$ tel que $BD = BC$. La perpendiculaire à (AC) passant par D intersecte (AC) en E. Soit B' le symétrique de B par rapport à (CD). Montrer que (EC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BEB'}$.

Solution de l'exercice 12



On remarque que le cercle de diamètre $[CD]$ apparaît assez naturellement. En effet, on a des angles droits $\widehat{DB'C} = \widehat{CBD} = \widehat{DEC} = 90°$, les points B, B' et E sont sur le cercle de diamètre $[DC]$, autrement dit C, B, D, E, B' sont cocycliques.

Alors on a :

$$\begin{aligned} \widehat{BEC} &= \widehat{BDC} \text{ par angle inscrit} \\ &= 45° \text{ car } BC = BD \text{ et } \widehat{CBD} = 90°. \end{aligned}$$

De plus :

$$\begin{aligned} \widehat{CEB'} &= \widehat{CBB'} \text{ par angle inscrit} \\ &= 45° \text{ car } BC = BD \text{ et } \widehat{CBD} = 90°. \end{aligned}$$

On a donc bien $\widehat{BEC} = \widehat{CEB'}$, donc (EC) est la bissectrice de $\widehat{BEB'}$.

Solution alternative n°1

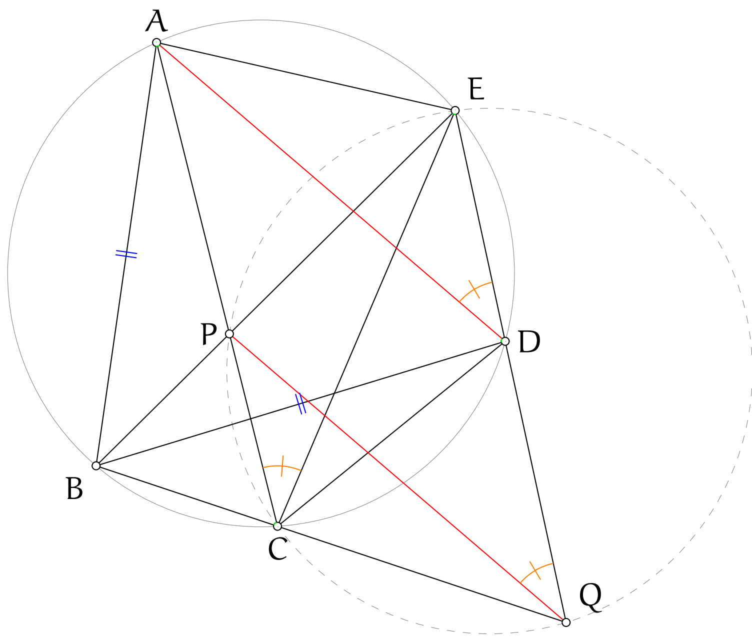
On pouvait aussi montrer directement $\widehat{BEC} = \widehat{CEB'}$ sans utiliser $BC = BD$. En effet :

$$\begin{aligned} \widehat{BEC} &= \widehat{BDC} \text{ par angle inscrit} \\ &= \widehat{CDB'} \text{ par symétrie} \\ &= \widehat{CEB} \text{ par angle inscrit.} \end{aligned}$$

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été très bien réussi, certaines chasses aux angles auraient pu être évitées ou raccourcies en utilisant la cocyclicité des points ou le théorème du Pôle Sud.

Exercice 13. Soit $ABCDE$ un pentagone cyclique convexe tel que $AB = BD$. Soit P le point d'intersection des droites (EB) et (AC). Soit Q le point d'intersection des droites (BC) et (DE). Montrer que (PQ) et (AD) sont parallèles.

