Coupe Animath d'Automne

4 octobre 2023

Durée : 3 heures (collège), 4 heures (lycée).

Instructions

- ▷ Les exercices « collégiens » concernent les élèves scolarisés au collège.
  Les exercices « lycéens » concernent les élèves scolarisés au lycée.
  Chaque exercice est noté sur 7 points.
- ▷ **Rédigez les différents problèmes sur des copies distinctes. Sur chaque copie, écrivez en haut à gauche votre nom en majuscules, votre prénom en minuscules. Écrivez votre classe et le numéro du problème traité en haut à droite.**
- ▷ **Pour les exercices 1 et 8,** seule une réponse numérique est attendue ; un résultat correct sans justification vaudra donc 7 points, tandis qu'un résultat incorrect sans justification vaudra 0 point. Cependant, si un raisonnement accompagne un résultat faux (ou pas de résultat), ce raisonnement sera lu et noté et pourra rapporter une partie des points de l'exercice.
- ▷ **À part dans les exercices 1 et 8,** on demande des solutions **complètement rédigées**, où toute affirmation est soigneusement **justifiée**. La notation tiendra compte de la **clarté** et de la **précision** de la copie.
- ▷ Travaillez d'abord au brouillon, et rédigez ensuite au propre votre solution, ou une tentative, rédigée, de solution contenant des résultats significatifs pour le problème.
  Ne rendez pas vos brouillons : ils ne seraient pas pris en compte.
- ▷ Une solution complète rapportera plus de points que plusieurs tentatives inachevées. Il vaut mieux terminer un petit nombre de problèmes que de tous les aborder.
- ▷ Règles, équerres et compas sont autorisés. Les rapporteurs sont interdits.
  LES CALCULATRICES SONT INTERDITES, AINSI QUE TOUS LES INSTRUMENTS ÉLECTRONIQUES.
  Cela concerne en particulier l'usage de l'ordinateur, et donc de *Geogebra* et de logiciels de traitement de texte.

Association Animath,
Préparation Olympique Française de Mathématiques (POFM)

contact-pofm@animath.fr

Exercices collégiens

Exercice 1. Calculer

$$\frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6}.$$

Seule une réponse numérique est attendue ici.

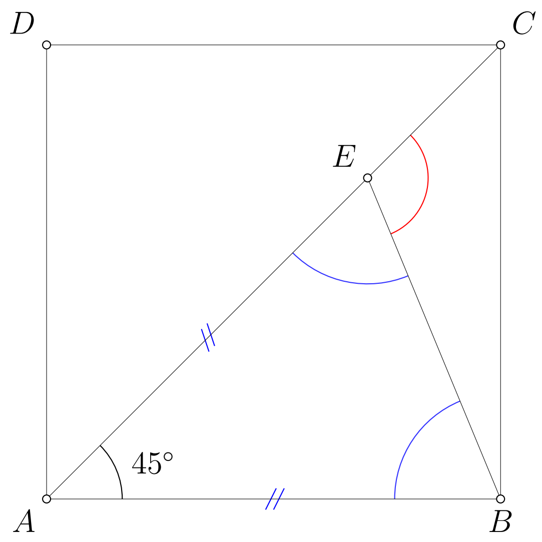
Solution de l'exercice 1 On identifie chaque facteur du dénominateur à son double présent au numérateur :

$$\frac{4 \times 6 \times 8 \times 10 \times 12}{2 \times 3 \times 4 \times 5 \times 6} = \frac{4}{2} \times \frac{6}{3} \times \frac{8}{4} \times \frac{10}{5} \times \frac{12}{6} = 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 32.$$

Commentaire des correcteurs Un exercice très bien réussi, et la plupart des erreurs sont des erreurs de calcul. On rappelle à cet égard qu'expliquer son raisonnement permet de possiblement avoir des points même si on a fait une erreur.

Exercice 2. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit E le point du segment $[AC]$ tel que $AE = 1$. Calculer la valeur, en degrés, de l'angle $\widehat{BEC}$.

Solution de l'exercice 2



Tout d'abord, puisque le segment $[AC]$ est une diagonale du carré, il s'agit d'un axe de symétrie pour lequel les points B et D sont symétriques. En particulier, il coupe l'angle $\widehat{BAD}$ en deux angles égaux. On déduit notamment que $\widehat{BAC} = 45°$.

Puisque $AE = AB = 1$, le triangle ABE est isocèle en A. On déduit alors que les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{EBA}$ sont égaux. Puisque la somme des angles du triangle AEB vaut $180°$, il en résulte que

$$180° = \widehat{EAB} + \widehat{AEB} + \widehat{ABE} = 45° + 2\widehat{AEB}$$

de sorte que $\widehat{AEB} = \frac{180°-45°}{2} = 67,5°$.

On déduit alors que $\widehat{BEC} = 180° - \widehat{BEA} = 112,5°$.

Solution alternative n°1 On propose une solution passant par le calcul intermédiaire de $\widehat{EBC}$.

De la même façon que la solution précédente, on montre que $\widehat{ABE} = \widehat{AEB} = 67,5°$.

Puisque l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, on a $\widehat{EBC} = 90° - \widehat{ABE} = 22,5°$. Comme on a aussi $\widehat{ECB} = 45°$ et que la somme des angles du triangle BC vaut $180°$, on retrouve

$$\widehat{BEC} = 180° - \widehat{EBC} - \widehat{ECB} = 112,5°.$$

Commentaire des correcteurs L'exercice est très bien réussi. On déplore cependant qu'un nombre significatif d'élèves ne rendent pas de figure pour appuyer leur raisonnement, ou bien rendent des figures illisibles. On trouve également un certain nombre d'erreurs de calcul accompagnant des raisonnements pourtant souvent justes, ce qui est dommage. Il est bon de bien se relire pour éviter ce genre d'étourderie.

Exercice 3. Dans chacune des cases d'un tableau carré de taille 5×5, on inscrit un entier strictement positif. On suppose que, pour chaque ligne du tableau, la somme des entiers inscrits dans les cases de cette ligne est un entier impair. Montrer qu'il existe une colonne du tableau telle que la somme des entiers des cases de cette colonne est également impaire.

Solution de l'exercice 3 Si la somme des termes de chaque ligne est impaire et s'il y a 5 lignes, la somme des entiers des 25 cases du tableau est elle-même impaire (comme somme d'un nombre impair de nombres impairs).

Si la somme des entiers dans chaque colonne est paire, alors la somme des 25 cases du tableau est elle-même paire. On aboutit à un contradiction, ce qui signifie bien que la somme des cases de l'une des colonnes au moins est impaire.

Solution alternative n°1 Si la somme des entiers de chaque ligne est un entier impair, cela signifie que chaque ligne contient un nombre impair d'entiers impairs.

Puisqu'il y a cinq lignes, cela implique qu'il y a au total un nombre impair d'entiers impairs dans la grille.

Il y a donc une colonne de la grille qui contient un nombre impair d'entiers impairs. En effet, si chaque colonne contenait un nombre pair d'entiers impairs, il y aurait en tout dans la grille un nombre pair d'entiers impairs.

La somme des entiers de cette colonne est alors impaire, comme voulu.

Commentaire des correcteurs Exercice dans l'ensemble assez bien réussi, la majorité des participants ont identifié les ingrédients essentiels. Deux schémas de preuve étaient possible, les deux ont été abordés avec succès. On mentionne cependant quelques écueils fréquemment rencontrés :

- Un exemple n'est pas une preuve et ne rapporte pas de points. Il est utile d'étudier des exemples au brouillon, dans une copie un exemple peut apporter de la clarté, mais le raisonnement doit toujours être indépendant des exemples.
- Il faut faire attention avec les preuves par "construction/énumération" (c'est-à-dire essayer de traiter chaque configuration possible). En effet, il faut être capable de montrer qu'on n'oublie pas de cas. De plus, dire "tel cas et tel cas fonctionnent" puis juste "et on voit que pour tous les autres ça fonctionne aussi (car autrement ça prendrait trop de temps à traiter)" n'est généralement pas suffisant.
- Ne pas hésiter à justifier même les affirmations qui vous semblent évidentes (règle pour qu'une somme d'entiers soit impaire par exemple), le seul risque est de convaincre le correcteur que vous avez bien tout compris.
- Il ne faut pas confondre somme et produit : ici, on parlait exclusivement de sommes et il n'y avait aucune raison pour supposer que toutes les lignes avaient une somme identique par exemple. Donc, l'argument "un produit de facteurs impairs est impair" n'apporte rien, au pire il transforme un bon raisonnement en une fausse solution.

Exercice 4. Un groupe de 20 nains sortant de la mine s'assoit autour d'une table ronde pour compter les pépites d'or que chacun a minées. Ils font les constats suivants :

▷ La différence du nombre de pépites de deux nains voisins est toujours 2 ou 3.

▷ Tous les nains ont miné un nombre de pépites différent.

Quelle est la plus grande différence de pépites possible entre le nain qui a trouvé le plus de pépites et celui qui en a trouvé le moins ?

Solution de l'exercice 4

Réponse : la plus grande différence possible est 29.

