Cours en ligne Polynômes
10/12/2023

Le cours reprend celui donné au stage de Valbonne 2022 au groupe C.

Introduction aux polynômes

Définition 1 (Polynôme).
On appelle polynôme ou fonction polynomiale une fonction $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ telle qu'il existe $a_0, a_1, \cdots, a_n$ des réels tels que pour tout $x \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} P(x) &= a_0 + a_1 x + \cdots + a_n x^n \\ &= \sum_{k=0}^{n} a_k x^k \end{aligned}$$

On notera $\mathbb{R}[X]$ l'ensemble des polynômes et on notera parfois $P = P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$

Remarque 2.
Ici on étudiera les polynômes réels (ou à coefficients réels) mais on peut aussi de la même façon considérer les ensembles $\mathbb{Q}[X]$ et $\mathbb{C}[X]$ qui possèdent essentiellement les mêmes propriétés que celles qu'on étudiera dans ce cours.

Théorème 3.
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ et $Q = \sum_{k=0}^{m} a_k X^k$ deux polynômes avec $a_n \neq 0, b_m \neq 0$.
On suppose que pour tout $x \in \mathbb{R}$, on a $P(x) = Q(x)$.
Alors $n = m$ et $a_k = b_k$ pour $0 \leqslant k \leqslant n$.

Définition 4 (Degré).
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$ un polynôme tel que $a_n \neq 0$.
On appelle degré de P et on note $\deg P$ le nombre n. De plus, on appelle coefficient dominant le nombre a_n (noté parfois $CD(P)$ ou cdom(P)).
Dans le cas ou $P = 0$, par convention, on considère $\deg P = -\infty$

Proposition 5.
Pour P et Q des polynômes, $P + Q$, $P \cdot Q$ et $P \circ Q = P(Q)$ sont des polynômes et

— $\deg(P + Q) \leqslant \max(\deg P, \deg Q)$

— $\deg(P \cdot Q) = \deg P + \deg Q$

— $\deg(P \circ Q) = \deg P \times \deg Q$ si $P \neq 0$ et $Q \neq 0$

Théorème 6 (Division euclidienne).
Soit P et S deux polynômes tels que $S \neq 0$.
Il existe alors un unique couple de polynômes (Q, R) tel que $P = QS + R$ avec $\deg R < \deg S$
On dit alors que Q est le quotient et R le reste de la division euclidienne de P par S

Démonstration. Pour l'unicité on suppose qu'il existe (Q, R) et (Q', R') deux couples qui fonctionnent. On a alors $QS + R = Q'S + R'$ et donc $S(Q - Q') = R' - R$. Par le degré on a alors $R = R'$ et $Q = Q'$ d'où l'unicité.
Pour l'existence, l'algorithme a été présenté en classe avec un exemple. □

Définition 7 (Racine).
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.
On dit que α est une racine de P lorsque $P(\alpha) = 0$

Théorème 8.
Soit $\alpha \in \mathbb{R}$ et P un polynôme.
α est une racine de P ssi il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - \alpha) \cdot Q(X)$

Démonstration. Le sens direct se fait avec la division euclidienne et le sens indirect est immédiat □

Théorème 9.
Un polynôme de degré $n \in \mathbb{N}^*$ a au plus n racines distinctes.

Démonstration. On prouve par récurrence sur m que si $a_1, a_2, \dots, a_m$ sont des racines de $P \in \mathbb{R}[X]$, il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P = (X - a_1) \cdot (X - a_2) \cdot \ldots \cdot (X - a_m) \cdot Q$
On conclut avec le degré. □

Corollaire 10 (Rigidité).

— Si $\deg P \leqslant n$ et que P a $n + 1$ racines distinctes alors $P = 0$
— Si P a une infinité de racines alors $P = 0$
— Soit P et Q deux polynômes. On suppose qu'il existe une infinité de nombres x tels que $P(x) = Q(x)$ alors $P = Q$

Non abordé en cours :

Théorème 11 (Relations de Viète ou coefficients-racines).
Soit $P = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$,un polynôme de degré n. On suppose $P(\alpha_1) = P(\alpha_2) = \cdots = P(\alpha_n) = 0$ avec $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$ distincts, alors : $\begin{cases} a_{n-1} = -a_n \cdot (\alpha_1 + \alpha_2 + \cdots + \alpha_n) \\ a_0 = (-1)^n a_n (\alpha_1 \alpha_2 \cdots \alpha_n) \end{cases}$

Exemple 12.
Trouver tous les réels x, y tels que $x + y = 3$ et $xy = 2$

Exercices

Exercice 1
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $P(2x) = P(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Exercice 2

1. Trouver tous les couples de réels (a, b) tels que : $\left\{ \begin{array}{ll} 2 & = a + b \\ 10 & = a^2 + b^2 \end{array} \right.$

