

Exos Polynômes cours en ligne

10 décembre 2023

Notion abordées en cours :

- Polynômes de $\mathbb{R}[X]$
- Définition et propriétés du degré
- Division euclidienne
- Racines
- Rigidité
- Relations de Viète

Exercice 1.

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2x) = P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2.

1. Trouver tous les couples de réels (a, b) tels que :
$$\begin{cases} 2 &= a + b \\ 10 &= a^2 + b^2 \end{cases}$$
2. Trouver tous les triplets de réels (x, y, z) tels que :
$$\begin{cases} 8 &= x + y + z \\ -1 &= xy + yz + zx \\ -8 &= xyz \end{cases}$$

Exercice 3.

Déterminer tous les polynômes tels que $P(x^2) = xP(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice 4.

Soit $n \geq 2$ donner le reste de la division euclidienne de $X^n - X^{n-1} + 1$ par $X^2 - 3X + 2$

Exercice 5.

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\begin{cases} P(2) = 2 \\ P(X^3) = P(X)^3 \end{cases}$$

Exercice 6.

Soit P un polynôme de degré 2022 tel que $P(1) = 1, P(2) = 2, \dots, P(2022) = 2022$ et $P(0) = 1$
Déterminer $P(-1)$

Exercice 7.

Montrer que pour $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, P est pair si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$

Exercice 8.

Trouver tous les réels x, y, z tels que

$$3 = x + y + z = x^2 + y^2 + z^2 = x^3 + y^3 + z^3$$

Exercice 9.

Soit a_1, a_2, \dots, a_n et b_1, b_2, \dots, b_n des réels. On remplit un tableau $n \times n$ avec en coordonnée (i, j) le nombre $a_i + b_j$.

On suppose qu'il existe un réel c tel que le produit de chaque ligne vaut c . Montrer qu'il existe un réel d tel que le produit de chaque colonne vaut d .

Exercice 10.

Soit P un polynôme tel que $P(X)^2 = R(X^2)$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$ ou $XP(X) = Q(X^2)$

Exercice 11.

Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $16P(X^2) = P(2X)^2$

Indication : utiliser la question précédente