Solution de l'exercice 13



Sur la figure, il semble que $EPCQ$ est un quadrilatère cyclique. On le montre :

$$\begin{aligned}\widehat{QCP} &= 180° - \widehat{PCB}\\ &= 180° - \widehat{ACB}\\ &= 180° - \widehat{ADB} \text{ par angle inscrit}\\ &= 180° - \widehat{BAD} \text{ car } AB = BD\\ &= 180° - \widehat{BED}\\ &= 180° - \widehat{PEQ}.\end{aligned}$$

Ainsi on a montré que $\widehat{QCP} + \widehat{PEQ} = 180°$. Dès lors, par réciproque de l'angle inscrit, $EPCQ$ est cyclique, ce qu'on voulait démontrer.
Maintenant, pour montrer que (AD) et (PQ) sont parallèles, on va essayer de trouver des angles correspondants. Or on a :

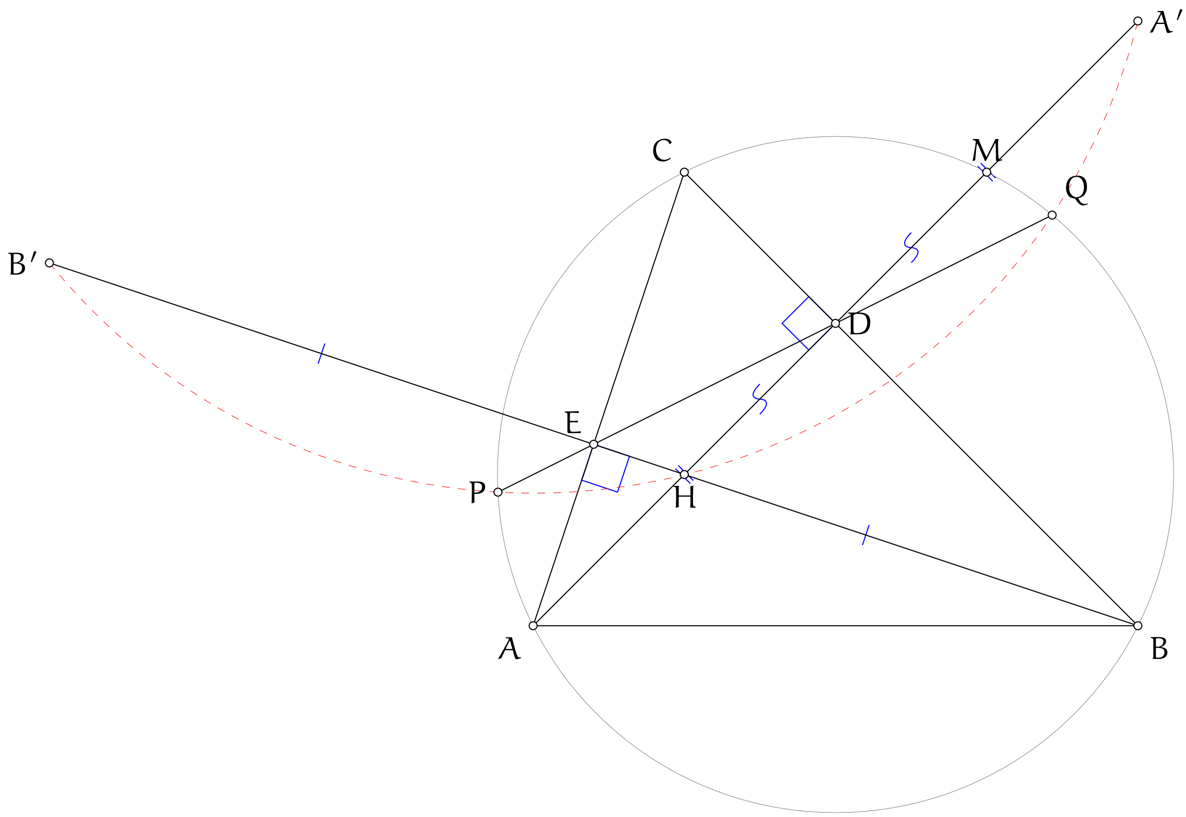
$$\begin{aligned}\widehat{EQP} &= \widehat{ECP} \text{ par angle inscrit}\\ &= \widehat{ECA}\\ &= \widehat{EDA} \text{ par angle inscrit.}\end{aligned}$$

Comme $\widehat{EQP} = \widehat{EDA}$ et Q, D, E sont alignés (dans cet ordre), par angle correspondant les droites (PQ) et (AD) sont bien parallèles.