2. Trouver tous les triplets de réels (x, y, z) tels que : $\left\{ \begin{array}{ll} 8 & = x + y + z \\ -1 & = xy + yz + zx \\ -8 & = xyz \end{array} \right.$

Exercice 3
Déterminer tous les polynômes tels que $P(x^2) = xP(x)$ pour $x \in \mathbb{R}$

Exercice 4
Soit $n \geqslant 2$ donner le reste de la division euclidienne de $X^n - X^{n-1} + 1$ par $X^2 - 3X + 2$

Exercice 5
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que

$$\begin{cases} P(2) = 2 \\ P(X^3) = P(X)^3 \end{cases}$$

Exercice 6
Soit P un polynôme de degré 2022 tel que $P(1) = 1, P(2) = 2, \ldots P(2022) = 2022$ et $P(0) = 1$
Déterminer $P(-1)$

Exercice 7
Montrer que pour $P \in \mathbb{R}[X]$ un polynôme, P est pair si et seulement si il existe un polynôme $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$

Exercice 8
Trouver tous les réels x, y, z tels que

$$\left\{ \begin{array}{ll} 1 & = x + y + z \\ 9 & = x^2 + y^2 + z^2 \\ 1 & = x^3 + y^3 + z^3 \end{array} \right.$$

Exercice 9
Soit $a_1, a_2, \ldots a_n$ et $b_1, b_2, \ldots, b_n$ des réels. On remplit un tableau $n \times n$ avec en coordonnée (i, j) le nombre $a_i + b_j$.
On suppose qu'il existe un réel c tel que le produit de chaque ligne vaut c. Montrer qu'il existe un réel d tel que le produit de chaque colonne vaut d.

Exercice 10
Soit P un polynôme tel que $P(X)^2 = R(X^2)$ avec $R \in \mathbb{R}[X]$. Montrer qu'il existe $Q \in \mathbb{R}[X]$ tel que $P(X) = Q(X^2)$ ou $XP(X) = Q(X^2)$

Exercice 11
Trouver tous les polynômes $P \in \mathbb{R}[X]$ tels que $16P(X^2) = P(2X)^2$
Indication : utiliser la question précédente

Solution de l'exercice 1
Il s'agit de montrer que P est constant.

Il y a plusieurs manières de résoudre cet exercice. On écrit $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_k X^k$. Par rigidité, on obtient pour tout k compris entre 0 et n, $2^k a_k = a_k$. Donc $a_k = 0$ pour $k \neq 0$ et P est constant. Réciproquement, P constant fonctionne.

Solution de l'exercice 2

1. On peut remarquer que $(a+b)^2 = a^2 + 2ab + b^2 = 4$ d'où $ab = \frac{4-10}{2} = -3$
   Ainsi, a et b sont les racines du polynôme : $P = X^2 - 2X - 3$. On remarque que ce polynôme a -1 comme racine et en factorisant : $X^2 - 2X - 3 = (x+1)(X-3)$. Donc les racines de P sont -1 et 3. Ainsi, les solutions sont $(a,b) = (-1,3)$ ou $(3,-1)$.
2. Pour un polynôme $P = (X-x)(X-y)(X-z)$, on a $P = X^3 - (x+y+z)X^2 + (xy + yz + zx)X - xyz$.
   Ainsi, ici (x,y,z) sont les racines du polynôme $P = X^3 - 8X^2 - X + 8$. On trouve 1 comme racine évidente, on factorise alors P en $(X-1)(X^2 - 7X - 8)$. On trouve alors la racine évidente -1 ce qui donne finalement :
   $$P = (X-1)(X+1)(X-8)$$
   Ainsi, on a $(x,y,z) = (1,-1,8)$ à permutation près des termes.

Solution de l'exercice 3
Regardons tout d'abord le degré. On suppose pour cela $P \neq 0$ (Le cas $P = 0$ fonctionne).
On a $2 \cdot \deg P = 1 + \deg P$ donc $\deg P = 1$.
Par ailleurs, en évaluant en $x = 0$, on a $P(0) = 0$, donc $P(X) = \lambda X$ avec $\lambda \in \mathbb{R}^*$ qui fonctionne.
Ainsi les solutions sont les polynômes

Solution de l'exercice 4
Par définition, la division euclidienne est de la forme $X^n - X^{n-1} + 1 = (X^2 - 3X + 2)Q(X) + R(X)$ avec $R(X) = aX + b$.
On remarque que $(X^2 - 3X + 2) = (X-2)(X-1)$, en évaluant en 1, on a : $1 = a + b$ et en évaluant en 2, on a $2^{n-1} + 1 = 2a + b$.
Ainsi, $a = 2^{n-1}$ et $b = 1 - 2^{n-1}$.
Ainsi $R(X) = 2^{n-1}X + (1 - 2^{n-1})$

Solution de l'exercice 5
Soit un polynôme solution.
En évaluant en 2, on a $P(8) = 8$. On peut réévaluer en 8... Par récurrence, on obtient $P(2^{3n}) = 2^{3n}$ pour $n \in \mathbb{N}^*$. Cela représente une infinité de points égaux avec le polynôme X par rigidité, on a donc $P = X$.
Réciproquement, l'identité fonctionne.

