

Algèbre E

Exercice 1. Trouver toutes les fonction $f : \mathbf{Q}_+^* \rightarrow \mathbf{R}$ telles que

- $f(x)f(y) \geq f(xy)$
- $f(x) + f(y) \leq f(x + y)$
- Il existe $a > 1$, tel que $f(a) = a$

Exercice 2. Soit $n \in \mathbf{N}^*$ fixé. Trouver le plus petit réel a_n tel que

$$\sqrt[n]{\frac{x^{2n} + 1}{2}} \leq a_n(x - 1)^2 + x$$

Exercice 3. Trouver tous les polynômes P , à coefficients entiers, tels que si $P(s)$ et $P(t)$ sont tous deux entiers, alors $P(st)$ est également entier.

Exercice 4. Trouver toutes les fonctions $f : \mathbf{R}_*^+ \rightarrow \mathbf{R}_*^+$ telles que pour tous réels $x, y > 0$,

$$xf(x + y) + f(xf(y) + 1) = f(xf(x)).$$

Indice pour le P4 : montrer que pour $x > a$, $f(x) < \frac{f(a)f'(a)}{a}$ et $f(x) \geq \frac{f(a)f'(a)-1}{a}$.