1 Exercices

Problème 1. Soit ABC un triangle et ω son cercle circonscrit. On note X le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point A avec la droite (BC), Y le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point B avec la droite (AC) et Z le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point C avec la droite (AB). Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Problème 2. (IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.

Problème 3. Soit ABC un triangle. Soient S_B et S_C les pôles Sud des points B et C. Soient E et F les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que la tangente au cercle circonscirt au triangle ABC en A et les droites (EF) et (S_BS_C) sont concourantes.

Problème 4. (BXMO 2010) Soient A, B et P trois points alignés dans cet ordre sur une droite l. Soit a la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point A. Soit b la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point B. Une droite passant par le point P distincte de la droite l coupe la droite a en Q et la droite b en R. La perpendiculaire à la droite (BQ) passant par A coupe la droite (BQ) au point L et la droite (BR) au point T. La perpendiculaire à la droite (AR) passant par le point B coupe la droite (AR) en K et la droite (AQ) en S.

1) Montrer que les points P, T et S sont alignés.
2) Montrer que les points P, K et L sont alignés.

Problème 5. Soit ABC un triangle, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues des sommets B et C, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$ et P et Q les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que les droites $(PQ), (EF)$ et (H_BH_C) sont concourantes.

Problème 6. (G2 2004) Soit Γ un cercle et soit d une droite ne passant par aucun point du cercle Γ. Soit $[AB]$ le diamètre du cerlce Γ perpendiculaire à la droite d et tel que le point B est plus proche que le point A de la droite d. Soit C un point arbitraire sur le cercle Γ, distinct des points A et B. Soit D le point d'intersection des droites d et (AC). L'une des deux tangentes au cercle Γ issues du point D touche le cercle au point e, en supposant que les points B et E sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Soit F le point d'intersection des droites (BE) et d. Soit G le second point d'intersection de la droite (AF) avec le cercle Γ. Montrer que le symétrique du point G par rapport au segment $[AB]$ appartient à la droite (CF).

Problème 7. (ELMO 2014 SL G4) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle ω. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (CD) au point E. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (BC) au point F. La droite (BE) recoupe le cercle ω au point G. Les droites (BE) et (AD) se coupent au point H. La droite (DF) recoupe le cercle ω au point I et les droites (DF) et (AB) se coupent au point J. Montrer que les droites $(GI), (HJ)$ et la symmédiane issue du sommet B dans le triangle ABC sont concourantes.

Problème 8. Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles inscrits aux triangles ACD et ABD. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BE) et (CF). Les droites (BE) et (BF) recoupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PQX et RSX. Prouver que le point Y appartient à (AD).

Problème 9. (FRA TST 2017/2018) . Soient deux cercles ω_1 et ω_2 tangents l'un a l'autre en un point T, tels que le cercle ω_1 soit à l'interieur du cercle ω_2. Soient M et N deux points distincts sur le cercle ω_1, differents du point T. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes du cercle ω_2 passant respectivement par les points M et N. On suppose que les segments $[BD]$, $[AC]$ et $[MN]$ s'intersectent en un point K. Montrer que la droite (TK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

Problème 10. (RMM 2016 P1) Soit ABC un triangle et soit A' le symétrique du point A par rapport au segment $[BC]$. Soit D un point du segment $[BC]$ différent des points B et C. Le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en un point E. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en un point F. Les droites $(A'C)$ et (DE) se coupent en un point P et les droites $(A'B)$

et (DF) se coupent en un point Q. Montrer que les droites $(AD), (BP)$ et (CQ) sont concourrantes ou parallèles.

Problème 11. (Envoi de géométrie 2019/2020) Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et D le point de tangence de ce cercle avec le segment $[AC]$. Les droites (OI) et (AB) se coupent en un point P. Soit M le milieu de l'arc AC ne contenant pas B et N le milieu de l'arc BC contenant A.

Montrer que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.

Problème 12. (Vietnam MO 2019) Soit ABC un triangle non isocèle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soient M, N et P les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soient D, E et F les pieds des hauteurs issuées des sommets A, B et C. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soit K le symétrique du point H par rapport à la droite (BC). Les droites (DE) et (MP) se coupent au point X. Les droites (DF) et (MN) se coupent au point Y.

1) La droite (XY) coupe le petit arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC au point Z. Montrer que les points K, Z, E et F sont cocycliques.

2) Les droites (KE) et (KF) coupent le cercle circonscrit au triangle ABC une deuxième fois aux points S et T respectivement. Montrer que les droites $(BS), (CT)$ et (XY) sont concourantes.

Problème 13. (G5 IMO 2007) Soit ABC un triangle fixé, Γ son cercle circonscrit et P un point appartenant au cercle Γ. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. La droite (PA_1) recoupe le cercle Γ en un point A'. Les points B' et C' sont définis de façon similaire. On suppose les points A, B, C, A', B' et C' distincts. Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') forment un triangle. Montrer que l'aire de ce triangle ne dépend pas du point P.

Problème 14. (G5 IMO 2011) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et ω son cercle circonscrit. Soient D et E les seconds points d'intersection des droites (AI) et (BI) avec le cercle ω. La corde (DE) coupe la droite (AC) au point F et la droite (BC) au point G. Soit P le point d'intersection de la parallèle à la droite (AD) passant par le point F avec la parallèle à la droite (BE) passant par le point G. On note K le point d'intersection des tangentes au cercle ω en les points A et B. Montrer que les droites $(AE), (BD)$ et (KP) sont concourantes ou parallèles.