PRÉPARATION OLYMPIQUE FRANÇAISE DE MATHÉMATIQUES

ENVOI 1 : GÉOMÉTRIE
À RENVOYER AU PLUS TARD LE 5 DÉCEMBRE 2023

Les consignes suivantes sont à lire attentivement :

- Le groupe junior est constitué des élèves nés en 2009 ou après. Les autres élèves sont dans le groupe senior.
- Les exercices classés “Juniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe junior.
- Les exercices classés “Seniors” ne sont à chercher que par les élèves du groupe senior.
- Les exercices doivent être cherchés de manière individuelle.
- Utiliser des feuilles différentes pour des exercices différents.
- Respecter la numérotation des exercices.
- Bien préciser votre nom en lettres capitales, et votre prénom en minuscules sur chaque copie.

Exercices Juniors

Exercice 1. Soient ABC un triangle et H_C le pied de la hauteur issue de C. Soit P un point sur le segment $[CH_C]$ (autre que C), et soient E, F, G, H les milieux respectifs de $[AP], [BP], [BC], [AC]$. Montrer que $EFGH$ est un rectangle.

Exercice 2. Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus) avec $BA \neq BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite (AB) intersecte le cercle circonscrit à BOC une deuxième fois en $P \neq B$. Montrer que $PA = PC$.

Exercice 3. Soit ABC un triangle rectangle en B avec $BC < BA$. Soit D le point du segment $[AB]$ tel que $BD = BC$. La perpendiculaire à (AC) passant par D intersecte (AC) en E. Soit B' le symétrique de B par rapport à (CD). Montrer que (EC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BEB'}$.

Exercice 4. Soient ABC un triangle et I le centre de son cercle inscrit. La médiatrice de $[BC]$ coupe (AI) en S et (BI) et T. Montrer que C, I, S et T sont cocycliques.

Exercice 5. Soit $ABCDE$ un pentagone cyclique convexe tel que $AB = BD$. Soit P le point d'intersection des droites (EB) et (AC). Soit Q le point d'intersection des droites (BC) et (DE). Montrer que (PQ) et (AD) sont parallèles.

Exercice 6. Soient ABC un triangle isocèle en A, O le centre de son cercle circonscrit et I le centre de son cercle inscrit. La parallèle à (AB) passant par I coupe (AC) en D. Montrer que (CI) et (DO) sont perpendiculaires.

Exercice 7. Soient ABC un triangle, D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. La droite (DE) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q. Soient A' et B' les symétriques de A et B par rapport à (BC) et (AC) respectivement. Montrer que A', B', P, Q sont cocycliques.

Exercice 8. Soient ABC un triangle de cercle circonscrit Γ, D un point sur (AB) et E un point sur (AC) tel que (DE) et (BC) sont parallèles. Le cercle circonscrit à ABC rencontre le cercle circonscrit à BDE une seconde fois en K et le cercle circonscrit à CDE une seconde fois en L. Soit T le point d'intersection de (BK) et (CL). Montrer que (TA) est tangente au cercle Γ.

Exercice 9. Soient ABC un triangle non-isocèle et I le centre de son cercle inscrit. Soit D un point sur $[BC]$ (autre que B et C). Le cercle circonscrit à DIB coupe (AB) une deuxième fois en $E \neq B$, et le cercle circonscrit à DIC coupe (AC) une deuxième fois en $F \neq C$. Le cercle circonscrit à DEF rencontre (AB) et (AC) une deuxième fois en M et N respectivement. Les droites (IB) et (DE) s'intersectent en P et les droites (IC) et (DF) s'intersectent en Q. Montrer que les droites (EN), (FM) et (PQ) sont parallèles.

Exercices Seniors

Exercice 10. Soit ABC un triangle acutangle (dont tous les angles sont aigus) avec $BA \neq BC$. Soit O le centre de son cercle circonscrit. La droite (AB) intersecte le cercle circonscrit à BOC une deuxième fois en $P \neq B$. Montrer que $PA = PC$.

Exercice 11. Soient ABC un triangle, O le centre de son cercle circonscrit. On suppose que $\widehat{CBA} = 60°$ et $\widehat{CBO} = 45°$. Soit D le point d'intersection des droites (AC) et (BO). Montrer que $AD = DO$.

Exercice 12. Soit ABC un triangle rectangle en B avec $BC < BA$. Soit D le point du segment $[AB]$ tel que $BD = BC$. La perpendiculaire à (AC) passant par D intersecte (AC) en E. Soit B' le symétrique de B par rapport à (CD). Montrer que (EC) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BEB'}$.

Exercice 13. Soit $ABCDE$ un pentagone cyclique convexe tel que $AB = BD$. Soit P le point d'intersection des droites (EB) et (AC). Soit Q le point d'intersection des droites (BC) et (DE). Montrer que (PQ) et (AD) sont parallèles.

Exercice 14. Soient ABC un triangle, D, E les pieds des hauteurs issues de A et B respectivement. La droite (DE) rencontre le cercle circonscrit à ABC en deux points P et Q. Soient A' et B' les symétriques de A et B par rapport à (BC) et (AC) respectivement. Montrer que A', B', P, Q sont cocycliques.

Exercice 15. Soit $ABCD$ un quadrilatère convexe cyclique, M le milieu de $[AC]$. Le cercle circonscrit à CDM rencontre (BC) une deuxième fois en N (autre que C). Soit B' le symétrique de B par rapport à N. Montrer que (MN) est tangente au cercle circonscrit de $B'DN$.

Exercice 16. Soit ABC un triangle avec $\widehat{BAC} = 60°$ et soit Γ son cercle circonscrit. Soient H l'orthocentre de ABC et S le milieu de l'arc $\overset{\frown}{BC}$ ne contenant pas A. Soit P le point de Γ tel que $\widehat{SPH} = 90°$. Montrer qu'il existe un cercle passant par P, S et qui est tangent à (AB) et (AC).

Exercice 17. Soient ABC un triangle et O le centre de son cercle circonscrit. Soit d la parallèle à (BC) passant par O. Soit A' le symétrique de A par rapport à (BC). La parallèle à $(A'B)$ passant par C coupe d en C_1, et les droites $(A'C)$ et (BC_1) s'intersectent en C_2. La parallèle à $(A'C)$ passant par B coupe d en B_1, et les droites $(A'B)$ et (CB_1) s'intersectent en B_2. Montrer que les points A, A', B_2, C_2 sont cocycliques.

Exercice 18. Soient ABC un triangle, avec $AC > AB$, et Γ son cercle circonscrit. Soit T le point d'intersection de la tangente à Γ en A avec (BC). Soient M le milieu de $[BC]$ et R le symétrique de A par rapport à B. Soit S le point tel que $SABT$ est un parallélogramme. La parallèle à (AB) passant par M coupe (SB) en P. On suppose que P est sur Γ, montrer que (AC) est tangente au cercle circonscrit à SRT.