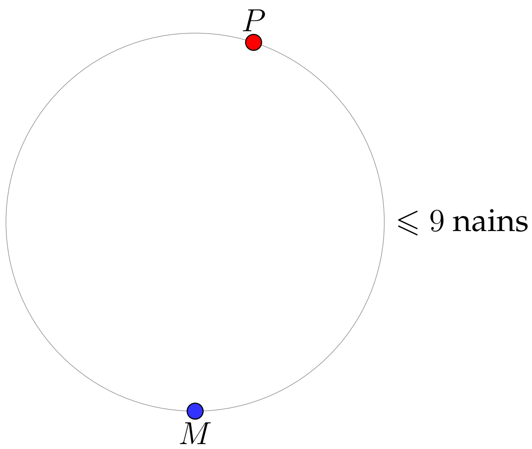
Dans cet exercice, on cherche à démontrer que 29 est la plus grande différence possible. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si n est la différence entre le plus grand et le plus petit nombre de pépites récoltées, alors $n \leqslant 29$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre qu'il existe bien une configuration de 20 nains vérifiant les conditions de l'énoncé et telle que la différence entre le plus grand et le plus petit nombre de pépites récoltées est exactement 29, cette étape s'appelle *la construction* ou encore *la synthèse*.

Analyse :

Considérons une configuration de 20 nains disposés en cercle et vérifiant les propriétés de l'énoncé.

Puisque la différence de pépites entre deux nains voisins est d'au plus 3, on déduit que si deux nains A et B sont séparés par $k-1$ nains, la différence entre leur nombre de pépites est d'au plus $3k$, avec égalité seulement si la différence de pépites entre chaque voisins compris entre A et B est exactement 3.

Etant donné deux nains quelconques du cercle, il sont séparés par au plus 9 nains. En effet, si les deux arcs de cercles reliant les deux nains contiennent chacun au moins 10 nains, c'est qu'il y a 22 nains autour de la table.

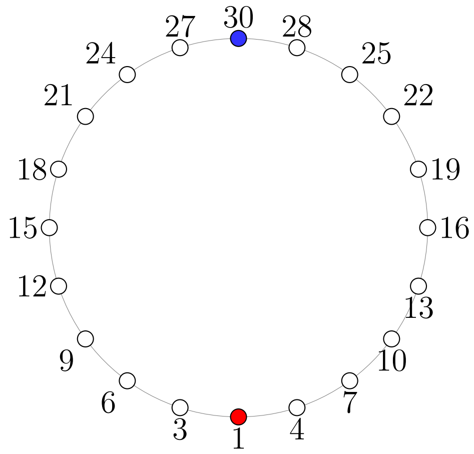


En particulier, entre le nain P possédant le plus de pépites et le nain M possédant le moins de pépites, il y a au plus 9 nains donc la différence entre les deux nombres est d'au plus $3 \times 10 = 30$.

Toutefois, s'il y a exactement 30 pépites de différence entre le nain P et le nain M, cela signifie d'une part qu'ils sont diamétralement opposés sur la table (il y a exactement 9 nains sur chaque arc de cercle les reliant), d'autre part que, sur chaque arc de cercle, la différence de pépites entre deux nains voisins est d'exactement 3. En particulier, les deux voisins du nain possédant le plus de pépites ont tous les deux 3 pépites de plus que M. Ces deux voisins ont le même nombre de pépites, ce qui est exclu. Ainsi, la différence recherchée est d'au plus 30 et ne peut pas être 30, elle est donc d'au plus 29.

Construction :

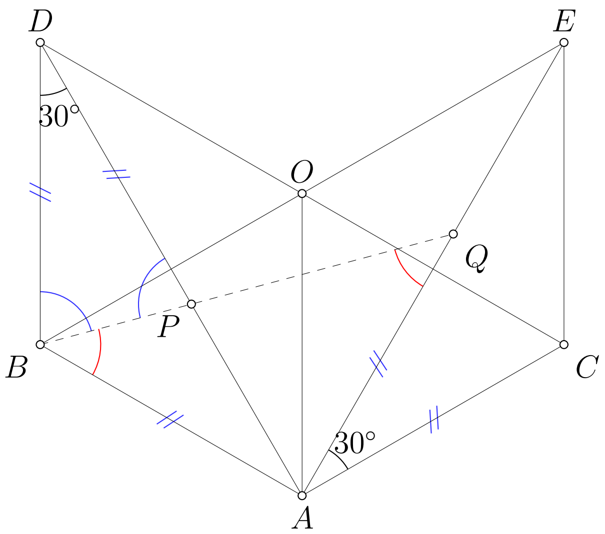
Réciproquement, dans la configuration suivante où chaque nain est représenté associé à son nombre de pépite, on vérifie que les conditions de l'énoncé sont vérifiées et que la différence entre le nain ayant le plus de pépites et le nain ayant le moins de pépites est d'exactement 29.



<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice, assez difficile, a été moyennement bien réussi, avec notamment beaucoup de solutions partielles et un certain nombre de mauvaises compréhensions de l'énoncé. Beaucoup d'élèves ont fait un dessin avec la configuration qu'ils pensaient être la meilleure, ce qui est très bien. Un certain nombre d'élèves ont malheureusement oublié une partie des contraintes de l'énoncé, qui indiquait que les nains étaient en cercle et que les nains devaient tous avoir un nombre de pépites différent. Il est à noter également que de nombreux élèves, bien qu'ayant de bonnes intuitions, ne sont pas parvenus à les justifier.

Exercice 5. Soient A, B, C et O quatre points distincts tels que les triangles OAB et OAC sont équilatéraux de côté 1. Soient D et E deux points distincts et différents de A tels que les triangles OBD et OCE sont équilatéraux. Soit P le point sur le segment $[AD]$ tel que $DP = 1$. Soit Q le point sur le segment $[AE]$ tel que $AQ = 1$. Montrer que les points B, P et Q sont alignés.

<u>*Solution de l'exercice 5*</u>



Pour montrer que les points B, P et Q sont alignés, nous allons montrer que $\widehat{DBP} = \widehat{DBQ}$.

On commence par observer que les angles d'un triangle équilatéral sont tous égaux à $60°$. En particulier, on a les égalités d'angles suivantes : $\widehat{DBA} = \widehat{BAC} = \widehat{ECA} = 120°$.

De plus, puisque $BD = BA = 1$, le triangle DBA est isocèle en B. En particulier, les angles $\widehat{BDA}$ et $\widehat{BAD}$ sont égaux. Puisque la somme de ses angles vaut $180°$, on déduit :

$$180° = \widehat{DBA} + \widehat{DAB} + \widehat{ADB} = 120° + 2 \times \widehat{BDA}.$$

On a donc $\widehat{BDA} = \frac{180°-120°}{2} = 30°$. De la même façon, on trouve $\widehat{CAE} = 30°$.

<u>Calcul de $\widehat{DBP}$:</u>

Puisque $DP = BD = 1$, le triangle BDP est isocèle en D. En particulier, les angles $\widehat{BDP}$ et $\widehat{DPB}$ sont égaux. Puisque la somme des angles du triangle BDP fait $180°$, on déduit :

$$180° = \widehat{BDP} + \widehat{DBP} + \widehat{DPB} = 30° + 2\widehat{DBP}.$$

On déduit que $\widehat{DBP} = \frac{180°-30°}{2} = 75°$.

<u>Calcul de $\widehat{DBQ}$:</u>

On va pour cela calculer l'angle $\widehat{ABQ}$. Puisque $AQ = AB = 1$, le triangle BAQ est isocèle en A. En particulier, les angles $\widehat{ABQ}$ et $\widehat{AQB}$ sont égaux. Puisque la somme des angles du triangle ABQ fait $180°$, on déduit que

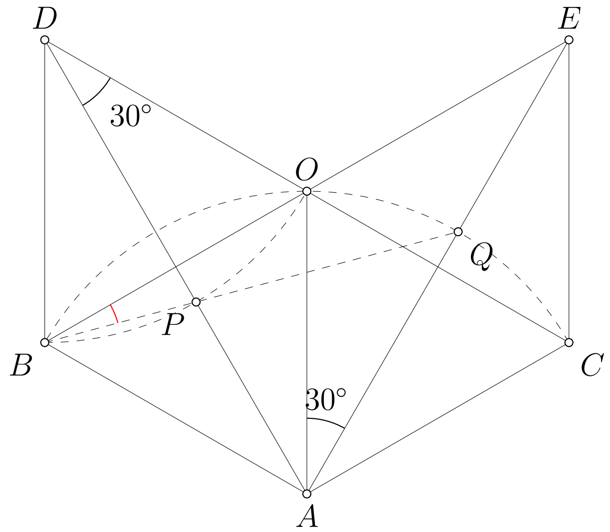
$$180° = \widehat{BAQ} + \widehat{ABQ} + \widehat{AQB} = \widehat{BAQ} + 2\widehat{ABQ}$$

Or, $\widehat{BAQ} = \widehat{BAC} - \widehat{EAC} = 120° - 30° = 90°$. On déduit que $\widehat{ABQ} = \frac{180°-90°}{2} = 45°$.

On a finalement $\widehat{DBQ} = \widehat{DBA} - \widehat{ABQ} = 120° - 45° = 75°$.

Finalement, on a bien $\widehat{DBP} = \widehat{DBQ}$, ce qui conclut que les points B, P et Q sont alignés.

Solution alternative n°1



Dans cette solution un peu plus savante, on montre que $\widehat{OBP} = \widehat{OBQ}$, ce qui suffit également à justifier que les points B, P et Q sont alignés. Pour cela, on va utiliser le théorème de l'angle au centre.

Tout d'abord, de même que dans la première solution, on trouve que (AD) est la bissectrice de l'angle $\widehat{BDO}$, de sorte que $\widehat{ADO} = 30°$. De même, on trouve que la droite (AE) est la bissectrice de l'angle $\widehat{OAC}$, de sorte que $\widehat{QAE} = 30°$.

