1 Tips

Quelques conseils quand on tombe sur des exos impliquant des suites, au delà de "chercher ses variations, si elle converge etc...".

Modifier la relation de récurrence/ chercher un télescopage :

- Chercher un télescopage dans la relation de récurrence. Chercher à manipuler la relation de récurrence. Par exemple, la relation $x_{n+1} = x_n + \frac{1}{x_n}$ donne le télescopafe $x_{n+1} - x_n = \frac{1}{x_n}$, mais aussi, si on élève la relation au carré, $x_{n+1}^2 - x_n^2 = 2 + \frac{1}{x_n^2}$.
- Si la relation est factorisable, on peut tenter de l'inverser et de faire une décomposition en éléments simples, c'est-à-dire écrire l'inverse d'un produit comme une somme d'inverses. Exemple : Si $x_{n+1} = x_n^2 + 6x_n$, alors
$$\frac{1}{x_{n+1}} = \frac{1}{x_n(x_n+6)} = \frac{1}{6}\left(\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_n+6}\right).$$
On obtient alors un télescopage de $\frac{1}{x_n} - \frac{1}{x_{n+1}}$.
- Travailler au rang n et au rang $n+1$ et comparer les relations pour en obtenir une nouvelle.
- Ne pas hésiter à sommer toutes les relations de récurrence dans le cas d'une suite périodique. Une fois encore, parfois ce n'est pas la relation elle-même qu'il faut sommer, mais plutôt son carré ou son inverse.
- Travailler avec les petits termes, faire des hypothèses, les démontrer par récurrence.

Introduire d'autres suites auxiliaires :

- Lorsque la relation de récurrence implique n termes de la suite (exemple : $u_{n+1} = u_0 + \ldots + u_n$), introduire une suite dépendant de u mais qui transforme la relation en une relation ne dépendant que d'un nombre fini de termes. Souvent, introduire S_n la somme des premiers termes et réécrire la relation en terme de (S_n) s'avère utile. Dans notre exemple, la relation devient $S_{n+1} - S_n = S_n$ et (S_n) est géométrique et plus simple à étudier. Noter qu'il est important, quand on réécrit la relation, d'avoir le moins de dépendance possible entre les suites.
- Introduire des suites permettant d'avoir le comportement de la suite : $b_n = a_n - a_{n-1}$ si on veut les variations de la suite, $b_n = \max a_k$ si on veut que la suite soit bornée... Parfois, la clé du pb se trouve dans la bonne quantité à étudier.

2 Exercices

Problème 1. (aops) Soit (x_n) la suite définie par $x_1 = 1/2$ et $x_{k+1} = x_k + x_k^2$.

On pose
$$A = \frac{1}{x_1+1} + \frac{1}{x_2+1} + \ldots + \frac{1}{x_{100}+1}$$
Déterminer $\lfloor A \rfloor$.

Problème 2. Soit n un entier positif. Soit $a_0, a_1, \ldots, a_n$ la suite définie par $a_0 = \frac{1}{2}$ et
$$a_k = a_{k-1} + \frac{a_{k-1}^2}{n}$$
pour tout $1 \leqslant k \leqslant n$. Montrer que $1 - \frac{1}{n} < a_n < 1$

Problème 3. (IMO SL 2015 A1) Soit $(a_i)_{i \geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs telle que pour tout $k \geqslant 1$:
$$a_{k+1} \geqslant \frac{ka_k}{a_k^2 + (k-1)}$$
Montrer que $a_1 + a_2 + \ldots + a_n \geqslant n$ pour tout $n \geqslant 2$.

Problème 4. (Baltic Way 2020 P1) Soit $a_0 > 0$ et la suite (a_n) définie par

$$a_{n+1} = \frac{a_n}{\sqrt{1+2020a_n^2}}$$

dès que $n \geqslant 0$. Montrer que $a_{2020} < \frac{1}{2020}$.

Problème 5. Soit (a_n) et (b_n) deux suites définies par $a_0 = 1, b_0 = 2$ et pour tout $n \geqslant 0$:

$$a_{n+1} = \frac{a_n b_n + a_n + 1}{b_n}$$

$$b_{n+1} = \frac{a_n b_n + b_n + 1}{a_n}$$

Montrer que $a_{2020} < 5$.

Problème 6. (IMO 2014 P1) Soit $a_0 < a_1 < \ldots$ une suite infinie d'entiers strictement positifs. Montrer qu'il existe un unique entier $n \geqslant 1$ tel que

$$a_n < \frac{a_0 + a_1 + \ldots + a_n}{n} \leqslant a_{n+1}$$

Problème 7. (IMO SL 2006 A1) Soit (a_n) une suite de réels définie par

$$a_{i+1} = \lfloor a_i \rfloor \cdot \langle a_i \rangle$$

Montrer que $a_{i+2} = a_i$ pour tout i à partir d'un certain rang.

