TD Géo D

11 novembre 2023

Exercice 1

Soit ABC un triangle. Un cercle passant par A coupe les segments $[AB]$ et $[AC]$ en D et E respectivement ainsi que le segment $[BC]$ en F et G tels que F soit entre B et G. La tangente à (BDF) en F et celle à (CEG) en G se coupent en $T \neq A$. Montrer que les droites (AT) et (BC) sont parallèles.

Exercice 2

Soit $ABCD$ un parallélogramme. La bissectrice intérieure de l'angle $\widehat{BAC}$ coupe le segment $[BC]$ en E tandis que sa bissectrice extérieure coupe la droite (CD) en F. Soit M le milieu du segment $[AE]$. Démontrer que les droites (EF) et (BM) sont parallèles.

Exercice 3

Soit $ABCD$ un parallélogramme tel que $AC = BC$. On prend P sur la demi-droite $[AB)$ après B. Le cercle (ACD) recoupe (PD) en Q. (APQ) recoupe (PC) en R. Montrer que $(CD), (AQ), (BR)$ sont concourantes.

Exercice 4

Soit ABC acutangle d'orthocentre H. Soit G tel que $ABGH$ est un parallélogramme. Soit I sur (GH) tel que (AC) coupe $[HI]$ en son milieu. On suppose que (AC) coupe le cercle circonscrit à GCI en les deux points C et J. Montrer que $IJ = AH$.

Exercice 5

Soit ABC un triangle avec $AB \neq AC$ de centre de cercle circonscrit O. La bissectrice de $\widehat{BAC}$ intersecte (BC) en D. Soit E le symétrique de D par rapport au milieu de $[BC]$. Les droites perpendiculaires à (BC) passant par D et E intersectent (AO) et (AD) en X et Y respectivement. Montrer que $BXCY$ est cyclique.

Exercice 6

Soit ABC un triangle de centre de gravité G. Soient D, E, F les milieux de $[BC], [AC], [AB]$ respectivement. Soit $X \neq A$ l'intersection de (AD) avec le cercle (ABC). Soit Ω un cercle passant par D et X et tangent à (ABC).

Soient Y, Z les intersections de la tangente à Ω en D avec les médiatrices de $[DE], [DF]$ respectivement. Soit P l'intersection de (YE) et (ZF) (on suppose qu'elle existe) et T l'intersection des tangentes en B et C de (ABC). Montrer l'alignement P, G, T.

Exercice 7

Soit ABC un triangle avec M, N les milieux de $[AB], [AC]$ respectivement et T le pôle sud issu de A dans (ABC). Les cercles (AMT) et (ANT) intersectent les médiatrices de $[AC]$ et $[AB]$ en X et Y respectivement. On suppose que X et Y se situent à l'intérieur de ABC. Les droites (XY) et (MN) se coupent en K. Montrer que $KA = KT$.

Exercice 8

Soit $ABCD$ un quadrilatère avec (AB) pas parallèle à (CD) tel que (AD) et (BC) se coupent en P. Les points $O1, O2$ et $H1, H2$ sont respevctivement les centres des cercles circonscrits et les orthocentres des triangles ABP et CDP. Soient $E1, E2$ les milieux respectifs de $[O1H1], [O2, H2]$. Montrer que la perpendiculaire à (CD) issue de $E1$ et la perpendiculaire à (AB) issue de $E2$ se coupent sur $(H1H2)$.