Le théorème de Pascal

Martin Rakovsky

Le but de ce TD est de mettre en avant le théorème de Pascal pour qu'il fasse parti des réflexes des élèves. On en profitera pour revoir d'autres méthodes dans des exercices où le théorème de Pascal n'est qu'une étape.

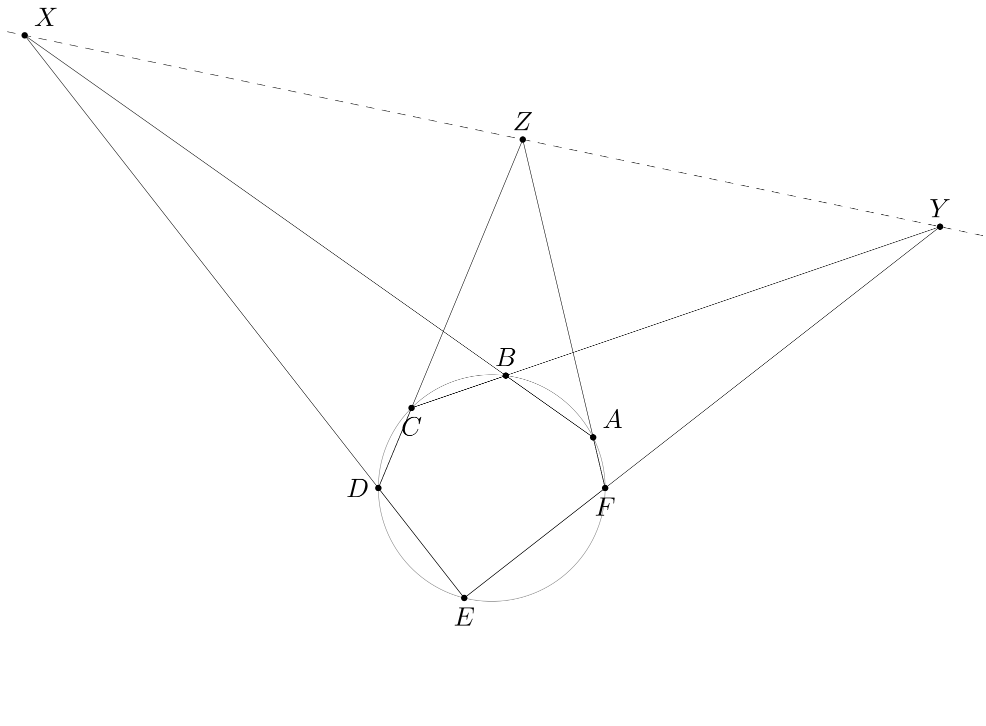
1 Enoncé du théorème

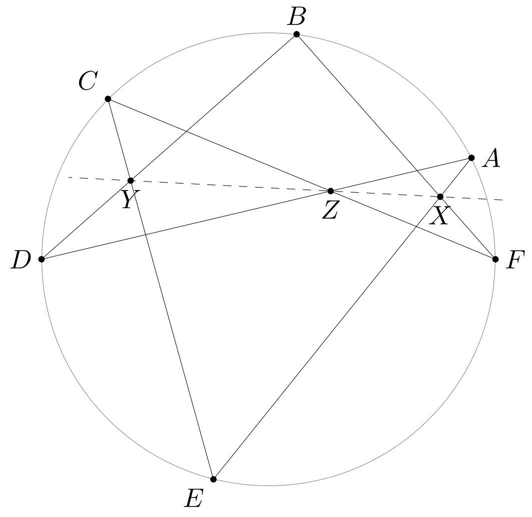
Voici le théorème :

Théorème 1. Soit ω un cercle et soient A, B, C, D, E et F six points de ω. Alors les points suivants sont alignés :

- $(AB) \cap (DE)$
- $(BC) \cap (EF)$
- $(CD) \cap (FA)$

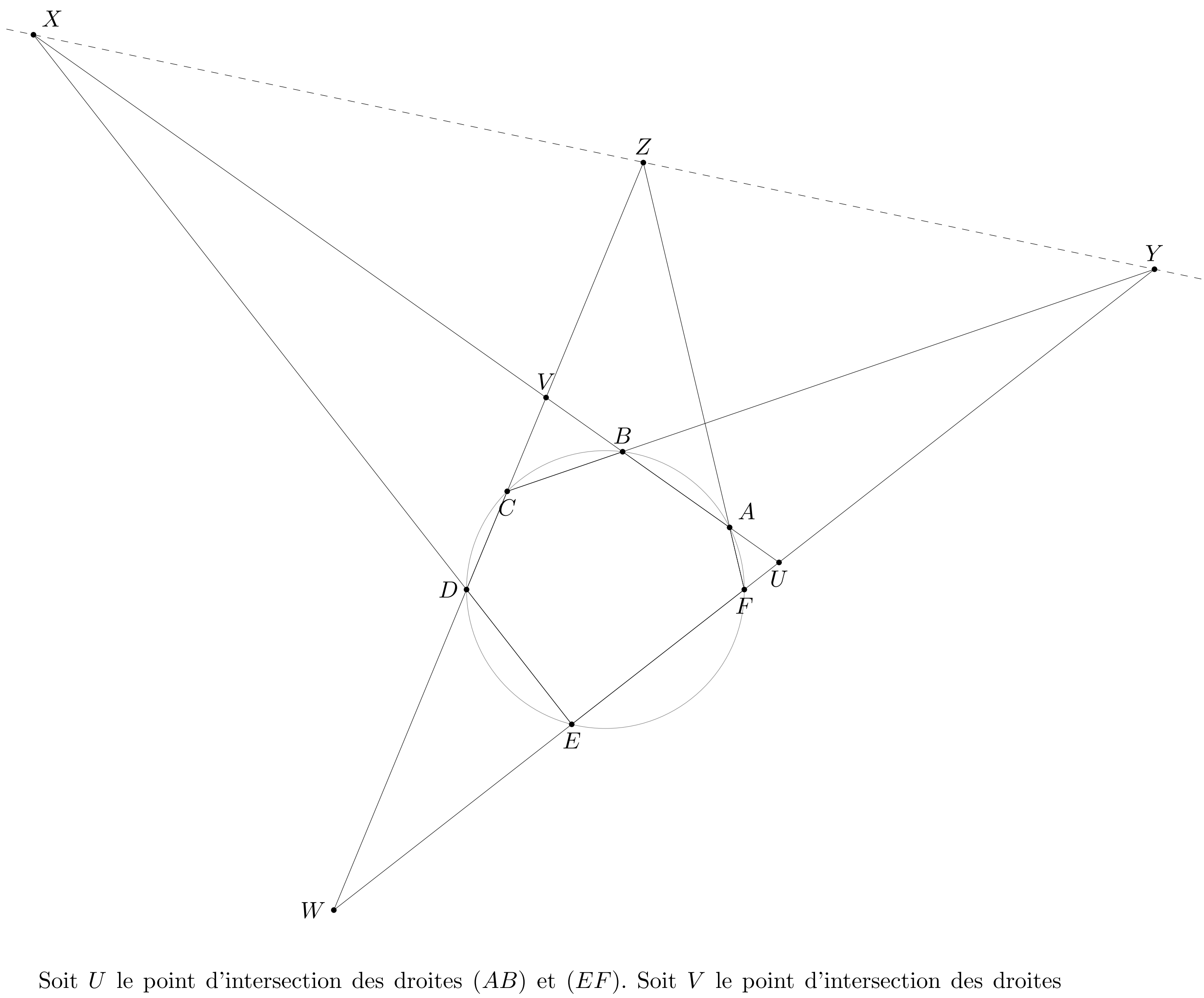
Remarquons d'emblée que l'ordre des points sur le cercle n'était pas spécifié, et c'est normal puisque le théorème est vrai quelque soit l'ordre des points sur le cercle ! De façon générale, on parle plutôt d'hexagone inscrit dans un cercle. On choisit alors l'hexagone auquel on désire appliquer le théorème. L'alignement obtenu par le théorème ne concerne pas les même points si l'on choisit l'hexagone $ABCDEF$ que si l'on choisit l'hexagone $AECFBD$.





On dispose de nombreuses preuves, on en présente une qui n'est pas "trop" projective, avec le théorème de Ménélaüs.

Démonstration.



Soit U le point d'intersection des droites (AB) et (EF). Soit V le point d'intersection des droites (DC) et (AB). Soit W le point d'intersection (DC) et (EF). On va appliquer le théorème de Ménélaüs au triangle UVW et aux points X, Y et Z.

Pour cela, on désire montrer que

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{YU}{YW} \cdot \frac{ZW}{ZV} = 1$$

Pour cela, on va utiliser à volonté le théorème de Ménélaüs et la puissance d'un point par rapport à un cercle.