Calcul de $\widehat{PBO}$:

Puisque $DP = BD = DO = 1$, le point D est le centre du cercle passant par les points B, P et O. D'après le théorème de l'angle au centre, on déduit que

$$\widehat{PBO} = \frac{1}{2}\widehat{PDO} = 15°.$$

Calcul de $\widehat{QBO}$:

Puisque $AB = AO = AQ = 1$, le point A est le centre du cercle passant par les points B, O et Q. D'après le théorème de l'angle au centre, on déduit que

$$\widehat{OBQ} = \frac{1}{2}\widehat{OAQ} = 15°.$$

On trouve bien que $\widehat{OBP} = \widehat{OBQ}$, ce qui permet de conclure.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été beaucoup abordé. Pour avancer dans le problème, il fallait repérer des triangles isocèles dans la figure et calculer leurs angles. Beaucoup des élèves ayant fait ces observations ont cependant produit des raisonnements circulaires : leurs calculs d'angles nécessitaient implicitement que les points B, P et Q soient alignés pour fonctionner.

Exercice 6. Pour tout entier m strictement positif, on appelle *premier chiffre* de m le chiffre le plus à gauche dans son écriture décimale. Soit n un entier strictement positif. On suppose que les deux entiers 2^n et 5^n possèdent le même premier chiffre. Montrer que ce même premier chiffre est 3.

Solution de l'exercice 6 Notons a le premier chiffre commun à l'écriture décimale de 2^n et de 5^n. Tout d'abord, on vérifie que 5^n a au moins deux chiffres, sans quoi on a $n = 1$ et l'énoncé n'est alors pas vérifié.

L'hypothèse de l'énoncé se traduit alors de la façon suivante : on dispose d'un entier $k \geqslant 0$ et d'un entier $\ell \geqslant 1$ satisfaisant les deux encadrements :

$$a \times 10^k \leqslant 2^n < (a+1)10^k$$
$$a \times 10^\ell < 5^n < (a+1)10^\ell.$$

Notons que l'inégalité de gauche du deuxième encadrement est stricte car 2 divise 10^ℓ mais ne divise pas 5^n, donc on ne peut pas avoir $5^n = a \times 10^\ell$.

En multipliant ces deux encadrements, on obtient

$$a^2 \times 10^{k+\ell} < 10^n < (a+1)^2 \times 10^{k+\ell}$$

On déduit que $a^2 < 10^{n-k-\ell} < (a+1)^2$. Puisque $a \geqslant 1$, on a notamment $10^{n-k-\ell} > 1$. D'autre part, on vérifie que, puisque $a \leqslant 9$, on a $(a+1)^2 \leqslant (9+1)^2 = 100$. Ainsi, $10^{n-k-\ell}$ est une puissance de 10 strictement inférieure à 100 et strictement supérieure à 1. On déduit que $10^{n-k-\ell} = 10$. Puisque $a^2 < 10 < (a+1)^2$, on déduit que $a = 3$, ce qui est le résultat annoncé.

Solution alternative n°1 On propose une façon alternative de rédiger le raisonnement précédent.

Avec les notations de la première solution, on dispose d'un entier k et d'un entier $0 \leqslant x < 10^k - 1$ tels que $2^n = a \times 10^k + x$. On dispose également d'un entier ℓ et d'un entier $0 \leqslant y < 10^\ell - 1$ tels que $5^n = a \times 10^\ell + y$. Pour les mêmes raisons que dans la première solution, on a $y > 0$.

L'idée de cette solution est de regarder le produit $(a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y) = 2^n \times 5^n = 10^n$ et de contrôler la retenue engendrée par x et y. On a en effet :

$$10^n = a^2 \times 10^{k+\ell} + x \times a \times 10^\ell + y \times a \times 10^k + xy$$

On s'intéresse au premier chiffre du membre de droite. Celui-ci vaut 1 d'une part puisque le membre de droite est une puissance de 10. D'autre part, puisque $1 \leqslant a \leqslant 9$, on a $x \times a \times 10^\ell < (10^k - 1) \times 9 \times 10^\ell < 9 \times 10^{k+\ell}$. De même, $y \times a \times 10^k < 9 \times 10^{k+\ell}$ et $xy < 10^{k+\ell}$.

On déduit de notre calcul que la "retenue" obtenue dans le calcul du produit $(a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y)$ est strictement inférieure à $19 \times 10^{k+\ell}$.

Ainsi, si $a \geqslant 4$, alors $10 < a^2 \leqslant 81$, de sorte que

$$10 \times 10^{k+\ell} < (a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y) < 81 \times 10^{k+\ell} + 19 \times 10^{k+\ell} = 100 \times 10^{k+\ell}$$

Mais il n'y a pas de puissance de 10 comprise strictement entre $10^{k+\ell}$ et $10^{k+\ell+1}$. Ainsi, a ne peut être plus grand que 4. On a donc $a = 1, 2$ ou 3.

On a alors $1 \leqslant a^2 \leqslant 9$:

$$10^{k+\ell} < (a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y) < 9 \times 10^{k+\ell} + 19 \times 10^{k+\ell} = 28 \times 10^{k+\ell}$$

où l'inégalité de gauche est stricte car $y > 0$. L'intervalle $[\![10^{k+\ell}+1, 28\times 10^{k+\ell+1}]\!]$ contient une unique puissance de 10, à savoir $10^{k+\ell+1}$. Mais si $a \in \{1,2\}$, alors

$$10^{k+\ell+1} = (a\times 10^k+x)(a\times 10^\ell+y) < a^2\times 10^{k+\ell}+2x\times 10^\ell+2y\times 10^k+xy < 4\times 10^{k+\ell}+5\times 10^{k+\ell} = 9\times 10^{k+\ell}$$

ce qui est absurde. On a donc $a = 3$ comme voulu.

Commentaire des correcteurs L'exercice était difficile et a été peu résolu. Beaucoup d'élèves se sont contentés de trouver un exemple de valeur de n (par exemple $n = 5$) où 2^n et 5^n avaient le même premier chiffre, et de constater que c'était 3. Ceci ne peut en aucun cas être suffisant, l'énoncé demandait un preuve valable pour tous les n satisfaisant la condition. Les rares élèves ayant cherché à faire des encadrements ont été valorisés, mais il fallait encore être soigneux dans les différents encadrements donnés.

Exercice 7. Un ensemble de n nombres réels non nuls et tous distincts est dit *régulier* si, lorsque l'on écrit ces nombres au tableau dans l'ordre croissant, la différence entre deux nombres voisins est toujours la même, quels que soient les deux entiers voisins choisis. Par exemple, l'ensemble $\{4, 18, -3, 11\}$ est régulier car si l'on écrit les entiers dans l'ordre croissant, $18-11 = 11-4 = 4-(-3)$.

Un ensemble A de réels non nuls tous distincts est dit *super-régulier* s'il est régulier et que l'ensemble formé par les inverses des nombres de l'ensemble A est également régulier.

Quel est le plus grand entier n tel qu'il existe un ensemble super-régulier de n nombres réels non nuls et tous distincts ?

Solution de l'exercice 7

Réponse : $n = 4$

Dans cet exercice, on cherche à démontrer que 4 est le plus grand entier vérifiant la propriété de l'énoncé. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si un ensemble super-régulier est de taille k, alors $k \leqslant 4$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre qu'il existe bien un ensemble super-régulier de taille 4, cette étape s'appelle *la construction* ou encore *la synthèse*.

Dans la suite, on appelle *différence commune* d'un ensemble régulier la différence entre le plus grand nombre et le deuxième plus grand nombre de cet ensemble.

Analyse :

Étape 1 : On commence par montrer qu'il n'existe pas d'ensemble super-régulier de taille 3 dont tous les éléments sont de même signe.

Par l'absurde, on se donne un ensemble super régulier $A = \{a, b, c\}$, de sorte que $a < b < c$. On suppose ici que $a > 0$, c'est-à-dire que les trois éléments sont strictement positifs. On pose $r = b - a > 0$ la différence commune de A. On a alors $c - b = r$, de sorte que $c = b + r$ et $b = a + r$.

On pose $B = \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{a+r}, \frac{1}{a+2r}\right\}$ l'ensemble composé des inverses des éléments de A. On vérifie que $\frac{1}{a+2r} < \frac{1}{a+r} < \frac{1}{a}$ Par hypothèse, B est régulier, ce qui donne que :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+r} = \frac{1}{a+r} - \frac{1}{a+2r}.$$

Cette égalité se réécrit, en mettant au même dénominateur :

$$\frac{r}{a(a+r)} = \frac{r}{(a+r)(a+2r)}.$$

Puisque r et $a + r$ sont non nuls, on peut simplifier cette équation par $\frac{r}{a+r}$, ce qui donne $\frac{1}{a} = \frac{1}{a+2r}$, ce qui est absurde si $r \neq 0$.

De la même manière, on montre qu'il n'existe pas d'ensemble super régulier de taille 3 dont tous les éléments sont strictement négatifs.

Ainsi, il n'existe pas d'ensemble super-régulier de taille 3 dont les éléments sont de même signe.

Étape 2 : On conclut que $n \leqslant 4$.