Solution de l'exercice 6
Le polynôme fait beaucoup penser au polynôme X. Plus précisément, $P(X) - X$ a comme racines $1, 2, \ldots, 2022$ donc il existe Q tel que $P(X) - X = Q(X) \cdot (X-1) \cdot (X-2) \cdot \ldots \cdot (X-2022)$.
Par le degré, il existe λ tel que $P(X) = X + \lambda(X-1)\ldots(X-2022)$.

On évalue en 0, on a $1 = \lambda 2022!$, d'où $\lambda = \dfrac{1}{2022!}$.
On obtient donc $P(-1) = -1 + 2023 = 2022$

Solution de l'exercice 7

On utilise encore une fois la rigidité. Cette fois cela donne $(-1)^k a_k = a_k$ et donc tous les termes impairs sont nuls. On a donc un polynôme $P(X) = \sum_{k=0}^{n} a_{2k} X^{2k}$, ainsi $Q(X) = a_{2k} X^k$ convient.

Solution de l'exercice 8

On a $(x+y+z)^2 = X^2 + y^2 + z^2 + 2(xy + yz + zx) = 1$, d'où $xy + yz + zx = -4$.
Par ailleurs,

$$(x+y+z)^3 = x^3 + y^3 + Z^3 + 3x^2y + 3X^2z + 3y^2x + 3y^2z + 3z^2x + 3z^3y + 6xyz = 1$$

et

$$(xy + yz + zx)(x + y + z) = x^2y + x^2z + y^2x + y^2z + z^2x + z^2y + 3xyz$$

D'où

$$1 - 3 \cdot (-4) \cdot 1 - 1 = -3xyz$$

Ainsi, $xyz = -4$ et donc x, y, z sont les racines du polynôme :

$$P = X^3 - X^2 - 4X + 4$$

Le polynôme a 1 comme racine, en le factorisant, on a : $P = (X-1)(X^2-4) = (X-1)(X-2)(X+2)$ donc à permutation près : $(x, y, z) = (1, -2, 2)$.

Solution de l'exercice 9

Il s'agit de faire apparaître des polynômes. Ici, on a pour $1 \leqslant i \leqslant n$, $\prod_{j=1}^{n} (a_i + b_j) = c$ ainsi, le polynôme $P(X) = \prod_{j=1}^{n} (X + b_j) - c$ a les a_i comme racines. Avec le degré et le coefficient dominant, on a :

$$P(X) = \prod_{i=1}^{n} (X - a_i)$$

Pour un j, en évaluant l'égalité de polynômes en $-b_j$, on a

$$0 - c = \prod_{i=1}^{n} (-b_j - a_i)$$

On a donc : $\prod_{i=1}^{n} (b_j + a_i) = (-1)^{n+1} c$ et $d = (-1)^{n+1} c$ convient.

Solution de l'exercice 10

Écrivons $P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ avec $a_n \neq 0$. Comme $P(x)^2 = R(x^2)$, le coefficient devant x^{2n-1} dans $P(x)^2$, à savoir $2a_n a_{n-1}$, est nul. On en déduit que $a_{n-1} = 0$. De même, le coefficient devant x^{2n-3} dans $P(x)^2$, à savoir $2a_n a_{n-3}$, est nul. On en déduit que $a_{n-3} = 0$. De même, on obtient que $a_{n-2k-1} = 0$ pour $n - 2k - 1 \geqslant 0$. Le résultat en découle.

Solution de l'exercice 11

Comme $P(x)^2 = 16P(\frac{x^2}{4})$ est un polynôme en x^2, on peut appliquer la question précédente. Dans le premier cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x) = Q(x^2)$, on obtient $16Q(x^4) = 16P(x^2) = P(2x)^4 = Q(4x^2)^2$, et donc $16Q(x^2) = Q(4x)^2$. Dans le deuxième cas, s'il existe un polynôme Q tel que $P(x)^2 = xQ(x^2)$, on obtient similairement que $4Q(x^2) = Q(4x)^2$. On peut donc réappliquer la question précédente à Q, et de même on obtient que pour tout entier $k \geqslant 0$, il existe un entier $0 \leqslant i \leqslant 2^k$ et un polynôme R_k tel que $P(x) = x^i R_k(x^{2^k})$. En choisissant k tel que $2^k > \deg P$, il s'ensuit que R_k est forcément constant et donc que $P(x) = cx^i$. En réinjectant dans l'équation de départ, on obtient $P(x) = 16(\frac{x}{4})^i$ pour un certain entier $i \geqslant 0$ (et toutes ces solutions conviennent bien, réciproquement).