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points E, D et X, on a

$$\frac{XV}{XU} \cdot \frac{EU}{EW} \cdot \frac{DW}{DV} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points F, A et Z, on a

$$\frac{ZW}{ZV} \cdot \frac{AV}{AU} \cdot \frac{FU}{FW} = 1$$

D'après le théorème de Ménélaüs dans le triangle UVW et pour les points C, B et Y, on a

$$\frac{YU}{YW} \cdot \frac{CW}{CV} \cdot \frac{BV}{BU} = 1$$

On calcule donc le produit des trois égalités en regroupant les termes

$$\begin{aligned}
1 &= \left(\tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{EU}{EW} \cdot \tfrac{DW}{DV}\right) \cdot \left(\tfrac{ZW}{ZV} \cdot \tfrac{AV}{AU} \cdot \tfrac{FU}{FW}\right) \cdot \left(\tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{CW}{CV} \cdot \tfrac{BV}{BU}\right) \\
&= \left(\tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{ZW}{ZV}\right) \cdot \tfrac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU} \cdot \tfrac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV} \cdot \tfrac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW} \\
&= \tfrac{XV}{XU} \cdot \tfrac{YU}{YW} \cdot \tfrac{ZW}{ZV}
\end{aligned}$$

En effet les fractions $\frac{EU \cdot FU}{AU \cdot BU}$, $\frac{AV \cdot BV}{CV \cdot DV}$ et $\frac{CW \cdot DW}{EW \cdot FW}$ vaut 1 par puissance d'un point.
On a obtenu le résultat voulu. □

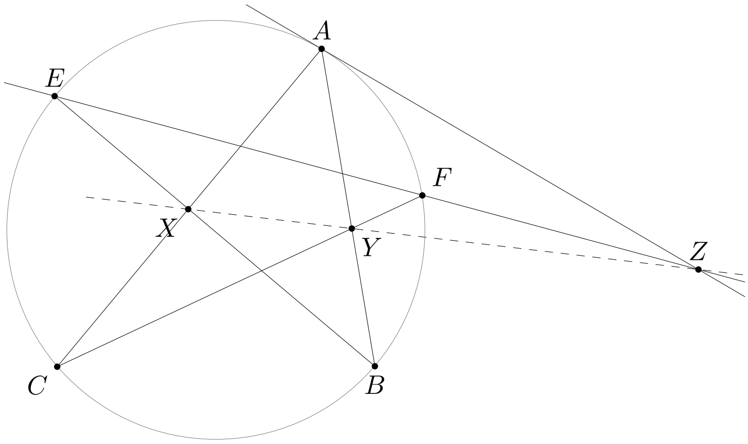
Comment retenir le théorème ? Une fois que l'on a choisi l'hexagone que l'on désire utiliser, on peut imaginer le coloriage suivant pour obtenir les points alignés :

$ABCDEF \qquad ABCDEF \qquad ABCDEF$

Les groupes de lettres voisines de même couleurs correspondent à des droites.

2 Cas dégénéré

On peut se demander ce qu'il se passe si l'on choisit deux fois le même point dans l'hexagone, en considérant par exemple l'hexagone $AABEFC$. La réponse est que le théorème s'applique toujours ! La droite (AA) correspond en fait à la droite tangente au cercle ω. On peut même séparer les deux points A et considérer l'hexagone $ABCAEF$.



Ceci peut être appliqué à l'extrême pour résoudre l'exercice suivant :

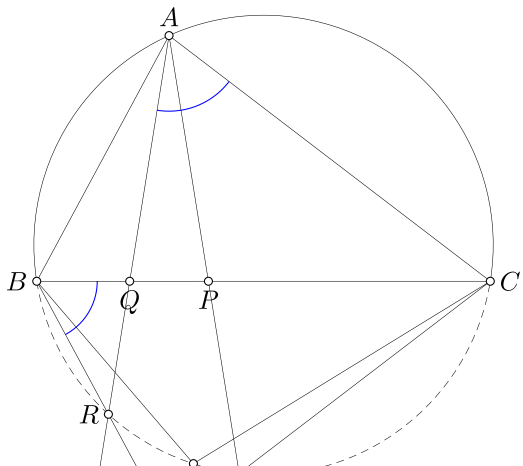
Problème 1. Soit ABC un triangel et ω son cercle circonscrit. On note X le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point A avec la droite (BC), Y le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point B avec la droite (AC) et Z le point d'intersection de la tangente au cercle ω au point C avec la droite (AB). Montrer que les points X, Y et Z sont alignés.

Solution 1. Il suffit d'appliquer le théorème de Pascal à l'hexagone $AABBCC$ pour obtenir que les points $X = (AA) \cap (BC)$, $Y = (BB) \cap (AC)$ et $Z = (CC) \cap (AB)$ sont alignés.

3 Une utilisation subtile

On présente ici à travers un exemple comment on peut déduire une cocyclicité avec le théorème de Pascal.

Problème 2. (IMO 2014 P4) Soit ABC un triangle. Les points P et Q appartiennent au segment $[BC]$ de telle sorte que $\widehat{PAB} = \widehat{BCA}$ et $\widehat{CAQ} = \widehat{ABC}$. Les points M et N appartiennent respectivement aux droites (AP) et (AQ) de telle sorte que le point P soit le milieu du segment $[AM]$ et que le point Q soit le milieu du segment $[AN]$. Montrer que le point d'intersection des droites (BM) et (CN) appartient au cercle circonscrit du triangle ABC.



Solution 2.

On introduit les points R et S, points d'intersection des droites (AN) et (AM) respectivement avec le cercle circonscrit au triangle ABC. Voici l'idée :

Les points A, B, R, S et C définissent une conique (ici, un cercle). Si l'on parvient à démontrer que le théorème de Pascal est vérifié pour l'hexagone $ARBXCS$, on aura démontré que ces six points appartiennent à la même conique, et donc que le point X appartient à la conique définie par les points A, B, R, S et C, et donc que le point X appartient au cercle circonscrit au triangle ABC.

On note L le point d'intersection des droites (BR) et (CS). Il s'agit de démontrer que les points $L = (BR) \cap (CS)$, $M = (BX) \cap (AS)$ et $N = (CX) \cap (AR)$ sont alignés.

On a $\widehat{RBC} = \widehat{RAC} = \widehat{QAC} = \widehat{CBA}$. De même on obtient que $\widehat{SCA} = \widehat{BCA}$. Le point L est donc le symétrique du point A par rapport au segment $[BC]$. Les points M, N et L sont donc les images respectives des points P, Q et du pied de la hauteur issue du sommet A dans le triangle ABC par l'homothétie de centre A de rapport 2. Puisque les points P, Q et le pied de la hauteur issue du sommet A sont alignés, il en est de même des points M, N et L. On a démontré ce que l'on désirait.

La leçon à retenir est que l'on peut démontrer des cocyclicités à l'aide du théorème de Pascal : s'il est vérifié pour une hexagone dont 5 des sommets sont sur un même cercle, alors le sixième sommet est lui aussi sur ce cercle.

4 Exercices

Problème 1. Soit ABC un triangle. Soient S_B et S_C les pôles Sud des points B et C. Soient E et F les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que la tangente au cercle circonscirt au triangle ABC en A et les droites (EF) et $(S_B S_C)$ sont concourantes.

Problème 2. (BXMO 2010) Soient A, B et P trois points alignés dans cet ordre sur une droite l. Soit a la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point A. Soit b la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point B. Une droite passant par le point P distincte de la droite l coupe la droite a en Q et la droite b en R. La perpendiculaire à la droite (BQ) passant par A coupe la droite (BQ) au point L et la droite (BR) au point T. La perpendiculaire à la droite (AR) passant par le point B coupe la droite (AR) en K et la droite (AQ) en S.

1) Montrer que les points P, T et S sont alignés.

2) Montrer que les points P, K et L sont alignés.

Problème 3. Soit ABC un triangle, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues des sommets B et C, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$ et P et Q les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que les droites $(PQ), (EF)$ et $(H_B H_C)$ sont concourantes.

Problème 4. (G2 2004) Soit Γ un cercle et soit d une droite ne passant par aucun point du cercle Γ. Soit $[AB]$ le diamètre du cerlce Γ perpendiculaire à la droite d et tel que le point B est plus proche que le point A de la droite d. Soit C un point arbitraire sur le cercle Γ, distinct des points A et B. Soit D le point d'intersection des droites d et (AC). L'une des deux tangentes au cercle Γ issues du point D touche le cercle au point e, en supposant que les points B et E sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Soit F le point d'intersection des droites (BE) et d. Soit G le second point d'intersection de la droite (AF) avec le cercle Γ. Montrer que le symétrique du point G par rapport au segment $[AB]$ appartient à la droite (CF).

Problème 5. (ELMO 2014 SL G4) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle ω. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (CD) au point E. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (BC) au point F. La droite (BE) recoupe le cercle ω au point G. Les droites (BE) et (AD) se coupent au point H. La droite (DF) recoupe le cercle ω au point I et les droites (DF) et (AB) se coupent au point J. Montrer que les droites $(GI), (HJ)$ et la symmédiane issue du sommet B dans le triangle ABC sont concourantes.

Problème 6. Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles inscrits aux triangles ACD et ABD. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BE) et (CF). Les droites (BE) et (BF) recoupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PQX et RSX. Prouver que le point Y appartient à (AD).

Problème 7. (FRA TST 2017/2018) . Soient deux cercles ω_1 et ω_2 tangents l'un a l'autre en un point T, tels que le cercle ω_1 soit à l'interieur du cercle ω_2. Soient M et N deux points distincts sur le cercle ω_1, differents du point T. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes du cercle ω_2 passant respectivement par les points M et N. On suppose que les segments $[BD]$, $[AC]$ et $[MN]$ s'intersectent en un point K. Montrer que la droite (TK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

Problème 8. (RMM 2016 P1) Soit ABC un triangle et soit A' le symétrique du point A par rapport au segment $[BC]$. Soit D un point du segment $[BC]$ différent des points B et C. Le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en un point E. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en un point F. Les droites $(A'C)$ et (DE) se coupent en un point P et les droites $(A'B)$ et (DF) se coupent en un point Q. Montrer que les droites $(AD), (BP)$ et (CQ) sont concourrantes ou parallèles.

Problème 9. (Envoi de géométrie 2019/2020) Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et D le point de tangence de ce cercle avec le segment $[AC]$. Les droites (OI) et (AB) se coupent en un point P. Soit M le milieu de l'arc AC ne contenant pas B et N le milieu de l'arc BC contenant A.

Montrer que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.

Problème 10. (Vietnam MO 2019) Soit ABC un triangle non isocèle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soient M, N et P les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soient D, E et F les pieds des hauteurs issuées des sommets A, B et C. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soit K le symétrique du point H par rapport à la droite (BC). Les droites (DE) et (MP) se coupent au point X. Les droites (DF) et (MN) se coupent au point Y.

