Equations fonctionnelles

Rémi – 10 décembre 2023

Exercices

Exercice 1 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + x + y) = f(x + y) + yf(y)$$

Exercice 2 Trouver les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(x + y) + y \leq f(f(f(x)))$$

Exercice 3 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(y - f(x)) = f(x) - 2x + f(f(y))$$

Exercice 4 Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ vérifiant pour tout $x, y \in \mathbb{R}$:

$$f(f(x) + y) + f(x + f(y)) = 2f(xf(y))$$

Exercice 5 (BMO 2007) Trouver toutes les fonctions $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ telles que pour tous $x, y \in \mathbb{R}$,

$$f(f(x) + y) = f(f(x) - y) + 4f(x)y$$

1 Solutions

Solution de l'exercice 1 On remarque que l'on a $f(f(x)+x+y)$ d'un côté et $f(x+y)$ de l'autre, donc on aimerait trouver un x pour lequel $f(x)=0$. On cherche donc naturellement des valeurs de x et y pour lesquelles $f(x+y)+yf(y)=0$. C'est le cas pour $x=0$ et $y=-1$, cela donne précisément $f(f(0)-1)=0$. On choisit donc ensuite $x=f(0)-1$ pour obtenir $yf(y)=0$ pour tout y, donc f est la fonction nulle sur $\mathbb{R}^*$. Reste à montrer que $f(0)=0$, ce que l'on fait par l'absurde, en supposant $f(0)=a\neq 0$ et en prenant $x=0$ et $y=-a$, ce qui donne $f(0)=f(-a)-af(a)$, ce qui est bien nul puisque f est nulle en a et en $-a$. Finalement, la fonction nulle est la seule solution possible, et on vérifie réciproquement qu'elle convient bien.

Solution de l'exercice 2 On commence par poser $y=f(f(x))-x$, qui donne $f(f(x))\leq x$, et donc l'équation donne $f(x+y)+y\leq f(x)$, en posant $z=x+y$, on obtient $f(z)+z\leq f(x)+x$, cela étant valable quelque soit x et z, on doit avoir $f(x)+x$ constant, donc $f(x)=C-x$, qui convient.

Solution de l'exercice 3 Le premier bon réflexe est de voir un x dans le membre de droite donc peut montrer que f est injective. En effet, si on suppose $f(x)=f(x')$ et qu'on écrit l'équation fonctionnelle pour x et x', on obtient en faisant la différence que $2x=2x'$, et donc f est injective. On pose alors $x=0$ et $y=f(0)$, et on obtient $f(f(f(0)))=0$. En prenant ensuite $x=f(f(0))$ et $y=0$, on obtient $f(f(0))=-2f(f(0))$, donc $f(f(0))=0$. En appliquant f des deux côtés, on trouve $f(f(f(0)))=f(0)$, soit finalement $f(0)=0$ en combinant avec ce qui précède.
On revient à l'équation initiale et on pose $x=0$. Cela nous donne $f(y)=f(f(y))$, soit $f(y)=y$ par injectivité. On vérifie réciproquement que l'identité est bien solution de l'équation.

Solution de l'exercice 4 On remarque que le membre de gauche est symétrique, donc on peut échanger x et y pour obtenir $f(xf(y))=f(yf(x))$. En posant $y=0$ dans cette équation, on a $f(xf(0))=f(0)$. Si $f(0)\neq 0$, alors f est constante égale à $f(0)$. On suppose donc f non constante et on a $f(0)=0$.

On pose $y=0$ dans l'équation initiale, ce qui donne $f(f(x))=-f(x)$. En évaluant $f(f(f(x)))$ de deux manières différentes, on trouve alors l'égalité $f(-f(x))=-f(f(x))=f(x)$ d'après ce qui précède.

On pose désormais $x=y$, ce qui donne $f(x+f(x))=f(xf(x))$. Puis on pose $y=-f(x)$, soit $f(y)=f(-f(x))=f(x)$, et on obtient $f(x+f(x))=2f(xf(x))$. Ces deux équations combinées impliquent $f(x+f(x))=f(xf(x))=0$.

En prenant $x = 1$, on trouve alors $0 = f(1f(1)) = -f(1)$. Mais d'après la toute première remarque, on peut écrire $f(f(y)) = f(1f(y)) = f(yf(1)) = 0$, soit finalement $f(y) = -f(f(y)) = 0$, donc f est la fonction nulle. Réciproquement, on vérifie que toutes les fonctions constantes sont bien des solutions, donc ce sont les seules.

Solution de l'exercice 5 Avec un peu de réflexion et d'expérience, on peut reconnaître quelque chose qui ressemble à une identité remarquable déguisée, le $4f(x)y$ correspondant à deux fois le double produit. Cela marche en effet bien si f est la fonction carré. Un peu de tâtonnement laisse deviner que les solutions sont $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto 0$. Cela nous donne envie de poser la fonction auxiliaire $g(x) = f(x) - x^2$ pour éliminer les termes parasites. En remplaçant dans l'équation initiale, on trouve simplement $g(g(x) + x^2 + y) = g(g(x) + x^2 - y)$. Ici, il faut prendre le temps de bien interpréter : cette équation nous indique que la droite d'équation $x = g(z) + z^2$ est un axe de symétrie vertical de g pour toute valeur de z. On se rappelle que $g(z) + z^2 = f(z)$, donc si f n'est pas constante, alors $g(z) + z^2$ prend au moins deux valeurs différentes. La composée de deux symétries axiales d'axes parallèles est une translation, donc le graphe de g est invariant par translation, autrement dit g est périodique. Pour tout y, on a plus précisément $g(y) = g(y + (f(x) - f(z))$, en composant les symétries d'axes $f(x)$ et $f(z)$, pour n'importe quels x et z. Prenons le temps d'apprécier toutes les informations obtenues sans la moindre substitution pour l'instant !
Procédons à notre seule substitution nécessaire : soit T la période de g, on pose $x = z+T$. Alors $f(x)-f(z) = g(z+T)+(z+T)^2-g(z)-z^2 = 2Tz+T^2$. On voit donc que g est périodique de période n'importe quel réel, puisqu'on peut choisir z arbitrairement. On peut par exemple choisir formellement z tel que $2Tz + T^2 = -y$ et on aura alors $g(y) = g(0)$ pour tout y, donc g est bien constante. En réinjectant, on trouve que la constante doit être nulle, donc les solutions sont bien celles trouvées au début.