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été dans l'ensemble très bien traité. La plupart des solutions qui ont abouti consistaient à prouver $EQCP$ cyclique et à conclure par chasse aux angles. D'autres ont trouvé des solutions avec des outils plus avancés, notamment certains ont utilisé des similitudes, d'autres ont vu qu'on pouvait appliquer le théorème de Pascal dans l'hexagone dégénéré $ADEBBC$, d'autres encore ont utilisé des inversions. Il est cependant à noter qu'un bon nombre d'élèves font beaucoup de détours peu utiles dans leurs calculs, faisant parfois en 2 pages ce qui se prouve en 2 lignes : si avoir une solution qui fonctionne est évidemment un très bonne chose, il est encore mieux d'avoir une solution qui fonctionne et qui est efficace. Il n'était par exemple pas nécessaire ici d'introduire des points intermédiaires, tous les points utiles étaient définis dans l'énoncé. On notera aussi que si la grande majorité des copies rendent une figure, certains ne le font pas : rendre une figure propre est indispensable pour illustrer son raisonnement dans un problème de géométrie.

Exercice 14. Soient ABC un triangle, D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. La droite (DE) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q. Soient A' et B' les symétriques de A et B par rapport à (BC) et (AC) respectivement. Montrer que A', B', P, Q sont cocycliques.

Solution de l'exercice 14



Sur la figure, il semble que H l'orthocentre se situe sur le cercle en question. On va donc adopter la stratégie suivante : on va montrer que A' et B' sont sur le cercle circonscrit de PQH. De cette manière on aura bien A', B', P, Q cocycliques.

Soit M le symétrique de H par rapport à (BC) : alors on sait que M est sur le cercle circonscrit à ABC. Alors on a :

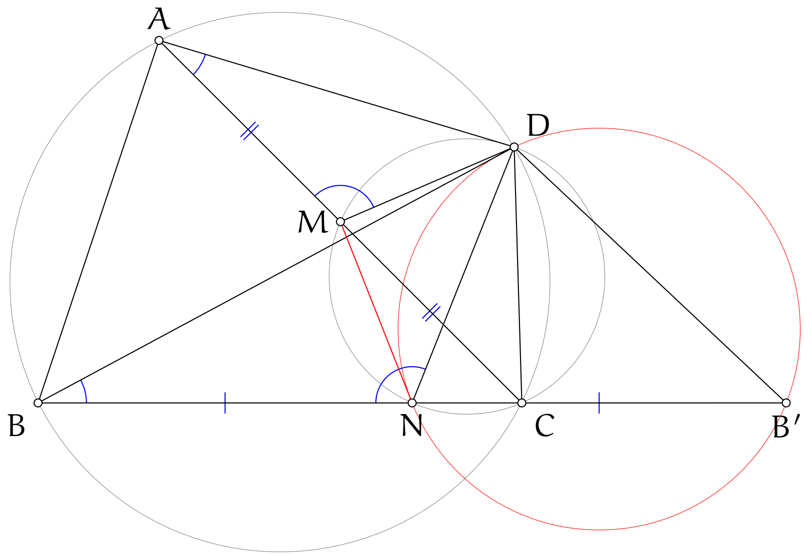
$$\begin{aligned} DA' \times DH &= DA \times DM \text{ par symétrie} \\ &= DP \times DQ \text{ par puissance de } D \text{ dans le cercle } (ABC). \end{aligned}$$

Alors par réciproque de la puissance d'un point, P, Q, H, A' sont cocycliques. De façon totalement analogue, P, Q, H, B' sont également cocycliques. Ainsi A', B', P, Q sont cocycliques, sur le cercle (PQH).

Commentaire des correcteurs : L'exercice a été globalement bien réussi par ceux qui l'ont essayé. Le fait que les symétriques de H sont sur le cercle circonscrit à ABC est un lemme souvent utile, qu'il est bon d'avoir en tête, et qu'il n'y a pas besoin de reprouver à chaque fois qu'on en a besoin (dire "il est connu que" est suffisant).

