Coupe Animath d'Automne

4 octobre 2023

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.

- **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**

- **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.

- **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.

- Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.

- Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.

- Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit E le point du segment $[AC]$ tel que $AE = 1$. Calculer la valeur, en degrés, de l'angle $\widehat{BEC}$.

Exercice 3. Dans chacune des cases d'un tableau carré de taille 5×5, on inscrit un entier strictement positif. On suppose que, pour chaque ligne du tableau, la somme des entiers inscrits dans les cases de cette ligne est un entier impair. Montrer qu'il existe une colonne du tableau telle que la somme des entiers inscrits dans les cases de cette colonne est également impaire.

Exercice 4. Un groupe de 20 nains sortant de la mine s'assoit autour d'une table ronde pour compter les pépites d'or que chacun a minées. Ils font les constats suivants :

- ▷ La différence du nombre de pépites de deux nains voisins est toujours 2 ou 3.
- ▷ Tous les nains ont miné un nombre de pépites différent.

Quelle est la plus grande différence de pépites possible entre le nain qui a trouvé le plus de pépites et celui qui en a trouvé le moins ?

Exercice 5. Soient A, B, C et O quatre points distincts tels que les triangles OAB et OAC sont équilatéraux de côté 1. Soient D et E deux points distincts et différents de A tels que les triangles OBD et OCE sont équilatéraux. Soit P le point sur le segment $[AD]$ tel que $DP = 1$. Soit Q le point sur le segment $[AE]$ tel que $AQ = 1$. Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

Exercice 6. Pour tout entier m strictement positif, on appelle *premier chiffre* de m le chiffre le plus à gauche dans son écriture décimale. Soit n un entier strictement positif. On suppose que les deux entiers 2^n et 5^n possèdent le même premier chiffre. Montrer que ce même premier chiffre est 3.

Exercice 7. Un ensemble de n nombres réels non nuls et tous distincts est dit *régulier* si, lorsque l'on écrit ces nombres au tableau dans l'ordre croissant, la différence entre deux nombres voisins est toujours la même, quels que soient les deux entiers voisins choisis. Par exemple, l'ensemble $\{4, 18, -3, 11\}$ est régulier car ses éléments s'écrivent $-3, 4, 11$ et 18 dans l'ordre croissant et on a bien $4 - (-3) = 11 - 4 = 18 - 11$.

Un ensemble A de réels non nuls tous distincts est dit *super-régulier* s'il est régulier et que l'ensemble formé par les inverses des nombres de l'ensemble A est également régulier.

Quel est le plus grand entier n tel qu'il existe un ensemble super-régulier de n nombres réels non nuls et tous distincts ?

Exercices lycéens

Exercice 8. Maena a reçu cinq notes ce trimestre mais ne connaît que les trois premières, qui sont $13, 14$ et 17. La moyenne (où toutes les notes ont la même importance) de ces cinq notes est 16. Quelle est la moyenne des deux notes que Maena ne connait pas encore ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit E le point du segment $[AC]$ tel que $AE = 1$. Calculer la valeur, en degrés, de l'angle $\widehat{BEC}$.

Exercice 10. Dans chacune des cases d'un tableau carré de taille 5×5, on inscrit un entier strictement positif. On suppose que, pour chaque ligne du tableau, la somme des entiers inscrits dans les cases de cette ligne est un entier impair. Montrer qu'il existe une colonne du tableau telle que la somme des entiers inscrits dans les cases de cette colonne est également impaire.

Exercice 11. Un groupe de 20 nains sortant de la mine s'assoit autour d'une table ronde pour compter les pépites d'or que chacun a minées. Ils font les constats suivants :

- ▷ La différence du nombre de pépites de deux nains voisins est toujours 2 ou 3.
- ▷ Tous les nains ont miné un nombre de pépites différent.

Quelle est la plus grande différence de pépites possible entre le nain qui a trouvé le plus de pépites et celui qui en a trouvé le moins ?

Exercice 12. Pour tout entier m strictement positif, on appelle *premier chiffre* de m le chiffre le plus à gauche dans son écriture décimale. Soit n un entier strictement positif. On suppose que les deux entiers 2^n et 5^n possèdent le même premier chiffre. Montrer que ce même premier chiffre est 3.

Exercice 13. Un ensemble de n nombres réels non nuls et tous distincts est dit *régulier* si, lorsque l'on écrit ces nombres au tableau dans l'ordre croissant, la différence entre deux nombres voisins est toujours la même, quels que soient les deux entiers voisins choisis. Par exemple, l'ensemble $\{4, 18, -3, 11\}$ est régulier car ses éléments s'écrivent $-3, 4, 11$ et 18 dans l'ordre croissant et on a bien $4 - (-3) = 11 - 4 = 18 - 11$.

Un ensemble A de réels non nuls tous distincts est dit *super-régulier* s'il est régulier et que l'ensemble formé par les inverses des nombres de l'ensemble A est également régulier.

Quel est le plus grand entier n tel qu'il existe un ensemble super-régulier de n nombres réels non nuls et tous distincts ?

Exercice 14. Soit $ABCD$ un rectangle et M le milieu du segment $[CD]$. Une droite parallèle à (AB) coupe les segments $[AD]$, $[AM]$, $[BM]$, $[BC]$ respectivement en les points P, Q, R et S. La droite (DR) coupe le segment $[AM]$ en X et le segment $[BC]$ en Y. Si $DX = 6$ et $XR = 4$, quelle est la longueur du segment $[RY]$?

Exercice 15. Théo place des jetons dans les cases d'un tableau de taille 30×30 en respectant les règles suivantes :

- ▷ Chaque case contient au plus un jeton.
- ▷ Pour chaque case vide, il y a, parmi les cases de la même ligne ou de la même colonne, au moins une case contenant un jeton.
- ▷ Pour chaque jeton, il y a, parmi les cases de la même ligne ou de la même colonne, au plus une autre case contenant un jeton.

Déterminer le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante : quelle que soit la disposition choisie par Théo, chaque carré de taille $k \times k$ de la grille contient au moins une case avec un jeton.