1) La droite (XY) coupe le petit arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC au point Z. Montrer que les points K, Z, E et F sont cocycliques.

2) Les droites (KE) et (KF) coupent le cercle circonscrit au triangle ABC une deuxième fois aux points S et T respectivement. Montrer que les droites $(BS), (CT)$ et (XY) sont concourantes.

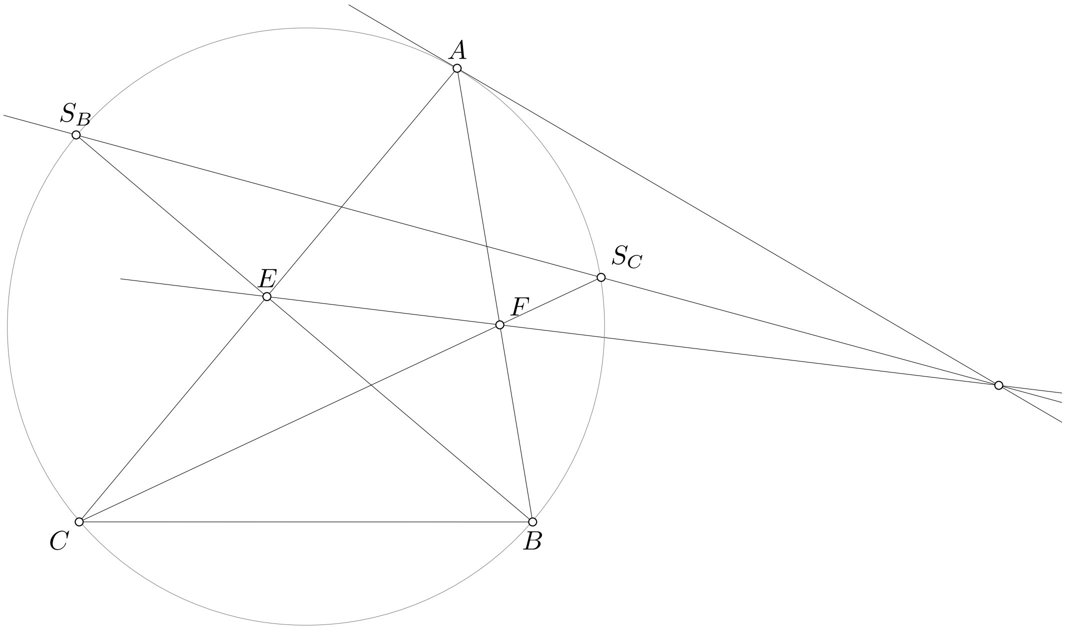
Problème 11. (G5 IMO 2007) Soit ABC un triangle fixé, Γ son cercle circonscrit et P un point appartenant au cercle Γ. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. La droite (PA_1) recoupe le cercle Γ en un point A'. Les points B' et C' sont définis de façon similaire. On suppose les points A, B, C, A', B' et C' distincts. Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') forment un triangle. Montrer que l'aire de ce triangle ne dépend pas du point P.

Problème 12. (G5 IMO 2011) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et ω son cercle circonscrit. Soient D et E les seconds points d'intersection des droites (AI) et (BI) avec le cercle ω. La corde (DE) coupe la droite (AC) au point F et la droite (BC) au point G. Soit P le point d'intersection de la parallèle à la droite (AD) passant par le point F avec la parallèle à la droite (BE) passant par le point G. On note K le point d'intersection des tangentes au cercle ω en les points A et B. Montrer que les droites $(AE), (BD)$ et (KP) sont concourantes ou parallèles.

5 Solutions

Problème 1. Soit ABC un triangle. Soient S_B et S_C les pôles Sud des points B et C. Soient E et F les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que la tangente au cercle circonscirt au triangle ABC en A et les droites (EF) et (S_BS_C) sont concourantes.

Solution 1.



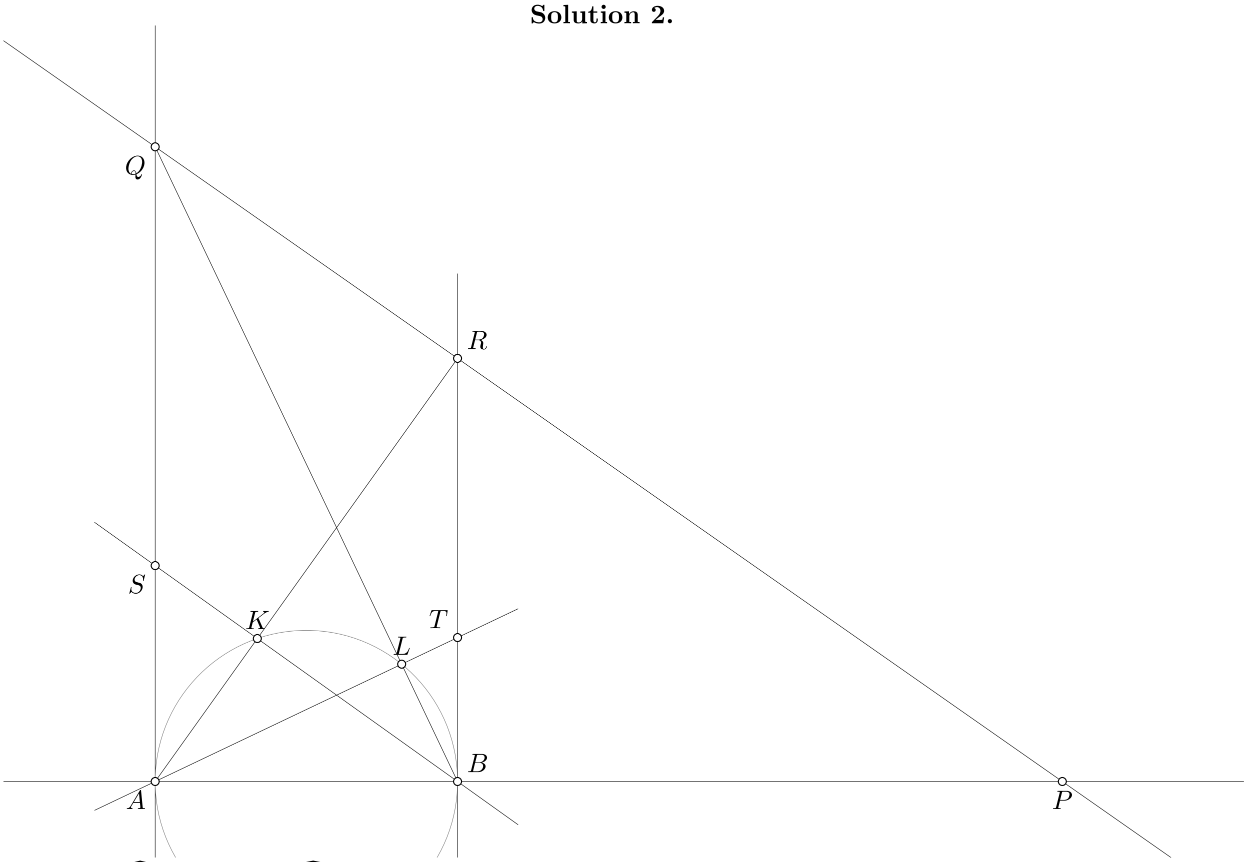
D'après le théorème de pascal appliqué à l'hexagone $AABS_BS_CC$, les points $(AA) \cap (S_BS_C)$, $F = (AB) \cap (CS_C)$ et $E = (AC) \cap (BS_B)$ sont alignés, ce qui se traduit par le fait que les droites (EF) et (S_BS_C) ainsi que la tangente au point A sont concourantes.

Problème 2. (BXMO 2010) Soient A, B et P trois points alignés dans cet ordre sur une droite l. Soit a la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point A. Soit b la droite perpendiculaire à la droite l passant par le point B. Une droite passant par le point P distincte de la droite l coupe la droite a en Q et la droite b en R. La perpendiculaire à la droite (BQ) passant par A coupe la droite (BQ) au point L et la droite (BR) au point T. La perpendiculaire à la droite (AR) passant par le point B coupe la droite (AR) en K et la droite (AQ) en S.

1) Montrer que les points P, T et S sont alignés.

2) Montrer que les points P, K et L sont alignés.

Solution 2.



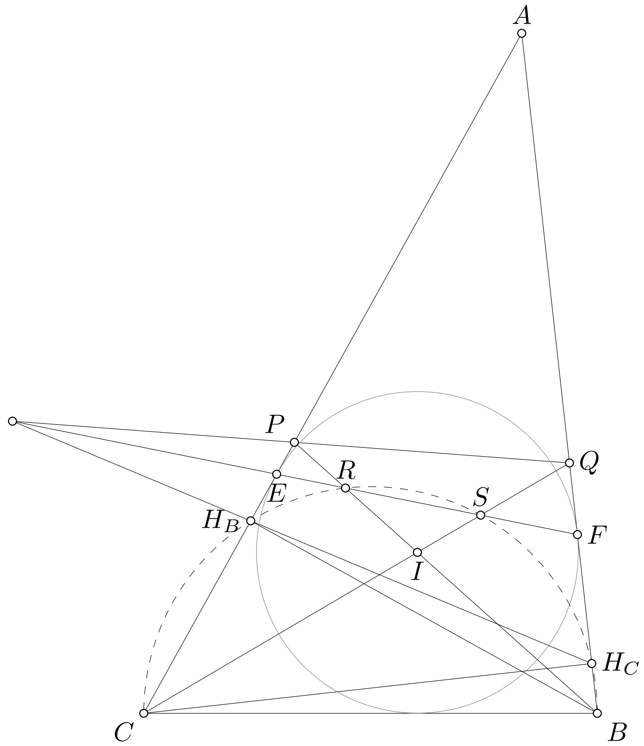
On a $\widehat{BLA} = 90° = \widehat{AKB}$ donc les points A, K, L et B sont cocycliques. On note ω le cercle obtenu. La droite a est tangente au cercle ω au point A et la droite b est tangente au cercle ω au point B.