On se donne à présent $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble super-régulier et r sa différence commune. On pose ensuite $B = \left\{\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right\}$ et d sa différence commune. Si tous les éléments de A sont de même signe, on a vu que $n \leqslant 2$. Supposons désormais $n \geqslant 3$. Quitte à re-numéroter les éléments de A, on peut supposer que $x_1 < \ldots < x_p < 0 < x_{p+1} < \ldots < x_n$. On a alors $\dfrac{1}{x_p} < \ldots < \dfrac{1}{x_1} < 0 < \dfrac{1}{x_n} < \ldots < \dfrac{1}{x_{p+1}}$.

Si $p \geqslant 3$, on vérifie que l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$ est super régulier car $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = r$ et $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_3} = d$. Mais alors cet ensemble est super régulier et tous ses éléments sont de même signe, ce qui est absurde.

De même, si $n - p \geqslant 3$, on vérifie que l'ensemble $\{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$ est super-régulier et tous les éléments sont de même signe, ce qui est également absurde.

On déduit qu'un ensemble super-régulier contient au plus 2 réels strictement négaitfs ($p \leqslant 2$) et au plus 2 réels strictement positifs ($n - p \leqslant 2$), si bien que $n = p + n - p \leqslant 2 + 2 = 4$.

Synthèse :

Réciproquement, on donne un exemple d'ensemble super-régulier de taille 4. D'après le raisonnement de l'analyse, on sait qu'un tel ensemble ne peut pas avoir trois éléments de même signe et doit donc comporter deux nombres strictement positifs et deux nombres strictement négatifs.

Si on note $a, a+r, a+2r$ et $a+3r$ les quatre éléments de l'ensemble, avec $r > 0$ et $a < 0$, les inverses de ces nombres est ordonné de la façon suivante : $\frac{1}{a+r} < \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{a+3r} < \frac{1}{a+2r}$. On a de plus l'égalité

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+r} = \frac{1}{a+2r} - \frac{1}{a+3r}$$

qui après réduction donne la relation $2a + 3r = 0$. En prenant $a = -1$, on obtient alors l'ensemble $A = \{-3, -1, 1, 3\}$, dont on vérifie qu'il est régulier, de différence commune 2 et que l'ensemble $B = \left\{-\dfrac{1}{3}, -1, 1, \dfrac{1}{3}\right\}$ composé des inverses des éléments de A est également régulier, de différence commune $\dfrac{2}{3}$. L'ensemble A est donc super-régulier, ce qui donne bien un exemple d'ensemble super-régulier de taille 4.

Remarque : Le raisonnement présenté ci-dessus peut paraître difficile à intuiter si l'on ne connaît pas déjà la valeur de n. Ici, une stratégie pour attaquer l'exercice consiste à chercher un ensemble super-régulier de taille 3, puis de chercher un ensemble super-régulier de taille 4. De manière générale, chercher des petites configurations vérifiant les propriétés d'un énoncé est une bonne façon d'attaquer un problème et d'effectuer des conjectures.

Commentaire des correcteurs Très peu d'élèves ont eu le temps d'aborder le problème et d'y obtenir des points : seule une dizaine y a obtenu au moins un point, et personne ne l'a résolu entièrement. Il était pertinent de regarder le cas où tous les réels de l'ensemble sont de même signe, tant que l'on gardait à l'esprit que cela ne constituait pas le seul cas. Notons que de nombreux élèves confondent inverse et opposé : l'opposé de 2 est -2, son inverse est $\dfrac{1}{2}$.

Exercices lycéens

Exercice 8. Maena a reçu cinq notes ce trimestre mais ne connaît que les trois premières, qui sont $13, 14$ et 17. La moyenne (où toutes les notes ont la même importance) de ces cinq notes est 16. Quelle est la moyenne des deux notes que Maena ne connait pas encore ?

Seule une réponse numérique est attendue ici.

Solution de l'exercice 8 Notons a et b les notes que Maena ne connait pas. $m = \dfrac{a+b}{2}$. L'hypothèse s'écrit

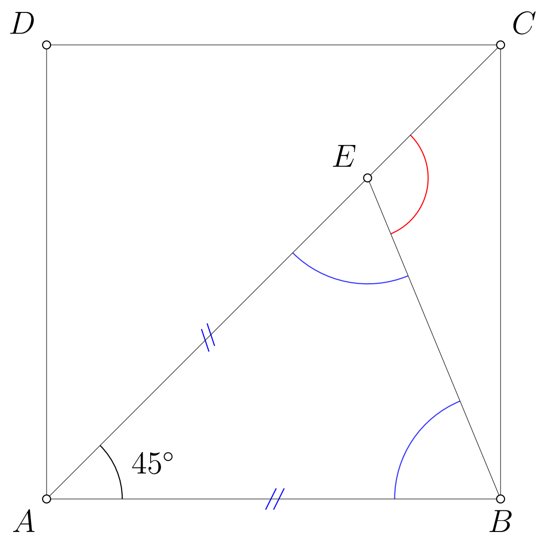
$$16 = \frac{13+14+17+a+b}{5} = \frac{13+14+17+2m}{5}.$$

On déduit que $2m = 5 \times 16 - 13 - 14 - 17 = 36$ si bien que $m = 18$.

Commentaire des correcteurs Exercice très bien réussi dans l'ensemble.

Exercice 9. Soit $ABCD$ un carré de côté 1. Soit E le point du segment $[AC]$ tel que $AE = 1$. Calculer la valeur, en degrés, de l'angle $\widehat{BEC}$.

<u>*Solution de l'exercice 9*</u>



Tout d'abord, puisque le segment $[AC]$ est une diagonale du carré, il s'agit d'un axe de symétrie pour lequel les points B et D sont symétriques. En particulier, il coupe l'angle $\widehat{BAD}$ en deux angles égaux. On déduit notamment que $\widehat{BAC} = 45°$.

Puisque $AE = AB = 1$, le triangle ABE est isocèle en A. On déduit alors que les angles $\widehat{BEA}$ et $\widehat{EBA}$ sont égaux. Puisque la somme des angles du triangle AEB vaut $180°$, il en résulte que

$$180° = \widehat{EAB} + \widehat{AEB} + \widehat{ABE} = 45° + 2\widehat{AEB}$$

de sorte que $\widehat{AEB} = \frac{180°-45°}{2} = 67,5°$.

On déduit alors que $\widehat{BEC} = 180° - \widehat{BEA} = 112,5°$.

<u>*Solution alternative n°1*</u> On propose une solution passant par le calcul intermédiaire de $\widehat{EBC}$.

De la même façon que la solution précédente, on montre que $\widehat{ABE} = \widehat{AEB} = 67,5°$.

Puisque l'angle $\widehat{ABC}$ est droit, on a $\widehat{EBC} = 90° - \widehat{ABE} = 22,5°$. Comme on a aussi $\widehat{ECB} = 45°$ et que la somme des angles du triangle BC vaut $180°$, on retrouve

$$\widehat{BEC} = 180° - \widehat{EBC} - \widehat{ECB} = 112,5°.$$

<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice a été très bien réussi, et la quasi-totalité des élèves a trouvé la bonne réponse. Beaucoup d'élèves ont pensé à joindre une figure ce qui est un très bon point. Il faudrait cependant que ce soit encore plus systématique de faire une belle figure sur une copie de géométrie. On attire l'attention sur l'importance de s'appliquer lorsqu'on effectue des calculs, et de se relire : un certain nombre de copies avaient le bon raisonnement mais ont perdu des points à cause d'erreurs de calculs. Il est également important de faire attention à ne pas tourner en rond ou admettre des résultats non-démontrés : certaines copies ont obtenu le bon résultat mais en ayant fait implictement une hypothèse qu'elles n'avaient pas démontrée.

Exercice 10. Dans chacune des cases d'un tableau carré de taille 5×5, on inscrit un entier strictement positif. On suppose que, pour chaque ligne du tableau, la somme des entiers inscrits dans les cases de cette ligne est un entier impair. Montrer qu'il existe une colonne du tableau telle que la somme des entiers des cases de cette colonne est également impaire.

Solution de l'exercice 10 Si la somme des termes de chaque ligne est impaire et s'il y a 5 lignes, la somme des entiers des 25 cases du tableau est elle-même impaire (comme somme d'un nombre impair de nombres impairs).

Si la somme des entiers dans chaque colonne est paire, alors la somme des 25 cases du tableau est elle-même paire. On aboutit à un contradiction, ce qui signifie bien que la somme des cases de l'une des colonnes au moins est impaire.

Solution alternative n°1 Si la somme des entiers de chaque ligne est un entier impair, cela signifie que chaque ligne contient un nombre impair d'entiers impairs.

Puisqu'il y a cinq lignes, cela implique qu'il y a au total un nombre impair d'entiers impairs dans la grille.

Il y a donc une colonne de la grille qui contient un nombre impair d'entiers impairs. En effet, si chaque colonne contenait un nombre pair d'entiers impairs, il y aurait en tout dans la grille un nombre pair d'entiers impairs.

La somme des entiers de cette colonne est alors impaire, comme voulu.

Commentaire des correcteurs Un exercice bien réussi dans l'ensemble, la plupart des élèves ont vu les idées principales du problème. En revanche, la rédaction est souvent trop imprécise, des arguments importants à la résolution du problème sont laissés sous silence, ce qui a bien souvent coûté des points. On rappelle également qu'il n'y a aucune raison que les sommes des lignes/colonnes soient toutes égales, donc les raisonnements qui disent qu'une somme de cinq nombres impairs est impaire, parce que 5 fois un nombre impair est impair, ne sont pas valides. De manière plus générale, il est bon de rappeler qu'il vaut mieux en faire plus que moins, et que de rappeler les arguments basiques de la preuve est un bon réflexe.