Exercice 15. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe cyclique, M le milieu de $[AC]$. Le cercle circonscrit à CDM rencontre (BC) une deuxième fois en N (autre que C). Soit B' le symétrique de B par rapport à N. Montrer que (MN) est tangente au cercle circonscrit de $B'DN$.

Solution de l'exercice 15



Sur la figure, on repère des triangles semblables. En effet, on a par angle inscrit :

$$\widehat{MAD} = \widehat{CAD} = \widehat{CBD} = \widehat{NBD}.$$

Toujours par angle inscrit, on a :

$$\widehat{DMA} = 180° - \widehat{CMD} = 180° - \widehat{CND} = \widehat{DNB}.$$

On en déduit que les triangles AMD et BND sont semblables. Mais alors ADC et BDB' sont semblables. En effet on a $\widehat{B'BD} = \widehat{CBD}$, et $\frac{BB'}{AC} = \frac{2BN}{2AM} = \frac{BN}{AM} = \frac{BD}{AD}$, et donc ADC est semblable à BDB'. Il suit que :

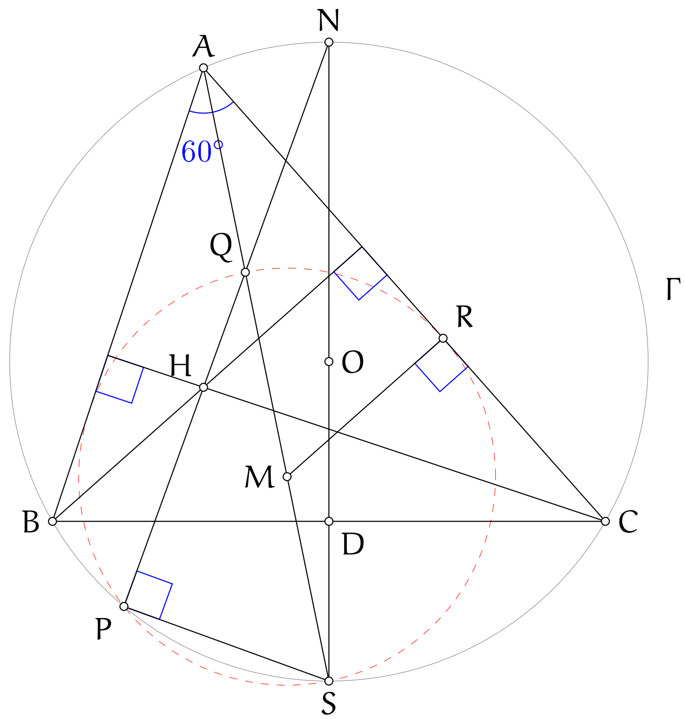
$$\begin{aligned} \widehat{MND} &= \widehat{MCD} \text{ par angle inscrit} \\ &= \widehat{ACD} \\ &= \widehat{BB'D} \text{ car } ADC \sim BDB' \\ &= \widehat{DB'D}. \end{aligned}$$

Donc par réciproque de l'angle tangentiel, (MN) est tangente au cercle circonscrit à $B'DN$, ce qu'on voulait montrer.

<u>Commentaire des correcteurs :</u> L'exercice pouvait se résoudre avec des outils élémentaires (repérer des triangles sembables grâce aux égalités d'angles, déduire d'autres paires de triangles semblables, récupérer l'égalité d'angles voulue), mais pouvait également être raconté en adoptant le point de vue des similitudes, qui donne plusieurs raccourcis dans les étapes précédemment citées. Cette deuxième approche a été celle choisie par la plupart des élèves ayant répondu au problème, et a rencontré beaucoup de succès dans les résultats obtenus, mais un peu moins de succès dans la consistance de la démarche : introduire la similitude de centre D est superflu si on a déjà montré par chasse aux angles que $\Delta DAM \sim \Delta DBN$.