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $AAKLBB$, les points $Q = (AA) \cap (BL)$, $R = (AK) \cap (BB)$ et $(KL) \cap (AB)$ sont alignés. Les droites $(QR), (KL)$ et (AB) sont donc concourantes au point P donc les points P, K et L sont alignés.

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $AALKBB$, les points $S = (AA) \cap (BK)$, $T = (AL) \cap (BB)$ et $P = (KL) \cap (AB)$ sont alignés.

On a répondu aux deux questions.

Problème 3. Soit ABC un triangle, H_B et H_C les pieds des hauteurs issues des sommets B et C, E et F les points de contact du cercle inscrit avec les côtés $[AC]$ et $[AB]$ et P et Q les pieds des bissectrices issues des sommets B et C. Montrer que les droites $(PQ), (EF)$ et (H_BH_C) sont concourantes.



Solution 3.

Soit ω le cercle de diamètre $[BC]$. Le point clé est le lemme suivant : les droites (BI) et (EF) se coupent sur le cercle ω et les droites (CI) et (EF) se coupent sur le cercle ω.

En effet, si l'on pose R le second point d'intersection de la droite (BI) avec le cercle ω, on a $\widehat{CRI} = \widehat{CRB} = 90°$. Les points C, E, R et I sont donc cocycliques.

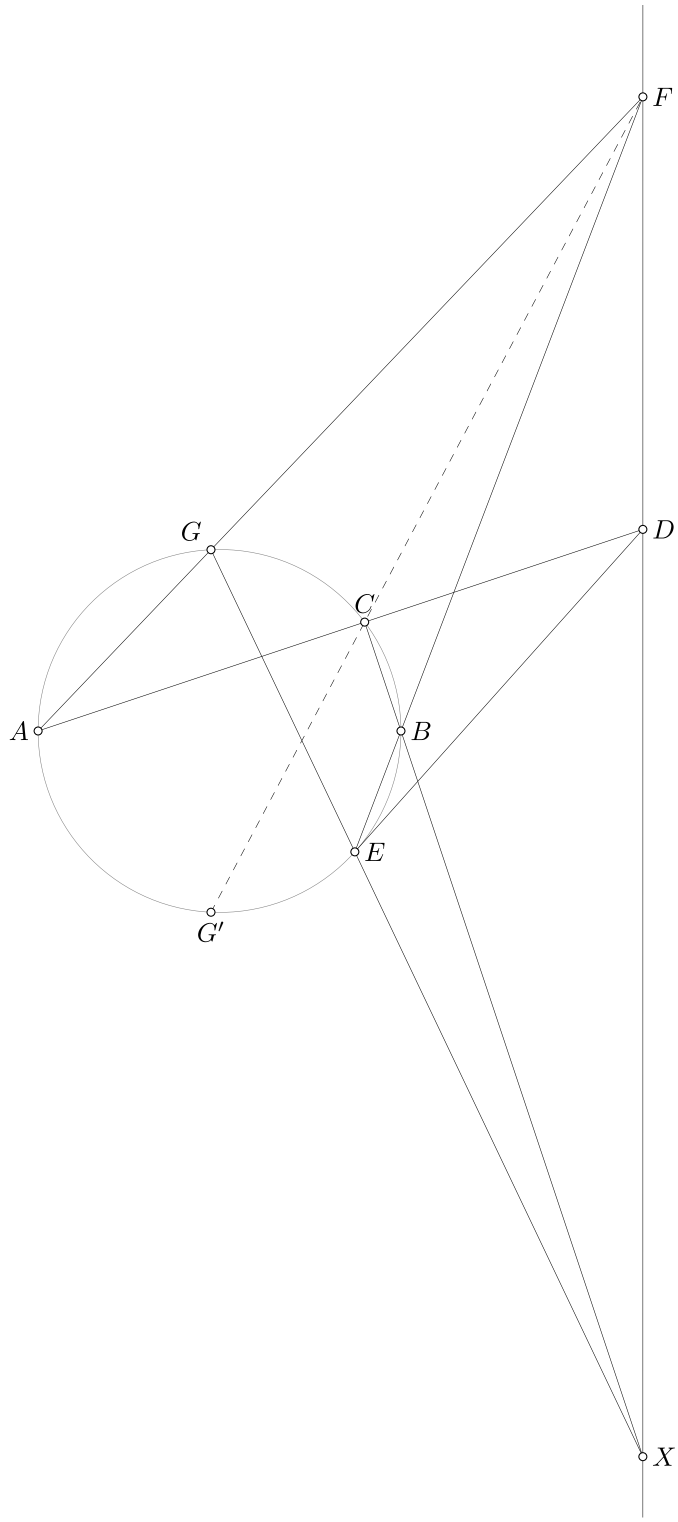
On pose alors S le second point d'intersection de la droite (CI) avec le cercle ω. On obtient

$$\widehat{IRS} = \widehat{ICB} = \frac{1}{2}\widehat{BCA} = \widehat{ICE} = 180° - \widehat{ERI}$$

Les points E, R et S sont donc alignés et de la même façon les points R, S et F sont alignés. En conclusion, les points R et S appartiennent à la droite (EF).

En appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone cyclique $RSCH_BH_CB$, les points $(RS) \cap (H_BH_C)$, $Q = (CS) \cap (BH_C)$ et $P = (BR) \cap (CH_B)$ sont alignés, ce qui signifie bien que les droites $(PQ), (EF)$ et (H_BH_C) sont concourantes.

Problème 4. (G2 2004) Soit Γ un cercle et soit d une droite ne passant par aucun point du cercle Γ. Soit $[AB]$ le diamètre du cerlce Γ perpendiculaire à la droite d et tel que le point B est plus proche que le point A de la droite d. Soit C un point arbitraire sur le cercle Γ, distinct des points A et B. Soit D le point d'intersection des droites d et (AC). L'une des deux tangentes au cercle Γ issues du point D touche le cercle au point e, en supposant que les points B et E sont dans le même demi-plan délimité par la droite (AC). Soit F le point d'intersection des droites (BE) et d. Soit G le second point d'intersection de la droite (AF) avec le cercle Γ. Montrer que le symétrique du point G par rapport au segment $[AB]$ appartient à la droite (CF).



Solution 4.

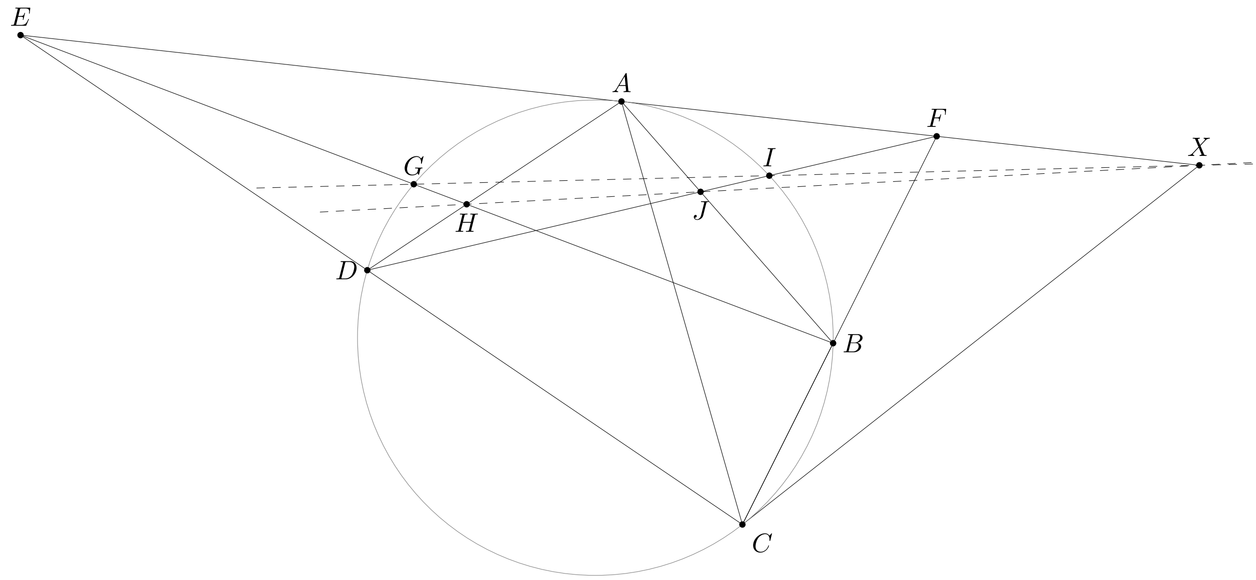
D'après le théorème de Pascal pour l'hexagone $EEBCAG$, les points $D = (EE) \cap (AC)$, $F = (EB) \cap (AG)$ et $(BC) \cap (EG)$ sont alignés. On note X le point d'intersection des droites (GE) et (BC), qui appartient donc à la droite d.

On note G' le symétrique du point G par rapport au segment $[AB]$. Le point G' appartient donc au cercle Γ. D'après le théorème de Pascal pour l'hexagone $GEBBCG'$, les points $X = (GE) \cap (BC)$, $(EB) \cap (CG')$ et $(GG') \cap (BB)$ sont alignés.

