

Equations fonctionnelles – Groupe C

Melvil Treilleux - 9 décembre 2023

1 Echauffement

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y ,

$$f(f(x+1) + y - 1) = f(x) + y$$

Exercice 2 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y ,

$$f(f(f(x))) + f(f(y)) = f(y) + x$$

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \setminus \{0, 1\} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tout $x \in \mathbb{R} \setminus \{0, 1\}$

$$f(x) + f\left(\frac{1}{1-x}\right) = x$$

2 Equation de Cauchy et continuité

Exercice 4 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{Q} \rightarrow \mathbb{Q}$ telles que pour tous rationnels x et y ,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 5 Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y ,

$$f(x+y) = f(x) + f(y)$$

Exercice 6 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que,

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x+y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(xy) = f(x)f(y)$$

Exercice 7 Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réels x et y ,

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) = \frac{f(x) + f(y)}{2}$$

Exercice 8 Trouver toutes les fonctions continues $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous réel x

$$f(f(x)) = -x$$

Exercice 9 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ telles que,

$$f(x^2 + f(y)) = y + (f(x))^2 \quad \text{pour tous } x, y \in \mathbb{R}.$$

Exercice 10 Montrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y) = f(x) + f(y)$$

$$\forall x, y \in \mathbb{R}, f(x + y + xy) = f(x) + f(y) + f(xy)$$