Exercice 11. Un groupe de 20 nains sortant de la mine s'assoit autour d'une table ronde pour compter les pépites d'or que chacun a minées. Ils font les constats suivants :

- ▷ La différence du nombre de pépites de deux nains voisins est toujours 2 ou 3.
- ▷ Tous les nains ont miné un nombre de pépites différent.

Quelle est la plus grande différence de pépites possible entre le nain qui a trouvé le plus de pépites et celui qui en a trouvé le moins ?

Solution de l'exercice 11

Réponse : la plus grande différence possible est 29.

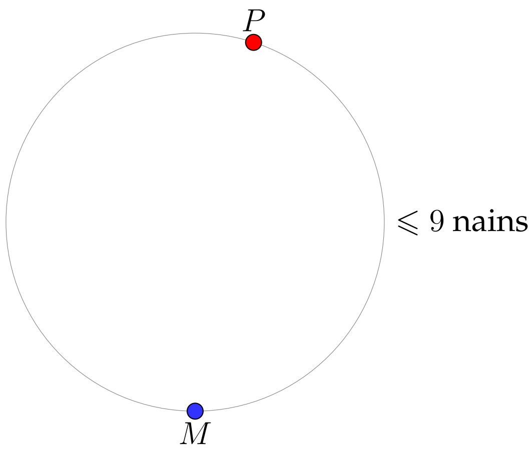
Dans cet exercice, on cherche à démontrer que 29 est la plus grande différence possible. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si n est la différence entre le plus grand et le plus petit nombre de pépites récoltées, alors $n \leqslant 29$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre qu'il existe bien une configuration de 20 nains vérifiant les conditions de l'énoncé et telle que la différence entre le plus grand et le plus petit nombre de pépites récoltées est exactement 29, cette étape s'appelle *la construction* ou encore *la synthèse*.

Analyse :

Considérons une configuration de 20 nains disposés en cercle et vérifiant les propriétés de l'énoncé.

Puisque la différence de pépites entre deux nains voisins est d'au plus 3, on déduit que si deux nains A et B sont séparés par $k-1$ nains, la différence entre leur nombre de pépites est d'au plus $3k$, avec égalité seulement si la différence de pépites entre chaque voisins compris entre A et B est exactement 3.

Etant donné deux nains quelconques du cercle, il sont séparés par au plus 9 nains. En effet, si les deux arcs de cercles reliant les deux nains contiennent chacun au moins 10 nains, c'est qu'il y a 22 nains autour de la table.

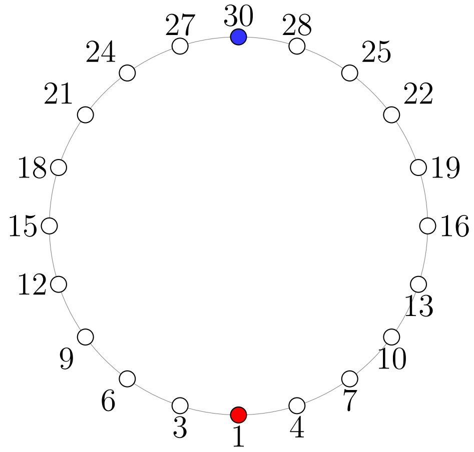


En particulier, entre le nain P possédant le plus de pépites et le nain M possédant le moins de pépites, il y a au plus 9 nains donc la différence entre les deux nombres est d'au plus $3 \times 10 = 30$.

Toutefois, s'il y a exactement 30 pépites de différence entre le nain P et le nain M, cela signifie d'une part qu'ils sont diamétralement opposés sur la table (il y a exactement 9 nains sur chaque arc de cercle les reliant), d'autre part que, sur chaque arc de cercle, la différence de pépites entre deux nains voisins est d'exactement 3. En particulier, les deux voisins du nain possédant le plus de pépites ont tous les deux 3 pépites de plus que M. Ces deux voisins ont le même nombre de pépites, ce qui est exclu. Ainsi, la différence recherchée est d'au plus 30 et ne peut pas être 30, elle est donc d'au plus 29.

Construction :

Réciproquement, dans la configuration suivante où chaque nain est représenté associé à son nombre de pépite, on vérifie que les conditions de l'énoncé sont vérifiées et que la différence entre le nain ayant le plus de pépites et le nain ayant le moins de pépites est d'exactement 29.



<u>*Commentaire des correcteurs*</u> L'exercice a été plus ou moins bien réussi selon les élèves, avec notamment beaucoup de solutions partielles. Beaucoup d'élèves ont fait un dessin avec la configuration qu'ils pensaient être la meilleure, ce qui est très bien. Une erreur qui a malheureusement été retrouvée dans beaucoup de copies consistait à penser que chercher à "faire augmenter la différence autant qu'on peut" était une preuve complète : il faut démontrer qu'il n'est pas possible de faire mieux, et le simple fait de ne pas y arriver ne saurait être considéré comme une démonstration. Pour finir, il est regrettable que nombre d'élèves aient omis une partie des contraintes de l'énoncé : on ne saurait trop recommander de lire celui-ci attentivement.

Exercice 12. Pour tout entier m strictement positif, on appelle *premier chiffre* de m le chiffre le plus à gauche dans son écriture décimale. Soit n un entier strictement positif. On suppose que les deux entiers 2^n et 5^n possèdent le même premier chiffre. Montrer que ce même premier chiffre est 3.

Solution de l'exercice 12 Notons a le premier chiffre commun à l'écriture décimale de 2^n et de 5^n. Tout d'abord, on vérifie que 5^n a au moins deux chiffres, sans quoi on a $n = 1$ et l'énoncé n'est alors pas vérifié.

L'hypothèse de l'énoncé se traduit alors de la façon suivante : on dispose d'un entier $k \geqslant 0$ et d'un entier $\ell \geqslant 1$ satisfaisant les deux encadrements :

$$a \times 10^k \leqslant 2^n < (a+1)10^k$$
$$a \times 10^\ell < 5^n < (a+1)10^\ell.$$

Notons que l'inégalité de gauche du deuxième encadrement est stricte car 2 divise 10^ℓ mais ne divise pas 5^n, donc on ne peut pas avoir $5^n = a \times 10^\ell$.

En multipliant ces deux encadrements, on obtient

$$a^2 \times 10^{k+\ell} < 10^n < (a+1)^2 \times 10^{k+\ell}$$

On déduit que $a^2 < 10^{n-k-\ell} < (a+1)^2$. Puisque $a \geqslant 1$, on a notamment $10^{n-k-\ell} > 1$. D'autre part, on vérifie que, puisque $a \leqslant 9$, on a $(a+1)^2 \leqslant (9+1)^2 = 100$. Ainsi, $10^{n-k-\ell}$ est une puissance de 10 strictement inférieure à 100 et strictement supérieure à 1. On déduit que $10^{n-k-\ell} = 10$. Puisque $a^2 < 10 < (a+1)^2$, on déduit que $a = 3$, ce qui est le résultat annoncé.

Solution alternative n°1 On propose une façon alternative de rédiger le raisonnement précédent.

Avec les notations de la première solution, on dispose d'un entier k et d'un entier $0 \leqslant x < 10^k - 1$ tels que $2^n = a \times 10^k + x$. On dispose également d'un entier ℓ et d'un entier $0 \leqslant y < 10^\ell - 1$ tels que $5^n = a \times 10^\ell + y$. Pour les mêmes raisons que dans la première solution, on a $y > 0$.

L'idée de cette solution est de regarder le produit $(a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y) = 2^n \times 5^n = 10^n$ et de contrôler la retenue engendrée par x et y. On a en effet :

$$10^n = a^2 \times 10^{k+\ell} + x \times a \times 10^\ell + y \times a \times 10^k + xy$$

On s'intéresse au premier chiffre du membre de droite. Celui-ci vaut 1 d'une part puisque le membre de droite est une puissance de 10. D'autre part, puisque $1 \leqslant a \leqslant 9$, on a $x \times a \times 10^\ell < (10^k - 1) \times 9 \times 10^\ell < 9 \times 10^{k+\ell}$. De même, $y \times a \times 10^k < 9 \times 10^{k+\ell}$ et $xy < 10^{k+\ell}$.

On déduit de notre calcul que la "retenue" obtenue dans le calcul du produit $(a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y)$ est strictement inférieure à $19 \times 10^{k+\ell}$.

Ainsi, si $a \geqslant 4$, alors $10 < a^2 \leqslant 81$, de sorte que

$$10 \times 10^{k+\ell} < (a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y) < 81 \times 10^{k+\ell} + 19 \times 10^{k+\ell} = 100 \times 10^{k+\ell}$$

Mais il n'y a pas de puissance de 10 comprise strictement entre $10^{k+\ell}$ et $10^{k+\ell+1}$. Ainsi, a ne peut être plus grand que 4. On a donc $a = 1, 2$ ou 3.

On a alors $1 \leqslant a^2 \leqslant 9$:

$$10^{k+\ell} < (a \times 10^k + x)(a \times 10^\ell + y) < 9 \times 10^{k+\ell} + 19 \times 10^{k+\ell} = 28 \times 10^{k+\ell}$$

où l'inégalité de gauche est stricte car $y > 0$. L'intervalle $[\![10^{k+\ell}+1, 28 \times 10^{k+\ell+1}]\!]$ contient une unique puissance de 10, à savoir $10^{k+\ell+1}$. Mais si $a \in \{1, 2\}$, alors

$$10^{k+\ell+1} = (a\times 10^k+x)(a\times 10^\ell+y) < a^2\times 10^{k+\ell}+2x\times 10^\ell+2y\times 10^k+xy < 4\times 10^{k+\ell}+5\times 10^{k+\ell} = 9\times 10^{k+\ell}$$

ce qui est absurde. On a donc $a = 3$ comme voulu.