Or les droites (BB) et (GG') sont toutes les deux perpendiculaires au segment $[AB]$, donc elles sont parallèles. Le point d'intersection des droites (GG') et (BB) est donc le point à l'infini porté par la droite d (qui est parallèle à la droite (BB)). Ainsi, si on note $F' = (EB) \cap (CG')$, l'alignement mis en évidence se traduit par le fait que les droites (XF') et (BB) sont parallèles, donc que le point F' appartient à la droite d. On a donc que $F = F'$ et les points G', C et F sont bien alignés.

Problème 5. (ELMO 2014 SL G4) Soit $ABCD$ un quadrilatère inscrit dans un cercle ω. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (CD) au point E. La tangente au cercle ω au point A coupe la droite (BC) au point F. La droite (BE) recoupe le cercle ω au point G. Les droites (BE) et (AD) se coupent au point H. La droite (DF) recoupe le cercle ω au point I et les droites (DF) et (AB) se coupent au point J. Montrer que les droites $(GI), (HJ)$ et la symmédiane issue du sommet B dans le triangle ABC sont concourantes.

Solution 5.



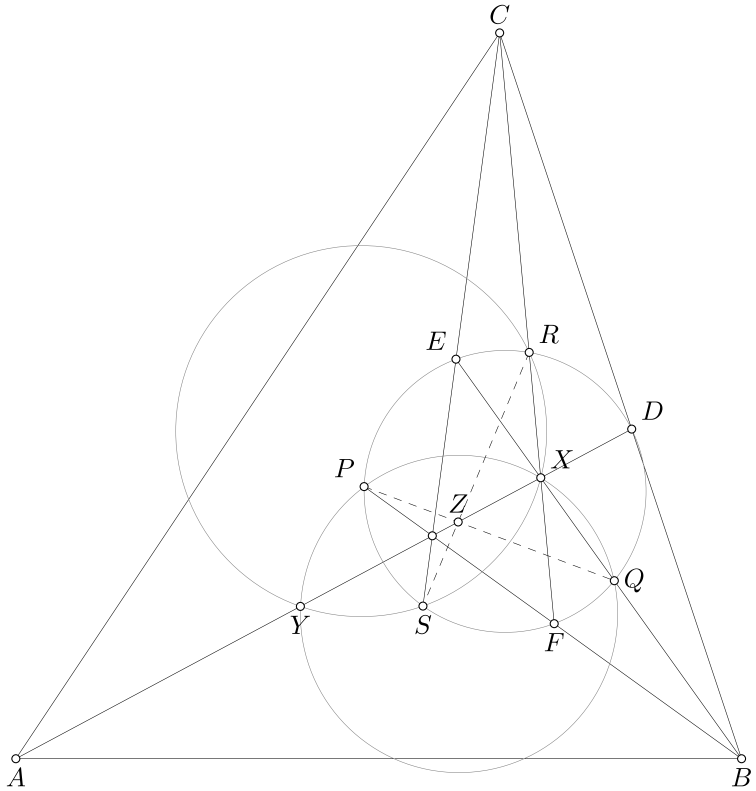
Une figure exacte montrer que le point de concours appartient à la droite (EF). Cette droite va donc nous servir d'intermédiaire.

Le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $AABGID$ nous montre que les points $(AB) \cap (ID) = J$, $(BG) \cap (DA) = H$ et $(AA) \cap (GI)$ sont alignés. On note X le dernier point.

Le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $CCBGID$ nous montre que les points $(CB) \cap (ID) = F$, $(BG) \cap (DC) = E$ et $(CC) \cap (GI)$ sont alignés. Or la droite (EF) correspond à la tangente au cercle ω au point A. Donc le point d'intersection des droites (EF) et (GI) est le point X. On a donc obtenu que le point X appartient à la tangente au cercle ω au point C. Ainsi, le point X appartient au tangentes au cercle ω (donc à la symmédiane issue du sommet B) et aux droites (HJ) et (GI), ce qui donne le résultat.

Problème 6. Dans le triangle ABC, soit D le pied de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ et E et F les centres respectifs des cercles inscrits aux triangles ACD et ABD. Soit ω le cercle circonscrit à DEF et soit X l'intersection de (BE) et (CF). Les droites (BE) et (BF) recoupent ω en P et Q respectivement et les droites (CE) et (CF) recoupent ω en R et S respectivement. Soit Y le second point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles PQX et RSX. Prouver que le point Y appartient à (AD).

Solution 6.



Soit I le centre du cercle inscrit du triangle ABC. Par théorème de la bissectrice :

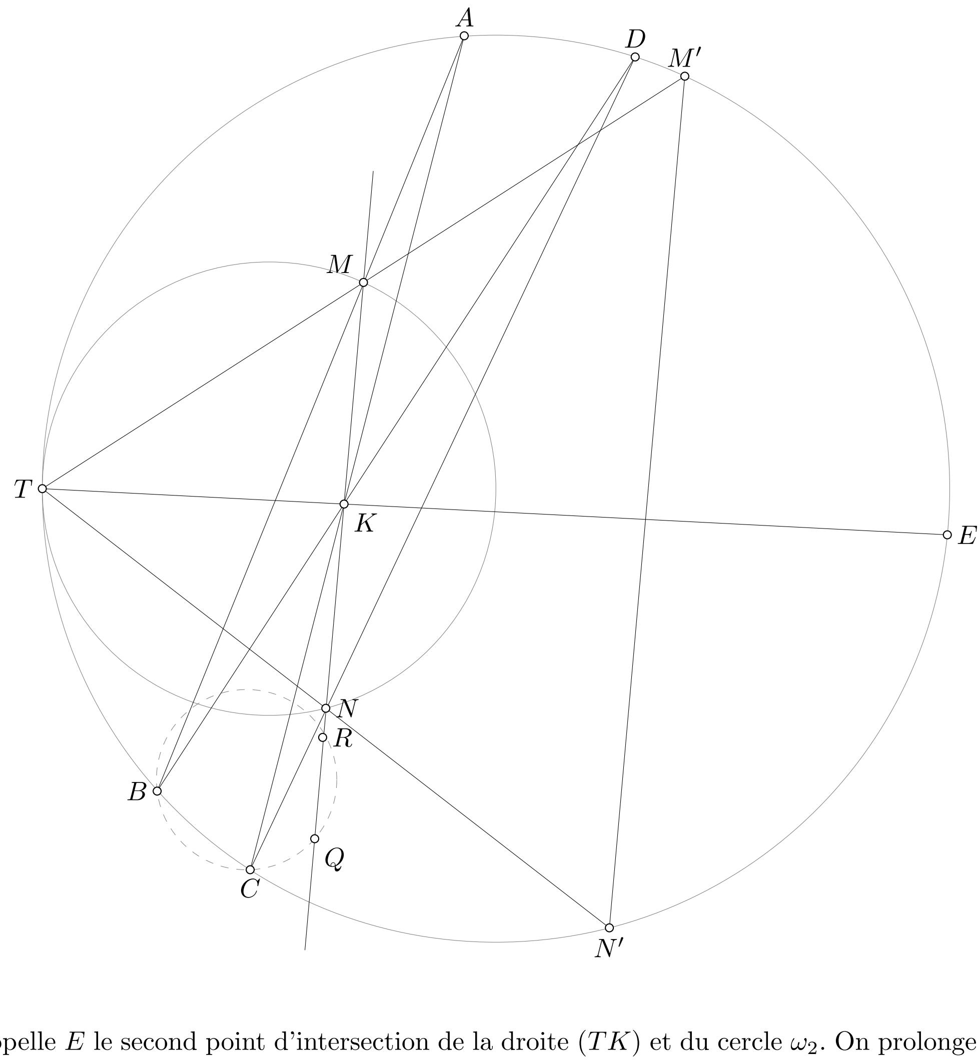
$$\frac{IE}{EC} \cdot \frac{DC}{DB} \cdot \frac{BF}{IF} = \frac{AI}{AC} \cdot \frac{AC}{AB} \cdot \frac{AB}{AI} = 1$$

Donc, d'après le théorème de Céva, le point X est sur la droite (ID).

Soit Z le point d'intersection des droites (RS) et (PQ). Par le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $PFRSEQ$, les points X, I, Z sont alignés. Par puissance d'un point dans le cercle ω, $SZ \cdot RZ = QZ \cdot PZ$ donc le point Z est sur l'axe radical des cercles PQX et RSX, donc le point Z est aligné avec les points X et Y. Il vient que le point Y est sur (AD).

Problème 7. (FRA TST 2017/2018) Soient deux cercles ω_1 et ω_2 tangents l'un a l'autre en un point T, tels que le cercle ω_1 soit à l'interieur du cercle ω_2. Soient M et N deux points distincts sur le cercle ω_1, differents du point T. Soient $[AB]$ et $[CD]$ deux cordes du cercle ω_2 passant respectivement par les points M et N. On suppose que les segments $[BD]$, $[AC]$ et $[MN]$ s'intersectent en un point K. Montrer que la droite (TK) est la bissectrice de l'angle $\widehat{MTN}$.

Solution 7.



On appelle E le second point d'intersection de la droite (TK) et du cercle ω_2. On prolonge les droites (TM) et (TN) qui coupent le cercle ω_2 en les points M' et N'.