Exercice 16. Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$ et soit Γ son cercle circonscrit. Soient H l'orthocentre de ABC et S le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A. Soit P le point de Γ tel que $\widehat{SPH} = 90°$. Montrer qu'il existe un cercle passant par P, S et qui est tangent à (AB) et (AC).

Solution de l'exercice 16



D'après le théorème du pôle Sud, S est le point de concours de la bissectrice de $\widehat{BAC}$ et de la médiatrice de $[BC]$. Soit O le centre de Γ et N le pôle Nord. Comme $[SN]$ est un diamètre de Γ, la condition $\widehat{SPH} = 90°$ se réécrit P, H, N alignés. Introduisons alors Q le point d'intersection de (AS) et (PN).

Remarquons que comme $\widehat{SPQ} = 90°$, P, S se situent sur le cercle de diamètre $[QS]$, c'est donc un candidat pour être le cercle recherché. On aimerait montrer qu'il est tangent à (AB) et à (AC). Posons M le milieu de $[QS]$ et R le projeté orthogonal de M sur $[AC]$. Le but est de montrer que R est sur le cercle de diamètre $[QS]$, de sorte à avoir la tangence avec (AC) (et pour des raisons de symétrie on aura la tangence avec (AB)).

Soit D le milieu de $[BC]$. On sait que (HD) et (AO) se coupent sur Γ, et que $(AH) \parallel (OM)$ (les deux sont perpendiculaires à (BC)), donc par droite des milieux $AH = 2OD$. Or par angle au centre, $\widehat{SOC} = 60°$ donc SOC est équilatéral ($OS = OC$), et donc $2OD = OS = OC = ON$. De plus, comme $(AH) \parallel (NS)$, d'après le théorème de Thalès, $\frac{AQ}{SQ} = \frac{AH}{NS} = \frac{1}{2}$ donc $QS = 2AQ$.

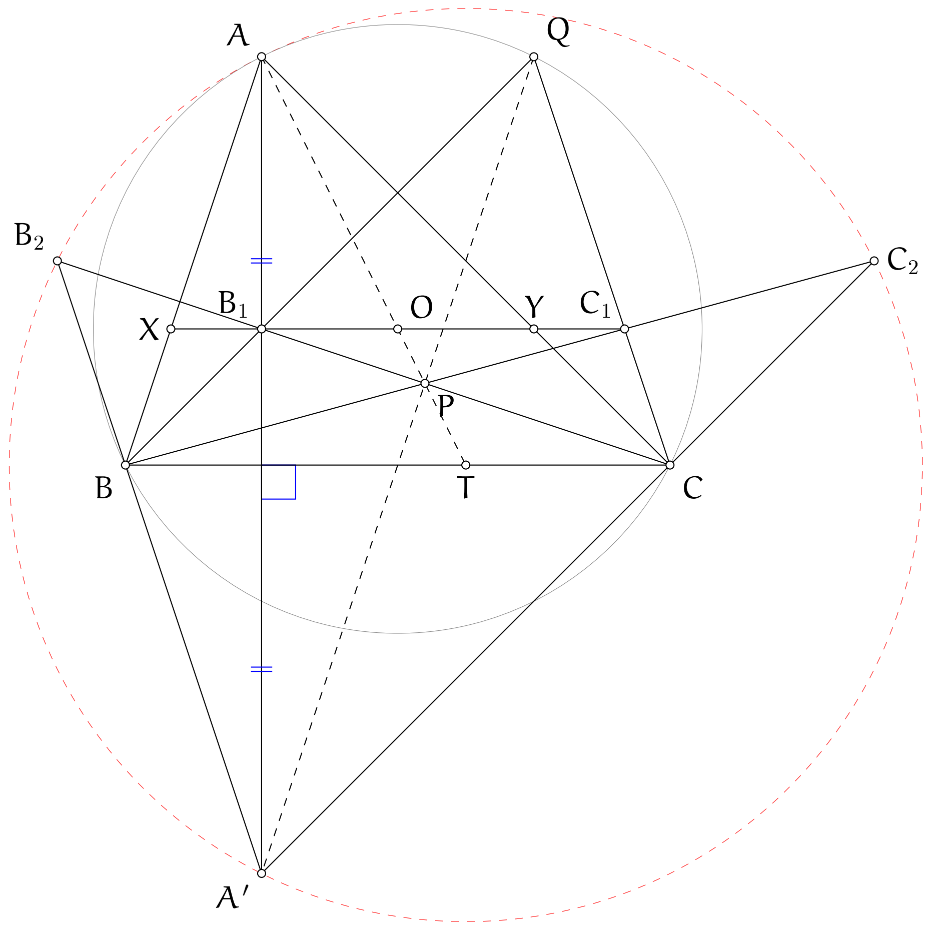
En particulier $MQ = MS = \frac{QS}{2} = AQ$. Or $\widehat{MAR} = 30°$ donc $MR = \frac{1}{2}AM = MQ$ (en effet $\sin(30°) = \frac{1}{2}$), donc R est bien sur le cercle de diamètre $[QS]$, donc ce dernier est tangent à (AC) (en R).