Commentaire des correcteurs Beaucoup d'élèves ont la bonne intuition sur ce problème : regarder le produit des deux nombres et espérer que le produit des premiers chiffres corresponde au premier chiffre du produit. On attendait ici des élèves qu'ils quantifient ce raisonnement et le rendent rigoureux. Ce sont les élèves qui ont fait un effort dans ce sens qui ont été valorisés. Une partie importante des élèves ayant compris le problème ont également perdu des points pour avoir été trop vite dans le cas où le premier chiffre commun à 2^n et 5^n vaut 1. Enfin, une grande quantité d'élèves s'est contenté de remarquer que l'énoncé était vérifié pour $n = 5$. Si c'est une bonne idée de regarder les petits cas, cela ne constitue pas cependant un argument pertinent pour traiter le cas général.

Exercice 13. Un ensemble de n nombres réels non nuls et tous distincts est dit *régulier* si, lorsque l'on écrit ces nombres au tableau dans l'ordre croissant, la différence entre deux nombres voisins est toujours la même, quels que soient les deux entiers voisins choisis. Par exemple, l'ensemble $\{4, 18, -3, 11\}$ est régulier car si l'on écrit les entiers dans l'ordre croissant, $18-11 = 11-4 = 4-(-3)$.

Un ensemble A de réels non nuls tous distincts est dit *super-régulier* s'il est régulier et que l'ensemble formé par les inverses des nombres de l'ensemble A est également régulier.

Quel est le plus grand entier n tel qu'il existe un ensemble super-régulier de n nombres réels non nuls et tous distincts ?

Solution de l'exercice 13

Réponse : $n = 4$

Dans cet exercice, on cherche à démontrer que 4 est le plus grand entier vérifiant la propriété de l'énoncé. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si un ensemble super-régulier est de taille k, alors $k \leqslant 4$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre qu'il existe bien un ensemble super-régulier de taille 4, cette étape s'appelle *la construction* ou encore *la synthèse*.

Dans la suite, on appelle *différence commune* d'un ensemble régulier la différence entre le plus grand nombre et le deuxième plus grand nombre de cet ensemble.

Analyse :

On commence par montrer qu'il n'existe pas d'ensemble super-régulier de taille 3 dont tous les éléments sont de même signe.

Par l'absurde, on se donne un ensemble super régulier $A = \{a, b, c\}$, de sorte que $a < b < c$. On suppose ici que $a > 0$, c'est-à-dire que les trois éléments sont strictement positifs. On pose $r = b - a > 0$ la différence commune de A. On a alors $c - b = r$, de sorte que $c = a + 2r$ et $b = a + r$.

On pose $B = \left\{\frac{1}{a}, \frac{1}{a+r}, \frac{1}{a+2r}\right\}$ l'ensemble composé des inverses des éléments de A. On vérifie que $\frac{1}{a+2r} < \frac{1}{a+r} < \frac{1}{a}$ Par hypothèse, B est régulier, ce qui donne que :

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a+r} = \frac{1}{a+r} - \frac{1}{a+2r}.$$

Cette égalité se réécrit

$$\frac{1}{a} + \frac{1}{a+2r} = \frac{2}{a+r}.$$

En multipliant à gauche et à droite par $a(a + r)(a + 2r)$ afin de simplifier les dénominateurs, on obtient l'égalité

$$(a + r)(a + 2r) + a(a + r) = 2a(a + 2r).$$

En développant, on trouve $2a^2 + 4ar + 2r^2 = 2a^2 + 4ar$, ce qui signifie que $r = 0$, ce qui est exclu car les nombres sont supposés distincts.

De la même manière, on montre qu'il n'existe pas d'ensemble super régulier de taille 3 dont tous les éléments sont strictement négatifs.

Ainsi, il n'existe pas d'ensemble super-régulier de taille 3 dont les éléments sont de même signe.

On se donne à présent $A = \{x_1, \ldots, x_n\}$ un ensemble super-régulier et r sa différence commune. On pose ensuite $B = \left\{\frac{1}{x_1}, \ldots, \frac{1}{x_n}\right\}$ et d sa différence commune. Si tous les éléments de A sont de même signe, on a vu que $n \leqslant 2$. Supposons désormais $n \geqslant 3$. Quitte à re-numéroter les éléments de A, on peut supposer que $x_1 < \ldots < x_p < 0 < x_{p+1} < \ldots < x_n$. On a alors $\dfrac{1}{x_p} < \ldots < \dfrac{1}{x_1} < 0 < \dfrac{1}{x_n} < \ldots < \dfrac{1}{x_{p+1}}$.

Si $p \geqslant 3$, on vérifie que l'ensemble $\{x_1, x_2, x_3\}$ est super régulier car $x_3 - x_2 = x_2 - x_1 = r$ et $\dfrac{1}{x_1} - \dfrac{1}{x_2} = \dfrac{1}{x_2} - \dfrac{1}{x_3} = d$. Mais alors cet ensemble est super régulier et tous ses éléments sont de même signe, ce qui est absurde.

De même, si $n - p \geqslant 3$, on vérifie que l'ensemble $\{x_{n-2}, x_{n-1}, x_n\}$ est super-régulier et tous les éléments sont de même signe, ce qui est également absurde.

On déduit qu'un ensemble super-régulier contient au plus 2 réels strictement négaitfs ($p \leqslant 2$) et au plus 2 réels strictement positifs ($n - p \leqslant 2$), si bien que $n = p + n - p \leqslant 2 + 2 = 4$.

Synthèse :

Réciproquement, on donne un exemple d'ensemble super-régulier de taille 4. D'après le raisonnement de l'analyse, on sait qu'un tel ensemble ne peut pas avoir trois éléments de même signe et doit donc comporter deux nombres strictement positifs et deux nombres strictement négatifs.

Si on note $a, a + r, a + 2r$ et $a + 3r$ les quatre éléments de l'ensemble, avec $r > 0$ et $a < 0$, les inverses de ces nombres est ordonné de la façon suivante : $\frac{1}{a+r} < \frac{1}{a} < 0 < \frac{1}{a+3r} < \frac{1}{a+2r}$. On a de plus l'égalité

$$\frac{1}{a} - \frac{1}{a + r} = \frac{1}{a + 2r} - \frac{1}{a + 3r}$$

qui après réduction donne la relation $2a + 3r = 0$. En prenant $a = -1$, on obtient alors l'ensemble $A = \{-3, -1, 1, 3\}$, dont on vérifie qu'il est régulier, de différence commune 2 et que l'ensemble $B = \left\{-\dfrac{1}{3}, -1, 1, \dfrac{1}{3}\right\}$ composé des inverses des éléments de A est également régulier, de différence commune $\dfrac{2}{3}$. L'ensemble A est donc super-régulier, ce qui donne bien un exemple d'ensemble super-régulier de taille 4.

Remarque : Le raisonnement présenté ci-dessus peut paraître difficile à intuiter si l'on ne connaît pas déjà la valeur de n. Ici, une stratégie pour attaquer l'exercice consiste à chercher un ensemble super-régulier de taille 3, puis de chercher un ensemble super-régulier de taille 4. De manière générale, chercher des petites configurations vérifiant les propriétés d'un énoncé est une bonne façon d'attaquer un problème et d'effectuer des conjectures.

Commentaire des correcteurs Le problème a été réussi de manière très hétérogène. La majorité des élèves a oublié que l'ensemble pouvait aussi contenir des réels négatifs. Très souvent, on a pu voir écrit que si $\{a, b, c\}$ est régulier et $\{1/a, 1/b, 1/c\}$ l'est avec $a < b < c$, alors $b - a = c - b$ et $1/b - 1/a = 1/c - 1/b$. Ici, la deuxième équation n'est pas justifiée, il aurait fallu écrire qu'on avait $1/a > 1/b > 1/c$. D'ailleurs, certains se sont trompés sur les équations écrites ! De plus, l'inégalité $1/a > 1/b > 1/c$ est fausse justement quand les réels ne sont pas de même signe : si $a = -1, b = 1, c = 3$ ça ne marche pas.

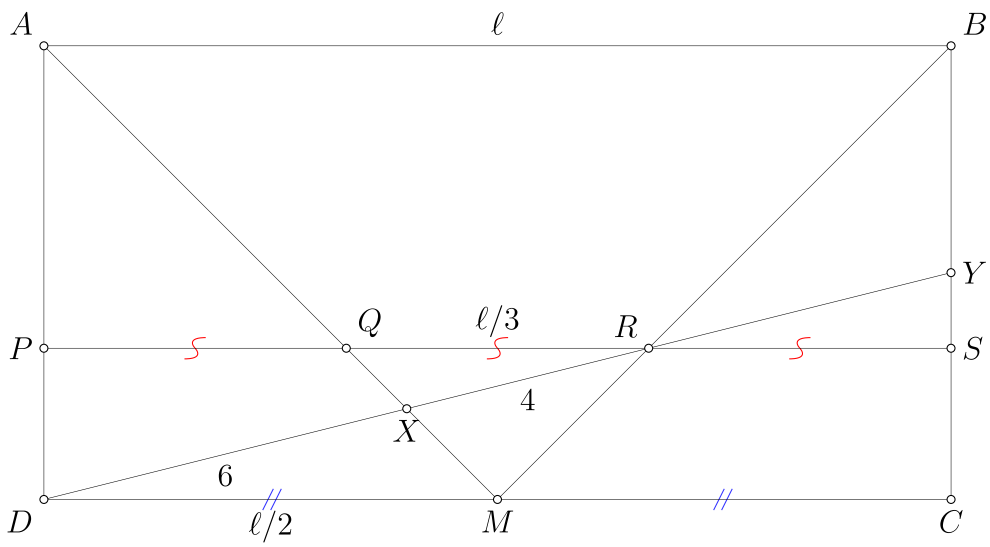
Donc beaucoup d'élèves ont utilisé $b - a = c - b$ et $1/b - 1/a = 1/c - 1/b$ pour obtenir $a = c$, et obtenu 2 points si l'inégalité $1/a > 1/b > 1/c$ était mentionnée, 1 point sinon, car ils sont passé à côté de la difficulté du problème.