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $BACM'TE$ les points $M = (BA) \cap (TM')$, $K = (AC) \cap (TE)$ et $(BE) \cap (CM')$ sont alignés. On note $R = (BE) \cap (CM')$. Le point R appartient donc à la droite (MN). D'après le théorème de Pascal dans l'hexagone $CDBN'TE$, les points $N = (CD) \cap (TN')$, $K = (DB) \cap (ET)$ et $(BN') \cap (EC)$ sont alignés. On pose $Q = (BN') \cap (EC)$. Le point Q appartient donc à la droite (MN). L'homothétie de centre T envoyant le cercle ω_1 sur le cercle ω_2 envoye les points M et N sur les points M' et N'. Les droites (QR) et $(M'N')$ sont donc parallèles. Ainsi :

$$\widehat{CRQ} = \widehat{CM'N'} = \widehat{CBN'} = \widehat{CBQ}$$

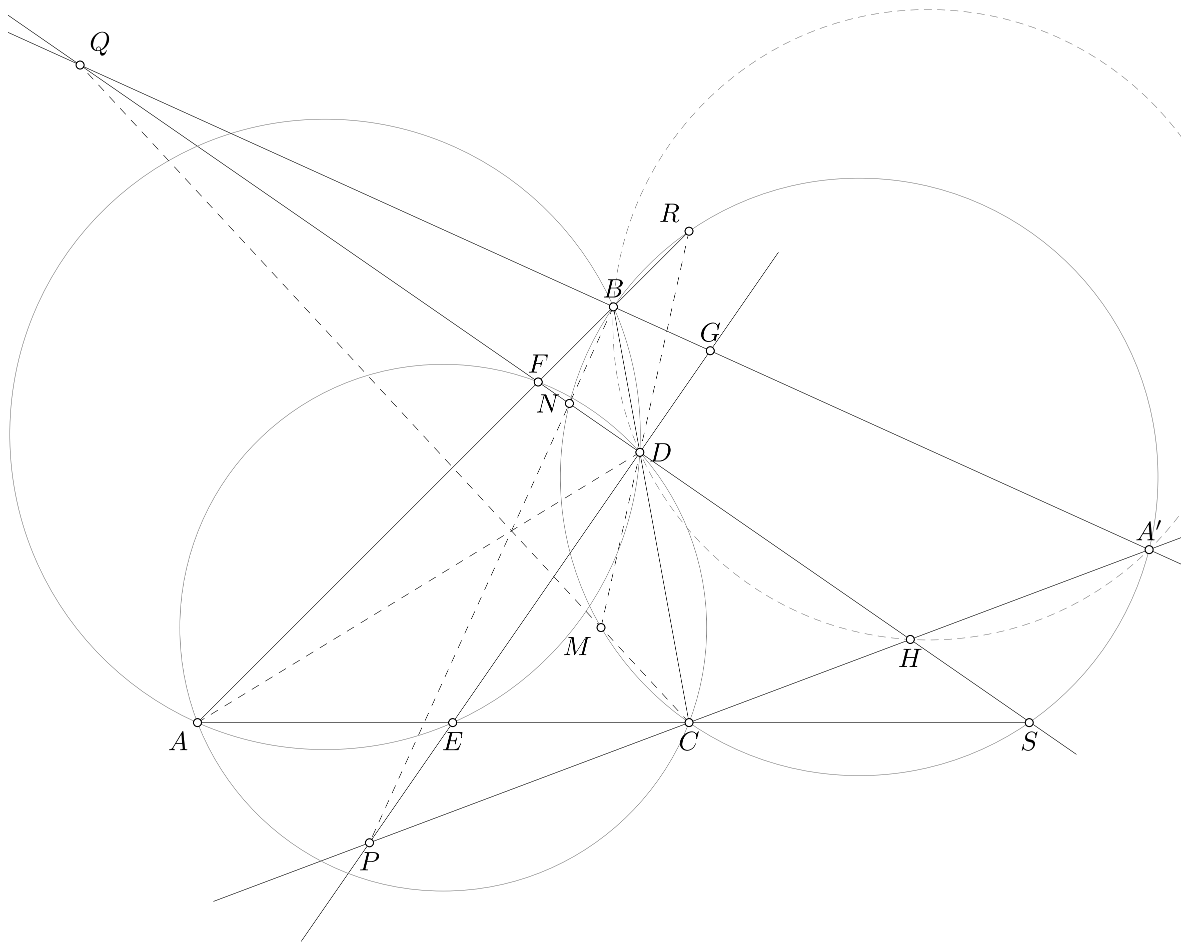
donc le quadrilatère $BCQR$ est cyclique. Alors

$$\widehat{NTK} = \widehat{N'TE} = \widehat{N'BE} = \widehat{QBR} = \widehat{QCR} = \widehat{ECM'} = \widehat{KTM}$$

ce qui prouve que le point K est sur la bissectrice de l'angle $\widehat{NTM}$.

Problème 8. (RMM 2016 P1) Soit ABC un triangle et soit A' le symétrique du point A par rapport au segment $[BC]$. Soit D un point du segment $[BC]$ différent des points B et C. Le cercle circonscrit au triangle ABD recoupe le segment $[AC]$ en un point E. Le cercle circonscrit au triangle ACD recoupe le segment $[AB]$ en un point F. Les droites $(A'C)$ et (DE) se coupent en un point P et les droites $(A'B)$ et (DF) se coupent en un point Q. Montrer que les droites $(AD), (BP)$ et (CQ) sont concourrantes ou parallèles.

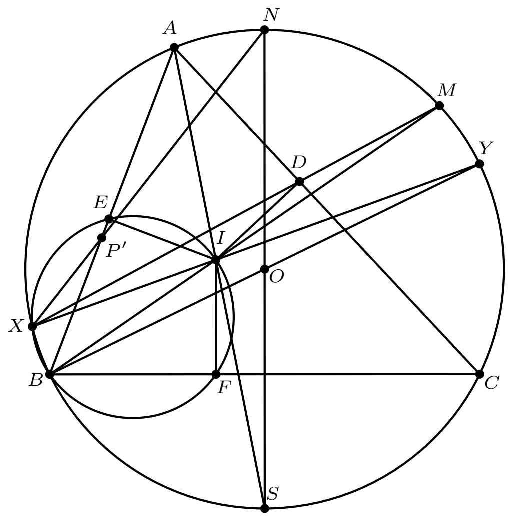
Solution 8.



On note G le point d'intersection des droites (ED) et (BA') et H le point d'intersection des droites (FD) et (CA'). On a $\widehat{HDC} = \widehat{BDF} = 180° - \widehat{FDC} = \widehat{FAC} = \widehat{BAC}$. Donc $\widehat{HDC} = \widehat{EDC}$ donc le point H est le symétrique du point E par rapport à la droite (BC). De la même manière, le point G est symétrique du point F par rapport à la droite (BC). De ce fait, comme les points A, E, D et B sont cocycliques, les points B, A', H et$D$ sont cocycliques et le point de Miquel M du quadrilatère complet $CDBA'QH$ appartient à la droite (CQ). De même, le point de Miquel N du quadrilatère $BDCA'PQ$ est sur la droite (BP). Par définition des points M et N, les points A', B, C, M, N sont cocycliques. Ce cercle coupe la droite (AC) en S et la droite (AB) en R. On essaye de montrer que $D \in (MR)$ désormais. Pour cela on a, puisque les points M, D, B et Q sont cocycliques par définition du point M : $\widehat{CMD} = \widehat{CBQ} = \widehat{CBA'} = \widehat{CBA}$ puisque A' est le symétrique du point A par rapport à la droite (BC). Enfin, on a $\widehat{CBA} = \widehat{CBR} = \widehat{CMR}$ puisque les points C, B, M et R sont cocycliques. On trouve donc $\widehat{CMD} = \widehat{CMR}$ donc le point D appartient bien à la droite (MR) et de même il appartient à la droite (NS), il est donc le point d'intersection des droites (NS) et de (MR). Finalement, en appliquant le théorème de Pascal à l'hexagone $BRMCSN$, les points $A = (BR) \cap (CS)$, $D = (MR) \cap (NS)$ et $(CM) \cap (BN)$ sont alignés, ce qui se traduit par le fait que les droites $(BP), (CQ)$ et (AD) sont concourantes.

Problème 9. Soit ABC un triangle, soit O le centre de son cercle circonscrit. Soit I le centre du cercle inscrit au triangle ABC et D le point de tangence de ce cercle avec le segment $[AC]$. Les droites (OI) et (AB) se coupent en un point P. Soit M le milieu de l'arc AC ne contenant pas B et N le milieu de l'arc BC contenant A.

Montrer que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit à ABC.



Solution 9. Soit X le point d'intersection de la droite (MD) avec le cercle circonscrit au triangle ABC et soit P' le point d'intersection de la droite (XN) avec le segment $[AB]$. Soit S le point d'intersection de la bissectrice de l'angle $\widehat{BAC}$ avec le cercle circonscrit au triangle ABC. On sait que les points N, O et S sont alignés.

Soient E et F les points de contact respectifs du cercle inscrit au triangles ABC avec les segment $[AB]$ et $[BC]$.

Le point M est le milieu de l'arc CA, il est donc sur la bissectrice de l'angle $\widehat{AXC}$. Le point D est le pied de cette bissectrice. D'après le théorème de la bissectrice, $\frac{AX}{XC} = \frac{DA}{DC} = \frac{AE}{CF}$. Puisque $\widehat{EAX} = \widehat{BAX} = \widehat{BCX} = \widehat{FCX}$, il vient que les triangles AEX et CFX sont semblables donc le point X est le centre de la similitude qui envoie les points E et F sur les points A et C, il est donc le point d'intersection des cercles circonscrits aux triangles ABC et EFB. Puisque $[BI]$ est un diamètre du cercle circonscrit au triangle EBF, on déduit $\widehat{IXB} = 90°$. Soit Y le point diamétralement opposé au point B dans le cercle circonscrit au triangle ABC. Alors $\widehat{YXB} = 90 = \widehat{IXB}$. Les points X, I et Y sont donc alignés.

