PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 2 : ALGÈBRE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 6 JANVIER 2024

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient x et y deux réels positifs. Montrer que

$$(x^2+x+1)(y^2+y+1) \geqslant 9xy.$$

Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 2. Soient a et b deux réels. Supposons que $2a+a^2=2b+b^2$. Montrer que si a est un entier (pas forcément positif), alors b est aussi un entier.

Exercice 3. Montrer qu'il n'existe pas de réels x, y, z strictement positifs tels que

$$(2x^2+yz)(2y^2+xz)(2z^2+xy) = 26x^2y^2z^2.$$

Exercice 4. Montrer que pour tous les réels x, y, z, on a

$$\frac{x^2-y^2}{2x^2+1}+\frac{y^2-z^2}{2y^2+1}+\frac{z^2-x^2}{2z^2+1} \leqslant 0.$$

Exercice 5. Soit $n \geqslant 2$ et $a_1, \ldots, a_n \in [0,1]$ des réels. Déterminer la valeur maximale que peut prendre le plus petit des nombres

$$a_1 - a_1a_2, a_2 - a_2a_3, \ldots, a_n - a_na_1$$

.

Exercice 6.
Soient a, b, c trois réels strictement positifs. Montrer que

$$\frac{a^4+1}{b^3+b^2+b}+\frac{b^4+1}{c^3+c^2+c}+\frac{c^4+1}{a^3+a^2+a} \geqslant 2.$$

Exercice 7. Soient a, b, c, d quatre réels tels que $|a|>1, |b|>1, |c|>1$ et $|d|>1$. Supposons que $(a+1)(b+1)(c+1)(d+1) = (a-1)(b-1)(c-1)(d-1)$. Montrer que

$$\frac{1}{a-1}+\frac{1}{b-1}+\frac{1}{c-1}+\frac{1}{d-1} > 0.$$

Exercice 8. Soit $n \geqslant 1$ un entier et $x_1, \ldots, x_n$ des réels positifs. Montrer que

$$\left(\frac{x_1}{1}+\frac{x_2}{2}+\ldots+\frac{x_n}{n}\right)(1\cdot x_1+2\cdot x_2+\ldots+n\cdot x_n) \leqslant \frac{(n+1)^2}{4n}(x_1+x_2+\ldots+x_n)^2.$$

Quels sont les cas d'égalité ?

Exercice 9. Soit c un entier positif ou nul. Trouver toutes les suites d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots$ telles que pour tout entier strictement positif n, a_n soit égal au nombre d'entiers i vérifiant $a_i \leqslant a_{n+1}+c$ (on suppose en particulier que ce nombre de i est fini).

Exercices Seniors

Exercice 10. Soient a et b deux réels. Supposons que $2a + a^2 = 2b + b^2$. Montrer que si a est un entier (pas forcément positif), alors b est aussi un entier.

Exercice 11. Pour un réel x, on note $\lfloor x \rfloor$ le plus grand entier relatif inférieur ou égal à x (par exemple, $\lfloor 2,7 \rfloor = 2$, $\lfloor \pi \rfloor = 3$ et $\lfloor -1,5 \rfloor = -2$). On note aussi $\{x\} = x - \lfloor x \rfloor$.
Trouver tous les réels x tels que

$$\lfloor x \rfloor \{x\} < x - 1.$$

Exercice 12. La suite (a_n) est définie par $a_1 = 1$ et

$$a_n = \frac{1}{n} + \frac{1}{a_1 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}}$$

Montrer que pour tout entier $m \geqslant 3$, on a $a_m \leqslant 1$.

Exercice 13. Déterminer toutes les fonctions f de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels :

$$f(x)f(y)f(x-y) = x^2 f(y) - y^2 f(x)$$

Exercice 14. Emile a créé un exercice pour Benoît. Il lui annonce qu'il a choisi secrètement un polynôme P unitaire de degré 2023 à coefficients entiers, c'est-à-dire de la forme

$$P(X) = X^{2023} + a_{2022}X^{2022} + a_{2021}X^{2021} + \ldots + a_1 X + a_0$$

où $a_0, a_1, \ldots, a_{2022}$ sont des entiers relatifs. Il donne à Benoît k entiers $n_1, n_2, \ldots, n_k$, où k est un entier positif, ainsi que la valeur du produit $P(n_1)P(n_2)\ldots P(n_k)$. A partir de ces connaissances, Benoît doit essayer de retrouver le polynôme P.
Trouver l'entier k minimal tel que Emile puisse trouver P et $n_1, \ldots, n_k$ afin de s'assurer que le seul polynôme coïncidant avec les informations données à Benoît soit P.

Exercice 15. Soit c un entier positif ou nul. Trouver toutes les suites d'entiers strictement positifs $a_1, a_2, \ldots$ telles que pour tout entier strictement positif n, a_n soit égal au nombre d'entiers i vérifiant $a_i \leqslant a_{n+1} + c$ (on suppose en particulier que ce nombre de i est fini).

Exercice 16. Déterminer toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telles que pour tous x, y réels, on ait

$$f(x^2 + xy + f(y^2)) = xf(y) + f(x^2) + y^2$$

Exercice 17. Soit $n \geqslant 2$ un entier et $C > 0$ une constante réelle. On suppose qu'il existe une suite $x_1, x_2, \ldots, x_n$ de réels non tous nuls telle que :
- $x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0$.
- Pour tout indice $1 \leqslant i \leqslant n$, on a soit $x_i \leqslant x_{i+1}$, soit $x_i \leqslant x_{i+1} + Cx_{i+2}$ (où on définit $x_{n+1} = x_1$ et $x_{n+2} = x_2$).

1. Montrer que nécessairement $C \geqslant 2$.
2. On suppose que $C = 2$, montrer que n est nécessairement pair.

Exercice 18. Soit $\mathbb{Z}[X]$ l'ensemble des polynômes à coefficients entiers. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Z}[X] \to \mathbb{Z}[X]$ telles que pour tous $P, Q \in \mathbb{Z}[X]$ et $r \in \mathbb{Z}$, on ait

$$P(r) \mid Q(r) \iff (f(P))(r) \mid (f(Q))(r).$$