En fait, il fallait employer le raisonnement précédent pour un ensemble super régulier *de taille quelconque* et montrer qu'avoir 3 éléments consécutifs de même signe était impossible. Très peu d'élèves ont compris cette partie du problème, et ceux qui l'ont vu ont souvent été capable de terminer l'exercice.

Notons que de nombreux élèves confondent inverse et opposé : l'opposé de 2 est -2, son inverse est $1/2$.

Exercice 14. Soit $ABCD$ un rectangle et M le milieu du segment $[CD]$. Une droite parallèle à (AB) coupe les segments $[AD]$, $[AM]$, $[BM]$, $[BC]$ respectivement en les points P, Q, R et S. La droite (DR) coupe le segment $[AM]$ en X et le segment $[BC]$ en Y. Si $DX = 6$ et $XR = 4$, quelle est la longueur du segment $[RY]$?

Solution de l'exercice 14



L'objectif de l'exercice est de relier la longueur RY aux autres données du problème. Pour cela, on va établir des relations entre les différentes longueurs à l'aide du théorème de Thalès.

Soit ℓ la longueur du segment $[AB]$. En particulier, $DM = \dfrac{\ell}{2}$ et puisque (PS) est parallèle à (AB), $PS = \ell$.

Tout d'abord, puisque les droites (QR) et (DM) sont parallèles, on a d'après le théorème de Thalès dans le papillon $QRXDM$:

$$\frac{QR}{DM} = \frac{RX}{DX} = \frac{4}{6} = \frac{2}{3}.$$

On déduit que $QR = \dfrac{2}{3}DM = \dfrac{\ell}{3}$. Puisque le rectangle $ABCD$ est symétrique par rapport à la médiatrice du segment $[CD]$ qui contient le point M, les points Q et R ainsi que les points P et S sont symétriques par rapport à cette médiatrice. En particulier, $PQ = RS$.

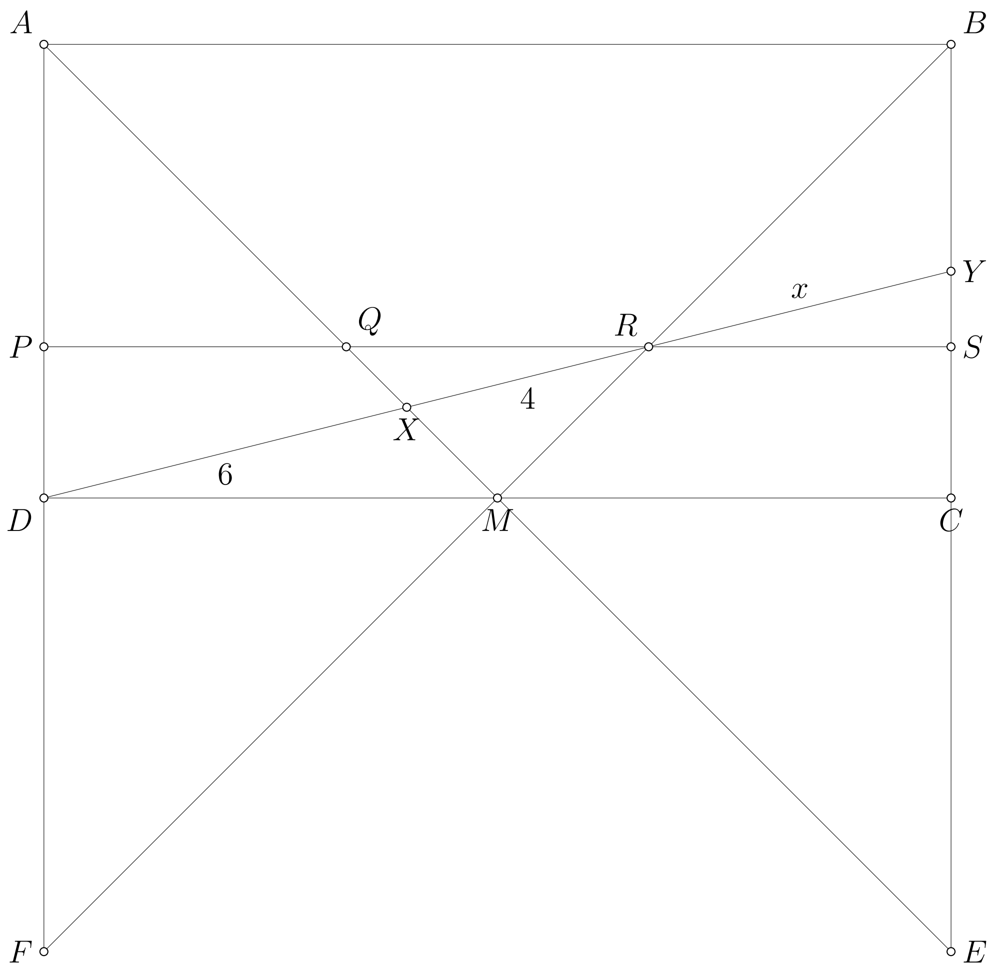
On a alors $\ell = PQ + QR + RS = \dfrac{\ell}{3} + 2PQ$, si bien que $PQ = RS = \ell/3$.

Finalement, d'après le théorème de Thalès appliquée aux triangles RYS et DYC, on a

$$\frac{YR}{DY} = \frac{RS}{CD} = \frac{\ell/3}{\ell}$$

On déduit que $YR = \dfrac{DY}{3} = \frac{10+YR}{3}$. On en déduit que $YR = 5$.

Solution alternative n°1



On propose une solution utilisant le théorème de Thalès dans deux autres "papillons".

On introduit pour cela E le point d'intersection des droites (AM) et (BC) et F le point d'intersection des droites (BM) et (AD). Puisque $MC = \frac{1}{2}AB$, la droite (MC) est une droite des milieux pour le triangle ABE. Ainsi, $BC = CE$ et $AM = ME$. De même, $AD = DF$ et $BM = MF$.

On pose désormais $x = RY$ et on va chercher deux équations sur X. D'une part, d'après le théorème de Thalès dans le papillon $BYRDF$, on a

$$\frac{x}{10} = \frac{RY}{RD} = \frac{BY}{DF} = \frac{BY}{AD}$$

D'autre part, d'après le théorème de Thalès dans le papillon $ADXYE$, on trouve

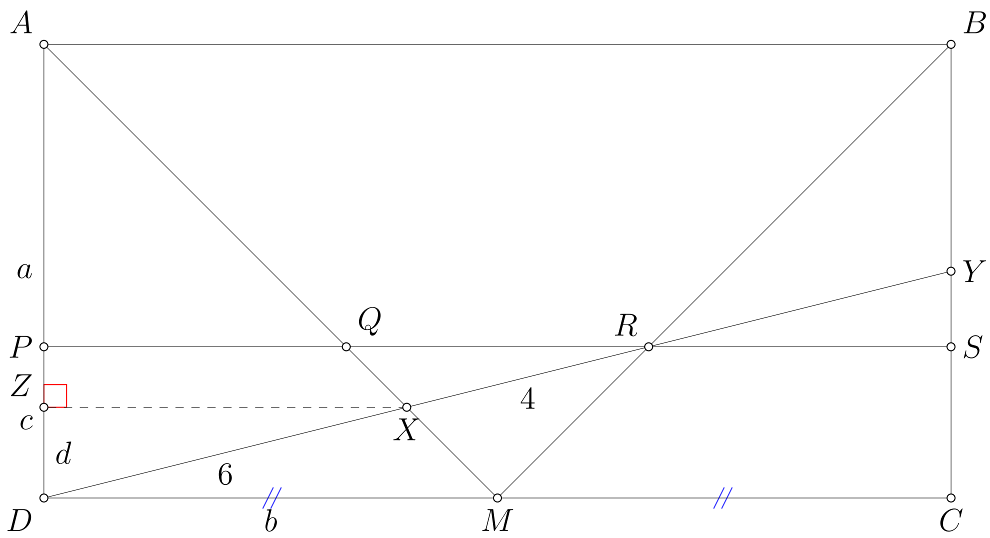
$$\frac{4+x}{6} = \frac{XY}{DX} = \frac{YE}{AD} = \frac{BE-BY}{AD} = 2 - \frac{BY}{AD}$$

En combinant ces deux équations, on trouve

$$\frac{2}{3} + \frac{x}{6} = 2 - \frac{x}{10}$$

ce qui a pour solution $x = 5$.

Solution alternative n°2



Notons $a = AD, b = DM$ et $c = PD$. Le but va être d'exprimer les longueurs qui nous intéressent en fonction de a, b, c.