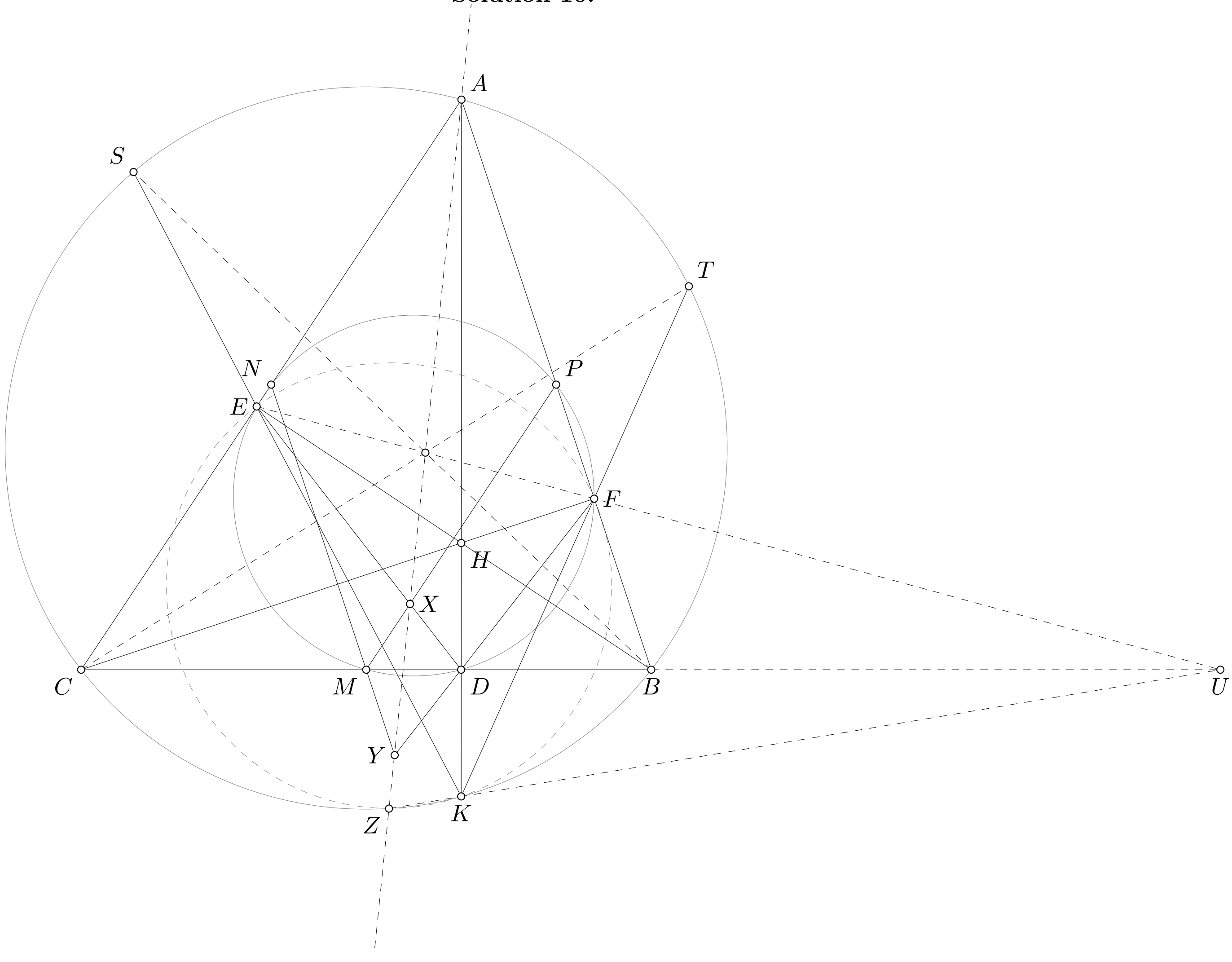
D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $SABYXN$, les points $O = (BY) \cap (SN)$, $I = (YX) \cap (AS)$ et $P' = (AB) \cap (XN)$ sont alignés. Le point P' correspond donc au point d'intersection des droites (OI) et (AB) donc $P = P'$ ce qui donne bien que les droites (MD) et (NP) se coupent sur le cercle circonscrit au triangle ABC.

Problème 10. (Vietnam MO 2019) Soit ABC un triangle non isocèle et soit O le centre de son cercle circonscrit. Soient M, N et P les milieux des côtés $[BC], [CA]$ et $[AB]$. Soient D, E et F les pieds des hauteurs issuées des sommets A, B et C. Soit H l'orthocentre du triangle ABC. Soit K le symétrique du point H par rapport à la droite (BC). Les droites (DE) et (MP) se coupent au point X. Les droites (DF) et (MN) se coupent au point Y.

1) La droite (XY) coupe le petit arc BC du cercle circonscrit au triangle ABC au point Z. Montrer que les points K, Z, E et F sont cocycliques.

2) Les droites (KE) et (KF) coupent le cercle circonscrit au triangle ABC une deuxième fois aux points S et T respectivement. Montrer que les droites $(BS), (CT)$ et (XY) sont concourantes.

Solution 10.



1) D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $NMPFDE$, les points $Y = (NM) \cap (FD)$, $X = (MP) \cap (DE)$ et $A = (PF) \cap (EN)$ sont alignés. Soit Q le point d'intersection des droites (EF) et (AY). D'après le théorème de Ménélaüs appliqué au triangle DEF et aux points Q, X et Y, on a

$$\frac{QE}{QF} \cdot \frac{YF}{YD} \cdot \frac{XD}{XE} = 1$$

Or d'après le théorème de Thalès, $\frac{YF}{YD} = \frac{DF}{YD} + 1 = \frac{DB}{DM} + 1 = \frac{MB}{MD}$ et $\frac{XD}{XE} = \frac{MD}{MC} = \frac{MD}{MB}$ donc

$$\frac{QE}{QF} = 1$$

et le point Q est le milieu du segment $[EF]$. La similitude indirecte de centre A envoyant E sur B et F sur C envoye donc Q sur M donc les droites (AM) et (AQ) sont conjugués isogonales par rapport aux droites (AB) et (AC). La droite (AQ) est donc la symédiane issue du sommet A. Les points A, Z, C et B sont donc harmoniques.

Soit désormais U le point d'intersection des droites (ZK) et (BC). On rappelle que le point K appartient au cercle circonscrit au triangle ABC en tant que symétrique de l'orthocentre par rapport au côté $[BC]$.

En projetant par rapport au point K sur la droite (BC), on obtient

$$-1 = (A, Z, B, C) = (D, U, B, C)$$

Or, le point U' d'intersection des droites (EF) et (BC) vérifie également que les points U', D, B, C sont harmoniques. On a donc $U' = U$, les droites $(EF), (ZK)$ et (BC) sont concourantes. Ainsi, par puissance d'un point :

$$UK \cdot UZ = UB \cdot UC = UE \cdot UF$$

donc par la réciproque, les points E, F, K et Z sont cocycliques.

2) Le point de concours semble être le point Q. Tout d'abord, d'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $KTCABS$, les points $F = (KT) \cap (AB)$, $(CT) \cap (BS)$ et $E = (AC) \cap (KS)$ sont alignés. Il s'agit donc de montrer que le point d'intersection des droites (BS) et (CT) est le point Q.

Les quadrilatères $CEFB$ et $HFBD$ sont cycliques donc $\widehat{QEC} = 180° - \widehat{FBC} = 180° - \widehat{DBF} = \widehat{KHF}$. Ensuite,

$$\frac{HF}{HK} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HF}{HD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HF}{HB} \cdot \frac{HB}{HD} = \frac{1}{2} \cdot \frac{HF}{HB} \cdot \frac{BC}{EC} = \frac{1}{2} \cdot \frac{EF}{EC} = \frac{EQ}{EC}$$

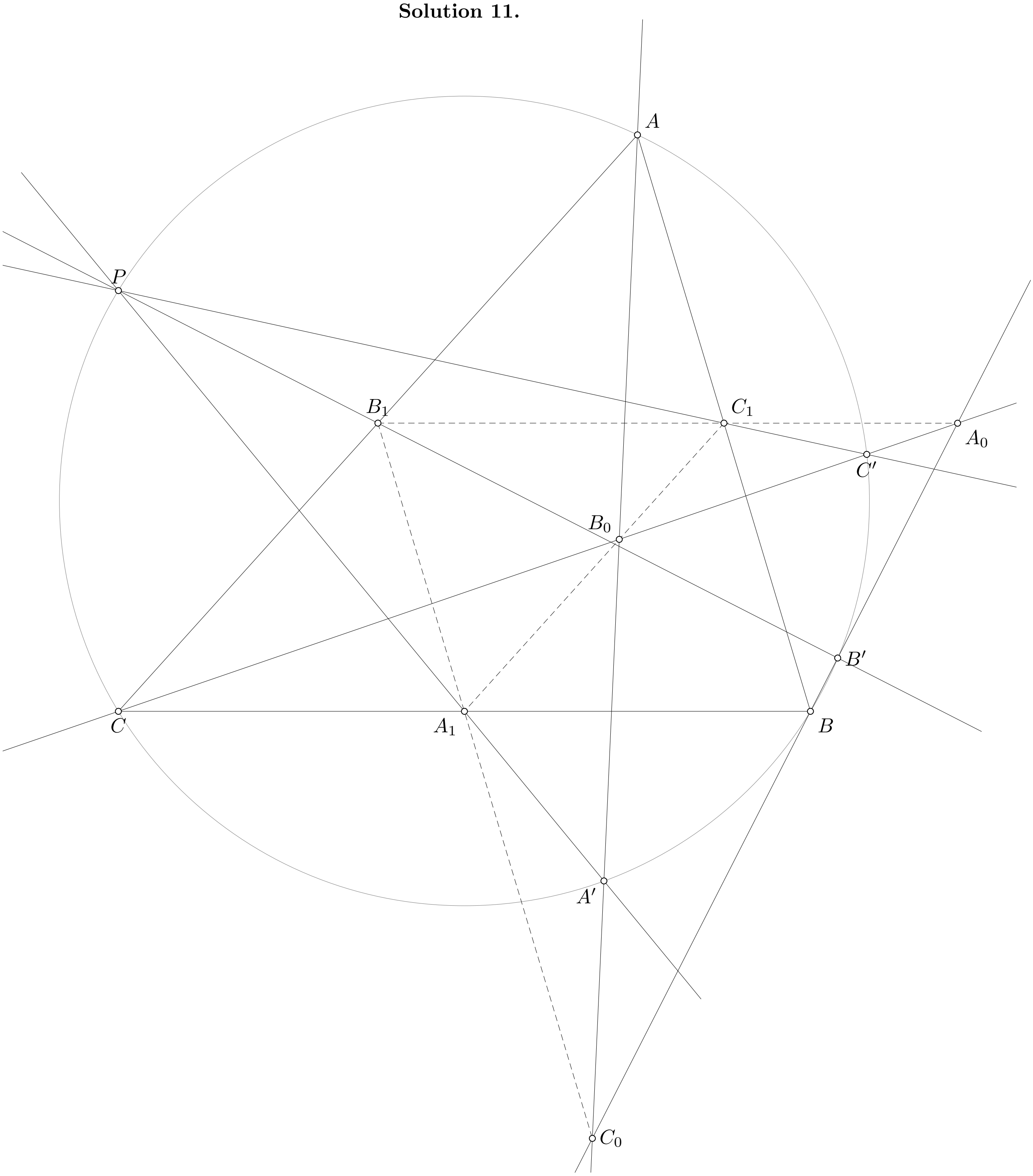
Donc les triangles QEC et FHK sont semblables. Ainsi