Problème 8. (IMO 2018 P2) Déterminer tous les entiers $n \geqslant 3$ pour lesquels il existe des nombres réels $a_1, \ldots, a_n$ avec $a_{n+1} = a_1$ et a_{n+2} et tels que pour $i = 1, 2, \ldots, n$, on a

$$a_i a_{i+1} + 1 = a_{i+2}.$$

Problème 9. (IMO SL 2018 A4) Soit $a_0, a_1, \ldots$ une suite de nombres réels telle que $a_0 = 0, a_1 = 1$ et pour tout $n \geqslant 2$, il existe un entier $1 \leqslant k \leqslant n$ tel que

$$a_n = \frac{a_{n-1} + \ldots a_{n-k}}{k}.$$

Déterminer la plus grande valeur que peut prendre $a_{2018} - a_{2017}$.

Problème 10. (IMO SL 2017 A4) Une suite de réels $a_1, a_2, \ldots$ satisfait la relation

$$a_n = -\max_{i+j=n}(a_i + a_j) \quad \forall\, n > 2017.$$

Montrer que la suite (a_n) est bornée : il existe un réel $M > 0$ tel que $|a_n| \leqslant M$ pour tout entier $n \geqslant 1$.

Problème 11. (IMO 2010 P6) Soient $a_1, \ldots, a_r$ des réels strictement positifs. Pour $n > r$, on définit récursivement a_n par

$$a_n = \max_{1 \leqslant k \leqslant n-1}(a_k + a_{n-k}).$$

Montrer qu'il existe un entier $\ell \leqslant r$ et un rang N tel que $a_n = a_\ell + a_{n-\ell}$ pour tout $n \geqslant N$.

Problème 12. (Olympiade Francophone 2020) Soit (a_n) la suite définie par $a_1 = \frac{3}{2}$ et

$$a_{n+1} = 1 + \frac{n}{a_n}.$$

Trouver un entier n tel que $2020 \leqslant a_n < 2021$.

Problème 13. (IMO 2009 P3) Soit (s_n) une suite strictement croissante d'entiers. On suppose que la sous-suite $s_{s_1}, s_{s_2}, \ldots$ et la sous-suite $s_{s_1+1}, s_{s_2+1}, \ldots$ sont toutes les deux des progressions arithmétiques.

Montrer que (s_n) est une progression arithmétique.

3 Problèmes récents

Problème 14. (EGMO 2022 P4) Etant donné un entier $n \geqslant 2$, déterminer le plus grand entier N pour lequel il existe $N+1$ réels $a_0, \ldots, a_N$ tels que

$$\begin{cases} a_0 + a_1 & = & -\frac{1}{n} \\ (a_k + a_{k-1})(a_k + a_{k+1}) & = & a_{k-1} - a_{k+1} \end{cases}$$

Problème 15. (IMO SL 2022 A1) Soit $(a_n)_{n \geqslant 1}$ une suite de réels strictement positifs satisfaisant

$$a_{n+1}^2 + a_n a_{n+2} \leqslant a_n + a_{n+2}$$

pour tous les entiers strictement positifs n. Montrer que $a_{2022} \leqslant 1$.

Problème 16. (MEMO 2022) Soit (a_0, b_0) une paire de nombres réels. On définit les (a_n) et (b_n) par les réelations $a_{n+1} = a_n + b_n$ et $b_{n+1} = a_n b_n$. Déterminer toutes les paires (a_0, b_0) telles que $a_{2022} = a_0$ et $b_{2022} = b_0$.

Problème 17. (EGMO 2022 P3) Une suite infinie d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots$ est dite *bonne* si

(1) a_1 est un carré parfait.

(2) Pour tout entier $n \geqslant 2$, a_n est le plus petit entier strictement positif tel que

$$n a_1 + (n-1) a_2 + \ldots + 2 a_{n-1} + a_n$$

est un carré parfait.

Montrer que pour tout suite bonne $a_1, a_2, \ldots$, il est un entier k tel que $a_n = a_k$ pour tout entier $n \geqslant k$.

Problème 18. (IMO 2023 P3) Déterminer, pour tout $k \geqslant 2$, l'ensemble des suites $a_1, a_2, \ldots$ d'entiers naturels non nuls pour lesquels il existe un polynôme P de la forme :

$$P(x) = x^k + c_{k-1} x^{k-1} + \ldots + c_1 x + c_0$$

où les c_i sont des entiers naturels et

$$P(a_n) = a_{n+1} \cdot \ldots \cdot a_{n+k}$$

pour tout entier $n \geqslant 1$.