Comme on connaît DR, il suffit de calculer $\dfrac{DR}{RY}$ pour connaître RY. Seulement, comme les droites (PD) et (YS) sont parallèles, on a d'après le théorème de Thalès :

$$\frac{DR}{RY} = \frac{PR}{RS}.$$

De plus les droites (PQ) et (DM) sont parallèles, donc d'après le théorème de Thalès,

$$\frac{PQ}{DM} = \frac{AP}{AD} = \frac{a-c}{a},$$

de sorte que $PQ = \dfrac{b(a-c)}{a}$. De plus, pour les raisons de symétrie évoquée dans la première solution, $PQ = RS$ et $PS = CD = 2b$, donc

$$PR = PS - RS = 2b - \frac{b(a-c)}{a} = \frac{b(a+c)}{a}.$$

On trouve donc $\dfrac{PR}{RS} = \dfrac{a+c}{a-c} = \dfrac{1+\frac{c}{a}}{1-\frac{c}{a}}$. Notre but est désormais de déterminer $\frac{c}{a}$.

Soit Z le projeté orthogonal de X sur (AD). Avec le théorème de Thalès appliqué aux droites (XZ) et (PR), on connaît la valeur de $\frac{DX}{DR} = \frac{DZ}{DP}$, donc si on exprime $\frac{DZ}{DP}$ en fonction de a, b et c, on aura peut-être une chance de finir le problème. Posons $d = DZ$.

Toujours à l'aide du théorème de Thalès, on a d'un côté $\dfrac{ZX}{PR} = \dfrac{DZ}{DP} = \dfrac{d}{c}$, et de l'autre côté $\dfrac{ZX}{DM} = \dfrac{AZ}{AD} = \dfrac{a-d}{a}$. Ainsi, on a à la fois $ZX = \dfrac{d}{c} \times PR = \dfrac{d}{c} \times \dfrac{b(a+c)}{a}$ et $ZX = \dfrac{a-d}{a} DM = \dfrac{b(a-d)}{a}$. On déduit que,

$$\frac{d}{c} \times \frac{b(a+c)}{a} = \frac{a-d}{a} DM = \frac{b(a-d)}{a} \iff d(a+c) = c(a-d) \iff d = \frac{ac}{a+2c}.$$

On trouve alors $\frac{DZ}{DP} = \frac{a}{a+2c} = \frac{1}{1+2\frac{c}{a}}$.

Maintenant pour l'application numérique : $\dfrac{1}{1+2\frac{c}{a}} = \dfrac{DZ}{DP} = \dfrac{DX}{DR} = \frac{6}{10} = \frac{3}{5}$, donc $1 + 2\frac{c}{a} = \frac{5}{3}$ et $\frac{c}{a} = \frac{1}{3}$.

Ainsi $\dfrac{DR}{RY} = \dfrac{1+\frac{c}{a}}{1-\frac{c}{a}} = 2$, et finalement $RY = 5$.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été abordé par un bon nombre de copies malgré sa position. Il est à noter qu'il y a eu un bon nombre de solutions complètes. L'adjonction d'une figure a été quasi-systématique, c'est un excellent point. Parmi les copies, la quasi-totalité a pensé à utiliser le théorème de Thalès (ou à le reformuler avec des triangles semblables) ce qui était le bon réflexe. En revanche beaucoup sont restées bloquées là, certains ayant un peu plus de mal à reconnaître les configurations papillons du théorème. Quelques élèves ont tenté une approche par chasse aux angles, mais ça ne s'est jamais avéré fructueux. Enfin quelques élèves ont tenté une approche analytique, mais ces approches ont rarement abouti, souvent à cause d'erreurs de calcul.

Exercice 15. Théo place des jetons dans les cases d'un tableau de taille 30×30 en respectant les règles suivantes :

- Chaque case contient au plus un jeton.
- Pour chaque case vide, il y a, parmi les cases de la même ligne ou de la même colonne, au moins une case contenant un jeton.
- Pour chaque jeton, il y a, parmi les cases de la même ligne ou de la même colonne, au plus une autre case contenant un jeton.

Déterminer le plus petit entier k vérifiant la propriété suivante : quelle que soit la disposition choisie par Théo, chaque carré de taille $k \times k$ de la grille contient au moins une case avec un jeton.

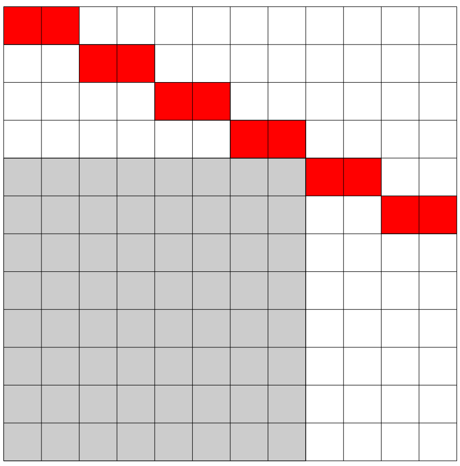
Solution de l'exercice 15

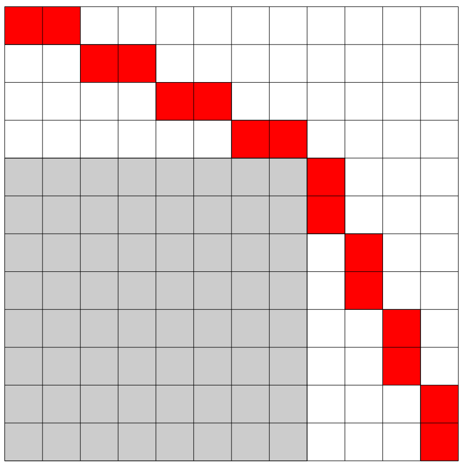
Réponse : $k = 21$

Dans cet exercice, on cherche à démontrer que 21 est le plus petit entier vérifiant la propriété de l'énoncé. La solution comprend donc nécessairement deux parties. Dans un premier temps, on montre que si, quelle que soit la disposition des jetons, chaque carré de taille $k \times k$ contient un jeton, alors $k \geqslant 21$, cette étape s'appelle *l'analyse*. Dans un second temps, on montre que dans le cas où $k = 21$, quelle que soit la disposition, tout carré de taille $k \times k$ contient au moins une case avec un jeton, cette étape s'appelle *la synthèse*.

Analyse :

Considérons la configuration suivante : sur la ligne numéro i en partant du haut, avec $i \leqslant 10$, on place un jeton sur la case à l'intersection avec la colonne $2i - 1$ et un jeton sur la case à l'intersection avec la colonne $2i$. On a représenté ci-dessous cette construction pour un carré 12×12 sur la figure de gauche ci-dessous :





La figure de droite donne une autre construction possible.

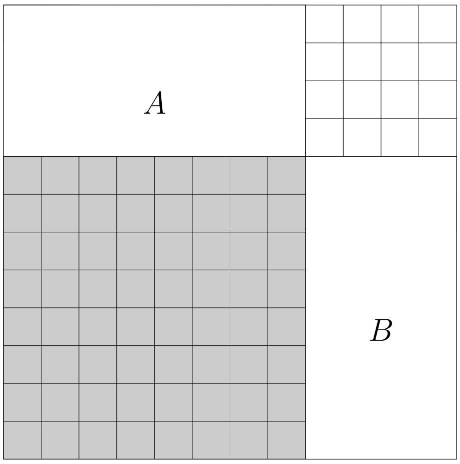
Ainsi, si k vérifie la propriété, on a $k \geqslant 21$.

Synthèse :

Montrons que pour toute configuration de jetons vérifiant les propriétés, tout carré de taille 21×21 contient au moins un jeton.

Supposons que cela ne soit pas le cas et qu'il existe une configuration de jetons dans laquelle le tableau contient un carré de taille 21×21 sans jeton. Quitte à intervertir certaines lignes et certaines colonnes, on suppose que ce carré est celui qui contient le coin inférieur gauche du tableau.

On considère alors le schéma suivant :



Puisqu'il y a au plus deux jetons par ligne, les 9 premières lignes en partant du haut contiennent ensemble au plus 18 jetons. La partie A contient donc au plus 18 jetons. Comme la partie A possède 21 colonnes, il y a au moins une colonne qui ne contient pas de jetons. De la même manière en raisonnant sur B, on extraie au moins une ligne qui ne contient pas de jetons. Mais alors la case à l'intersection de cette ligne et de cette colonne ne vérifie pas la propriété de l'énoncé, ce qui est absurde.

Commentaire des correcteurs L'exercice a été peu abordé vu sa position, et était un bon exercice pour départager les tous meilleurs élèves. Une part importante des élèves n'a pas compris l'énoncé du problème. Peu d'élèves ont finalement compris quelle était la valeur de l'entier k de l'énoncé, sans quoi il était difficile d'avancer. Et parmi ceux qui ont trouvé la bonne valeur de k, certains donnent un exemple de construction avec un carré de taille 20×20 sans jeton, et décrètent sans aucune preuve que par soi-disant optimalité, $k = 21$ ne marche pas. Aucun argument formel ne peut être fondé ainsi. Certains montrent que pour $k = 21$, on a toujours un jeton, et oublient de donner un exemple pour $k = 20$. Et certains ne font ni l'un ni l'autre, et justifient leur valeur avec une heuristique souvent peu convaincante, et surtout sans point.

Attention, beaucoup ont affirmé que toute ligne et colonne contenait un jeton, ce qui s'avère être totalement faux, et qui simplifiait grandement la preuve.