$$\widehat{ECQ} = \widehat{HKF} = \widehat{AKT} = \widehat{ECT}$$

donc les points C, Q et T sont alignés. De même les pionts B, Q et S sont alignés, donc les droites (BS) et (CT) se coupent sur la droite (XY).

Problème 11. (G5 IMO 2007) Soit ABC un triangle fixé, Γ son cercle circonscrit et P un point appartenant au cercle Γ. Soient A_1, B_1, C_1 les milieux respectifs des segments $[BC], [CA]$ et $[AB]$. La droite (PA_1) recoupe le cercle Γ en un point A'. Les points B' et C' sont définis de façon similaire. On suppose les points A, B, C, A', B' et C' distincts. Les droites $(AA'), (BB')$ et (CC') forment un triangle. Montrer que l'aire de ce triangle ne dépend pas du point P.

Solution 11.



Lorsque l'on sait que l'on doit appliquer le théorème de Pascal, cet exercice est déjà plus simple.

Notons A_0, B_0 et C_0 les sommets du triangle formé par les trois droites, avec A_0 le point d'intersection des droites (BB') et (CC'), B_0 celui des droites (AA') et (CC') et C_0 celui des droites (AA') et (BB').

D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone cyclique $B'PC'CAB$, les points $B_1 = (B'P) \cap$

(AC), $C_1 = (AB) \cap (PC')$ et $A_0 = (CC') \cap (BB')$ sont alignés.

Les droites (A_1C_1) et (AC) sont parallèles donc d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{A_0B_0}{A_0C} = \frac{A_0C_1}{AB_1}$$

Les droites $(B_1A_)$ et (AB) sont parallèles donc par le théorème de Thalès :

$$\frac{A_0B}{A_0C_0} = \frac{A_0C_1}{A_0B_1}$$

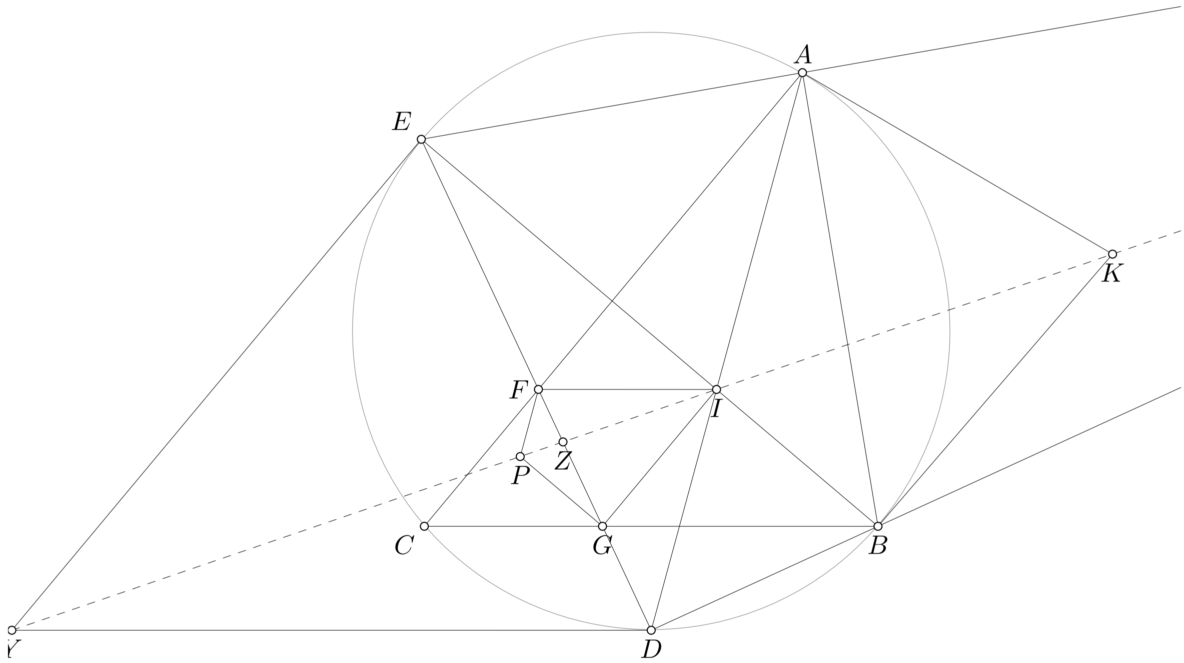
Il vient que $\frac{A_0B}{A_0C_0} = \frac{A_0B_0}{A_0C}$, ou encore $A_0C \cdot A_0B = A_0B_0 \cdot A_0C_0$. On déduit que

$$\text{aire}(A_0B_0C_0) = \frac{1}{2}A_0B_0 \cdot A_0C_0 \cdot \sin\widehat{B_0A_0C_0} = \frac{1}{2}A_0B \cdot A_0C \cdot \sin\widehat{CA_0B} = \text{aire}(A_0BC)$$

Or l'aire du triangle CA_0B est la même que l'aire du triangle CB_1B car les deux triangles ont la même base et une hauteur de même longueur. Ainsi, l'aire du triangle $A_0B_0C_0$ vaut l'aire du triangle CB_1B, c'est-à-dire la moitié de l'aire du triangle ABC, cette aire est donc constante !

Problème 12. (G5 IMO 2011) Soit ABC un triangle, I le centre de son cercle inscrit et ω son cercle circonscrit. Soient D et E les seconds points d'intersection des droites (AI) et (BI) avec le cercle ω. La corde (DE) coupe la droite (AC) au point F et la droite (BC) au point G. Soit P le point d'intersection de la parallèle à la droite (AD) passant par le point F avec la parallèle à la droite (BE) passant par le point G. On note K le point d'intersection des tangentes au cercle ω en les points A et B. Montrer que les droites $(AE), (BD)$ et (KP) sont concourantes ou parallèles.

Solution 12.



On note X le point d'intersection des droites (AE) et (BD). D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $AADBBE$, les points $K = (AA) \cap (BB)$, $I = (AD) \cap (BE)$ et $X = (AE) \cap (BD)$ sont alignés donc il suffit de montrer que les points P, I et K sont alignés.

On note Y le point d'intersection des tangentes au cercle ω aux points E et D. D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $DDAEEB$, les points $Y = (DD) \cap (EE)$, $I = (AD) \cap (BE)$ et $X = (AE) \cap (BD)$ sont alignés, donc il suffit de montrer que les points Y, P et I sont alignés.

Les points E et D sont les pôles Sud des sommets B et A donc les droites (EY) et (DY) sont parallèles aux droites (AC) et (BC). D'après le théorème de Pascal appliqué à l'hexagone $DDEBCA$, les points $F = (DE) \cap (AC)$, $I = (AD) \cap (BE)$ et $(BC) \cap (DD)$ sont alignés. Les droites (BC) et (DD) sont parallèles donc on déduit en fait que les droites (FI), (DD) et (BC) sont parallèles.

De même on obtient que les droites $(GI), (AC)$ et (EE) sont parallèles. Le quadrilatère $CFIG$ est donc un parallélogramme. De plus, on sait que les droites (IC) et (DE) sont perpendiculaires donc le parallélogramme est en fait un losange.

On note désormais Z le point d'intersection des droites (DE) et (IY). Ce point vérifie d'après le théorème de Thalès, $\frac{ZF}{ZD} = \frac{IF}{YD}$ et d'autre part $\frac{ZG}{ZE} = \frac{IG}{EY}$ donc

$$\frac{ZF}{ZD} = \frac{IF}{YD} = \frac{IG}{YE} = \frac{ZG}{ZE}$$

Le point Z est donc le centre de l'homothétie qui envoie le point E sur le point G et le point D sur le point F. Il envoie le point Y sur le point I.

La droite (ID) est envoyé sur la droite passant par le point F et parallèle à la droite (AD), et donc sur la droite (FP). La droite (IE) est de même envoyé sur la droite (PG). Donc le point I, point d'intersection des droites (ID) et (IE), est envoyé sur le point d'intersection des droites (FP) et (GP), c'est-à-dire le point P. Les points P, Z et I sont alignés. Le point P appartient donc à la droite (YI), ce que l'on voulait démontrer.