Donc il existe bien un cercle passant par P, S et qui est tangent à (AB) et (AC) : le cercle de diamètre $[QS]$.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était très bien réussi par ceux qui l'ont rendu, la connaissance de la droite d'Euler ou l'utilisation astucieuse du théroème du pole sud pouvait raccoucir certaines preuves.

Exercice 17. Soient ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit d la parallèle à (BC) passant par O. Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC). La parallèle à $(A'B)$ passant par C coupe d en C_1, et les droites $(A'C)$ et (BC_1) s'intersectent en C_2. La parallèle à $(A'C)$ passant par B coupe d en B_1, et les droites $(A'B)$ et (CB_1) s'intersectent en B_2. Montrer que les points A, A', B_2, C_2 sont cocycliques.

Solution de l'exercice 17



On pose P le point d'intersection des droites (CB_1) et (BC_1), et Q le point d'intersection de (BB_1) et (CC_1). On pose également T l'intersection de (AO) et (BC). On peut alors remarquer plusieurs propriétés sur la figure, qu'on va montrer.

• **Lemme 1 :** Le point Q est sur le cercle circonscrit à ABC.
Preuve : Par construction de B_1, C_1, $A'BQC$ est un parallélogramme, donc $\widehat{BQC} = \widehat{CA'B}$. Mais par symétrie, $\widehat{CA'B} = \widehat{BAC}$. Donc $\widehat{BAC} = \widehat{BQC}$: par angle inscrit, Q est bien sur le cercle circonscrit à ABC.

• **Lemme 2 :** Les points P, Q, A' sont alignés.
Preuve : Le quadrilatère BCC_1B_1 est un trapèze, donc la droite (PQ) passe par les milieux respectifs de $[B_1C_1]$ et $[BC]$. Donc la droite (PQ) passe par le milieu de $[BC]$. Or $A'BQC$ est un parallélogramme, donc (QA') passe également par le milieu de $[BC]$. On en déduit bien que Q, P, A' sont alignés.

• **Lemme 3 :** Les points O, P, T sont alignés.
Preuve : Considérons la symétrie par rapport à la médiatrice de $[BC]$: elle fixe O, elle échange B et C. Elle échange également A et Q, en effet $\widehat{QCB} = \widehat{A'BC} = \widehat{CBA}$ par parallélisme et symétrie puis

$\widehat{CBQ} = \widehat{ACB}$. On pose à présent X l'intersection de (AB) avec d, et Y l'intersection de (AC) avec d. Alors comme d est invariante par la symétrie, la symétrie échange B_1 et Y, C_1 et X. On en déduit que $\frac{OB_1}{OC_1} = \frac{OY}{OX}$. Or en appliquant le théorème de Thalès, on obtient $\frac{OY}{OX} = \frac{TC}{TB}$, d'où $\frac{TC}{TB} = \frac{OB_1}{OC_1}$. Ceci entraîne O, P, T alignés (en appliquant Thalès dans OC_1PBT' et dans OB_1BCT' où T' est l'intersection de (OP) et (BC), on obtient $\frac{TB}{TC} = \frac{T'B}{T'C}$, d'où $T = T'$). On a donc bien montré que O, P, T (et donc A, O, P, T) sont alignés.

• **Lemme 4 :** L'homothétie de centre P et de rapport $-\frac{PT}{PO}$ envoie QBC sur $A'C_2B_2$.

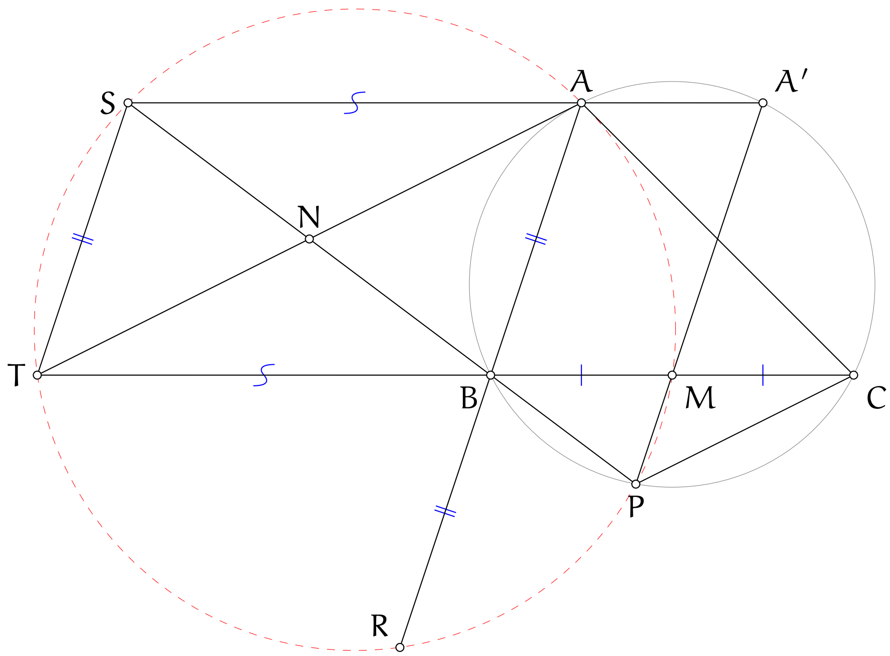
Preuve : D'après le théorème de Thalès dans $QCPB_2A'$ et dans $QBPC_2A'$, on a $\frac{PQ}{PA'} = \frac{PC}{PB_2} = \frac{PB}{PC_2}$, donc l'homothétie de centre P qui envoie Q sur A' envoie également B sur C_2 et C sur B_2. Il reste à montrer qu'elle envoie O sur T. Or, d'après le théorème de Thalès dans QC_1PBA' puis dans OC_1PBT, on a $\frac{PQ}{PA'} = \frac{PC_1}{PB} = \frac{PO}{PT}$, donc c'est bien l'homothétie de rapport $-\frac{PT}{PO}$.

• On a à présent tous les éléments pour conclure : l'homothétie du lemme 4 envoie QBC sur $A'C_2B_2$ et O sur T. Or par le lemme 1, O est le centre du cercle circonscrit de QBC. Donc T est le centre du cercle circonscrit de $A'C_2B_2$. Mais comme T est sur (BC), on a $TA = TA'$ donc A est sur le cercle de centre T et de rayon TA'. Finalement, on a bien montré que A, A', B_2, C_2 sont cocycliques, et on a même trouvé le centre du cercle en question, qui est T.

Commentaire des correcteurs : Le problème est bien résolu par un bon nombre d'élèves. Les rédactions montrent une très bonne maitrise de la notion d'homothétie, qui permet de raconter l'exercice de façon parfois très efficace, avec le mérite de dévoiler les rôles des différents points, là où d'autres élèves ont proposé des approches plus terre-à-terre (des calculs de rapport) ou plus abstraites (solution en dynamique).

Exercice 18. Soient ABC un triangle, avec $AC > AB$, et Γ son cercle circonscrit. Soit T le point d'intersection de la tangente à Γ en A avec (BC). Soient M le milieu de $[BC]$ et R le symétrique de A par rapport à B. Soit S le point tel que $SABT$ est un parallélogramme. La parallèle à (AB) passant par M coupe (SB) en P. On suppose que P est sur Γ, montrer que (AC) est tangente au cercle circonscrit à SRT.

Solution de l'exercice 18



Soit N le point d'intersection de (AT) et (BS). On a $(PM) \mathbin{/\!/} (AB) \mathbin{/\!/} (ST)$ donc d'après le théorème de Thalès, $\frac{BP}{BS} = \frac{BM}{BT}$. Alors $\frac{BP}{BN} = \frac{BP}{\frac{BS}{2}} = 2\frac{BP}{BS} = \frac{2BM}{BT} = \frac{BC}{BT}$, donc d'après la réciproque du théorème de Thalès, (NT) et (PC) sont parallèles. On a alors :

$$\begin{aligned}
\widehat{SA'P} &= \widehat{AA'P} \\
&= \widehat{ACP} \text{ par angle inscrit} \\
&= \widehat{ACB} + \widehat{BCP} \\
&= \widehat{TAB} + \widehat{BTA} \text{ par angle tangentiel et angles alternes-internes} \\
&= \widehat{CBA} \\
&= \widehat{SAB} \text{ par angles alternes-internes.}
\end{aligned}$$

Donc par angle correspondant, (AB) et $(A'P)$ sont parallèles. Or (AB) et (MP) sont parallèles. Il découle que P, M, A' sont alignés.
On en déduit donc que $BT = BS$, $BM = BP$. En effet :

$$\begin{aligned}
\widehat{TSB} &= \widehat{BPA'} \text{ par angle alterne-interne} \\
&= \widehat{AA'P} \text{ car } AA'PB \text{ trapèze isocèle} \\
&= \widehat{CMA'} \text{ par angle alterne-interne} \\
&= \widehat{BTS} \text{ par angle correspondants.}
\end{aligned}$$

Donc $BT = BS$, et comme $(ST) \parallel (PM)$, alors $BP = BM$ de même.

Notamment $STRA$ est un trapèze isocèle donc cyclique donc A est sur (SRT). De plus, $\widehat{NAB} = \widehat{ACB}$ par angle tangentiel, et $\widehat{ABN} = \widehat{BST} = \widehat{STB} = \widehat{CBA}$ par angle alterne-interne et correspondant. Donc $BAN \sim BCA$. En particulier $\widehat{BNA} = \widehat{BAC}$, donc par réciproque de l'angle tangentiel, (AC) est tangente à (ANB).

Or une homothétie de centre A et de facteur 2 envoie N sur T, B sur R, fixe A donc envoie (ANB) sur le cercle $(ATR) = (SRT)$, et elle fixe (AC). Donc (SRT) est bien tangent à (AC) (les homothéties préservent les tangences), ce qui conclut.

Remarque. La condition "On suppose que P est sur Γ" est difficile à tracer. En fait, comme (AB) est parallèle à $(A'M)$ et (AA') parallèle à (BC), $AA'MB$ est un parallélogramme donc $AM = A'M = AB$. Ainsi ABM est isocèle en A. Cela signifie que le projeté de A sur $[BC]$ est le milieu de $[BM]$, donc que l'abscisse de A sur $[BC]$ est au quart du segment (en partant de B), et réciproquement une telle position de A entraîne que P est sur Γ. C'est donc la condition qui nous permet de tracer la figure.

Remarque. On peut montrer que P et M se situent aussi sur le cercle circonscrit à SRT, en utilisant que $TSAM$ est un trapèze isocèle, puis que $AMPR$ est un trapèze isocèle.

Commentaire des correcteurs : L'exercice était difficile, et a été traité avec des méthodes très différentes (barycentrique, homothétie, points harmoniques,...). Les solutions rendues étaient quasiment toutes complètes.